

ТЕРМОСИЛОВОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

д. ф.-м. н. Старовойтов Э. И., соиск. Савицкий Д. М.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Слоистые элементы конструкций, нашли широкое применение в авиа-, ракето-, приборостроении и строительстве, поэтому разработка методик и решения соответствующих краевых задач актуальны. Исследованию напряженно-деформированного состояния неоднородных элементов конструкций посвящены многие публикации, в том числе [1–6]. В рамках теории малых упругопластических деформаций [7] в работах [2, 3] приведены результаты по изотермическому квазистатическому и динамическому деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Здесь, в рамках теории простых переменных нагружений [8, 9], рассмотрено однократное и переменное термосиловое нагружение несимметричного по толщине трехслойного стержня с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейно-упругим наполнителем.

Термоупругий изгиб. Рассмотрим трехслойный стержень с жестким наполнителем (рисунк 1). Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью наполнителя. Принимаем, что в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в жестком несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Температурное поле T_k в k -м слое рассматриваемого стержня считаем известным.

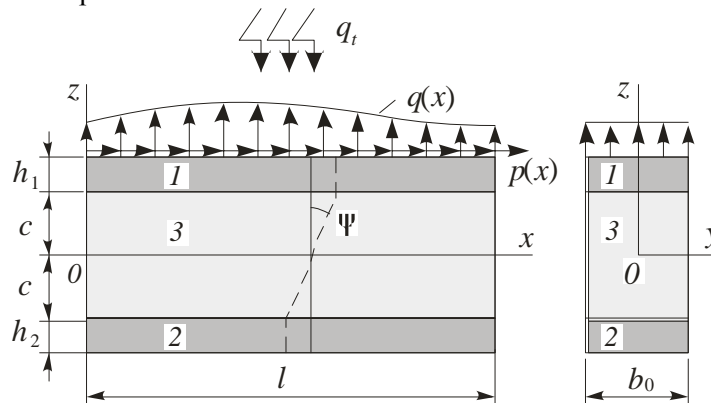


Рисунок 1 – Расчетная схема при термосиловом нагружении трехслойного стержня

На внешний слой стержня действует поверхностная силовая нагрузка $p(x)$, $q(x)$, через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, на границах слоев – склейки. С помощью введенных гипотез, продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u^{(3)} = u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, верхний индекс k – номер слоя.

Компоненты тензора деформаций следуют из соотношений Коши и выражений (1), напряжения – из закона Гука. Внутренние силы и моменты вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)}, \quad M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)}, \quad H = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)}, \quad Q = Q^{(3)}, \\ N^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b_0 – ширина сечения стержня, интегралы берутся по толщине h_k каждого из слоев.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются соотношения термоупругости в девиаторно-шаровой форме [7]:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k), \quad (3)$$

где $s_{xx}^{(k)}, \varepsilon_{xx}^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций, G_k, K_k – термозависимые модули сдвига и объемного деформирования [2, 3], α_k – коэффициент линейного температурного расширения.

С помощью соотношений (1), (3) внутренние усилия и моменты (2) выражаются через три искомые функции $u(x), \psi(x), w(x)$:

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_{xx}^{(1)} dz = b_0 K_1^+ \left[h_1 (u_{,x} + c\psi_{,x}) - (c + \frac{1}{2}h_1) h_1 w_{,xx} \right] - 3b_0 K_1 \alpha_1 \int_c^{c+h_1} T_1 dz, \\ N^{(2)} &= b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{xx}^{(2)} dz = b_0 K_2^+ \left[h_2 (u_{,x} - c\psi_{,x}) + (c + \frac{1}{2}h_2) h_2 w_{,xx} \right] - 3b_0 K_2 \alpha_2 \int_{-c-h_2}^{-c} T_2 dz, \\ N^{(3)} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xx}^{(3)} dz = 2b_0 K_3^+ c u_{,x} - 3b_0 K_3 \alpha_3 \int_{-c}^c T_3 dz, \\ M^{(1)} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_{xx}^{(1)} z dz = b_0 K_1^+ \left[h_1 (c + \frac{1}{2}h_1) (u_{,x} + c\psi_{,x}) - (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2) h_1 w_{,xx} \right] - 3K_1 \alpha_1 \int_c^{c+h_1} T_1 z dz, \\ M^{(2)} &= b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{xx}^{(2)} z dz = b_0 K_2^+ \left[-h_2 (c + \frac{1}{2}h_2) (u_{,x} - c\psi_{,x}) - (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2) h_2 w_{,xx} \right] + 3K_2 \alpha_2 h_2 \int_{-c-h_2}^{-c} T_2 z dz, \\ M^{(3)} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xx}^{(3)} z dz = \frac{2}{3} b_0 K_3^+ c^3 (\psi_{,x} - w_{,xx}) - 3K_3 \alpha_3 \int_{-c}^c T_3 z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)} dz = 2b_0 G^{(3)} c \psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия трехслойного стержня получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа. При определении виртуальной работы внешних сил считаем, что к срединной поверхности заполнителя приложены произвольные распределенные нагрузки $p(x), q(x)$ (см. рисунок 1), а к торцам стержня – сосредоточенные силы и моменты. Вариация работы сил упругости учитывает работу касательных напряжений в заполнителе.

