Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.948.32:517.544

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ПРОБЛЕМЫ ОБРАЩЕНИЯ ЯКОБИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ, ЕГО ОБОБЩЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Э. И. Зверович, О. Б. Долгополова, Е. А. Крушевский

Аннотация. На конечной римановой поверхности рода $h \geq 1$ с краем, состоящим из $m+1$ связных компонент, рассматривается система из $m+h$ вещественных сравнений, аналогичная классической проблеме обращения Якоби. Дается решение этой системы, а также приложения этого решения к краевым задачам.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.207

Ключевые слова: риманова поверхность, проблема обращения Якоби, абелевы дифференциалы, задача сопряжения (Римана), задача Гильберта, тэта-функция Римана, дубль, аналог ядра Коши.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\circ \sqcup \partial\mathfrak{M}$ — конечная ориентируемая (двусторонняя) риманова поверхность рода $h \geq 1$ с краем $\partial\mathfrak{M} = \mathfrak{b}_0 \sqcup \mathfrak{b}_1 \cdots \sqcup \mathfrak{b}_m$, состоящим из $m+1$ связных компонент $\mathfrak{b}_\nu$, каждая из которых гомеоморфна окружности. Краю $\partial\mathfrak{M}$ припишем стандартную ориентацию, т. е. такую, что если точка движется вдоль $\partial\mathfrak{M}$ согласно этой ориентации, то при этом выбранная сторона поверхности остается слева. На рис. 1 показана пространственная модель одной из простейших поверхностей такого типа ($m = h = 1$). Выберем на поверхности $\mathfrak{M}$ удобную для дальнейшего систему локальных координат (униформизацию). С этой целью проведем и зафиксируем на $\mathfrak{M}$ простые достаточно гладкие замкнутые не гомологичные нулю, а также кривым $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_m$ и друг другу замкнутые кривые $\mathfrak{b}_{m+1}, \dots, \mathfrak{b}_{m+h}$. Произвольно зафиксировав на них ориентацию, разрежем по ним поверхность $\mathfrak{M}$ и будем различать берега разрезов: $\mathfrak{b}_\nu^+$ (левый) и $\mathfrak{b}_\nu^-$ (правый).

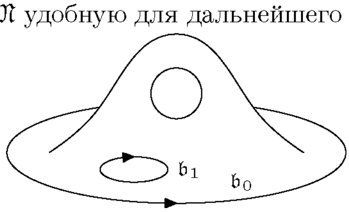

Рис. 1. Поверхность $\mathfrak{M}$ при $m = h = 1$.

Разрезанная поверхность подобна однолистным и $(2h+m+1)$-связна. Возьмем функцию $z = f(p)$, реализующую конформный гомеоморфизм разрезанной поверхности на $(2h+m+1)$-связную область с достаточно гладким краем, лежащую в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$. Потребуем, чтобы при этом гомеоморфизме образом кривой $\mathfrak{b}_0$ была вещественная ось $\operatorname{Im} z = 0$. В результате в плоскости переменного z получим картину, которая при $m = h = 1$ изображена на рис. 2. Область плоскости z, заштрихованную на рис. 2, будем использовать в качестве основной системы локальных координат римановой поверхности $\mathfrak{M}$. В связи с этим для образов кривых

$$\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \ldots \mathfrak{b}_m, \mathfrak{b}^{\pm}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{b}^{\pm}_{m+h} \tag{1}$$

в плоскости переменного z будем использовать те же обозначения, что и на само́й поверхности $\mathfrak{M}$. Пары кривых $\mathfrak{b}_{m+\nu}$ и $\mathfrak{b}^{-1}_{m+\nu}$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и рассматриваемые как различные кривые, связаны гомеоморфизмом

$$\alpha : \mathfrak{b}_{m+\nu} \to \mathfrak{b}^{-1}_{m+\nu},$$

полученным исключением точки $p \in \mathfrak{b}_{m+\nu} \subset \mathfrak{M}$ из уравнений

$$t = f^{+}(p), \quad \alpha(t) = f^{-}(p).$$

Обозначив обратный гомеоморфизм $\alpha^{-1} : \mathfrak{b}^{-1}_{m+\nu} \to \mathfrak{b}_{m+\nu}$ снова через α, получим, что для любого $t \in \mathfrak{b}_{m+\nu} \sqcup \mathfrak{b}^{-1}_{m+\nu}$ выполняется «тождество Карлемана» $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$. Приписав краю области, изображенной на рис. 2, стандартную ориентацию (оставляющую область слева), заключаем, что гомеоморфизм $\alpha(t)$ изменяет ориентацию. Соединим вещественную ось $\mathfrak{b}_0$ с линиями $\mathfrak{b}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ попарно не пересекающимися гладкими разомкнутыми кривыми $\mathfrak{a}_\nu$, причем кривая $\mathfrak{a}_\nu$ начинается в точке $t_{0\nu} \in \mathfrak{b}_0$ и оканчивается в точке $t_\nu \in \mathfrak{b}_\nu$. Соединим каждую кривую $\mathfrak{b}^{+}_{m+\nu}$ с кривой $\mathfrak{b}^{-}_{m+\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, h)$ гладкой (замкнутой) кривой $\mathfrak{a}_{m+\nu}$, причем кривая $\mathfrak{a}_{m+\nu}$ начинается в точке $t_{m+\nu} \in \mathfrak{b}^{-}_{m+\nu}$ и оканчивается в эквивалентной точке $\alpha(t_{m+\nu}) \in \mathfrak{b}^{+}_{m+\nu}$. Эти кривые также считаем попарно не пересекающимися. Построенные таким образом ориентированные линии вместе с ориентированными линиями (1) образуют *каноническое рассечение римановой поверхности* $\mathfrak{M}$, и будем считать его зафиксированным (рис. 3).

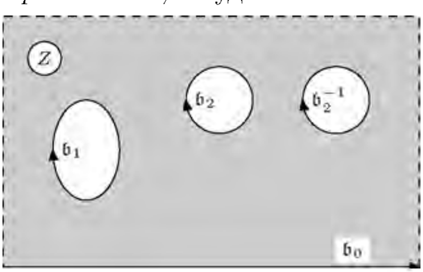

Рис. 2. Образ разрезанной поверхности $\mathfrak{M}$ на плоскости переменного z при $m = h = 1$.

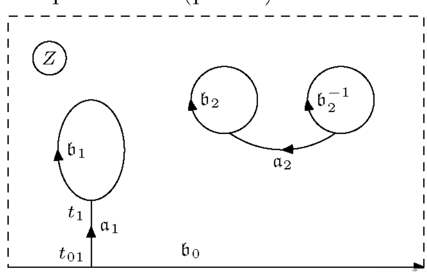

Рис. 3. Каноническое рассечение поверхности $\mathfrak{M}$.

Определение. *Абелевыми дифференциалами 1-го рода на* $\mathfrak{M}$ будем называть всюду конечные дифференциалы $dw(z)$, аналитические на $\mathfrak{M}^\circ$ и чисто мнимые[1)] на $\partial\mathfrak{M}$.

Будем рассматривать соответствующие абелевы интегралы 1-го рода

$$w(z) = {\int_{\infty}^{z}}' dw(t) \tag{2}$$

с фиксированным нижним пределом (в данном случае точкой ∞), а штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования лежит в $\mathfrak{M}^\circ$ и не пересекает линий канонического рассечения (тогда интеграл не зависит от пути).

[1)] Дифференциал dw называется *чисто мнимым на* $\partial\mathfrak{M}$, если чисто мнимыми являются все интегралы $\int_l dw$, где $l \subseteq \partial\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Линейное пространство $\mathfrak{L}$ абелевых дифференциалов* 1-*го рода на $\mathfrak{M}$ имеет размерность $m+2h$ над полем $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Будем исходить из того, что классическая задача Дирихле о нахождении гармонической функции по заданным на краю непрерывным краевым условиям безусловно и однозначно разрешима. Возьмем решения следующих задач Дирихле (гармонические меры кривых $\mathfrak{b}_\nu$):

$$\Delta\omega_\nu(z)=0,\ z\in\mathfrak{M}^\circ,\quad \omega_\nu(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\in\mathfrak{b}_\nu,\\ 0 & \text{при } t\in\partial\mathfrak{M}\setminus\mathfrak{b}_\nu,\end{cases}\qquad \nu=1,2,\ldots,m. \tag{3}$$

Пусть $\widetilde{\omega}_\nu(z)$ — функция, гармонически сопряженная к $\omega_\nu(z)$. Тогда $w_\nu(z)=\omega_\nu(z)+i\widetilde{\omega}_\nu(z)$ — абелев интеграл, дифференциал которого

$$dw_\nu(z)=d\omega_\nu(z)+i\,d\widetilde{\omega}_\nu(z)$$

аналитичен на $\mathfrak{M}^\circ$ и чисто мнимый на $\partial\mathfrak{M}$. Значит, $dw_1(z),\ldots,dw_m(z)$ — абелевы дифференциалы 1-го рода на $\mathfrak{M}$. Они, очевидно, линейно независимы, но базиса не образуют, так как $h\geq 1$.

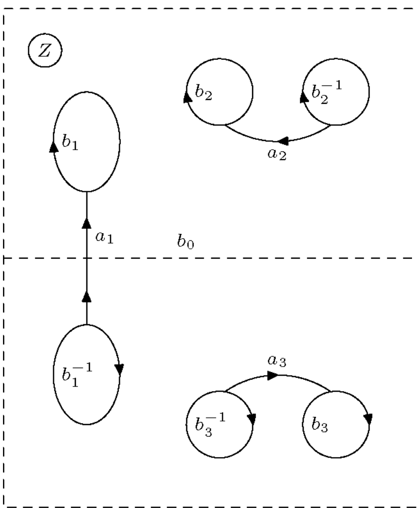

Рис. 4. Каноническое рассечение поверхности $\mathfrak{R}$.

