

**ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПЕРЕКРЕСТНО-АРМИРОВАННОГО МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНОГО СЛОЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ ПРАНДТЛЯ – РЕЙССА – ХИЛЛА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

к. ф.-м. н. Романова Т.П., д.ф.-м. н. Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск*

В последние десятилетия в инженерной практике все более активное применение находят армированные металлокомпозиты. Известно, что при интенсивном термосиловом нагружении металлоконструкции могут работать в условиях неупругого деформирования [1], поэтому актуальной является проблема математического моделирования процессов пластичности в армированных металлокомпозитах. На сегодняшний день эта проблема находится, по сути, в зачаточном состоянии. Так, в [2] рассмотрено упругопластическое деформирование однонаправленно-армированных композитов; модели упругопластического поведения (в рамках деформационной теории) перекрестно армированных в плоскости металлокомпозитов предложены в [3, 4], а в [5 и др.] была построена структурная модель армированного слоя на базе определяющих соотношений для идеально-жесткопластических сред. (Целесообразность использования последней модели ограничивается изучением предельных нагрузок и динамическим поведением жесткопластических тонкостенных элементов композитных конструкций.)

Однако при исследовании, например, вязкоупругопластического поведения металлокомпозитов недопустимо использовать соотношения деформационной теории пластичности, так как вязкие свойства (в рамках технических теорий ползучести) описываются уравнениями типа теории течения [1]. Следовательно, в этом случае и пластические свойства металлокомпозита должны быть описаны в рамках теории течения [1]. В случае плоской деформации такая модель была построена в [6]. В инженерной же практике, как правило, встречаются конструкции, в которых реализуются условия не плоской деформации, а плоского напряженного состояния (ПНС) – тонкостенные элементы конструкций типа пластин и оболочек. В отличие от линейной теории упругости, в рамках теории пластического течения эти два состояния не идентичны, поэтому требуют самостоятельного рассмотрения. В связи с этим настоящее исследование посвящено построению численно-аналитической модели упругопластического поведения перекрестно-армированного металлокомпозитного слоя на основе теории течения типа Прандтля – Рейсса – Хилла в случае его ПНС.

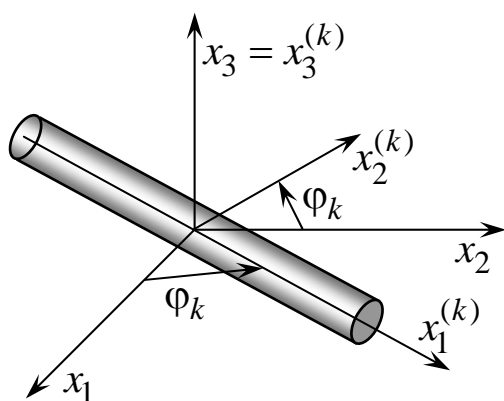


Рисунок 1. – Система координат, связанная с арматурой  $k$ -го семейства

В декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  рассмотрим металлокомпозитный слой, ориентированный перпендикулярно оси  $x_3$ , армированный  $K$  семействами металлических проволок (волокон) в плоскостях, параллельных плоскости  $(x_1, x_2)$ , нагруженный и закрепленный так, что в нем реализуется случай обобщенного ПНС. Параметры армирования  $k$ -м семейством волокон определяются плотностью  $\omega_k$  и углом  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ), отсчитываемым от направления  $x_1$  (рисунок 1).

Используя структурную модель композитного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах, впервые предложенную в [3], получим следующие выражения для ненулевых компонентов осредненных напряжений в композиции:

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1 - \delta\Omega)\sigma_{ij} + \sum_{k=1}^K [\sigma_k - (1 - \delta)\sigma_{0k}] \omega_k l_{ki} l_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где

$$\Omega \equiv \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad l_{k1} \equiv \cos \varphi_k, \quad l_{k2} \equiv \sin \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (2)$$

$\delta$  – функция переключения, позволяющая выбрать вариант модели [7] (жесткий при  $\delta=0$  и мягкий при  $\delta=1$ );  $\sigma_{ij}$  – напряжения в связующей матрице;  $\sigma_k$  – продольное напряжение в арматуре  $k$ -го семейства;  $\sigma_{0k}$  – одномерное напряженное состояние в фиктивных волокнах из материала связующей матрицы, направленных по траекториям армирования  $k$ -го семейства [7].

