

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теоретическая механика»

А. В. Чигарев
К. Циммерманн
В. А. Чигарев

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАТРОНИКУ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов учреждений
высшего образования по техническим специальностям*

Минск
БНТУ
2013

УДК 621.865.8

ББК 34.816я7

Ч58

Рецензенты:

зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика»
Белорусского государственного университета,
д-р физ.-мат. наук, профессор *М. А. Журавков*;
профессор факультета компьютерных систем и сетей
Белорусского государственного университета информатики
и радиоэлектроники, д-р техн. наук, профессор *С. Е. Карпович*

Чигарев, А. В.

Ч58 Введение в мехатронику : учебное пособие / А. В. Чигарев,
К. Циммерманн, В. А. Чигарев. – Минск : БНТУ, 2013. – 388 с.
ISBN 978-985-550-008-8.

Изложены начальные основополагающие принципы и методы анализа и синтеза мехатронных систем, основанные на теории механических, электрических, электронных цепей с элементами теории регулирования и надежности.

Пособие предназначено для широкого круга студентов специальностей «Мехатроника», «Роботы и робототехника», «Киберсистемы», «Информационные системы», а также для преподавателей, инженеров и научных сотрудников, работающих в этих областях.

УДК 621.865.8

ББК 34.816я7

ISBN 978-985-550-008-8

© Чигарев А. В., Циммерманн К.,
Чигарев В. А. , 2013

© Белорусский национальный
технический университет, 2013

В в е д е н и е

Термин «мехатроника», *несмотря* на свое сорокалетнее существование, формулируется разными авторами в достаточно широких пределах детализации, хотя по сути одинаково.

Например, в [2] сформулировано:

мехатроника – средство принятия сложных решений для функционирования физических систем.

В образовательном стандарте России записано [3]:

мехатроника – область науки и техники, основанная на синергетическом объединении узлов точной механики с электронными и компьютерными компонентами, обеспечивающими проектирование и производство качественно новых модулей, систем и машин с интеллектуальным управлением их функциональными движениями.

Термин «мехатроника» был введен японской фирмой Yasaki Electric в 1970 г. для описания новых видов механических систем, в которых электроника выполняла функцию получения, переработки информации, принятия решений и реализацию управления, прежде выполнявшихся механическими или электрическими компонентами. Удешевление элементной базы процессоров привело к переходу от электроники к программному обеспечению как основной среде принятия решений.

Мехатроника в узком смысле этого слова – наука о работе механических, электрических, электронных и программных средств, объединенных в едином изделии (системе). В широком смысле – это подход в инженерии машин новых поколений, органично включающий в себя процессы проектирования, интеграции, оптимизации, адаптации, модификации.

На стадии проектирования важно помнить о надежности и безопасности эксплуатации системы при осуществлении требуемых функций. Стадия проектирования включает в себя фазы:

системного анализа состояния для данной области, требований заказчика, технических и финансовых возможностей;

виртуальной инженерии, включающей в себя системный подход на основе конструктивного моделирования с использованием компьютерных систем и модульного подхода, объединяющего требования к динамике, эксплуатационным качествам, системам регулирования и управления.

Модулируемое проектирование основывается на *системном моделировании*, которое определяет границы осуществимой детализации с помощью описания закономерного и контролируемого поведения оборудования в математической форме. Моделирование позволяет установить математическое определение ожидаемого функционирования мехатронной системы.

Основой модели системного уровня является *структурная схема*. У модели имеются *входные* сигналы, являющиеся проявлением внешних воздействий, и *выходные* сигналы – в данный момент.

Входные и выходные сигналы отображают реальные величины: силы, скорости, ускорения, напряжения, деформации, температуру, электрическое напряжение, силу тока и т. д.

Блоки (звенья) в схеме изображают математические операции между входными и выходными сигналами в модели. Например, блок (звено), изображающее электрический двигатель, имеет входное напряжение, преобразуемое на выходе во вращающий момент.

Основа модели системного уровня – это математическая модель системы с сосредоточенными и распределенными параметрами, описываемая дифференциальными уравнениями.

