УДК 539.3:534.1

О ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ НАСЫЩЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ УПРУГИХ ПОРИСТЫХ СРЕД

с. н. с. [1]**Кукарских Л.А.,.** д. ф.-м. н. [2]**Поленов В.С**

[1] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж*

[2] *Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Воронежский филиал)*

Изучается распространение звуковых волн в неограниченной упругой, насыщенной жидкостью пористой среде, физико-механические свойства которой характеризуются комплексными параметрами. Показано, что в такой среде существует два типа звуковых продольных и одна поперечная волны, скорости и коэффициенты затухания которых существенно зависят от отношения мнимой и действительной частей модулей пористой среды. Получены формулы для определения скорости, коэффициента затухания волны и логарифмического декремента затухания колебаний звуковых волн. Построены графики зависимости скорости и коэффициента затухания продольной звуковой волны.

Приводится сравнение скоростей и коэффициентов затухания волн, в случае, когда модули упругости являются действительными числами.

Ранее в [1-4] изучались стационарные упругие волны в насыщенной жидкостью пористой среде при низкочастотных и высокочастотных амплитудах. В [5,6] рассматривались нестационарные упругие волны в насыщенной жидкостью однородной пористой среде, когда коэффициенты, характеризующие свойства пористой среды, являются действительными числами., а в [7] - когда коэффициенты среды являются функциями пространственных координат. В работах [5-7] для определения скорости и интенсивности распространения волн, применялся метод математической теории разрывов [8].

1.Взаимопроникающее движение упругой фазы и жидкости будем рассматривать как движение жидкости в деформируемой двухфазной пористой среде. Предполагается, что размеры пор намного меньше расстояний, на которых существенно изменяются макроскопические или осредненные параметры среды. В этом случае можно считать, что упругая фаза и жидкость являются сплошными средами и в каждой точке пространства существует два вектора смещения: вектор смещения упругой фазы (скелета пористой среды) и вектор смещения жидкости.
Динамическое деформирование такой пористой среды описывается системой уравнений [1,2]

$$(\lambda^{\bullet}+\mu^{\bullet})\frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j}+\mu^{\bullet}\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j^2}+A^{\bullet}\frac{\partial^2 u_j^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j}-\rho_{11}\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2}-\rho_{12}\frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

$$A^{\bullet}\frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j}+B^{\bullet}\frac{\partial^2 u_j^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j}-\rho_{12}\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2}-\rho_{22}\frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2}=0\,,\ \rho_{11}=\rho_1-\rho_{12}\,,\ \rho_{22}=\rho_2-\rho_{12}$$

Здесь $u_i^{(\chi)}$ $(\chi=1{,}2)$ – компоненты вектора перемещений фаз; $\lambda^{\bullet}, \mu^{\bullet}, A^{\bullet}, B^{\bullet}$ – комплексные модули упругости пористой среды: $\lambda^{\bullet}=\lambda_1+i\lambda_2$, $\mu^{\bullet}=\mu_1+i\mu_2$, $A^{\bullet}=A_1+iA_2$, $B^{\bullet}=B_1+iB_2$; ρ_{12} - интенсивность перехода массы из второй фазы в первую; $\rho_{11}=\dfrac{\rho_1}{\alpha_1}$ и $\rho_{22}=\dfrac{\rho_2}{\alpha_2}$ - истинные плотности твердой фазы и жидкости в порах; ρ_1 –масса первой фазы в единице объема среды; ρ_2 –масса второй фазы в единице объема среды; α_1 и α_2 –величины, характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой фазой ($\alpha_1+\alpha_2=1$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$).

Индексы, стоящие вверху в круглых скобках относятся соответственно, $1-$к твердой фазе, $2-$к жидкости.

Поскольку при движении жидкости в твердой фазе ее «эффективная масса» больше истинной $(\rho_{22}>\rho_2)$, коэффициент ρ_{12} должен быть отрицательным.

Решение системы (1) будем искать в виде затухающей волны [9]

$$u_j^{(\chi)} = C_j^{(\chi)} \exp(i\omega t - \theta x_k \nu_k),\ \theta = \alpha + i\beta,\ \beta = \frac{\omega}{c},\ \chi = 1{,}2 \tag{2}$$

где $C_j^{(\chi)}$ – амплитуды колебания; ν_i – координаты единичного вектора в направлении скорости распространения волны; $c > 0$ – скорость волны; $\alpha > 0$ – коэффициент затухания волны; ω – круговая частота; β – фазовая постоянная.