Так как в волокнах  $k$ -го семейства реализуется одномерное напряженное состояние  $\sigma_k$ , то в рамках модели типа Прандтля – Рёйсса – Хилла для фазовых материалов в случае ПНС можем записать следующие определяющие соотношения [1, 3, 8]:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \dot{\varepsilon}_{ll} - 9\alpha \mu^2 \frac{s_{ij}}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 s_{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + 3\alpha \mu^2 \frac{s_{ij} (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \dot{\varepsilon}_{33} \quad (i, j = 1, 2), \\ 2\mu \dot{\varepsilon}_{33} + \lambda \sum_{l=1}^3 \dot{\varepsilon}_{ll} + 3\alpha \mu^2 \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 s_{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} - \alpha \mu^2 \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \dot{\varepsilon}_{33} &= 0, \\ \sigma_k &= f_k(\varepsilon_k), \quad \sigma_{0k} = f_0(\varepsilon_k), \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \sigma_*^2 \equiv \frac{3}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 s_{lm}^2 = \Phi^2(q), \quad q \equiv \int d\varepsilon_*^p, \quad (d\varepsilon_*^p)^2 \equiv \frac{2}{3} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (d\varepsilon_{lm}^p)^2, \\ H &\equiv \frac{d\sigma_*}{d\varepsilon_*^p}, \quad s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \sigma_0 \equiv \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \sigma_{i3} = s_{j3} \equiv 0, \quad \varepsilon_{j3} \equiv 0 \quad (i = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_* = \Phi(q) \text{ и } \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 s_{lm} d\varepsilon_{lm} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \sigma_* < \Phi(q) \text{ или } \sigma_* = \Phi(q) \text{ и } \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 s_{lm} d\varepsilon_{lm} < 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon_k = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{ij} l_{ki} l_{kj}, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (6)$$

$E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующей матрицы;  $\lambda$ ,  $\mu$  – постоянные Ламе этого же материала;  $s_{ij}$  – компоненты тензора-девиатора напряжений в связующем;  $\sigma_*$  – интенсивность напряжений в связующем;  $H$  – модуль упрочнения связующего;  $d\varepsilon_*^p$  – интенсивность приращений пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$ ;  $\varepsilon_{ij}$  – деформации армированного слоя, в котором реализуются условия ПНС (в рамках используемой структурной модели эти деформации совпадают с деформациями в связующем);  $\varepsilon_k$  – осевые деформации в арматуре  $k$ -го семейства;  $q$  – параметр упрочнения материала связующей матрицы (параметр Одквиста);  $\Phi$  – известная функция изотропного упрочнения связующего, зависящая от параметра Одквиста;  $f_0$ ,  $f_k$  – известные функции, определяющие диаграмму растяжения – сжатия материалов связующей матрицы и арматуры  $k$ -го семейства (как при активном нагружении, так и при разгрузке);  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\alpha$  – функция переключения, позволяющая учитывать процесс активного нагружения связующего (первая строка в (5)) или его разгрузку (вторая строка в (5)); точка означает производную по времени  $t$  (причем время может быть реальным или условным, например под условным временем может пониматься параметр нагружения).