В результате, используя соотношения (4), получим систему дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} &= -p, \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi &= 0, \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты a_i , входящие в систему (5), зависят от упругих характеристик материалов слоев и через них от температуры:

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \\ a_3 &= c \left[K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2}h_1) + K_2^+ h_2 (c + \frac{1}{2}h_2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \\ a_4 &= K_1^+ h_1 (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2) + K_2^+ h_2 (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \quad a_5 = 2G_3 c, \\ a_6 &= c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right], \quad a_7 = K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2}h_1) - K_2^+ h_2 (c + \frac{1}{2}h_2), \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Температура в уравнения равновесия (5) не входит, поэтому для ее решения можно воспользоваться известным решением, полученным в [2] при изотермическом нагружении:

$$\begin{aligned} u(x) &= \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_4 L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_1 x^2 \right] + C_7 x + C_8, \\ \psi(x) &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ w(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_1 L_4^{-1}(q) + \frac{a_1 C_1}{6} x^3 \right] + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь C_1, \dots, C_8 – константы интегрирования; $L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ – интегральные операторы

$$L_1^{-1}(g) \equiv \int g dx, \quad L_2^{-1}(g) \equiv \iint g dx dx, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx,$$

$$L_4^{-1}(g) \equiv \iiint g \, dx \, dx \, dx \, dx ; \quad g(x) = \gamma_2 p + \gamma_1 \left(\int q \, dx + C_1 \right),$$

$$\beta^2 = \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_3 = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2}, \quad (8)$$

$$\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \neq 0, \quad \alpha_1 = a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_2 = a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_1 a_2 - a_6^2.$$

Используя соотношения (4), выпишем конечные выражения обобщенной внутренней продольной силы и изгибающего момента (2) через перемещения (7) и температуру:

$$N = b_0 \left(a_1 u_{,x} + a_6 \psi_{,x} - a_7 w_{,xx} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, dz \right),$$

$$M = b_0 \left(a_7 u_{,x} + a_3 \psi_{,x} - a_4 w_{,xx} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, z \, dz \right). \quad (9)$$

Рассмотрим два вида закрепления торцов стержня. В случае жесткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце граничные условия следующие:

$$x=0: \quad w = w_{,x} = u = \psi = 0,$$

$$x=l: \quad M = M_{,x} = N = \psi = 0. \quad (10)$$

Подставив решение (7) в условия (10), учитывая (9), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант C_1, \dots, C_8 . После ее решения имеем:

$$C_1 = -L_1^{-1}(q)|_{x=l}, \quad C_3 = \frac{1}{\beta} \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) \, dx|_{x=0},$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left(\int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) \, dx|_{x=l} - \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) \, dx|_{x=0} \right) - \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) \, dx|_{x=l} \right],$$

$$C_4 = \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_1^{-1}(p)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, dz \right) - \frac{a_1}{\alpha_2} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, z \, dz \right) - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1 l,$$

$$C_5 = \frac{a_7}{\alpha_2} L_2^{-1}(p)|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_3^{-1}(q)|_{x=0}, \quad C_6 = \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(p)|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_4^{-1}(q)|_{x=0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int \psi \, dx|_{x=0},$$

$$C_7 = \frac{a_4}{\alpha_2} \left(L_1^{-1}(p)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, z \, dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} C_1 l,$$

$$C_8 = \frac{a_4}{\alpha_2} L_2^{-1}(p)|_{x=0} - \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(q)|_{x=0}. \quad (11)$$