Для нахождения остальных элементов этого базиса возьмем дубль [1, гл. 2, § 1] $\mathfrak{R}:=\mathfrak{M}\cup\widetilde{\mathfrak{M}}$ римановой поверхности $\mathfrak{M}$ и продолжим на него построенное выше каноническое рассечение. Дубль $\mathfrak{R}$ — замкнутая риманова поверхность рода $\rho=m+2h$. Она симметрична, а инволютивное отображение $\sim\colon \mathfrak{M}\to\widetilde{\mathfrak{M}}$ есть отображение симметрии. Используя построенную выше униформизацию римановой поверхности $\mathfrak{M}$ (см. рис. 2) и беря отображение комплексного сопряжения в качестве отображения симметрии $\sim$, построим униформизацию римановой поверхности $\mathfrak{R}$ (рис. 4). При такой интерпретации на поверхности $\mathfrak{R}$ оказываются склеенными:

каждая точка $t\in\mathfrak{b}_\nu$ с точкой $\bar{t}\in\bar{\mathfrak{b}}_\nu$ при $\nu=1,\ldots,m$;

каждая точка $t\in\mathfrak{b}_\nu$ с точкой $\alpha(t)\in\alpha(\mathfrak{b}_\nu)$ при $\nu=m+1,\ldots,m+h$;

каждая точка $t\in\bar{\mathfrak{b}}_\nu$ с точкой $\overline{\alpha(t)}\in\overline{\alpha(\mathfrak{b}_\nu)}$ при $\nu=m+h+1,\ldots,\rho$.

Каноническое рассечение поверхности $\mathfrak{M}$ продолжим до канонического рассечения поверхности $\mathfrak{R}$

$$a_1,a_2,\ldots,a_\rho,\quad b_1,b_2,\ldots,b_\rho \tag{4}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
&a_\nu:=\mathfrak{a}_\nu\cup\bar{\mathfrak{a}}_\nu^{-1},\quad \nu=1,\ldots,m,\\
&a_\nu:=\mathfrak{a}_\nu,\quad \nu=m+1,\ldots,m+h,\\
&a_\nu:=\bar{\mathfrak{a}}_{\nu-h}^{-1},\quad \nu=m+h+1,\ldots,m+2h=\rho,\\
&b_\nu^+:=\mathfrak{b}_\nu,\quad b_\nu^-:=\bar{\mathfrak{b}}_\nu^{-1},\quad \nu=1,\ldots,m,\\
&b_\nu^+:=\mathfrak{b}_\nu,\quad b_\nu^-:=\alpha(\mathfrak{b}_\nu),\quad \nu=m+1,\ldots,m+h,\\
&b_\nu:=\bar{\mathfrak{b}}_{\nu-h}^{-1},\quad \nu=m+h+1,\ldots,m+2h=\rho.
\end{aligned} \tag{5}$$

Каноническое рассечение (4), определенное формулами (5), переходит само на себя с изменением ориентации при отображении симметрии $z \mapsto \bar{z}$. Дифференциалы $dw_1(z), \ldots, dw_m(z)$ по принципу симметрии аналитически продолжаются до абелевых дифференциалов 1-го рода на $\mathfrak{R}$. Таким образом, $\mathfrak{L} \subset L$, где L — линейное пространство абелевых дифференциалов 1-го рода на $\mathfrak{R}$. Как известно [2, гл. 10, п. 10], пространство L имеет размерность ρ над полем $\mathbb{C}$, и у него существует единственный базис

$$d\zeta_1(z), d\zeta_2(z), \ldots, d\zeta_\rho(z), \tag{6}$$

a-периоды которого образуют единичную матрицу. Более того, периоды этого базиса удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int\limits_{a_\mu} d\zeta_\nu(z) = \delta_{\mu\nu}, \quad \int\limits_{b_\mu} d\zeta_\nu(z) = \Omega_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, \rho, \tag{7}$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, матрица $(\Omega_{\mu\nu})^\rho_{\mu,\nu=1}$ симметрична, а ее мнимая часть положительно определена. Рассмотрим следующие дифференциалы:

$$-d\overline{\zeta_1(\bar{z})}, -d\overline{\zeta_2(\bar{z})}, \ldots, -d\overline{\zeta_\rho(\bar{z})}. \tag{8}$$

Так как отображение симметрии $z \mapsto \bar{z}$ является конформным гомеоморфизмом 2-го рода поверхности $\mathfrak{R}$ на себя, дифференциалы (8) всюду на $\mathfrak{R}$ аналитические и к тому же линейно независимые. Значит, (8) — базис пространства L, притом комплексно нормированный, поскольку

$$\int\limits_{a_\nu} (-d\overline{\zeta_\mu(\bar{z})}) = -\int\limits_{\overline{a_\nu}} d\overline{\zeta_\mu(z)} = -\overline{\int\limits_{a_\nu^{-1}} d\zeta_\mu(z)} = \delta_{\mu\nu} \quad \text{при } \nu = 1, \ldots, m,$$

$$\int\limits_{a_\nu} (-d\overline{\zeta_\mu(\bar{z})}) = -\int\limits_{\overline{a_{\nu+h}}} d\overline{\zeta_\mu(z)} = -\overline{\int\limits_{a_{\nu+h}^{-1}} d\zeta_\mu(z)} = \delta_{\mu,\nu+h} \quad \text{при } \nu = m+1, \ldots, m+h,$$

$$\int\limits_{a_\nu} (-d\overline{\zeta_\mu(\bar{z})}) = -\int\limits_{\overline{a_{\nu-h}}} d\overline{\zeta_\mu(z)} = -\overline{\int\limits_{a_{\nu-h}^{-1}} d\zeta_\mu(z)} = \delta_{\mu,\nu-h} \quad \text{при } \nu = m+h+1, \ldots, \rho.$$

Сравнивая это с первым равенством (7), видим, что a-периоды базиса (6) и базиса (8) (при надлежащем упорядочении) совпадают. Отсюда в силу единственности нормированного базиса следует совпадение этих базисов, а именно $d\zeta_\mu(z) \equiv -d\overline{\zeta_\mu(\bar{z})}$ при $\mu = 1, \ldots, m$ и $d\zeta_\mu(z) \equiv -d\overline{\zeta_{h+\mu}(\bar{z})}$ при $\mu = m+1, \ldots, m+h$. Значит, общий вид абелева дифференциала 1-го рода на $\mathfrak{R}$ таков:

$$d\zeta(z) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu\, d\zeta_\nu(z) + \sum_{\nu=m+1}^{m+h} B_\nu\, d\zeta_\nu(z) - \sum_{\nu=m+1}^{m+h} C_\nu\, d\overline{\zeta_\nu(\bar{z})}, \tag{9}$$

где A_ν, B_ν, $C_\nu \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные. Заменяя в (9) z на $\bar{z}$, переходя к комплексно сопряженным значениям и меняя знаки, представим общий абелев дифференциал 1-го рода в виде

$$-d\overline{\zeta(\bar{z})} = \sum_{\nu=1}^{m} \overline{A}_\nu\, d\zeta_\nu(z) - \sum_{\nu=m+1}^{m+h} \overline{B}_\nu\, d\overline{\zeta_\nu(\bar{z})} + \sum_{\nu=m+1}^{m+h} \overline{C}_\nu\, d\zeta_\nu(z). \tag{10}$$

Условие $d\zeta(z) \equiv -d\overline{\zeta(\bar z)}$ выражает тот факт, что дифференциал $d\zeta(z)$ принимает на $\partial\mathfrak{M}$ чисто мнимые значения, т. е. является дифференциалом на $\mathfrak{M}$. Приравнивая правые части равенств (9) и (10), получим $A_\nu = \overline{A}_\nu$, $C_\nu = \overline{B}_\nu$. Таким образом, общий вид абелевых дифференциалов 1-го рода на $\mathfrak{M}$ таков:

$$d\zeta(z) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu\, d\zeta_\nu(z) + \sum_{\nu=m+1}^{m+h} (B_\nu\, d\zeta_\nu(z) - \overline{B}_\nu\, d\overline{\zeta_\nu(\bar z)}), \tag{11}$$

где $A_\nu \in \mathbb{R}$, $B_\nu \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные. Лемма доказана.

Нас интересуют дифференциалы 1-го рода на $\mathfrak{M}$, не все отличные от нуля a-периоды которых чисто мнимые. Чтобы найти размерность и базис этого пространства, положим в (11)

$$A_\nu = 2\alpha_\nu, \quad B_\nu = \beta_\nu + i\gamma_\nu,$$

где $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Тогда равенство (11) переписывается в следующем виде:

$$d\zeta(z) = 2\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu\, d\zeta_\nu(z) + \sum_{\nu=m+1}^{m+h} \beta_\nu(d\zeta_\nu(z) - d\overline{\zeta_\nu(\bar z)}) + \sum_{\nu=m+1}^{m+h} i\gamma_\nu(d\zeta_\nu(z) + d\overline{\zeta_\nu(\bar z)}).$$

В правой части этого равенства только последняя сумма обладает тем свойством, что все ее ненулевые a-периоды чисто мнимые. Отбрасывая ее, получим общий вид интересующих нас дифференциалов. Таким образом, доказана

Лемма 2. *Линейное пространство $\mathfrak{N}$ абелевых дифференциалов 1-го рода на $\mathfrak{M}$, не все ненулевые a-периоды которых чисто мнимые, имеет размерность $m+h$ над полем $\mathbb{R}$.*

Построим базис $dw_1(z), \dots, dw_{m+h}(z)$ пространства $\mathfrak{N}$, при $\operatorname{Im} z \geq 0$ полагая

$$\begin{aligned} dw_\mu(z) &:= d\zeta_\mu(z) - d\overline{\zeta_\mu(\bar z)} \equiv 2\, d\zeta_\mu(z), \quad \mu = 1, \dots, m; \\ dw_\mu(z) &:= d\zeta_\mu(z) - d\overline{\zeta_\mu(\bar z)}, \quad \mu = m+1, \dots, m+h. \end{aligned} \tag{12}$$

Исследуем свойства нормированности этого базиса по отношению к каноническому рассечению $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_{m+h}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_{m+h}$ поверхности $\mathfrak{M}$.