Однако математическая модель системы может стать очень сложной, требовать для решения много времени. В этом случае целесообразно обращаться к другим способам моделирования системного уровня, таким как метод эмпирической модели, управляемой данными идентификации системы, нейронными сетями, клеточными автоматами.

Модулируемое проектирование позволяет инженерам начать процесс проектирования с модели системного уровня с малым количеством деталей (модулей) и затем увеличивать ее детализацию, сложность.

Технически система CAD-FEM включается в модулируемое проектирование на стадии создания трехмерной геометрической модели, учета механических характеристик: массы, инерции, деформаций, температуры, имитации процесса эксплуатации изделия. Виртуальные испытания изделия предполагают разработку и оценку эффективности систем регулирования по разомкнутому и замкнутому циклам.

На этой стадии модель системного уровня позволяет выявить и устранить причины динамической неустойчивости, обусловленной

геометрией масс, повреждений, разрушений вследствие наличия в конструкции концентраторов напряжений и т. д.

Модулируемое проектирование включает в себя непрерывные виртуальные испытания и верификацию на протяжении всего процесса разработки. С этой целью проектировщики разрабатывают набор стандартных тестов и средств тестирования, что гарантирует достоверность оценки эволюции системы в процессе ее разработки. Постоянные испытания с использованием стандартных процедур позволяют непосредственно увидеть влияние на выходные сигналы любых конструктивных изменений в проекте.

Таким образом, общепринятым в проектировании является системный подход, в котором стремятся *изначально учитывать связи и взаимодействия между отдельными частями и внешней средой*. Как способ реализации системного подхода используется модульный метод, позволяющий решать задачи последовательного проектирования сверху вниз или снизу вверх через создание математических моделей элементарных составляющих системы как звеньев единой мехатронной цепи, имеющих входы и выходы.

В учебном пособии основное внимание уделяется методам анализа звеньев: механических, электрических, электронных, программных, т. е. микроуровню, на котором рассматриваются в основном элементарные составляющие. Содержание пособия тематически соответствует монографии «Мехатроника» [1], в которой были сформулированы основные концепции предмета, отраженные в данном пособии.

В первой главе рассматриваются общие вопросы, которые необходимо решать при проектировании систем: математическое моделирование, надежность и безопасность, наблюдаемость, идентифицируемость, управляемость.

Вторая глава посвящена вопросам описания механики рабочих частей мехатронной системы. Кинематические цепи и их динамика, зависящая от геометрии масс, описываются на основе вариационного принципа Гаусса. Более подробно эти вопросы изучаются в курсах теории машин и механизмов, деталей машин и др. Механика материалов описывается с помощью механических цепей, что удобно для целей проектирования. Здесь не рассматривается механика деформирования конструкций с учетом того, что эти вопросы изучаются в курсах сопротивления материалов, строительной механики машин, теории упругости, пластичности, разрушения.

В третьей главе рассматриваются вопросы описания гидро- и пневмоэлектроприводов на основе моделей звеньев механических и электрических цепей.

Четвертая глава содержит элементарные сведения о некоторых звеньях электронных цепей, позволяющих реализовать булеву логику для целей обработки информации и управления.

В пятой главе содержатся начальные сведения из теории автоматического регулирования и управления.

Шестая глава посвящена изложению концепции мехатронной системы с точки зрения теории конечных автоматов, что позволяет в единообразии рассматривать вопросы проектирования систем и инженерии программного обеспечения.

В седьмой главе затрагиваются вопросы повышения надежности мехатронных систем, в первую очередь за счет программного обеспечения.

Пособие предназначено для студентов, магистрантов, аспирантов специальностей, связанных с мехатроникой, автоматикой, робототехникой, компьютерной механикой. Оно также будет полезно для инженерно-технических работников соответствующих направлений машиностроения, приборостроения и энергетики.

1. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СЛОЖНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ

Основные понятия, которые используются при моделировании систем различной природы, это – *структура*, *функция*. Для любой системы эти понятия не являются независимыми. Как правило, структура системы определяет ее функции, и наоборот, – задание функций накладывает на ее структуру определенные требования. Соответствие не является взаимно однозначным. Например, если объект должен летать, то эта функция может быть реализована системами с разной структурой. Техническая революция, положившая начало непрерывному процессу создания и эволюции машин, начиналась с систем, использующих законы механики как для собственного движения (совершения работы), так и для управления (регулирования) этими процессами. С самого начала возникновения современного машиностроения механика системы и управление ею составляли две неразрывные части. Постепенно, с развитием электротехники, функции, связанные с управлением (получение информации о состоянии системы, передача информации персоналу для управления), стали реализовываться не с помощью механических датчиков, а при помощи электротехнических приборов. Пневмо- и гидроприводы машин постепенно заменялись на электроприводы. Развитие электроники привело к созданию приборов, которые вытеснили достаточно громоздкие электрические системы и стали широко использоваться в сочетании с механическими компонентами для выполнения различных функций. Таким образом, современные машины на всех уровнях, начиная с бытовых, представляют сложные гетерогенные системы, различные части которых функционируют используя различные физические законы, обладают различными свойствами. Соединение разнородных систем в единую может приводить к двум прямо противоположным результатам: конгломерат, относительно некоторых критериев, может оказаться хуже, чем отдельные части, но может оказаться и лучше, опять же относительно определенных критериев, каждой из составляющих частей. Такое взаимовлияние компонентов на свойства единой системы называется *синергизмом*. Природные системы, в частности биомеханические, представляют собой пример систем, составляющие которых по отдельности обладают свойствами не лучшими, чем система в целом.

Для того чтобы оценить систему, являющуюся конгломератом подсистем различной физической или химической природы, необходимо рассмотреть такие их свойства, которые были бы присущи всем компонентам и системе в целом.

1.1. Математическое моделирование сложных динамических систем

Анализ и синтез мехатронных систем требуют разработки и использования методов исследования проектирования, которые позволяли бы наиболее полно учитывать, во-первых, наличие взаимосвязей между большим числом факторов, определяющих свойства и поведение рассматриваемой системы, и, во-вторых, неопределенность поведения системы в целом и составляющих ее частей. Необходимость такого рассмотрения определяют следующие отличительные признаки, характеризующие мехатронную систему как большую и сложную:

1. Наличие большого количества взаимно связанных и взаимодействующих между собой элементов.
2. Сложность функции, выполняемой системой и направленной на достижение определенной цели функционирования.
3. Возможность разбиения системы на подсистемы, цели функционирования которых подчинены общей цели функционирования всей системы.
4. Наличие управления, информационной разветвленной сети, интенсивных потоков информации.
5. Взаимодействие с внешней средой и функционирование в условиях воздействия случайных факторов.

Изучение поведения систем, основанное на учете присущей им сложности и рассмотрении системы как единого целого, характерно для так называемого с и с т е м н о г о подхода к постановке и решению задач управления. Сущность его составляют такие вопросы, как определение общей структуры системы, организация взаимодействия между ее элементами, совокупное взаимодействие системы и внешней среды и т. п. Основным методом исследования систем в рамках системного подхода является метод математического моделирования, базирующийся на широком использовании средств аналоговой и цифровой техники.

Понятия модели и моделирования основываются на наличии некоторого сходства между двумя объектами изучения и, по существу, явно или неявно вводятся во всех науках. Между двумя объектами существуют отношения оригинала и модели, если между ними может быть установлено сходство хотя бы в каком-либо одном определенном смысле. *Моделирование* – изучение каких-то свойств оригинала путем построения его модели и изучения ее свойств. Для мехатронных систем наиболее важным сходством, приводящим к отношениям оригинал–модель, является сходство их поведения, позволяющее моделировать движение. При изучении движения нас не интересует физическая сторона протекающих процессов и явлений. В связи с этим для постановки и решения задач исследования мехатронных систем с помощью моделирования одним из методов является понятие «черного ящика». Под этим понимается система, в которой внешнему наблюдению доступны лишь входные и выходные величины. Метод «черного ящика» заключается в изучении свойств системы на основании знания и сопоставления ее входов и выходов при проведении эксперимента, позволяющих в дальнейшем построить модель системы и предсказывать ее поведение при любых заданных входах. По существу, «черным ящиком» является любой объект, о котором можно судить лишь на основании изучения его внешних свойств; это понятие очень часто, хотя и не в явном виде, используется и в науке, и в технике. Метод «черного ящика» особенно важен для изучения поведения сложных систем, так как зачастую для них ответить на вопрос, как будет вести себя система в тех или иных условиях, можно лишь на основании изучения ее поведения в каких-то других условиях, создание которых доступно при экспериментировании, или изучения характера поведения в прошлом.