Подставим (2) в систему (1). После преобразований, получим

$$[(\lambda^\bullet + \mu^\bullet)C_j^{(1)}\nu_i\nu_j + \mu^\bullet C_i^{(1)}](\alpha + i\beta)^2 + A^\bullet(\alpha + i\beta)^2 C_j^{(2)}\nu_i\nu_j + \rho_{11}\omega^2 C_i^{(1)} + \rho_{12}\omega^2 C_i^{(2)} = 0$$

(3)

$$A^\bullet(\alpha + i\beta)^2 C_j^{(1)}\nu_i\nu_j + B^\bullet(\alpha + i\beta)^2 C_j^{(2)}\nu_i\nu_j + \rho_{12}\omega^2 C_i^{(1)} + \rho_{22}\omega^2 C_i^{(2)} = 0$$

2. Продольные звуковые волны. Характеристики продольных волн определим из (3), если положить, что в (3) $C_i^{(\chi)}\nu_i = D_\chi \neq 0$ $(\chi = 1{,}2)$, $\alpha = \alpha_l$, $\beta = \beta_l$. Для этого умножим оба уравнения (3) на ν_i и просуммируем по повторяющемуся индексу i. В результате получим однородную систему уравнений с комплексными коэффициентами относительно D_1 и D_2

$$[\rho_{11}\omega^2 + \Lambda^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\rho_{12}\omega^2 + A^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0$$

$$[\rho_{12}\omega^2 + A^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\rho_{22}\omega^2 + B^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0,\ \Lambda^\bullet = \lambda^\bullet + 2\mu^\bullet \tag{4}$$

Введем безразмерные комплексные коэффициенты следующим образом

$$\sigma_{11}^\bullet = \frac{\Lambda^\bullet}{H}, \sigma_{12} = \frac{A^\bullet}{H}, \sigma_{22} = \frac{B^\bullet}{H},\ H = \Lambda_1 + B_1 + 2A_1,\ \Lambda^\bullet = \Lambda_1 + i\Lambda_2 \tag{5}$$

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho},\ \rho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}$$

При этом должно выполняться условие

$$\sigma_{11}^\bullet + \sigma_{22}^\bullet + 2\sigma_{12}^\bullet = \gamma_{11} + \gamma_{22} + 2\gamma_{12} = 1 \tag{6}$$

Разделим (4) на ρH и, используя обозначения (5) и условие (6), получим

$$[\delta_l^2\gamma_{11} + \sigma_{11}^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\delta_l^2\gamma_{12} + \sigma_{12}^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0 \tag{7}$$

$$[\delta_l^2\gamma_{12} + \sigma_{12}^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\delta_l^2\gamma_{22} + \sigma_{22}^\bullet(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0,\ \delta_l = \frac{\omega}{G_l},\ G_l = \sqrt{\frac{H}{\rho}}$$

где G_l, δ_l – скорость продольной волны и фазовая постоянная, в случае, когда коэффициенты пористой среды являются действительными числами.

Для того, чтобы однородная система (7) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Раскрывая определитель системы (7), получим биквадратное уравнение относительно $\alpha_l + i\beta_l$

$$(\sigma_{11}^\bullet\sigma_{22}^\bullet + \sigma_{12}^{\bullet 2})(\alpha_l + i\beta_l)^4 + (\gamma_{11}\sigma_{22}^\bullet + \gamma_{22}\sigma_{11}^\bullet - 2\gamma_{12}\sigma_{12}^\bullet)\delta_l^2(\alpha_l + i\beta_l)^2 + (\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}^2)\delta_l^4 = 0$$

(8)

Разделим (8) на $(\alpha_l + i\beta_l)^4$ и введем обозначение

$$z^\bullet = \frac{1}{(\alpha_l + i\beta_l)^2} \tag{9}$$

Тогда уравнение (8) с учетом того, что $\sigma_{11}^\bullet = \sigma_{11}' + i\sigma_{11}''$, $\sigma_{12}^\bullet = \sigma_{12}' + i\sigma_{12}''$, $\sigma_{22}^\bullet = \sigma_{22}' + i\sigma_{22}''$, запишем в виде

$$k\delta_l^4 z^{\bullet 2} + (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\delta_l^2 z^\bullet + E_1 + iE_2 = 0 \tag{10}$$