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$\operatorname{Re} \int_{\mathfrak{a}_\nu} dw_\mu(z) = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, m+h,$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера.

Доказательство. При $\mu = 1, \dots, m$, $\nu = 1, \dots, m+h$ имеем (см. рис. 3)

$$\operatorname{Re} \int_{\mathfrak{a}_\nu} dw_\mu(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{\mathfrak{a}_\nu} d\zeta_\mu(z) = 2 \operatorname{Re} \zeta_\mu(z)\big|_{t_{0\nu}}^{t_\nu} = 2 \operatorname{Re} \zeta_\mu(t_\nu) = 2 \cdot \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} = \delta_{\mu\nu},$$

поскольку дифференциал $d\zeta_\mu(z)$ чисто мнимый на $\partial\mathfrak{M}$.

При $\mu = m+1, \dots, m+h$, $\nu = 1, \dots, m+h$ получим

$$\operatorname{Re} \int_{\mathfrak{a}_\nu} dw_\mu(z) = \operatorname{Re}\Bigl(\int_{\mathfrak{a}_\nu} d\zeta_\mu(z) - \int_{\mathfrak{a}_\nu} d\overline{\zeta_\mu(\bar z)}\Bigr) = \delta_{\mu\nu} + \operatorname{Re} \int_{\mathfrak{a}_\nu} d\zeta_{\mu+h}(z) = \delta_{\mu\nu},$$

так как $\mu + h > \nu$, и потому последний интеграл равен нулю. Лемма доказана.

Введем обозначение

$$\int_{\mathfrak{b}_\nu} dw_\mu(z) =: A_{\nu\mu} + iB_{\nu\mu}, \quad \text{где } A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Лемма 4. *Матрица $\boldsymbol{B} := (B_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^{m+h}$ симметрична и положительно определена.*

Доказательство. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{M}} = \widehat{\mathfrak{M}}^\circ \sqcup \partial\widehat{\mathfrak{M}}$ поверхность $\mathfrak{M}$, разрезанную линиями канонического рассечения. Ее край $\partial\widehat{\mathfrak{M}}$ можно представить в виде следующей композиции (последовательного объединения) кривых:

$$\partial\widehat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1^{-1}\ldots\mathfrak{a}_m\mathfrak{b}_m\mathfrak{a}_m^{-1}\mathfrak{a}_{m+1}\mathfrak{b}_{m+1}\mathfrak{a}_{m+1}^{-1}\mathfrak{b}_{m+1}^{-1}\ldots\mathfrak{a}_{m+h}\mathfrak{b}_{m+h}\mathfrak{a}_{m+h}^{-1}\mathfrak{b}_{m+h}^{-1},$$

где «показатель степени» (-1) означает изменение ориентации. Абелевы дифференциалы и интегралы 1-го рода аналитичны на $\widehat{\mathfrak{M}}^\circ$ и непрерывно продолжимы на край. Построенные в лемме 2 базисные интегралы удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$w_\mu(t) = \delta_{\mu\nu} + iB_{\mu\nu} \text{ при } t \in \mathfrak{b}_\nu, \quad B_{\mu\nu} \in \mathbb{R},\ \mu,\nu = 1,\ldots,m;$$

$$w_\mu(t^+) - w_\mu(t^-) = \delta_{\mu\nu} \quad \text{при } t \in \mathfrak{b}_\nu,\ \mu,\nu = m+1,\ldots,m+h;$$

$$w_\mu(t^+) - w_\mu(t^-) = -A_{\mu\nu} - iB_{\mu\nu} \quad \text{при } t \in \mathfrak{a}_\nu,\ \mu,\nu = m+1,\ldots,m+h.$$

В силу интегральной теоремы Коши имеем $\int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} w_\mu(t)\,dw_\nu(t) = 0$. Выделив в этом равенстве мнимую часть, преобразуем его:

$$\begin{aligned}
0 = \operatorname{Im}\int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} w_\mu(t)\,dw_\nu(t) &= \operatorname{Im}\Biggl(\int\limits_{\mathfrak{b}_0} w_\mu(x)\,dw_\nu(x) + \sum_{k=1}^{m}\Biggl(\int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^+)\,dw_\nu(t) \\
&+ \int\limits_{\mathfrak{b}_k} w_\mu(t)\,dw_\nu(t) - \int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^-)\,dw_\nu(t)\Biggr) + \sum_{k=m+1}^{m+h}\Biggl(\int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^+)\,dw_\nu(t) \\
&+ \int\limits_{\mathfrak{b}_k} w_\mu(t^+)\,dw_\nu(t) - \int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^-)\,dw_\nu(t) - \int\limits_{\mathfrak{b}_k} w_\mu(t^-)\,dw_\nu(t)\Biggr)\Biggr) \\
&= \operatorname{Im}\Biggl(\sum_{k=1}^{m}\Biggl(-iB_{k\mu}\int\limits_{\mathfrak{a}_k} dw_\nu(t) + \delta_{k\mu}\int\limits_{\mathfrak{b}_k} dw_\nu(t)\Biggr) \\
&+ \sum_{k=m+1}^{m+h}\Biggl(-iB_{k\mu}\int\limits_{\mathfrak{a}_k} dw_\nu(t) + \delta_{k\mu}\int\limits_{\mathfrak{b}_k} dw_\nu(t)\Biggr)\Biggr) \\
&= \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{m+h}(-iB_{k\mu}\delta_{k\nu} + i\delta_{k\mu}B_{k\nu}) = -B_{\nu\mu} + B_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

что и означает симметричность матрицы $\boldsymbol{B} = (B_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^{m+h}$.

Для доказательства положительной определенности этой матрицы обозначим

$$w(z) = u(z) + iv(z) = \sum_{k=1}^{m+h}\xi_k w_k(z) = \sum_{k=1}^{m+h}\xi_k(u_k(z) + iv_k(z)), \tag{14}$$

где $\xi_k \in \mathbb{R}$. Положим $z = x + iy$ и на основании формулы Грина — Стокса будем иметь

$$\int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} v(z)\cdot du(z) = \iint\limits_{\widehat{\mathfrak{M}}} d(u(z)\cdot dv(z)) = \iint\limits_{\widehat{\mathfrak{M}}} du(z)\wedge dv(z)$$

$$= \iint\limits_{\widehat{\mathfrak{M}}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right) \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)$$

$$= \iint\limits_{\widehat{\mathfrak{M}}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial y}\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}\,dy\right)$$

$$= -\iint\limits_{\widehat{\mathfrak{M}}} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) dx \wedge dy < 0,$$

поскольку подынтегральная функция положительна. Подставляя в это неравенство выражение из (14), имеем

$$0 > \int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} v(z)\cdot du(z) = \sum_{k,j=1}^{m+h} \xi_k\xi_j \int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} v_k(z)\cdot du_j(z)$$

$$= \sum_{k,j=1}^{m+h} \xi_k\xi_j \Biggl(\sum_{\mu=1}^{m}\Biggl(\int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} v_k(t^+)\,du_j(t) + \int\limits_{\mathfrak{b}_\mu} v_k(t)\,du_j(t) - \int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} v_k(t^-)\,du_j(t)\Biggr)$$

$$+ \sum_{\mu=m+1}^{m+h}\Biggl(\int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} v_k(t^+)\,du_j(t) + \int\limits_{\mathfrak{b}_\mu} v_k(t^+)\,du_j(t) - \int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} v_k(t^-)\,du_j(t) - \int\limits_{\mathfrak{b}_\mu} v_k(t^-)\,du_j(t)\Biggr)\Biggr)$$

$$= \sum_{k,j=1}^{m+h} \xi_k\xi_j \Biggl(-\sum_{\mu=1}^{m} B_{k\mu}\int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} du_j(t) - \sum_{\mu=m+1}^{m+h} B_{k\mu}\int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} du_j(t)\Biggr) = -\sum_{k,j=1}^{m+h} B_{kj}\xi_k\xi_j.$$

Таким образом, $\sum\limits_{k,j=1}^{m+h} B_{kj}\xi_k\xi_j > 0$, и лемма доказана.

§ 2. Вещественный аналог проблемы обращения Якоби

Так принято называть следующую систему сравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{m+h} \operatorname{Im} w_\mu(z_\nu) \equiv e_\mu - k_\mu \ \text{(по модулю } B\text{-периодов)}, \quad \mu = 1,2,\dots,m+h, \tag{15}$$

где неизвестными являются точки $z_1, z_2, \dots, z_{m+h} \in \mathfrak{M}$, а правые части равенств (15) и нормированные интегралы 1-го рода $w_\mu(z)$ считаются известными. Константы

$$k_\mu = -\frac{1}{2}B_{\mu\mu} - \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq\mu}}^{m+h} \operatorname{Im}\int\limits_{a_k} w_\mu(t^+)\,dw_k(t), \quad \mu = 1,2,\dots,m+h, \tag{16}$$

также считаются известными и вводятся для удобства выкладок.

В случае $h = 0$ система (15) решена в [3, 4]. При $h \geq 1$ неудачная попытка решить ее содержится в [5].

