

КРИТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА ДЛЯ СЖАТЫХ СТОЕК ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

к. т. н. Косых Э. Г., Сейфер Д. В.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Рассмотрим защемленную внизу упругую стойку (рисунок 1), нагруженную на торце сжимающей силой P и равномерно распределенной вдоль оси продольной нагрузкой интенсивности p . Примером такой нагрузки может служить вес стойки постоянного сечения и жесткости $EI = \text{const}$. При продольном изгибе стойки произвольное сечение с координатой x отклоняется на величину $y(x)$.

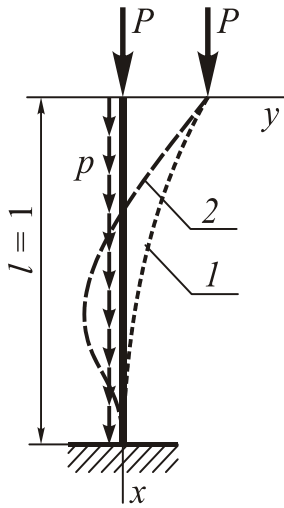


Рисунок 1

Дифференциальное уравнение продольного изгиба стойки имеет вид

$$(EIy''') + [(P + px)y'] = 0. \quad (1)$$

Краевую задачу для определения критического значения нагрузки получим, подчиняя решение уравнения (1) граничным условиям

$$M(0) = 0; \quad y(l) = 0; \quad y'(l) = 0; \quad Q(l) = 0, \quad (2)$$

где $M(x)$ – изгибающий момент, $Q(x)$ – поперечная сила.

Положим $P = 0$, $p \neq 0$ и введем безразмерный параметр интенсивности веса $\beta = pl^3/EI$. В настоящее время общепризнано, что критическое значение данного параметра $\beta_{kr} = 7,84$. Однако в предлагаемой работе показано, что это значение неверно и существенно завышено. Следуя предложенному автором в [1] методу интегрирования систем уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, выполним преобразование: $y \equiv y_1$; $y_1'' = y_2$. Далее, вводя аналогично β безразмерную силу $\alpha = Pl^2/EI$, вместо (1) получим матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \alpha + \beta x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Известно [2], что любая система линейных дифференциальных уравнений второго порядка может быть приведена к виду:

$$\{y\}'' + In(x)\{y\} = 0, \quad (4)$$

где вектор $\{y\}^T = (y_1, y_2)$, а матрица $In(x)$ определена как инвариант линейной системы (3).

С помощью матрицы преобразования переменных V и ей обратной \bar{V}

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta x & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\beta x & 1 \end{pmatrix}$$

получим для инварианта $In(x)$ следующее выражение:

$$In(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5\beta & 0 \\ -0,5\alpha\beta & 0,5\beta \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,5\beta^2 & 0 \end{pmatrix} x^2. \quad (5)$$

Если стойка нагружена только весом, то в (3), (5) надо положить $\alpha = 0$.

Решение системы (1), приведенной к форме (4), получено в замкнутом виде помощью матричных функций [1], представленных сходящимися рядами

$$y = Com(In, x) \cdot \{C\} + Sim(In, x) \cdot \{D\}, \quad (6)$$

где

$$Com(In, x) = I + \sum_1^n (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{n-mp} x^m \sum_{\sum k_i=m}^n \prod In_{k_i} a_{n_i}; \quad \{C\} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$$

$$Sim(In, x) = xI + \sum_1^n (-1)^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{n-mp} x^m \sum_{\sum k_i=m}^n \prod In_{k_i} b_{n_i}; \quad \{D\} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix};$$

$$a_{n_i} = \frac{1}{k_i!(2n-1+\sum k_j)(2n+\sum k_j)}; \quad b_{n_i} = \frac{1}{k_i!(2n+1+\sum k_j)(2n+\sum k_j)}.$$

Входящие в (6) векторы $\{C\}$, $\{D\}$ – постоянные интегрирования, которые должны быть

подчинены граничным условиям (2). Целочисленные коэффициенты $a_{n_i}^{-1}$, $b_{n_i}^{-1}$, $k_i = i$ соответствуют номерам производных, определяющих матрицы-коэффициенты разложения инварианта в ряд. Индекс «тр» над знаком суммы определяет порядок старшей производной.