Для шарнирно опертого по обоим торцам стержня граничные условия принимают вид:

$$x=0; l: \quad w = M = u = \psi = 0.$$

Им удовлетворяют следующие константы интегрирования:

$$C_1 = \frac{1}{l} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=0} - L_2^{-1}(q)|_{x=l} \right), \quad C_4 = \frac{a_7}{a_4} \left(D_1|_{x=0} - D_1|_{x=l} \right) - \frac{1}{a_4} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=0} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, z \, dz \right),$$

$$C_5 = D_2|_{x=0} - D_2|_{x=l} - \frac{a_7 l}{2a_4} \left(D_1|_{x=0} - D_1|_{x=l} \right) - \frac{l}{2a_4} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=0} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, z \, dz \right),$$

$$C_7 = D_1|_{x=0} - D_1|_{x=l}, \quad D_1 = \frac{a_7}{l \alpha_2} L_3^{-1}(q) - \frac{a_7 l}{2 \alpha_2} \left(L_2^{-1}(q) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, z \, dz \right) - \frac{a_4}{l \alpha_2} L_2^{-1}(p),$$

$$D_2 = \frac{a_1}{l \alpha_2} \left(\int \psi \, dx + L_4^{-1}(q) \right) - \frac{a_1 l}{6 \alpha_2} \left(L_2^{-1}(q) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k \, z \, dz \right) - \frac{a_7}{l \alpha_2} L_3^{-1}(p). \quad (12)$$

Константы C_2, C_3, C_6, C_8 сохраняют свой предыдущий вид (11).

Упругопластический стержень. Пусть у рассматриваемого стержня, наружные несущие слои выполнены из упругопластического материала, а несжимаемый по толщине наполнитель – нелинейно-упругий. Стержень находится в температурном поле, на его внешний слой действует распределенная силовая нагрузка $p'(x), q'(x)$, при этом соответствующие траектории

нагружения относятся к классу *простых* [7] (один штрих сверху здесь и в дальнейшем обозначает нагружение из естественного состояния). В несущих слоях используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [7]:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k(T_k) f'^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k) \quad (k=1, 2; \quad i, j=x, y, z), \end{aligned} \quad (13)$$

где $f'^{(k)}$ – функция пластичности Ильюшина при нагружении из естественного состояния

$$f'^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(T_k), \\ 1 - \omega'_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k), & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(T_k), \end{cases}$$

$\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций, $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материала.

Для физически нелинейного заполнителя вводятся подобные уравнения состояния:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(3)} &= 2G_k(T_k) f'^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}) \varepsilon_{ij}^{(3)}, \\ \sigma^{(3)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_k T_k) \quad (i, j=x, y, z), \\ f'^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}) &= \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}(T_k), \\ 1 - \omega'_3(\varepsilon_u^{(3)}), & \varepsilon_u^{(3)} > \varepsilon_s^{(3)}(T_k), \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя, $\omega'_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – универсальная функция физической нелинейности материала k -го слоя.

Выделим в тензорах напряжений (13), (14) упругие (индекс « e ») и неупругие (« ω ») слагаемые:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)e} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)e} &= 2G_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} + 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k), \quad \sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} \omega'_k, \\ \sigma_{xz}^{(3)e} &= 2G_3 \varepsilon'_{xz}{}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \varepsilon'_{xz}{}^{(3)} \omega'_3. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2), получим:

$$N^{(k)} = N^{(k)e} - N^{(k)\omega}, \quad M^{(k)} = M^{(k)e} - M^{(k)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \quad (16)$$

Упругие (индекс « e ») и неупругие (индекс « ω ») составляющие в (16) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N^{(k)e} &= b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)e} dz, \quad N^{(k)\omega} = b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)\omega} dz, \quad M^{(k)e} = b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)e} z dz, \quad M^{(k)\omega} = b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)\omega} z dz, \\ Q^{(3)e} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, \quad Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Система уравнений равновесия (5) в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1 u'_{,xx} + a_6 \psi'_{,xx} - a_7 w'_{,xxx} &= -p' + p'_\omega, \quad a_6 u'_{,xx} + a_2 \psi'_{,xx} - a_3 w'_{,xxx} - a_5 \psi' = h'_\omega, \\ a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxxx} &= -q' + q'_\omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь коэффициенты a_1, \dots, a_7 определены соотношениями (6); величины $p'_\omega, h'_\omega, q'_\omega$ учитывают физическую нелинейность материалов слоев и вычисляются по формулам, следующим из (15) и (17)

$$p'_\omega = \frac{1}{b_0} N'^\omega, \quad h'_\omega = \frac{1}{b_0} (H'^\omega - Q'^\omega), \quad q'_\omega = \frac{1}{b_0} M'^\omega. \quad (19)$$

$$N'^\omega = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'^{(k)} dz, \quad M'^\omega = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'^{(k)} z dz, \quad Q'^\omega = 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega'_3 \psi' dz.$$

Система дифференциальных уравнений (18) существенно нелинейна. О точном ее решении в данном случае говорить не приходится, поэтому для ее решения необходимо использовать приближенные методы, типа метода «упругих» решений Ильюшина.