Удобно записать систему (15) в виде одного векторного сравнения. С этой целью вводим в рассмотрение следующие $(m+h)$-мерные векторы-столбцы:

$$\boldsymbol{w}(z) = \begin{pmatrix} w_1(z)\\ w_2(z)\\ \vdots\\ w_{m+h}(z)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_{m+h}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+h}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_{m+h}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+h}. \tag{17}$$

В этих обозначениях система (15) записывается в виде одного векторного сравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{m+h} \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_\nu) \equiv \boldsymbol{e} - \boldsymbol{k} \quad (\text{по модулю } B\text{-периодов}). \tag{18}$$

Для доказательства существования решений этого сравнения сопоставим ему следующую однородную краевую задачу на римановой поверхности $\mathfrak{M}$. *Найти все функции $F(z) \not\equiv 0$, кусочно аналитические на $\mathfrak{M}$ с линиями разрыва $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{m+h}$, по следующим краевым условиям*:

$$F(t^+) = F(t^-) \exp(-\pi B_{\nu\nu} + 2\pi i(w_\nu(t^-) - ie_\nu)), \quad t \in \mathfrak{a}_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, m+h,$$
$$\operatorname{Im} F(t) = 0, \quad t \in \partial\mathfrak{M}. \tag{19}$$

Желая изучить картину разрешимости этой задачи, сведем ее к задаче линейного сопряжения на дубле [1, гл. 2, § 2] $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} \cup \widetilde{\mathfrak{M}}$ (см. рис. 4). Этот дубль — замкнутая симметричная риманова поверхность, род которой равен $\rho = m + 2h$. Введем новую неизвестную функцию, кусочно аналитическую на дубле:

$$\Phi(z) = \begin{cases} F(z), & z \in \mathfrak{M}, \\ \overline{F(\bar z)}, & z \in \widetilde{\mathfrak{M}}. \end{cases} \tag{20}$$

Эта функция аналитически продолжима через край $\partial\mathfrak{M}$. Поэтому, отбрасывая второе краевое условие (19), приводим первое краевое условие к следующему виду:

$$\begin{cases} \Phi(t^+) = \Phi(t^-) \exp(-\pi B_{\nu\nu} + 2\pi i(w_\nu(t^-) - ie_\nu)), & t \in \mathfrak{a}_\nu, \\ \Phi(t^+) = \Phi(t^-) \exp(-\pi B_{\nu\nu} - 2\pi i(w_\nu(t^+) - ie_\nu)), & t \in \bar{\mathfrak{a}}_\nu, \end{cases} \tag{21}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, m+h,$$

Задачи (19) и (21) равносильны, если искать решения задачи (21), вещественные на вещественной оси. Применим к задаче (21) известную [3, 6] теорию задачи линейного сопряжения. Индекс $\varkappa$ равен сумме приращений $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} w_\nu(t)$ вдоль линий $\mathfrak{a}_\nu$ и $\bar{\mathfrak{a}}_\nu$, каждое из которых равно 1. Суммируя их, получаем $\varkappa = 2m+2h$. Род поверхности $\mathfrak{R}$ равен $\rho = m + 2h$. Далее, $2\rho - 2 = 2m + 4h - 2 \geq 2m + 2h = \varkappa$ при $h \geq 1$. В этом случае теория [2, 6] дает для числа l решений (над полем $\mathbb{R}$) оценку $m + 1 \leq l \leq \varkappa - \rho + 1 = m + h + 1$. Таким образом, *задача* (19) *имеет не менее $m + 1$ линейно независимых решений над полем* $\mathbb{R}$. При этом число l устойчиво[2)] только тогда, когда оно минимально, т. е. когда $l = m + 1$.

Вычислим число N нулей (с учетом кратностей) любого нетривиального решения $F(z)$ задачи (19) в $\mathfrak{M}$, применяя к условию сопряжения (19) принцип аргумента:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi} \arg F(t)\big|_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} = \operatorname{Re} \int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} \frac{1}{2\pi i}\, d \ln F(t) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m+h} \frac{1}{2\pi i} \Bigl(\int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} d \ln F(t^+) - \int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} d \ln F(t^-) \Bigr) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m+h} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} d \ln \frac{F(t^+)}{F(t^-)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m+h} \int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} dw_\nu(t) = \sum_{k=1}^{m+h} 1 = m + h. \end{aligned}$$

[2)] Устойчивость здесь понимается как устойчивость по отношению к малым вариациям вектора $\boldsymbol{e}$.

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_{m+h} \in \mathfrak{M}^\circ$ — нули функции $F(z)$. По теореме о логарифмическом вычете имеем

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} w_\mu(t)\, d\ln F(t) = \sum_{\nu=1}^{m+h} \operatorname{Im} w_\mu(z_\nu). \tag{22}$$

Этот же интеграл вычислим иначе:

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} w_\mu(t)\, d\ln F(t) = \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \Bigg(\sum_{k=1}^{m} \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} w_\mu(t^+)\, d\ln F(t^+)$$
$$+ \int\limits_{\mathfrak{b}_\nu} w_\mu(t)\, d\ln F(t) - \int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} w_\mu(t^-)\, d\ln F(t^-) \Bigg) + \sum_{k=m+1}^{m+h} \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} w_\mu(t^+)\, d\ln F(t^+)$$
$$+ \int\limits_{\mathfrak{b}_\nu} w_\mu(t^+)\, d\ln F(t) - \int\limits_{\mathfrak{a}_\nu} w_\mu(t^-)\, d\ln F(t^-) - \int\limits_{\mathfrak{b}_\nu} w_\mu(t^-)\, d\ln F(t) \Bigg) \Bigg)$$
$$= \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \Bigg(\sum_{k=1}^{m} \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^+)\, d\ln \frac{F(t^+)}{F(t^-)} - iB_{k\mu} \int\limits_{\mathfrak{a}_k} d\ln F(t^-) + \delta_{\mu k} \int\limits_{\mathfrak{b}_k} d\ln F(t) \Bigg)$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{m+h} \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^+)\, d\ln \frac{F(t^+)}{F(t^-)} - iB_{k\mu} \int\limits_{\mathfrak{a}_k} d\ln F(t^-)$$
$$+ \delta_{\mu k} \int\limits_{\mathfrak{b}_k} d\ln F(t) + \int\limits_{\mathfrak{b}_k} w_\mu(t^-)\, d\ln \frac{F(t^+)}{F(t^-)} \Bigg) \Bigg)$$
$$\equiv \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \Bigg(\sum_{k=1}^{m} \Bigg(2\pi i \int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^+)\, dw(t) + \delta_{\mu k}(-\pi B_{kk} + 2\pi i (w_k(t_k^+) - ie_k)) \Bigg)$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{m+h} \Bigg(2\pi i \int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^+)\, dw(t) + \delta_{\mu k}(-\pi B_{kk} + 2\pi i (w_k(t_k^+) - ie_k)) \Bigg) \Bigg)$$
$$= \sum_{k=1}^{m+h} \operatorname{Im} \int\limits_{\mathfrak{a}_k} w_\mu(t^+)\, dw_k(t) + \frac{1}{2} B_{\mu\mu} - \operatorname{Im} w_\mu(t_\mu^+) + e_\mu.$$

Чтобы избавиться от неопределенного слагаемого $\operatorname{Im} w_\mu(t_\mu^+)$, вычислим тот интеграл в сумме правой части, который соответствует значению $k = \mu$. Применив к нему интегрирование по частям, при $\mu = 1, \dots, m$ получим

$$\int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} w_\mu(t^+)\, dw_\mu(t) = \frac{1}{2}((w_\mu(t_\mu^+))^2 - (w_\mu(t_{0\mu}^+))^2)$$
$$= \frac{1}{2}(w_\mu(t_\mu^+) - w_\mu(t_{0\mu}^+))(w_\mu(t_\mu^+) + w_\mu(t_{0\mu}^+)).$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} w_\mu(t_\mu^+) = 1$, $w_\mu(t_\mu^+) - w_\mu(t_{0\mu}^+) = 1 + i\lambda_\mu$, где $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$, при $\mu = 1, \dots, m$ имеем

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} w_\mu(t^+)\, dw_\mu(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}((1 + i\lambda_\mu)(2w_\mu(t_\mu^+) - 1 - i\lambda_\mu)) = \operatorname{Im} w_\mu(t_\mu^+).$$

Если $\mu = m+1, \ldots, m+h$, то

$$\int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} w_\mu(t^+)\, dw_\mu(t) = -\frac{1}{2} + w_\mu(t_\mu^+), \quad \text{т. е. } \operatorname{Im} \int\limits_{\mathfrak{a}_\mu} w_\mu(t^+)\, dw_\mu(t) = \operatorname{Im} w_\mu(t_\mu^+).$$

Таким образом, при $\mu = 1, \ldots, m+h$ получим

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} w_\mu(t)\, d\ln F(t) \equiv e_\mu - k_\mu \quad (\text{по модулю } B\text{-периодов}), \tag{23}$$

где k_μ вычисляются по формулам (16). Итак, *для нулей любого решения краевой задачи* (19) *выполняется сравнение* (18), что и означает его безусловную разрешимость.