$$\Gamma_1 = \gamma_{11}\sigma_{22}' + \gamma_{22}\sigma_{11}' - 2\gamma_{12}\sigma_{12}',\ \Gamma_2 = \gamma_{11}\sigma_{22}'' + \gamma_{22}\sigma_{11}'' - 2\gamma_{12}\sigma_{12}''$$

$$E_1 = \sigma_{11}'\sigma_{22}' - \sigma_{11}''\sigma_{22}'' - \sigma_{12}'^2 + \sigma_{12}''^2,\ E_2 = \sigma_{11}'\sigma_{22}'' + \sigma_{11}''\sigma_{22}' - 2\sigma_{12}'\sigma_{12}''$$

$$k = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$$

Уравнение (10) разрешим относительно действительной $(\alpha_l^2 - \beta_l^2)$ и мнимой $(\alpha_l \beta_l)$ частей

$$\alpha_l^2 - \beta_l^2 = -\frac{2kb_1\delta_l^2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad \alpha_l \beta_l = \frac{kb_2\delta_l^2}{b_1^2 + b_2^2} \tag{11}$$

где

$$b_1 = \Gamma_1 \pm \sqrt{r}\cos\frac{\varphi_1}{2}, \quad b_2 = \Gamma_2 \pm \sqrt{r}\sin\frac{\varphi_1}{2}, \quad r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{12}$$

$$a_1 = \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 - 4kE_1, \quad a_2 = 2(\Gamma_1\Gamma_2 - 2kE_2), \quad tg\varphi_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad 0 \le \varphi_1 \le \frac{\pi}{2}$$

Из соотношений (11) после преобразований, получим коэффициент затухания α_l продольной волны и фазовую постоянную β_l

$$\alpha_l = \sqrt{\frac{kb_2\delta_l^2}{(b_1^2 + b_2^2)(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}} \tag{13}$$

$$\beta_l = \sqrt{\frac{k\delta_l^2(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}{b_1^2 + b_2^2}} \tag{14}$$

Учитывая, что $\beta_l = \dfrac{\omega}{c_l}$, где c_l – скорость распространения продольной волны, когда коэффициенты, характеризующие пористую среду являются комплексными числами, из (14) получим

$$c_l = \sqrt{\frac{G_l^2(b_1^2 + b_2^2)}{k(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}} \tag{15}$$

Так как величины b_1 и b_2 в (12) имеют знаки «±», то в упругой насыщенной жидкостью пористой среде существует два типа продольных волн c_{l_1} и c_{l_2}, скорости распространения которых определяются по формуле (15) и два типа коэффициентов затухания α_{l_1} и α_{l_2}, которые находятся по формуле (13).

Если ввести обозначение

$$\eta_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2} \tag{16}$$

То формулы(13) – (15) можно записать в виде

$$\alpha_{l_{1,2}} = \sqrt{\frac{k\omega^2(\eta_1 - 1)}{b_1 G_l^2 \eta_1^2}}, \quad \beta_{l_{1,2}} = \sqrt{\frac{k\omega^2(\eta_1 + 1)}{b_1 G_l^2 \eta_1^2}}, \quad c_{l_{1,2}} = \sqrt{\frac{b_1 G_l^2 \eta_1^2}{k(\eta_1 + 1)}} \tag{17}$$

Таким образом, зная комплексные коэффициенты упругой, насыщенной жидкостью пористой среды, по формулам (13), (15) или (17) можно определить скорости распространения и коэффициенты затухания продольных волн.

На рис. 1,2 приведены зависимости скорости C_l / G_l и коэффициента затухания α_l продольной звуковой воны от отношения b_2 / b_1 при заданных значениях:

σ'_{11}	σ'_{22}	σ'_{12}	σ''_{11}	σ''_{22}	σ''_{12}	γ_{11}	γ_{22}	γ_{12}
0.700	0.250	0.025	0.700	0.240	0.030	0.600	0.600	-0.100
0.800	0.160	0.020	0.600	0.400	0.000	0.600	0.400	0.000
0.850	0.250	0.050	0.750	0.150	0.050	0.950	0.050	0.000
0.750	0.150	0.050	0.800	0.150	0.025	0.850	0.015	0.000

Номера у кривых указывают при каких значениях b_1 и k, рассчитанных по формулам (10) и (12) построены данные линии.