Предположим, что в (18), (19) содержится малый параметр, например, все $\omega_k < 1$. Тогда возможен метод итераций, при котором для любого n -го приближения система уравнений (18) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_1 u'^{(n)}_{,xx} + a_6 \psi'^{(n)}_{,xx} - a_7 w'^{(n)}_{,xxx} &= -p' + p'^{(n-1)}_\omega, \\ a_6 u'^{(n)}_{,xx} + a_2 \psi'^{(n)}_{,xx} - a_3 w'^{(n)}_{,xxx} - a_5 \psi'^{(n)} &= h'^{(n-1)}_\omega, \end{aligned}$$

$$a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxxx} = -q' + q_{\omega}^{(n-1)}. \quad (20)$$

Величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$, соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ($n = 1$) полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных «внешних» нагрузок. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев:

$$p_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} N'_{,x}{}^{\omega(n-1)}, \quad h_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H'_{,x}{}^{\omega(n-1)} - Q'^{\omega(n-1)}), \quad q_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} M'_{,xx}{}^{\omega(n-1)},$$

$$N'^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^3 N'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'_k(\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} dz,$$

$$M'^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^3 M'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'_k(\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} z dz,$$

$$H'^{\omega(n-1)} = c(N'^{(1)\omega(n-1)} - N'^{(2)\omega(n-1)}) + M'^{(3)\omega(n-1)}, \quad Q'^{\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega'_3(\varepsilon'_u{}^{(3)(n-1)}) \psi'^{(n-1)} dz.$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче термоупругости с дополнительными «внешними» нагрузками. При этом система уравнений (20) на каждом шаге отличается от соответствующей системы (5) в задаче термоупругости только наличием этих известных «внешних» нагрузок. Поэтому решение задачи термоупругопластичности можно записать в следующем рекуррентном виде:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g'^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_4 L_2^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь введена функция

$$g'^{(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_{\omega}^{(n-1)} + \gamma_2 (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + \gamma_1 \left(\int (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) dx + C_1^{(n)} \right);$$

коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и линейные интегральные операторы $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ определены формулами (8). Константы интегрирования $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. Удовлетворяя решением (21) граничные условия для консоли (10), получим:

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} &= -L_1^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)})|_{x=l}, \quad C_3^{(n)} = \frac{1}{\beta} \int g'^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0}, \\ C_2^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left(\int g'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=l} - \int g'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0} \right) - \int g'^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx|_{x=l} \right], \\ C_4^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_1^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right)|_{x=l} - \\ &\quad - \frac{a_1}{\alpha_2} \left(L_2^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right)|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{(n)} l, \\ C_5^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} L_2^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_3^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0}, \\ C_6^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_4^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int \psi^{(n)} dx|_{x=0}, \end{aligned}$$

$$C_7^{(n)} = \frac{a_4}{\alpha_2} \left(L_1^{-1}(p' - p'_{\omega}{}^{(n-1)}) \Big|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_2^{-1}(q' - p'_{\omega}{}^{(n-1)}) \Big|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} C_1^{(n)} l, \\ C_8^{(n)} = \frac{a_4}{\alpha_2} L_2^{-1}(p' - p'_{\omega}{}^{(n-1)}) \Big|_{x=0} - \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(q' - q'_{\omega}{}^{(n-1)}) \Big|_{x=0}. \quad (22)$$

Для шарнирно опертого стержня константы интегрирования (12) модифицируются подобным образом, при этом $C_2^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_6^{(n)}$, $C_8^{(n)}$ сохраняют вид (22).

Численные результаты получены для трехслойного стержня, слои которого выполнены из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Термомеханические характеристики этих материалов приведены в [3–4]. Параметры слоев: $h_1 = h_2 = 0,03$, $c = 0,09$; интенсивность распределенной нагрузки $q = -0,75$ МПа, $p = 0$. Температуру принимаем однородной во всех слоях стержня. Функции физической нелинейности приняты в виде, предложенном в [2].

Численный счет продемонстрировал практическую сходимость метода упругих решений. За искомое решение принято 8-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %.

На рисунке 2 показаны перемещения в трехслойном упругопластическом стержне (a – прогиб, b – относительный сдвиг в заполнителе): 1 – упругие изотермические ($T_1 = 293$ К), 2 – упругие термосиловые ($T_2 = 343$ К), 3 – упругопластические изотермические ($T_1 = 293$ К), 4 – упругопластические термосиловые ($T_3 = 343$ К). Здесь учет физической нелинейности материалов слоев повышает упругие расчетные перемещения на 20 %, при нагревании на 50 К – на 22 %.