Желая конструктивно построить решение сравнения (18), рассмотрим $(m+h)$-кратный тэта-ряд [7]:

$$\theta(\boldsymbol{u}) := \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{m+h}} \exp(\pi i \cdot {}^t\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{n} + 2\pi i \cdot {}^t\boldsymbol{n}\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^{m+h}, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — симметричная матрица порядка $m+h$, мнимая часть которой положительно определена, а верхний левый индекс t у вектора означает его транспонирование. Как известно, при указанных условиях ряд (24) быстро сходится, представляет четную целую функцию от $\boldsymbol{u}$ и обладает следующими свойствами квазипериодичности: $\theta(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{E}_\nu) = \theta(\boldsymbol{u})$, $\theta(\boldsymbol{u}+\Omega_{\nu\nu}\boldsymbol{E}_\nu) = \theta(\boldsymbol{u})\exp(\pi i\Omega_{\nu\nu} + 2\pi i u_\nu)$. Здесь $\boldsymbol{E}_\nu$ — ν-й столбец единичной матрицы $\boldsymbol{E}$ порядка $m+h$, а $\Omega_{\nu\nu}$ — диагональный элемент матрицы $\boldsymbol{\Omega}$.

Для упрощения дальнейших исследований примем следующее ограничение. Именно, будем предполагать, что все $\mathfrak{b}$-периоды базиса $dw_1(z), \ldots, dw_{m+h}(z)$ (т. е. интегралы (13)) чисто мнимые. Фактически речь идет только о том, что в равенствах (13) $A_{\mu\nu} = 0$ при $\mu, \nu = m+1, \ldots, m+h$. Это означает, что поверхность $\mathfrak{M}$ устроена «правильно» в следующем смысле. На $\mathfrak{M}$ существует такое каноническое рассечение, что для элементов $dw_{m+1}(z), \ldots, dw_{m+h}(z)$ нормированного базиса выполняются равенства $A_{\mu\nu} = 0$ (для остальных элементов базиса они выполняются автоматически).

Подставим в тэта-ряд (24) вместо $\boldsymbol{u}$ вектор $\boldsymbol{w}(z) - i\boldsymbol{e}$ из (17) и положим $\boldsymbol{\Omega} = i\boldsymbol{B}$. Подстановка законна, и в результате получаем следующую функцию от z:

$$\theta(\boldsymbol{w}(z) - i\boldsymbol{e}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{m+h}} \exp(-\pi \cdot {}^t\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}\boldsymbol{n} + 2\pi i \cdot {}^t\boldsymbol{n}(\boldsymbol{w}(z) - i\boldsymbol{e})), \tag{25}$$

называемую *тэта-функцией Римана* [8, ч. I, ст. 2, п. 22]. Она аналитична на поверхности $\mathfrak{M}$, разрезанной линиями $\mathfrak{a}_\nu$, положительна при $z \in \partial\mathfrak{M}$ (в частности, отлична от тождественного нуля). Из свойств квазипериодичности вытекает, что она удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} \theta(\boldsymbol{w}(t^+) - i\boldsymbol{e}) = \theta(\boldsymbol{w}(t^-) - i\boldsymbol{e})\exp(-\pi B_{\nu\nu} + 2\pi i(w_\nu(t^-) - ie_\nu)), \\ \qquad\qquad t \in \mathfrak{a}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m+h, \\ \theta(\boldsymbol{w}(t) - i\boldsymbol{e}) > 0, \quad t \in \partial\mathfrak{M}. \end{cases} \tag{26}$$

Это означает, что функция (25) является частным решением задачи (19).

Для вычисления нулей функции (25) можно применить теорему о логарифмическом вычете:

$$\sum_{\nu=1}^{m+h} z_\nu^k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} t^k \, d\ln\theta(\boldsymbol{w}(t) - i\boldsymbol{e}), \quad k = 1, 2, \ldots, m+h.$$

Вычислив правые части, получим систему алгебраических уравнений для нахождения точек z_ν.

Как отмечалось выше, размерность пространства решений задачи (19) не меньше $m+1$, и это число устойчиво по отношению к малым вариациям вектора $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{m+h}$. Выше найдено частное решение (25). Для краткости будем обозначать его через $\theta_0(z)$. Желая найти общее решение задачи (19) в устойчивом случае, вводим *тэта-функции Римана с полуцелыми характеристиками* [7, гл. II, § 1]:

$$\theta_\nu(z) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{m+h}} \exp\biggl(-\pi\cdot{}^t\Bigl(\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_\nu\Bigr)\boldsymbol{B}\Bigl(\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_\nu\Bigr)+2\pi i\cdot{}^t\Bigl(\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_\nu\Bigr)(\boldsymbol{w}(z)-i\boldsymbol{e})\biggr)$$
$$= \exp\Bigl(-\frac{\pi}{4}\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\nu\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\nu+\pi i\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\nu(\boldsymbol{w}(z)-i\boldsymbol{e})\Bigr)\theta\Bigl(\boldsymbol{w}(z)-i\boldsymbol{e}+\frac{i}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\nu\Bigr), \ \nu = 1, 2, \ldots, m. \tag{27}$$

Если $z \in \partial\mathfrak{M}$, то при $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{m+h}$ оба последних множителя в (27) вещественные и потому $\operatorname{Im}\theta_\nu(t) = 0$ при $t \in \partial\mathfrak{M} = \mathfrak{b}_0 \sqcup \mathfrak{b}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{b}_m$. Более того, $\theta_\nu(t) < 0$ при $t \in \mathfrak{b}_\nu$ и $\theta_\nu(t) > 0$ при $t \in \partial\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{b}_\nu$. Отсюда видно, что функции $\theta_0(t), \theta_1(t), \ldots, \theta_m(t)$ линейно независимы и удовлетворяют второму краевому условию (19). Покажем, что они удовлетворяют и первому краевому условию (19). При $t \in \mathfrak{a}_\mu$ имеем

$$\theta_\nu(t^-) = \exp\Bigl(-\frac{\pi}{4}\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\nu\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\nu + \pi i\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\nu(\boldsymbol{w}(t^-) - i\boldsymbol{e})\Bigr)\theta\Bigl(\boldsymbol{w}(t^-) - i\boldsymbol{e} + \frac{i}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\nu\Bigr)$$
$$= \exp\Bigl(-\frac{\pi}{4}\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\nu\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\nu + \pi i\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\nu(\boldsymbol{w}(t^+) - i\boldsymbol{e}) - \pi^2\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\nu\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\mu\Bigr)$$
$$\times\exp\biggl(\pi\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\mu\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\mu - 2\pi i\cdot{}^t\boldsymbol{E}_\mu\Bigl(\boldsymbol{w}(t^-) - i\boldsymbol{e} + \frac{i}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\nu\Bigr)\biggr)\theta\Bigl(\boldsymbol{w}(t^+) - i\boldsymbol{e} + \frac{i}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_\nu\Bigr)$$
$$= \theta_\nu(t^+)\exp(\pi B_{\mu\mu} - 2\pi i(w_\mu(t^-) - ie_\mu)).$$

Отсюда, беря начало и конец, получаем

$$\theta_\nu(t^+) = \theta_\nu(t^-)\exp(-\pi B_{\mu\mu} + 2\pi i(w_\mu(t^-) - ie_\mu))$$

при $t \in \mathfrak{a}_\mu$, что и требовалось. Таким образом, общее решение задачи (19) в устойчивом случае имеет вид $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k\theta_k(z)$, где все c_k вещественны. Дивизор его нулей является в этом случае общим решением сравнения (18).

Задавая произвольно $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим следующее обобщение сравнения (18):

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Im}\boldsymbol{w}(z_\nu) \equiv \boldsymbol{e} - \boldsymbol{k} \quad (\text{по модулю } B\text{-периодов}), \tag{28}$$

где неизвестными являются точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. В случае $n = m+h$ сравнение (28) совпадает со сравнением (18). Если $n > m+h$, то, произвольно задавая точки $z_{m+1}, \ldots, z_n$ (например, полагая $z_{m+1} = \cdots = z_m = \infty$), относительно остальных точек получим сравнение (18). В случае $1 \le n \le m+h-1$, учитывая формулу (2), заключаем, что сравнение (21) равносильно системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{m+h} \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_\nu) \equiv \boldsymbol{e} - \boldsymbol{k} \quad (\text{по модулю } B\text{-периодов}), \\ z_{m+h+1} = \cdots = z_n = \infty. \end{cases} \tag{29}$$

В устойчивом случае эта система равносильна тому, что общее решение краевой задачи (19) равно $\sum\limits_{\nu=0}^{m} c_\nu \theta_\nu(z)$, где все c_ν принадлежат $\mathbb{R}$, имеет в точке $z = \infty$ нуль кратности $n - m - h$. Переходя в окрестности точки $z = \infty$ к локальным координатам $t = \frac{1}{z}$, запишем это в виде системы линейных уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \left(\frac{d}{dt}\right)^k \theta_\nu\left(\frac{1}{t}\right)\bigg|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n - m - h - 1,$$

от ранга матрицы которой зависят разрешимость сравнения (28) и произвол в ее решении.