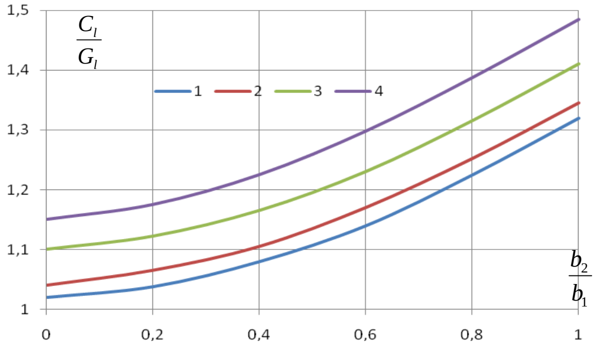

Рисунок 1-Зависимость скорости продольной звуковой волны от $\frac{b_2}{b_1}$

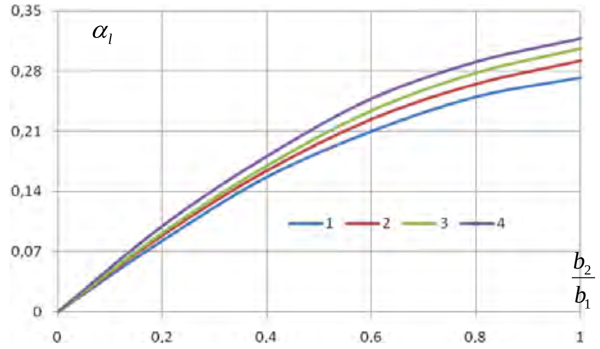

Рисунок 2-Зависимость коэффициента затухания скорости продольной волны от $\frac{b_2}{b_1}$

Если связь между фазами отсутствует $(\rho_{12}=0, A_1=A_2=0)$ и мнимые части коэффициентов пористой среды равны нулю, то из (17) следует, что скорости распространения продольных волн в пористой среде равны скоростям волн, распространяющихся отдельно в сплошной упругой среде и жидкости [3]

$$c_l=\sqrt{\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\rho_{11}}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad c_{l_2}=\sqrt{\frac{B_1}{\rho_{22}}}=\sqrt{\frac{B}{\rho_2}} \tag{18}$$

3. Поперечные звуковые волны. Характеристики поперечной волны определим из (3), если в них положить $C_j^{(\chi)}v_j=0$ $(\chi=1{,}2)$ и перейти к безразмерным коэффициентам. В результате получим

$$[\gamma_{11}\delta_t^2+M^{\bullet}(\alpha_t+i\beta_t)^2]C_i^{(1)}+\gamma_{12}\delta_t^2C_i^2=0 \tag{19}$$
$$\gamma_{12}C_i^{(1)}+\gamma_{22}C_i^{(2)}=0$$

где $\delta_t=\dfrac{\omega}{G_t}$, а G_t – скорость поперечной волн при $M_2=0$.

Из соотношений (19) следует

$$(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)\delta_t^2+\gamma_{22}(M_1+iM_2)(\alpha_t+i\beta_t)^2=0 \tag{20}$$

Разделим в (20) действительную и мнимую части, получим

$$\alpha_t^2-\beta_t^2=-\frac{k\delta_t^2M_1}{\gamma_{22}(M_1^2+M_2^2)},\quad 2\alpha_t\beta_t=\frac{k\delta_t^2M_2}{\gamma_{22}(M_1^2+M_2^2)},\quad k=\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2 \tag{21}$$

Соотношения (21) можно разрешить относительно любой пары величин α_t и β_t или M_1 и M_2

$$\alpha_t=\sqrt{\frac{k\delta_t^2(-M_1+\sqrt{M_1^2+M_2^2})}{2\gamma_{22}(M_1^2+M_2^2)}},\quad \beta_t=\sqrt{\frac{k\delta_t^2M_2^2}{2\gamma_{22}(M_1^2+M_2^2)(-M_1+\sqrt{M_1^2+M_2^2})}} \tag{22}$$

или

$$M_1=\frac{(\beta_t^2-\alpha_t^2)k\delta_t^2}{(\alpha_t^2+\beta_t^2)^2\gamma_{22}},\quad M_2=\frac{2\alpha_t\beta_tk\delta_t^2}{(\alpha_t^2+\beta_t^2)^2\gamma_{22}} \tag{23}$$

Обозначим через η_2

$$\eta_2=\sqrt{1+\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2} \tag{24}$$