В соответствии с граничными условиями получим определитель третьего порядка $\text{Det}_0(\beta)$, из равенства нулю которого найдем критические значения силовых параметров. Каждому значению параметра соответствует своё решение, определяющее форму потери устойчивости.

Из графика на рисунке 2 следует, что в области $0 \leq \beta \leq 1,1\pi^2$ существует два корня: $\beta_{kr1} = 6,406$ и $\beta_{kr2} = 10,264$, которые соответствуют первой и второй формам потери устойчивости по Эйлеру, отмеченным на рисунке 1 цифрами «1» и «2».

Таким образом, потеря устойчивости происходит при более низком значении критического параметра ($\beta_{kr1} = 6,406$), чем утверждается в учебной и научной литературе [2], [4], [5]. Наше исследование показало, что приведенное там значение ($\beta_{kr1} = 7,84$) завышено и неверно по существу.

Вернемся к уравнению (1), в котором примем $P = 0$. Очевидно существование первого интеграла, что позволяет понизить порядок уравнения

$$(EI \cdot y'')' + px \cdot y' = C.$$

Легкость дальнейшего понижения порядка уравнения при $EI = \text{const}$, возможно, спровоцировало ошибку в решении краевой задачи. Поперечная сила $Q = (EI \cdot y'')' = C - px \cdot y'$, откуда с учетом граничных условий $y'(l) = 0$; $Q(l) = 0$ получим, что $C = 0$. Однако значение поперечной силы $Q(0)$ нельзя принять равным нулю, так как, удовлетворяя условию на границе при $x \rightarrow 0$, имеем при потере устойчивости $y' \rightarrow \infty$, и, следовательно, неопределенность. Поэтому принятие условия $Q(0) = 0$ и сведение задачи к уравнению Бесселя второго порядка приводит к линейной зависимости одного из решений системы уравнений и, как следствие, к неверному результату.

Учитывая, что $C = 0$, выполним замену переменных $y \equiv y_1$; $y_1' = y_2$, что соответствует классическому решению. Тогда инвариант системы уравнений примет вид:

$$\text{In}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5\alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 \quad (7)$$

Сравнивая (7) с (5), видим принципиальное различие математических моделей. Соответственно, получатся разные значения собственных чисел.

На рисунке 3 показано изменение определителя третьего порядка, соответствующего граничным условиям (2) (кривая 1) и определителя второго порядка классического решения [3] (кривая 2). Кривая 1 определяет в интервале $(0 - 71,0)$ три корня: $\beta_{kr1}^{(1)} = 6,40$; $\beta_{kr2}^{(1)} = 10,26$; $\beta_{kr3}^{(1)} = 58,03$, а кривая 2 – единственный корень $\beta_{kr}^{(2)} = 7,84$, что делает классическое решение сомнительным, точнее – неверным.