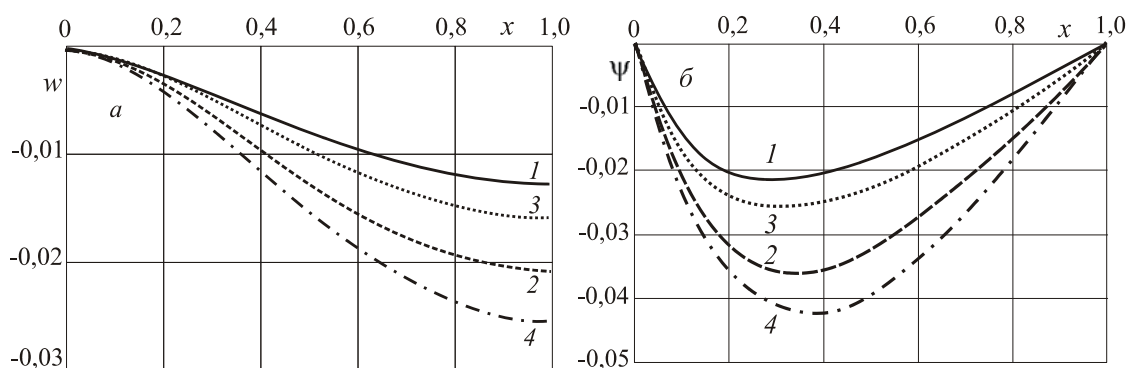


Рисунок 2. – Изменение прогиба w и относительного сдвига ψ вдоль оси стержня

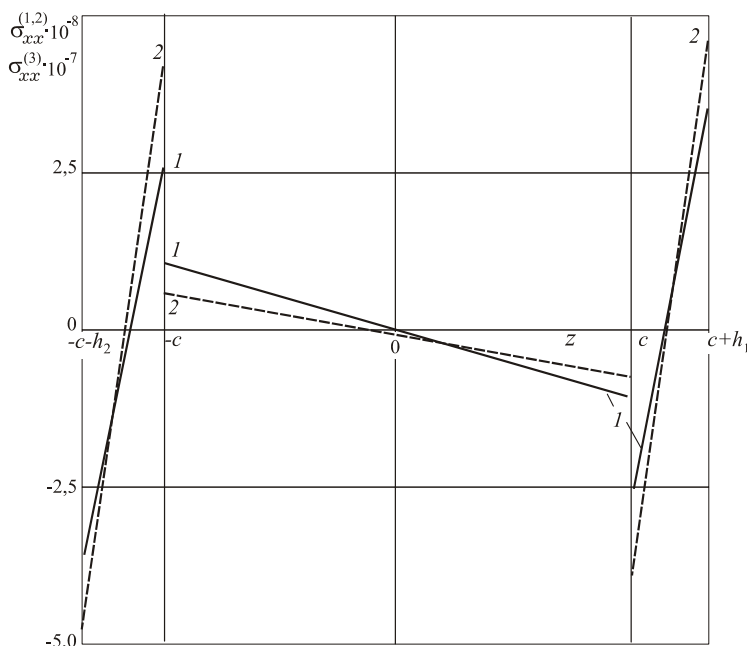


Рисунок 3. – Изменение нормальных напряжений по толщине стержня

Рисунок 3 иллюстрирует распределение по поперечному сечению ($x = 0$) нормальных напряжений σ_{xx} : 1 – упругие изотермические ($T_1 = 293$ К), 2 – упругопластические термосиловые ($T_3 = 343$ К). Воздействие температуры и учет нелинейности приводят к увеличению экстремумов напряжений во внешних слоях на 30 %, в заполнителе – на 50 %.

РЕЗЮМЕ

Предложенная методика позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойного физически нелинейного стержня в температурном поле. Следует подчеркнуть, что приведенные решения справедливы только в области малых упругопластических деформаций при простых нагружениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheng Z., Jemah A. K., Williams F. W. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. 63, N 4. P. 1019–1026.
2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Плещачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
4. Starovoitov, E. I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
5. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // Mechanics of Solids. – Vol. 46, № 2. – 2011. – P. 291–298.
6. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation International // International Applied Mechanics. – 2011 – Vol. 47, N 5. – P. 580–589.
7. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
8. Москвитин, В. В. Циклическое нагружение элементов конструкций. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
9. Москвитин В.В., Старовойтов Э. И. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

SUMMARY

The proposed method allows us to investigate the stress-strain state of the physical non-linear three-layer beam in the temperature field. It should be emphasized that these solutions are valid only in the field of small elastic deformations under simple loadings.

Поступила в редакцию 27.09.2013