Так как даже простейшие упругопластические задачи для изотропных элементов конструкций в рамках теории течения требуют привлечения численных методов интегрирования по времени [8, 9], то тем более это касается сложно армированных композитных сред. Поэтому в настоящем исследовании на основе метода шагов по времени разработаем численно-аналитическую модель упругопластического деформирования перекрестно-армированного металлокомпозитного слоя. С этой целью дискретизируем задачу по времени  $t$ , т. е. будем рассматривать ее решения в моменты времени  $t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$ ). Предполагаем, что в момент времени  $t_n$  решение ин-

тересующей нас задачи уже известно. Используя (3) с учетом (4), (5), построим определяющие соотношения для фазовых материалов в следующий момент времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где  $\tau_n$  – шаг по времени (возможно, переменный), содержащие только деформации и напряжения (а не их скорости, как в первых двух соотношениях (3)). Для этого введем в рассмотрение дискретные по времени функции пространственных переменных  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{0k}^n(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{0k}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_k^n(\mathbf{x}) \equiv \sigma_k(t_n, \mathbf{x}), \quad \varepsilon_k^n(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_k(t_n, \mathbf{x}), \quad \varepsilon_{ij}^n(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \\ \sigma_*^n(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_*(t_n, \mathbf{x}), \quad H^n(\mathbf{x}) \equiv H(t_n, \mathbf{x}), \quad s_{ij}^n(\mathbf{x}) \equiv s_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (8)$$

которые по предположению в момент времени  $t_n$  уже известны.

Проинтегрируем первые два соотношения (3) численно на интервале  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ , используя абсолютно устойчивый двустадийный метод Лобатто ША (метод трапеций), имеющий второй порядок точности по  $\tau_n$  [10], тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n &= 2\mu \left( \varepsilon_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{ij}^n \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \left( \varepsilon_{ll}^{n+1} - \varepsilon_{ll}^n \right) - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left( \varepsilon_{lm}^{n+1} - \varepsilon_{lm}^n \right) \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \right. \\ &+ \left. \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left( \varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \right. \\ &+ \left. \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right], \quad 2\mu \left( \varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) + \lambda \sum_{l=1}^3 \left( \varepsilon_{ll}^{n+1} - \varepsilon_{ll}^n \right) + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left( \varepsilon_{lm}^{n+1} - \varepsilon_{lm}^n \right) \times \\ &\times \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^{n+1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] - \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \left( \varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) \times \\ &\times \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right)^2 \right] = 0, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} &= 2\mu \varepsilon_{ij}^{n+1} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^{n+1} - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^{n+1} + \\ &+ \left\{ \lambda \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \left( \varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) + \quad (9) \\ &+ \sigma_{ij}^n - 2\mu \varepsilon_{ij}^n - \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^n + \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^n, \\ &\left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right)^2 \right] \right\} \left( \varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left\{ \lambda \delta_{lm} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[ \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^{n+1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left( \sigma_*^n \right)^{-2} \left( 3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \times \\ &\times \left( \varepsilon_{lm}^{n+1} - \varepsilon_{lm}^n \right) = 0, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Соотношения (9) с учетом (4) по форме совпадают с законом нелинейно-упругого деформирования материала связующей матрицы с «начальными напряжениями» при ПНС.

Линеаризуем соотношения (9), используя метод простой итерации (метод переменных параметров упругости [9]). Пусть в момент времени  $t_{n+1}$  на некоторой  $r$ -й итерации известны приближения напряжений в связующем  $\sigma_{ij}^{(r)}$  (согласно (4), известными будут  $r$ -е приближения функций  $\sigma_*^{(r)}$ ,  $s_{ij}^{(r)}$ ,  $H^{(r)}$ ), для следующего же  $(r+1)$ -го приближения деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  и напряжений  $\sigma_{ij}^{(p)}$  будут справедливы линейные соотношения (см. (9)):