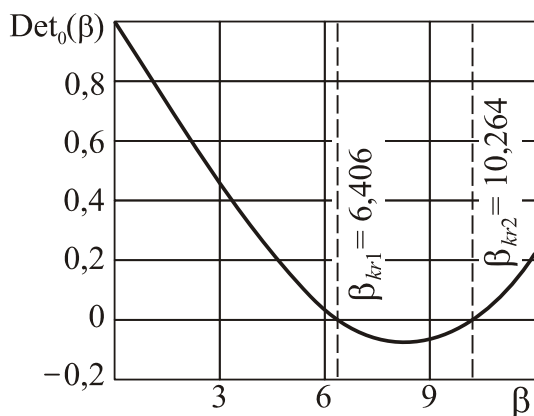


Рисунок 2

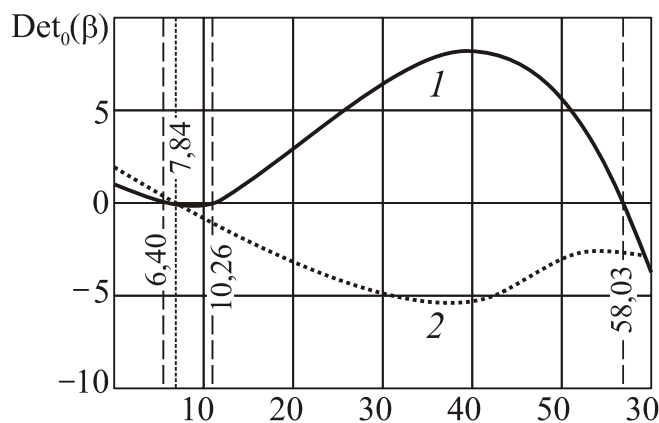


Рисунок 3

Выше было принято, что жесткость стойки EI не зависит от продольной координаты x . Откажемся от этого ограничения, однако здесь необходимо заметить, что геометрия поперечного сечения стойки зависит от многих факторов, например – конструктивных, а потому говорить об аналитичности функции жесткости по продольной координате достаточно проблематично. Поэтому далее будем даже полагать, что исследуется модель конструкции, выполненная в соответствии с

заданной функцией жесткости, такой, чтобы выполнить условия аналитичности, необходимые для получения точного решения уравнений типа (1).

Обозначим $D(x) = EI(x)$ и выберем функцию жесткости, например, в виде

$$D(x) = D(0) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda \gamma [\delta(x-1) + (1-\delta)(x^2-1)] + \lambda(1-\gamma)(x-1)^2}.$$

Дробный множитель будем понимать как относительную жесткость D .

Очевидно, полагая $\lambda = 0$, получим $D(x) = \text{const} = D(0)$. Если $\lambda \neq 0$, то для $x = 0$ получим значение жесткости $D(0)$, а при $x = 1$ жесткость равна

$$D(1) = (1 + \lambda)D(0).$$

То есть, в принятой модели параметр λ показывает, на сколько в долях $D(0)$ увеличена жесткость в конечном сечении по отношению к начальному сечению. В формуле имеется несколько параметров, позволяющих варьировать жесткость по длине стержня. Для примера запишем систему для конкретного случая выбранных параметров. Например, при любом λ и $\gamma = 1$; $\delta = 1$ система уравнений (3) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1-\lambda(x-1)}{1+\lambda} \\ r + \vartheta x & \frac{\alpha + \beta x}{1+\lambda} (1-\lambda(x-1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

где r и ϑ – параметры, учитывающие наличие упругого основания переменной жесткости по Винклеру.

Рассмотрим теперь модель более общего типа при произвольных значениях всех введенных параметров. Обобщим уравнение (1) с учетом упругого основания:

$$(D(x)y''(x))'' + ((P + px)y')' + (r + \vartheta x)y = 0.$$

Выполнив соответствующие преобразования (см. выше), получим выражение для инварианта $In(x)$:

$$\begin{aligned} In(x) = & \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_0 \\ r & \alpha\lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_0\beta & -\lambda_1 \\ \vartheta - \frac{1}{2}\lambda_0\alpha\beta & \alpha\lambda_1 + \frac{1}{2}\beta\lambda_0 \end{pmatrix} x + \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_1\beta & -\lambda_2 \\ -\frac{1}{2}(\alpha\lambda_1 + \frac{1}{2}\beta\lambda_0)\beta & \alpha\lambda_2 + \frac{1}{2}\beta\lambda_1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_2\beta & 0 \\ -\frac{1}{2}(\alpha\lambda_2 + \frac{1}{2}\beta\lambda_1)\beta & \frac{1}{2}\lambda_2\beta \end{pmatrix} x^3 + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\lambda_2\beta^2 & 0 \end{pmatrix} x^4. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения $\lambda_0 = \frac{1 + \lambda(1 - 2\chi(1 - \gamma))}{1 + \lambda}$;

$$\lambda_1 = \frac{\lambda[(1 - \gamma)(3\chi - 2) - \delta\gamma]}{1 + \lambda}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda[(1 - \gamma)(1 - \chi) - \gamma(1 - \delta)]}{1 + \lambda}.$$

Представление инварианта (8) помощью величин (6) позволяет получить точные решения для критических параметров нагрузки и, более того, исследовать влияние на эти параметры характера распределения жесткости по длине стойки.

На рисунке 4 приведен пример подбора модели жесткости в зависимости от значений параметров δ, γ . Кривые показывают приращение жесткости по длине стержня: 1 – «вогнутая» ($\delta = 0, \gamma = 1$); 2 – «выпуклая» ($\delta = 0, \gamma = 0$); 3 – «почти линейная» ($\delta = 0,5, \gamma = 0,5$), суть комбинация предыдущих. При этом принято $\lambda = 0,5; \chi = 0$.