Рассмотрим проблему обращения Якоби на дубле. Дубль $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} \cup \widetilde{\mathfrak{M}}$ — замкнутая риманова поверхность рода $\rho = m + 2h$, симметричная относительно отображения $z \mapsto \bar{z}$. Присоединив к каноническому рассечению

$$\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{b}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{a}_{m+h} \cup \mathfrak{b}_{m+h} \subset \mathfrak{M}$$

его образ $\bar{\mathfrak{a}}_1 \cup \bar{\mathfrak{b}}_1 \cup \cdots \cup \bar{\mathfrak{a}}_{m+h} \cup \bar{\mathfrak{b}}_{m+h} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ при отображении $z \mapsto \bar{z}$, получим каноническое рассечение $a_1, b_1, \ldots, a_\rho, b_\rho$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Желая уточнить это рассечение, а также ориентации его кривых, положим

$$\begin{gathered} a_k = \mathfrak{a}_k \cup \bar{\mathfrak{a}}_k^{-1}, \quad b_k := \mathfrak{b}_k, \quad k = 1, \ldots, m, \\ a_k := \mathfrak{a}_k, \quad b_k := \mathfrak{b}_k, \quad k = m+1, \ldots, m+h, \\ a_k := \bar{\mathfrak{a}}_k^{-1}, \quad b_k := \bar{\mathfrak{b}}_k, \quad k = m+h+1, \ldots, m+2h. \end{gathered} \tag{30}$$

Введем базис абелевых дифференциалов 1-го рода:

$$\boldsymbol{\zeta}(z) = {}^t(d\zeta_1(z), d\zeta_2(z), \ldots, d\zeta_\rho(z)), \quad z \in \mathfrak{R}, \tag{31}$$

комплексно нормированный относительно канонического рассечения (30). Он связан с существующим в силу леммы 1 базисом

$$d\boldsymbol{w}(z) = {}^t(dw_1(z), dw_2(z), \ldots, dw_{m+h}(z)), \quad z \in \mathfrak{M}, \tag{32}$$

равенствами

$$\begin{gathered} d\zeta_\nu(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, dw_\nu(z), & \operatorname{Im} z \ge 0, \\ -\frac{1}{2}\, \overline{dw_\nu(\bar{z})}, & \operatorname{Im} z \le 0, \end{cases} \quad \nu = 1, 2, \ldots, m, \\ d\zeta_\nu(z) = dw_\nu(z), \quad \nu = m+1, \ldots, m+h, \\ d\zeta_\nu(z) = -\overline{dw_{\nu-h}(\bar{z})}, \quad \nu = m+h+1, \ldots, m+2h = \rho. \end{gathered} \tag{33}$$

В силу принятого выше ограничения на риманову поверхность периоды базиса (32) таковы:

$$\int\limits_{a_\mu} d\zeta_\nu(t) = \delta_{\mu\nu}, \quad \int\limits_{b_\mu} d\zeta_\nu(t) = i\Omega_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, \rho,$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, $\Omega_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$, а матрица $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^{\rho}$ симметрична и положительно определена.

Возьмем ρ-кратный тэта-ряд вида (24), заменим в нем $\boldsymbol{\Omega}$ на $i\boldsymbol{\Omega}$, а вместо аргумента подставим в него $\boldsymbol{\zeta}(z)-i\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{\rho}$. Тогда возникнет тэта-функция Римана, которую будем обозначать немного иначе, чем (25):

$$\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(z) - i\boldsymbol{e}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\rho}} \exp(-\pi \cdot {}^{t}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{n} + 2\pi i \cdot {}^{t}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\zeta}(z) - i\boldsymbol{e})). \tag{34}$$

Эта функция также положительна на вещественной оси (в частности, нетривиальна, т. е. отлична от тождественного нуля), поэтому ее нули расположены симметрично относительно вещественной оси. Она разрывна вдоль линий a_ν, где выполняются следующие условия сопряжения, аналогичные условиям (19):

$$\begin{gathered} \vartheta(\boldsymbol{\zeta}(t^+) - i\boldsymbol{e}) = \vartheta(\boldsymbol{\zeta}(t^-) - i\boldsymbol{e}) \exp(-\pi\Omega_{\nu\nu} + 2\pi i(\zeta_\nu(t^-) - ie_\nu)), \\ t \in a_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \rho. \end{gathered} \tag{35}$$

Так как функция (34) нетривиальна, ее нули образуют единственное решение классической проблемы обращения Якоби:

$$\sum_{k=1}^{\rho} \boldsymbol{\zeta}(z_k) \equiv \boldsymbol{e} - \boldsymbol{k} \quad \text{(по модулю периодов)}, \tag{36}$$

где $\boldsymbol{k} = {}^{t}(k_1, k_2, \ldots, k_\rho)$, а

$$k_\mu = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\Omega_{\mu\mu} + \zeta_\mu(t_\mu) - \sum_{k=1}^{\rho} \int_{a_k} \zeta_\mu(t^+)\, d\zeta_k(t), \quad \mu = 1, 2, \ldots, \rho. \tag{37}$$

Лемма 5. *Справедливы соотношения* $\operatorname{Re} k_\mu \equiv \frac{1}{2}$ *по модулю* $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Так как $\Omega_{\mu\mu} \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\zeta_\mu(t_\mu) = 1$, достаточно показать, что сумма в (37) чисто мнимая. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{k=1}^{\rho} \int_{a_k} \zeta_\mu(t)\, d\zeta_k(t)} &= \sum_{k=1}^{\rho} \int_{a_k} \overline{\zeta_\mu(t)}\, \overline{d\zeta_k(t)} \\ &= \sum_{k=1}^{\rho} \int_{\bar{a}_k} \overline{\zeta_\mu(\bar{t})}\, \overline{d\zeta_k(\bar{t})} = -\sum_{k=1}^{\rho} \int_{a_k} \zeta_\mu(t)\, d\zeta_k(t), \end{aligned}$$

так как множество $\bigcup_{\mu} a_\mu$ переходит само на себя при изменяющем ориентацию отображении $t \mapsto \bar{t}$, при этом $\zeta_\mu(t)$, $d\zeta_k(t)$ меняют знаки. Лемма доказана.

§ 3. Некоторые приложения

1. Функции Шоттки (см. [9, гл. VI, § 6]). *Функциями Шоттки* на римановой поверхности с краем $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\circ \sqcup \partial\mathfrak{M}$ называются мероморфные в $\mathfrak{M}^\circ$ функции, имеющие там конечное число полюсов, непрерывно продолжимые на край $\partial\mathfrak{M}$ и принимающие на нем чисто вещественные значения.

Ясно, что множество всех функций Шоттки на $\mathfrak{M}$ является полем, в котором полем констант служит $\mathbb{R}$. Применяя к функции Шоттки принцип аргумента, заключаем, что общее число ее нулей равно общему числу ее полюсов (с учетом кратностей). Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathfrak{M}^\circ$ — произвольно заданные точки. Станем искать функции Шоттки, кратные дивизору Δ^{-1}, где $\Delta = (z_1)\cdot(z_2)\cdot\ldots\cdot(z_n)$

— заданный дивизор. Если такая функция существует, то она должна иметь нули, дивизор которых можно записать в виде $\Delta' = (z_1') \cdot (z_2') \cdot \ldots \cdot (z_n')$, где точки $z_1', z_2', \ldots, z_n' \in \mathfrak{M}^\circ$ неизвестные. Рассмотрим вещественный аналог проблемы Якоби

$$\sum_{\nu=1}^{m+h} \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_\nu') \equiv \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z) \quad (\text{по модулю } B\text{-периодов}) \tag{38}$$

с известной точкой z и неизвестными точками $z_1', z_2', \ldots, z_{m+h}'$. Его очевидным решением является дивизор $\Delta' = (z) \cdot (\infty)^{m+h-1}$. Соответствующая сравнению (38) тэта-функция Римана $\theta(\boldsymbol{w}(z') - i \cdot \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z) - i\boldsymbol{k})$ имеет простой нуль при $z' = z$ и нуль кратности $m+h-1$ в точке $z' = \infty$. Отсюда очевидно, что функцию Шоттки, кратную дивизору Δ^{-1}, следует искать в виде

$$S(z) = C \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \theta(\boldsymbol{w}(z) - i \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_k') - i\boldsymbol{k})}{\prod\limits_{k=1}^{n} \theta(\boldsymbol{w}(z) - i \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_k) - i\boldsymbol{k})}, \tag{39}$$

где $z_1', z_2', \ldots, z_n' \in \mathfrak{M}^\circ$ — неизвестные точки, а $C \in \mathbb{R}$ — постоянная.

Теорема 1. *Нетривиальная функция Шоттки, кратная дивизору Δ^{-1}, существует и представима в виде (39), если и только если разрешим следующий обобщенный аналог проблемы обращения:*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_\nu') \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_\nu) \quad (\textit{по модулю } B\textit{-периодов}). \tag{40}$$

Доказательство. Очевидно, что при $z \to \infty$ числитель и знаменатель в (39) имеют одинаковые порядки, и потому особенности в точке $z = \infty$ сокращаются. Значит, $S(\infty) \in \mathbb{R}$. Все множители числителя и знаменателя в (39) имеют по переменной z разрывы вдоль линий $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_{m+h}$. Используя формулу (19), найдем соотношение между предельными значениями функции (39) на этих линиях:

$$S(t^+) = S(t^-) \exp\left(2\pi \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Im} w_\nu(z_k') - \operatorname{Im} w_\nu(z_k))\right), \quad t \in \mathfrak{a}_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, m+h.$$

Отсюда видно, что $S(z)$ непрерывна, если и только если выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} w_\nu(z_k') = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} w_\nu(z_k), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m+h,$$

равносильные одному векторному равенству

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_k') = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} \boldsymbol{w}(z_k). \tag{41}$$

Различие между (40) и (41) состоит в том, что первое из них — сравнение, а второе — равенство. Однако они равносильны, так как сравнение можно превратить в равенство, сняв ограничение, согласно которому в абелевых интегралах (2) пути интегрирования не пересекают линий канонического рассечения. Надо разрешить путям интегрирования нужное число раз обходить линии $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m$, и тогда сравнения превратятся в равенства. Теорема доказана.

2. Задачи Шварца и Дирихле. Рассмотрим следующую задачу Шварца: *найти все функции $F(z)$, однозначные и аналитические на римановой поверхности $\mathfrak{M}^\circ$, H-непрерывно* (это означает, что функции, о которых идет речь, удовлетворяют условию Гёльдера [11]) *продолжимые на край $\partial\mathfrak{M}$, по следующему краевому условию:*

$$\operatorname{Re} F(t) = c(t), \quad t \in \partial\mathfrak{M}, \tag{42}$$

где $c(t)$ — заданная H-непрерывная функция.