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(p)} &= 2\mu \varepsilon_{ij}^{(p)} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^{(p)} - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} + \left( \sigma_* \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^{(p)} + \\
&+ \left\{ \lambda \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} \left( \sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) + \left( \sigma_* \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \times \quad (10) \\
&\times \left( \varepsilon_{33}^{(p)} - \varepsilon_{33}^n \right) + \sigma_{0ij}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2; \\
&\left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right)^2 + \left( \sigma_* \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right)^2 \right] \right\} \left( \varepsilon_{33}^{(p)} - \varepsilon_{33}^n \right) = \\
&= - \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left\{ \lambda \delta_{lm} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{(r)} \left( \sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) + \left( \sigma_* \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{lm}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \times \\
&\times \varepsilon_{lm}^{(p)} + \sigma_{033}^{(r)}, \quad p = r + 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{0ij}^{(r)} &\equiv \sigma_{ij}^n - 2\mu \varepsilon_{ij}^n - \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^n + \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} + \left( \sigma_* \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^n, \\
\sigma_{033}^{(r)} &\equiv \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left\{ \lambda \delta_{lm} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{(r)} \left( \sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) + \right. \quad (12) \\
&\left. + \left( \sigma_* \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{lm}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \varepsilon_{lm}^n, \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Выразим из (11)  $\varepsilon_{33}^{(p)} - \varepsilon_{33}^n$  и исключим эту разность из (10), тогда получим линейные равенства

$$\sigma_{ij}^{(p)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 C_{ijlm}^{(r)} \varepsilon_{lm}^{(p)} + \sigma_{*ij}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2, \quad p = r + 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
C_{ijlm}^{n+1} &\equiv 2\mu\delta_{il}\delta_{jm} + \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} - \frac{9}{2}\alpha\mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] - \\
&- \left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2}\alpha\mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right)^2 \right] \right\}^{-1} \times \\
&\times \left\{ \lambda\delta_{lm} + \frac{3}{2}\alpha\mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{n+1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{lm}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \times \\
&\times \left\{ \lambda\delta_{ij} + \frac{3}{2}\alpha\mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\}, \\
\sigma_{*ij}^{n+1} &\equiv \left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2}\alpha\mu^2 \left[ \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left( \sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left( 3\mu + H \right)^{-1} \left( \sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right)^2 \right] \right\}^{-1} \times \\
&\times \sigma_{033}^{n+1} + \sigma_{0ij}^{n+1}, \quad i, j, l, m = 1, 2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Равенства (13) с учетом (12), (14) формально совпадают с определяющими соотношениями плоской задачи линейной теории упругости с предварительным напряженным состоянием, задаваемым функциями  $\sigma_{*ij}^{n+1}$ .

Используя метод секущего модуля [8], линейризуем и два последних соотношения в (3), которые справедливы в любой момент времени  $t$ :

$$\sigma_k^{(p)} = g_k \left( \varepsilon_k^{(r)} \right) \varepsilon_k^{(p)}, \quad \sigma_{0k}^{n+1} = g_0 \left( \varepsilon_k^{(r)} \right) \varepsilon_k^{(p)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad p = r + 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \tag{15}$$

где

$$g_k(\varepsilon_k) \equiv f_k(\varepsilon_k) / \varepsilon_k, \quad g_0(\varepsilon_k) \equiv f_0(\varepsilon_k) / \varepsilon_k, \quad 1 \leq k \leq K. \tag{16}$$

В рамках используемой структурной модели  $p$ -ые приближения для деформаций в арматуре  $k$ -го семейства  $\varepsilon_k^{(p)}$  и в связующем  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$  в момент времени  $t_{n+1}$  удовлетворяют равенствам, аналогичным (6).

Подставим (13), (15) в соотношения (1) и учтем равенства типа (6), тогда после приведения подобных слагаемых получим выражения для  $p$ -ых приближений осредненных напряжений в композиции в момент времени  $t_{n+1}$ :

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(p)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \bar{C}_{ijlm}^{(r)} \varepsilon_{lm}^{(p)} + \bar{\sigma}_{0ij}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2, \quad p = r + 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \tag{17}$$

где

$$\bar{C}_{ijlm}^{(r)} \equiv (1 - \delta\Omega) C_{ijlm}^{(r)} + \sum_{k=1}^K \left[ g_k \left( \varepsilon_k^{(r)} \right) - (1 - \delta) g_0 \left( \varepsilon_k^{(r)} \right) \right] \omega_k l_{ki} l_{kj} l_{kl} l_{km}, \quad \bar{\sigma}_{0ij}^{n+1} \equiv (1 - \delta\Omega) \sigma_{*ij}^{n+1}, \quad i, j, l, m = 1, 2. \tag{18}$$