Принятая модель работает и при $-1 < \lambda < 0$, что позволяет сравнить решения с «тупым» и «острым» концами в сечении $x = 1$. Важно отметить, что собственным значениям в каждой из пар $(\alpha_{k1}, \beta_{k1})$ и $(\alpha_{k2}, \beta_{k2})$ соответствуют «похожие» в некотором смысле собственные формы. Это позволяет сформулировать мысль, что при наличии распределенной нагрузки форму потери статической устойчивости, соответствующую критическому параметру $\beta_{k2} = 10,26$, можно назвать «промежуточной».

Итак, варьируя параметр жесткости λ , можно вычислить соответствующие значения критического веса. На рисунке 5 показана зависимость критических параметров первых двух форм. С уменьшением жесткости стержня к нижнему торцу ($\lambda < 0$) критическая нагрузка первой собственной формы уменьшается вплоть до нуля. При постоянной жесткости ($\lambda = 0$) имеем отмеченное ранее значение ($\beta_{kr} = 6,406$), а при дальнейшем увеличении жесткости стержня у нижнего торца кри-

тическое значение возрастает, однако до определенного предела. То есть, начиная с определенного значения параметра жесткости, стойка не теряет устойчивости по первой собственной форме в рассматриваемом диапазоне нагрузки. С другой стороны, в диапазоне $-0,3 < \lambda < 0,3$ существует названная нами «промежуточная» собственная форма.

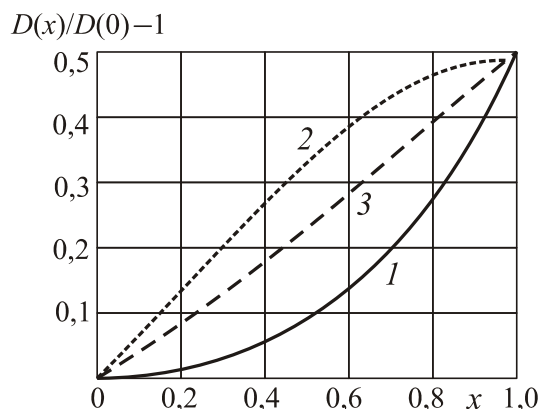


Рисунок 4

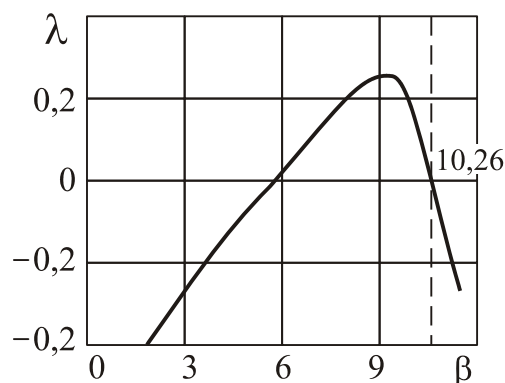


Рисунок 5

В частности, при нулевом значении параметра жесткости λ соответствующее значение критического параметра будет равно 10,26, как это отмечено выше. Важно также заметить, что ветви равновесия первой и второй форм «близки» – при определенной нагрузке переходят одна в другую, то есть возможен переход с ветви неустойчивых равновесий на ветвь устойчивых равновесий с сохранением потенциальной энергии деформирования, соответствующей второй собственной форме равновесия в начальный момент перехода на первую.

РЕЗЮМЕ

В задаче продольного изгиба сжатой консольной стойки уточнены граничные условия. Получены новые результаты для критической нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Косых, Э. Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней / Э. Г. Косых – Вестник СамГУ. Естественная серия. 2008. №8/1(67). С. 390-399.
- 2 Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем. / А. С. Вольмир / М. Физматгиз. 1967. 984с./
- 3 Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов / М.: Физматгиз, 1959. 328 с./
- 4 Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко / М.: Наука, 1971. 808 с.
- 5 Краткий справочник машиностроителя. Машиностроение, 1966. 797 с.

SUMMARY

Stable compression strut s variable stiffness with variable load . In the problem of the buckling of compressed cantilever rackspecified boundary conditions. Learn new results for the critical load. The problem is generalized to the rack variable

Поступила в редакцию 15.01.2013