Если искать гармоническую на $\mathfrak{M}^\circ$ функцию по краевому условию (42), то это — хорошо изученная классическая задача Дирихле. Наша цель — найти условия разрешимости задачи Шварца (условия однозначности) и явно выразить решения задач Шварца и Дирихле через тэта-функцию.

С этой целью рассмотрим следующее сравнение:

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} \boldsymbol{\zeta}(z_\nu) \equiv \rho \cdot \boldsymbol{\zeta}(z) \quad \text{(по модулю периодов)}. \tag{43}$$

Очевидным решением этого сравнения является дивизор $(z_1)(z_2)\ldots(z_\rho) = (z)^\rho$. Он является дивизором нулей нетривиальной тэта-функции Римана от τ:

$$\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(\tau) - \rho\boldsymbol{\zeta}(z) - \boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^\rho} \exp(-\pi \cdot {}^t\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{n} + 2\pi i \cdot {}^t\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\zeta}(\tau) - \rho\boldsymbol{\zeta}(z) - \boldsymbol{k}), \tag{44}$$

где $\boldsymbol{k}$ — вектор римановых констант (37). В силу леммы 5 имеем $\operatorname{Re} k_\mu \equiv 0$ по модулю $\frac{1}{2}$. Таким же свойством обладают и $\zeta_\mu(t)$ при $t \in \partial\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что функция (44) вещественна при $z, \tau \in \partial\mathfrak{M}$. Значит, дифференциал $d_\tau \ln\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(\tau) - \rho\boldsymbol{\zeta}(z) - \boldsymbol{k})$ имеет при $\tau = z$ простой полюс с вычетом ρ, а при $\tau, z \in \partial\mathfrak{M}$ чисто вещественный. Интеграл

$$F(z) = \frac{1}{\rho\pi i} \int\limits_{\partial\mathfrak{M}} c(\tau)\, d_\tau \ln\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(\tau) - \rho\boldsymbol{\zeta}(z) - \boldsymbol{k}) + i\beta_0, \quad z \in \mathfrak{M}, \tag{45}$$

где $\beta_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная, можно рассматривать как удвоенный интеграл типа Коши, так как его ядро $\frac{2}{\rho} d_\tau \ln\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(\tau) - \rho\boldsymbol{\zeta}(z) - \boldsymbol{k})$ имеет при $\tau = z$ полюс с вычетом 2, а ядро интеграла типа Коши $\frac{d\tau}{\tau - z}$ — полюс с вычетом 1. Применив к нему формулу Сохоцкого, в пределе при $z \to t$, $z \in \mathfrak{M}$, будем иметь

$$F(t) = c(t) + \frac{1}{\rho\pi i} \int\limits_{\partial\mathfrak{M}} c(\tau)\, d_\tau \ln\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(\tau) - \rho\boldsymbol{\zeta}(t) - \boldsymbol{k}) + i\beta_0, \quad t \in \partial\mathfrak{M}. \tag{46}$$

Здесь интегральный член чисто мнимый, поскольку ядро и плотность интеграла вещественные. Поэтому, выделив в (46) вещественные части, получим равенство (42). Найдем условия, при которых функция (45) однозначна. Ее многозначность может возникать из-за того, что при обходе точкой z линии b_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m + h$) ядро интеграла получает приращение, которое в силу формул (35) отличается лишь постоянным множителем от дифференциала $d\zeta_\mu(\tau)$, который, в свою очередь, отличается лишь постоянным множителем от дифференциала $dw_\mu(\tau)$ в силу формул (33). Значит, необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Шварца можно задать в виде

$$\int\limits_{\partial\mathfrak{M}} c(\tau)\, dw_\mu(\tau) = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m + h. \tag{47}$$

Так как приращения интеграла (45) чисто мнимые, его вещественная часть однозначна, что дает однозначную и безусловную разрешимость задачи Дирихле. Таким образом, решение задачи Дирихле может быть задано в виде

$$\operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{\rho\pi} \int\limits_{\partial\mathfrak{M}} c(\tau)\, d_\tau \arg \vartheta(\boldsymbol{\zeta}(\tau) - \rho\boldsymbol{\zeta}(z) - \boldsymbol{k}), \quad z \in \mathfrak{M}.$$

3. Однородная задача Гильберта. Рассмотрим краевую задачу

$$\operatorname{Im}(\overline{\lambda(t)} F(t)) = 0, \quad t \in \partial\mathfrak{M}, \tag{48}$$

где $F : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ — неизвестная функция, однозначная и аналитическая в $\mathfrak{M}^\circ$, H-непрерывно продолжимая на $\partial\mathfrak{M}$, а $\lambda(t)$ — заданная H-непрерывная функция, нигде не обращающаяся в нуль. Поскольку краевое условие (48) не изменяется от умножения или деления его на положительную функцию, будем считать, что уже в (48) выполняется тождество $|\lambda(t)| \equiv 1$.

Обозначим через $\varkappa = \frac{1}{2\pi} \arg \lambda(t)|_{\partial\mathfrak{M}}$ индекс функции $\lambda(t)$. Чтобы его вычислить, вспомним, что $\partial\mathfrak{M} = \mathfrak{b}_0 \sqcup \mathfrak{b}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{b}_m$, и на каждой кривой $\mathfrak{b}_\nu$ произвольно зафиксируем точку t_ν. На разомкнутой кривой $\mathfrak{b}_\nu \setminus t_\nu$ произвольно зафиксируем непрерывную ветвь функции $\frac{1}{2\pi} \arg \lambda(t)$. Индекс $\varkappa$ по определению равен сумме приращений выделенных ветвей функции $\frac{1}{2\pi} \arg \lambda(t)$ вдоль всех разомкнутых кривых $\mathfrak{b}_\nu \setminus t_\nu$ и не зависит от того, какие именно ветви выбраны.

Так как очевидно, что при $\varkappa < 0$ задача (48) имеет только тривиальное решение, будем считать, что $\varkappa \geq 0$. К задаче (48) будем применять метод регуляризующего множителя. Идея этого метода заключается в том, чтобы, умножив краевое условие (48) на подходящую функцию $p(t) > 0$, добиться того, чтобы в новом краевом условии

$$\operatorname{Im}(p(t)\overline{\lambda(t)} F(t)) = 0, \quad t \in \partial\mathfrak{M}, \tag{49}$$

под знаком Im оказалось предельное значение некоторой функции Шоттки. Найдя ее, легко найдем и $F(z)$.

В случае, когда $\mathfrak{M}^\circ$ — круг (или область, конформно эквивалентная кругу), эта идея реализована классиками. В случае, когда $\mathfrak{M}^\circ$ — $(m+1)$-связная область на плоскости ($h = 0$), в [10] было предложено искать регуляризующий множитель $p(t) > 0$ и точки $z_1, \ldots, z_\varkappa \in \mathfrak{M}^\circ$ так, чтобы выполнялось равенство

$$p(t)\overline{\lambda(t)} = \frac{e^{i(u(t)+iv(t))}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\varkappa} (t - z_\nu)}, \quad t \in \partial\mathfrak{M}, \tag{50}$$

где $u(z) + iv(z)$ — однозначная аналитическая в $\mathfrak{M}^\circ$ функция. Задача свелась к обобщенному вещественному аналогу проблемы Якоби:

$$\sum_{\nu=1}^{\varkappa} \operatorname{Im} w_\mu(z_\nu) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathfrak{M}} \lambda(t)\, dw_\mu(t), \quad \mu = 1, \ldots, m + h, \tag{51}$$

общее решение которого найдено в [4]. В случае $h = 0$ задача Гильберта была рассмотрена также в [11, 12] и во многих других источниках.

В случае $h \geq 1$ искать регуляризующий множитель из равенства (50) не имеет смысла, так как функции $z - z_\nu$ не являются аналитическими на $\mathfrak{M}^\circ$ из-за разрывов на линиях $\mathfrak{b}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{b}_{m+h}$. Поэтому предлагается в равенстве

(50) вместо множителя $(t - z_\nu)$ подставить некоторую функцию $f(t, z_\nu)$, аналитическую и однолистную по $t \in \mathfrak{M}^\circ$, имеющую единственный простой нуль при $t = z_\nu$. Эту функцию надо подобрать с таким расчетом, чтобы возникающая система уравнений для нахождения точек z_ν оказалась вещественным аналогом проблемы Якоби. Итак, регуляризующий множитель $p(t) > 0$ будем искать, исходя из равенства

$$p(t)\overline{\lambda(t)} = \frac{e^{i(u(t)+iv(t))}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\varkappa} f(t, z_\nu)}, \quad t \in \partial\mathfrak{M}, \tag{52}$$

где $u(z) + iv(z)$ — однозначная аналитическая в $\mathfrak{M}^\circ$ функция. Выделив в (52) аргументы, получим

$$-\arg\lambda(t) = u(t) - \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \arg f(t, z_\nu), \quad t \in \partial\mathfrak{M}. \tag{53}$$

Строго говоря, это не является равенством, а будет сравнением по модулю $2\pi\mathbb{Z}$ на каждой связной компоненте края $\partial\mathfrak{M}$, но при надлежащей фиксации ветвей его можно сделать равенством. Будем считать, что это сделано. Применив к функции $u(z) + iv(z)$ условия однозначности (47), из (53) выводим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}} \arg\lambda(t)\, d\zeta_\mu(t) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}} \arg f(t, z_\nu)\, d\zeta_\mu(t), \quad \mu = 1, 2, \ldots, m + h. \tag{54}$$

Теперь надо подобрать функцию $f(t, z)$ так, чтобы входящие в правую часть равенства (54) интегралы оказались интегральными представлениями для $\operatorname{Im}\zeta_\mu(z_\nu)$. С этой целью введем разрывный аналог ядра Коши [2] на $\mathfrak{R}$:

$$\omega_{z\infty}(t)\, dt := \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(t) - \rho\boldsymbol{\zeta}(z) - \boldsymbol{\kappa})}{\vartheta(\boldsymbol{\zeta}(t) - \boldsymbol{\kappa})}\, dt, \tag{55}$$