Напряжения  $\bar{\sigma}_{0ij}^{(r)}$  ( $i, j = 1, 2$ ), согласно (18), (14), (12) известны на  $(r+1)$ -й итерации при  $t = t_{n+1}$ , поэтому их можно трактовать как «начальные напряжения» в композитном слое на этой итерации в рассматриваемый момент времени  $t_{n+1}$ .

Определяющие соотношения (17) линейны и формально совпадают с обобщенным законом Гука для анизотропного неоднородного слоя (в случае плоской задачи теории упругости) с начальным напряженным состоянием, характеризуемым функциями  $\bar{\sigma}_{0ij}^{n+1}$ .

Решив соответствующую граничную задачу [1, 8, 9] в момент времени  $t_{n+1}$  с использованием соотношений (17), (18), (2), определим  $p$ -ые приближения для осредненных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^{(p)}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  в металлокомпозитном слое. Затем на основании (6) сможем вычислить новые приближения деформаций вдоль траекторий армирования  $k$ -го семейства  $\varepsilon_k^{(p)}$ . Зная же  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ ,  $\varepsilon_k^{(p)}$ , по формулам (13), (15) с учетом (14), (12), (16) определим  $p$ -ые приближения напряжений в компонентах композиции  $\sigma_{ij}^{(p)}$ ,  $\sigma_k^{(p)}$ ,  $\sigma_{0k}^{(p)}$ . По известным приближениям напряжений в связующем  $\sigma_{ij}^{(p)}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  из (11) можем вычислить  $\varepsilon_{33}^{(p)}$ , а затем на основании соотношений (4), (5) можем определить  $p$ -ые приближения функций  $\sigma_*^{(p)}$ ,  $s_{ij}^{(p)}$ ,  $H^{(p)}$ ,  $\alpha^{(p)}$  (причем в (5)  $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij}^{(p)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}$ ). Далее, по формулам (18), (2), (14), (16) можем вычислить следующие приближения для коэффициентов  $\bar{C}_{ijlm}^{(p)}$  и  $\bar{\sigma}_{0ij}^{(p)}$  в соотношениях (17), где нужно индекс « $r$ » заменить на « $p$ », а « $p$ » – на « $p+1$ » ( $p = r+1$ ). Далее описанный итерационный процесс повторяется для следующего значения  $r$  до тех пор, пока не сойдется с требуемой точностью.

Если в момент времени  $t_{n+1}$  итерационный процесс сошелся с требуемой точностью, т. е. в каждой точке армированного металлокомпозитного слоя определены функции (8) при замене индекса « $n$ » на « $n+1$ », то далее по описанной выше схеме можно получить решение рассматриваемой задачи об упругопластическом деформировании композитного слоя в следующий момент времени  $t_{n+2}$  и т. д. (Вопрос о сходимости этого итерационного процесса пока остается открытым. Известно лишь, что в случае изотропных материалов такая итерационная процедура сходится [8, 9]. Последнее позволяет надеяться на сходимость процесса и в более общем случае металлокомпозитного слоя.)

В настоящем исследовании для численного интегрирования по времени первых двух определяющих соотношений (3) использовался абсолютно устойчивый двустадийный метод Лобатто ША (метод трапеций), имеющий второй порядок точности по  $\tau_n$  (см. (7)) и являющийся одним из неявных методов Рунге – Кутты [10]. В силу нелинейности уравнений (3) последнее обстоятельство (неявность схемы) приводит к необходимости применения итерационной процедуры для лиnearизации двух последних равенств (3) и соотношений (9).

Традиционно же для численного интегрирования первых двух соотношений (3) используют явный метод Эйлера [1, 8, 9 и др.], который вместо (9) приводит к равенствам, не требующим в каждый момент времени  $t_{n+1}$  применять итерационную процедуру типа (10)–(12).