Тогда (22) и (23) запишем в виде

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{k\delta_t^2(\eta_2 - 1)}{2\gamma_{22}\eta_2^2 M_1}}, \quad \beta_t = \sqrt{\frac{k\delta_t^2(\eta_2 + 1)}{2\gamma_{22}\eta_2^2 M_1}} \tag{25}$$

Из формул (25) можно сделать вывод: зная комплексный модуль упругости пористой среды $M^\bullet = M_1 + iM_2$, можно определить коэффициент затухания α_t и фазовую постоянную β_t. Скорость поперечной волны определим из равенства $\beta_t = \frac{\omega}{G_t}$, где G_t – скорость поперечной волны в пористой среде при $M_2 = 0$.

$$c_t = \sqrt{\frac{2\gamma_{22}G_t^2 M_1}{k(\eta_2 + 1)}} \tag{26}$$

При малом затухании $(\alpha_t \to 0)$ из формулы (23) получим

$$\gamma_{22}\beta_t^2 M_1 = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\delta_t^2 \tag{27}$$

или в развернутой форме

$$\rho_{22}\mu_1 = (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)c_t^2 \tag{28}$$

Формула (28) совпадает с формулой работы [6].

В случае, если связь между фазами слабая $(\gamma_{12} \to 0)$, то из (27) или (28) следует

$$\mu_1 = \rho_{11}c_t^2 = \rho_1 c_t^2 \tag{29}$$

Зная скорость распространения звуковой волны, по формуле (29) приближенно можно вычислить модуль упругости μ_1. При наличии в пористой среде затухания, вычисления действительной части модуля упругости следует проводить по формуле (23).

Пользуясь формулами (23), определим связь между $tg\varphi_2$, коэффициентом затухания α_t и фазовой постоянной $\beta_t = \frac{\omega}{c_t}$ [10]

$$tg\varphi_2 = \frac{JmM^\bullet}{\mathrm{Re}\,M^\bullet} = \frac{2\alpha_t\beta_t}{\beta_t^2 - \alpha_t^2} \tag{30}$$

Логарифмический декремент затухания колебаний волны δ связан с $tg\varphi_2$ соотношением [10]

$$\delta = \pi tg\varphi_2 = 2\pi\frac{2\alpha_t\beta_t}{\beta_t^2 - \alpha_t^2} \tag{31}$$

Из (31) следует, что логарифмический декремент затухания колебаний поперечной волны в пористой среде зависит от коэффициента затухания волны и фазовой постоянной, а, следовательно, и от скорости поперечной волны.

РЕЗЮМЕ

В статье показано, что в насыщенной жидкостью упругой пористой среде, физико-механические свойства которой характеризуются комплексными коэффициентами, существует два типа продольных и одна поперечная звуковые волны. Получены формулы для определения скоростей и коэффициентов затухания волн.

ЛИТЕРАТУРА

1.Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid /M.A.Biot //J. of Applied Phisic.-1955.-v. 26.- № 2.-P. 182-185.

2. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range /M.A. Biot //J. Acoust. Soc. America.- 1956. -v. 28.- № 2. -P. 168-178.

3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред/Р.И. Нигматулин. –М.: Наука, -1978.-336 с.

4. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах /Л.Я. Косачевский // ПММ.-1959. -Т. 23. Вып. 6.- С. 1115-1123.

5. Масликова Т.И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах /Т.И. Масликова, В.С. Поленов//Изв. РАН. МТТ. – 2005.- № 1.- С. 104-108.

6. Масликова Т.И. О нестационарных упругих волнах в пористых материалах /Т.И. Масликова, В.С. Поленов //Изв. РАН. МТТ. - 2001. - № 6.- С. 103-107.

7. Поленов В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде/В.С. Поленов, А.В. Чигарев //Изв РАН. ПММ.- 2010. - Т 74, вып. 2. -С. 276-284.

8. Thomas T. Y. Plastic Flow and the Fracture in Solids. N.y.; L.: Acad. Press, 1961.=Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах/Т. Томас. М.: Мир,-1964.-308 с.

9. Мешков С.И. О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде/С.И. Мешков, Ю.А. Россихин//ПМТФ. -1968. - № 5.- С. 89-93.

10. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах /В.С. Постников - М.: Металлургия, -1974.- 351 с.

SUMMARY

The paper shows that in a saturated liquid elastic porous medium, the physical and mechanical properties of which are characterized by complex coefficients, there are two types of longitudinal and one transverse sound waves. The formulas for the determination of velocity and attenuation coefficient of waves.

Поступила в редакцию 23.12.2012