имеющий простые полюсы в точках $t = z$ и $t = \infty$, вычеты в которых равны $+1$ и -1 соответственно. Его можно использовать в качестве ядра Коши в областях, лежащих на $\mathfrak{R}$. Единственное неудобство его в том, что оно имеет по переменной z разрывы на линиях $a_1, \ldots, a_\rho$. Поэтому преобразуем его в мероморфный аналог ядра Коши [2], не имеющий линий разрыва:

$$A(t, z)\, dt = \frac{\begin{vmatrix} \omega_{z\infty}(t) & \zeta_1'(t) & \ldots & \zeta_\rho'(t) \\ \omega_{z\infty}(t_1) & \zeta_1'(t_1) & \ldots & \zeta_\rho'(t_1) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \omega_{z\infty}^{(\rho)}(t_1) & \zeta_1^{(\rho)}(t_1) & \ldots & \zeta_\rho^{(\rho)}(t_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \zeta_1'(t_1) & \ldots & \zeta_\rho'(t_1) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \zeta_1^{(\rho)}(t_1) & \ldots & \zeta_\rho^{(\rho)}(t_1) \end{vmatrix}}\, dt, \tag{56}$$

где $t_1 \in \widetilde{\mathfrak{M}}^\circ$ — фиксированная точка, отличная от точек Вейерштрасса поверхности $\mathfrak{R}$. Это последнее условие обеспечивает отличие от нуля знаменателя в (56). Ядро (56) пригодно для представления аналитических функций в областях, лежащих на $\mathfrak{M}$. В частности, при $\tau \in \mathfrak{M}^\circ$ имеем

$$\zeta_\mu'(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widehat{\mathfrak{M}}} \zeta_\mu'(t) A(t, \tau)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}} \zeta_\mu'(t) A(t, \tau)\, dt, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \rho, \tag{57}$$

так как интегралы по линиям $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{b}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{b}_\rho$ взаимно уничтожаются. Интегрируя равенство (57) в пределах от ∞ до z, получим

$$\zeta_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}{\int_\infty^z}' d\tau \int_{\partial\mathfrak{M}} \zeta'_\mu(t)A(t,\tau)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathfrak{M}} d\zeta_\mu(t){\int_\infty^z}' A(t,\tau)\,d\tau, \quad \mu = 1,\ldots,\rho.$$

Выделив здесь мнимые части, найдем нужное нам интегральное представление

$$\operatorname{Im}\zeta_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathfrak{M}} d\zeta_\mu(t)\cdot \operatorname{Im}{\int_\infty^z}' A(t,\tau)\,d\tau, \quad \mu = 1,\ldots,\rho. \tag{58}$$

Отсюда видно, что если в равенствах (54) положить

$$\arg f(t, z_\nu) = \operatorname{Im}{\int_\infty^{z_\nu}}' A(t,\tau)\,d\tau,$$

то они превратятся в обобщение вещественного аналога проблемы Якоби:

$$\sum_{\nu=1}^{\varkappa}\operatorname{Im}\zeta_\mu(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathfrak{M}} \arg\lambda(t)\,d\zeta_\mu(t), \quad \mu = 1,\ldots,m+h. \tag{59}$$

При $\varkappa \geq m+h$ эта система безусловно разрешима, и пусть $z_1, \ldots, z_\varkappa$ — какое-нибудь ее решение. Функция, входящая в (52) и (53), такова:

$$f(t,z) = \exp\left({\int_\infty^z}' A(t,\tau)\,d\tau\right).$$

Уравнение (53) есть задача Шварца относительно неизвестной однозначной аналитической функции $u(z)+iv(z)$. Решив ее, получим

$$u(z)+iv(z) = \mathbb{S}\left(\sum_{\nu=1}^{\varkappa}\arg f(t,z_\nu) - \arg\lambda(t)\right)(z),$$

где $\mathbb{S}$ — оператор Шварца. После этого, выделив модули в (50), найдем регуляризующий множитель $p(t) = \frac{\exp(-v(t))}{\prod_{\nu=1}^{\varkappa}|f(t,z_\nu)|}$. Умножив на него краевое условие (48), получим равенство

$$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(u(t)+iv(t))}F(t)}{\prod_{\nu=1}^{\varkappa} f(t,z_\nu)}\right) = 0, \quad t\in\partial\mathfrak{M}. \tag{60}$$

Здесь под знаком Im стоит предельное значение функции Шоттки, кратной дивизору $(z_1)^{-1}(z_2)^{-1}\ldots(z_\varkappa)^{-1}$. Пусть $z'_1, z'_2, \ldots, z'_\varkappa \in \mathfrak{M}$ — произвольные точки, для которых

$$\sum_{\nu=1}^{\varkappa}\operatorname{Im}\boldsymbol{\zeta}(z'_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{\varkappa}\operatorname{Im}\boldsymbol{\zeta}(z_\nu) \quad \text{(по модулю периодов)}. \tag{61}$$

Используя формулу (39), выпишем общее решение задачи (48):

$$F(z) = C\exp(-i(u(z)+iv(z)))\prod_{k=1}^{\varkappa}\frac{f(z,z_k)\theta(\boldsymbol{w}(z)-i\cdot\operatorname{Im}\boldsymbol{w}(z_k')-i\boldsymbol{k})}{\theta(\boldsymbol{w}(z)-i\cdot\operatorname{Im}\boldsymbol{w}(z_k)-i\boldsymbol{k})},\quad z\in\mathfrak{M}, \tag{62}$$

где $C\in\mathbb{R}$ — произвольная постоянная.

Пусть $0\le\varkappa\le m+h-1$. Если система (51) разрешима, то общее решение задачи (48) по-прежнему дается формулой (62). Если система (51) неразрешима, то задача (48) не имеет нетривиальных решений. Чтобы это показать, зададим произвольно точки $z'_{\varkappa+1}$, …, z'_{m+h} и станем подбирать регуляризующий множитель $p(t)>0$ так, чтобы выполнялось равенство

$$p(t)\overline{\lambda(t)} = \frac{e^{i(u(t)+iv(t))}\prod\limits_{\nu=\varkappa+1}^{m+h} f(t,z'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{m+h} f(t,z_\nu)},\quad t\in\partial\mathfrak{M}, \tag{63}$$

где $z_1,\dots,z_{m+h}$ — неизвестные точки. Их можно найти из условий однозначности функции $u(z)+iv(z)$:

$$\sum_{\nu=1}^{m+h}\operatorname{Im}\zeta_\mu(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}\arg\lambda(t)\,d\zeta_\mu(t) + \sum_{\nu=\varkappa+1}^{m+h}\operatorname{Im}\zeta_\mu(z'_\nu),\quad \mu=1,\dots,m+h. \tag{64}$$

Умножив краевое условие (48) на регуляризующий множитель из равенства (63), получим краевое условие в виде

$$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(u(t)+iv(t))}\prod\limits_{\nu=\varkappa+1}^{m+h} f(t,z'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{m+h} f(t,z_\nu)}F(t)\right) = 0,\quad t\in\mathfrak{M}, \tag{65}$$

где под знаком Im стоит предельное значение функции Шоттки с нулями в точках $z'_{\varkappa+1}$, …, $z'_{\varkappa+m}$. Обозначив остальные нули этой функции через z'_1, …, $z'_\varkappa$, на основании теоремы 1 заключаем, что должно выполняться сравнение

$$\sum_{\nu=1}^{m+h}\operatorname{Im}\boldsymbol{\zeta}(z_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{m+h}\operatorname{Im}\boldsymbol{\zeta}(z'_\nu)\quad (\text{по модулю } B\text{-периодов}). \tag{66}$$

Комбинируя это с равенствами (64), имеем

$$\sum_{\nu=1}^{m+h}\operatorname{Im}\boldsymbol{\zeta}(z'_\nu) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}\arg\lambda(t)\,d\boldsymbol{\zeta}(t) + \sum_{\nu=\varkappa+1}^{m+h}\operatorname{Im}\boldsymbol{\zeta}(z'_\nu).$$

Уничтожая здесь слева и справа одинаковые суммы, получим неразрешимое сравнение (51). Значит, $F(z)\equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шиффер М., Спенсер Д. К.* Функционалы на конечных римановых поверхностях. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
2. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

3. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 113–179.
4. *Зверович Э. И.* Проблема обращения Якоби, ее аналоги и обобщения // Актуальные проблемы современного анализа. Гродно: Изд-во ГрГУ, 2009. С. 69–83.
5. *Мочалов В. В.* Аналог проблемы обращения Якоби на конечной римановой поверхности // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1982. С. 43–54.
6. *Zverovich E. I.* The problem of linear conjugation on a closed Riemann surface // Complex Analysis Operator Theory. 2008. V. 2, N 4. P. 709–732.
7. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
8. *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
10. *Зверович Э. И.* О сведении задачи Гильберта для многосвязной области к задаче Гильберта с рациональным коэффициентом // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 4. С. 777–780.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
12. *Салимов Р. Б. Шабалин П. Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2005.

Статья поступила 23 декабря 2014 г.

Зверович Эдмунд Иванович, Долгополова Ольга Борисовна
Белорусский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра теории функций,
пр. Независимости, 4, Минск 220050, Беларусь
Zverovich@bsu.by, Dolgopolova@tut.by

Крушевский Евгений Александрович
Белорусский национальный технический университет,
кафедра высшей математики № 3,
пр. Независимости, 150, Минск 220014, Беларусь
geen_61@mail.ru