Однако известно, что явный метод Эйлера является условно устойчивым методом Рунге – Кутты первого порядка по  $\tau_n$  [10]. В силу его условной устойчивости и существенной нелинейности равенств (3) невозможно в общем случае заранее предсказать величину шага по времени  $\tau_n$ , при которой этот метод гарантирует устойчивость численных расчетов.

В силу этих обстоятельств, по-видимому, более целесообразно использовать хотя и неявную, но абсолютно устойчивую схему Лобатто ША (имеющую при этом точность на порядок большую, чем явный метод Эйлера), несмотря на то, что она приводит к необходимости применения итерационной процедуры (10)–(15) на каждом шаге по времени.

Согласно разработанной численно-аналитической модели, для начала расчета упругопластического поведения армированного металлокомпозитного слоя в начальный момент времени  $t_0$  необходимо знать значения всех функций, указанных в (8) при  $n = 0$ . Эти функции определяются из общеизвестных начальных условий [8, 9], в качестве которых, как правило, используют условия естественного состояния композитной конструкции.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).*

## РЕЗЮМЕ

На основе метода шагов по времени разработана численно-аналитическая методика моделирования упругопластического деформирования армированного металлокомпозитного слоя с изотропно упрочняющимися фазовыми материалами, позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать компоненты композиции как нелинейно-упругие с начальным напряженным состоянием. Линеаризация этих определяющих соотношений позволяет свести на каждой итерации задачу моделирования к соотношениям типа обобщенного закона Гука для анизотропного неоднородного слоя с предварительным напряженным состоянием.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1966. – 752 с.
2. Каримбаев, Т.Д. Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов / Т.Д. Каримбаев, Б.М. Мыктыбеков, И.М. Панова // Труды ЦИАМ. – М.: Изд-во ЦИАМ, 2005. – № 1334. – 160 с.
3. Немировский, Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя / Ю.В. Немировский // ПМТФ. – 1969. – № 6. – С. 81–89.
4. Немировский, Ю.В. Структурная модель механики металлокомпозитов / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В. М. Фомина: сб. науч. тр. – Новосибирск: Параллель, 2010. – С. 98–103.
5. Nemirovsky, Yu.V. Yield surfaces for reinforced concrete Axis-symmetrical plates and shells / Yu.V. Nemirovsky // Archiwum inżynierii ladowej. – 1974. – Т. XX, No 4. – P. 575–590.
6. Янковский, А.П. Построение определяющих уравнений упругопластического поведения перекрестно-армированного металлокомпозита в рамках модели Прандтля – Рейсса при плоской деформации / А.П. Янковский // Наука. Промышленность. Оборона: Труды XIII Всероссийской научно-технической конференции (Новосибирск, 18-20 апреля 2012 г.) – Новосибирск: НГТУ, 2012. – С. 677–685.
7. Немировский, Ю.В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала / Ю.В. Немировский // Динамика сплошной среды (Институт гидродинамики СО РАН СССР). – 1970. – Вып. 4. – С. 50–63.
8. Прикладная теория пластичности: учебное пособие / К.М. Иванов [и др.]; под ред. К.М. Иванова. – СПб.: Политехника, 2009. – 375 с.
9. Хажинский, Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов / Г.М. Хажинский. – М.: Научный мир, 2011. – 231 с.
10. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М.: Мир, 1988. – 334 с.

## SUMMARY

*On the basis of the method of steps in time, numerical-analytical method of modeling of elastic-plastic deformation is developed for armored metal-composite layer with isotropic hardening phase materials, allowing at discrete moments of time to consider the components of the composition as nonlinear-elastic with the initial strained state. At each iteration, linearization of these determining ratios allows the task of modeling to reduce to the relations of the type of the generalized Hooke law for anisotropic heterogeneous layer with preliminary strained state.*

Поступила в редакцию 23.08.2013