Системы, характеризующиеся одинаковым набором входных и выходных координат и одинаково реагирующие на внешние воздействия, называются *изоморфными*. Между любыми изоморфными системами существует отношение оригинал–модель в том смысле, что любая из совокупности изоморфных систем может рассматриваться как оригинал или как модель остальных. Система *B*, полученная из исходной системы *A* путем ее упрощения (за счет уменьшения числа рассматриваемых координат, за счет более грубой оценки их значений), называется *гомоморфной* или *упрощенной*

моделью системы A . Здесь уже A не может рассматриваться как гомоморфная модель B .

Моделирование – один из наиболее распространенных способов изучения различных процессов и явлений. Различают физическое и математическое моделирование.

При физическом моделировании модель воспроизводит изучаемый процесс (оригинал) с сохранением его физической природы (продувка моделей в аэродинамических трубах, макеты русловых потоков и т. д.). Здесь между процессом-оригиналом и процессом-моделью сохраняются некоторые соотношения подобия, вытекающие из закономерностей физической природы явлений.

Под математическим моделированием понимают способ исследования различных явлений, процессов путем изучения явлений, имеющих разное физическое содержание, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. В простейших случаях для этой цели используются известные аналогии между механическими, электрическими, тепловыми и другими явлениями. В качестве примера такой аналогии можно рассмотреть линейную консервативную систему. Общая форма уравнения свободных колебаний

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0$$

описывает движение как в механической, так и в электрической системе. Действительно, положив

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad q(t) = z,$$

получим уравнение изменения заряда q на емкости C контура LC :

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0.$$

Положив

$$\omega_0^2 = \frac{\Psi}{m}, \quad \xi(t) = z,$$

получим уравнение изменения отклонения центра масс $\xi(t)$ пружинного маятника массой m от положения равновесия, если жесткость пружины ψ :

$$m \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} = -\psi \xi(t).$$

Математической моделью реальной системы называется ее описание на каком-либо формальном языке, позволяющее выводить суждение о некоторых чертах поведения этой системы при помощи формальных процедур. Математические модели могут представлять собой характеристики систем, заданные функциональными зависимостями или графиками; уравнения, описывающие движения систем; таблицы или графики переходов систем из одних состояний в другие и т. д.

Абстрагируясь от физического существа явлений, процесс функционирования любой системы можно рассматривать как последовательную смену ее состояний в некотором интервале времени t_0, t_f .

Состояния системы в каждый момент времени t из этого интервала характеризуются набором величин x_1, x_2, \dots, x_n . При переходе от одного мгновенного состояния к другому значения x_1, x_2, \dots, x_n в общем случае меняются и могут рассматриваться как функции последовательных моментов времени $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Эти переменные величины называются *переменными состояниями*. Переменные состояния могут быть интерпретированы как координаты точки в n -мерном фазовом пространстве. Тогда процессу функционирования будет соответствовать фазовая траектория, которая может быть описана вектор-функцией $\bar{x}(t)$ с составляющими по осям $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Начальному состоянию системы (в момент t_0) соответствует начальное состояние с характеристиками состояния x_{01}, \dots, x_{0n} .

На вход системы в общем случае могут поступать *входные сигналы* u_i ($i = 1, 2, \dots, q$), оказывающие влияние на состояние системы, так что характеристики состояний системы $x_1(t), \dots, x_n(t)$ в произвольный момент зависят от начального состояния x_{01}, \dots, x_{0n} и входных сигналов u_i , поступивших в моменты времени $t^* \leq t$. Сле-

дует отметить также, что характеристики состояния зависят и от некоторого числа постоянных или определенным образом меняющихся величин d_j ($j=1, \dots, m$), характеризующих свойства системы и называемых *параметрами системы*. На выходе система в общем случае выдает сигналы y_r ($r=1, 2, \dots, l$), полностью определяемые ее состояниями.

Детерминированные модели представляют собой совокупность неслучайных соотношений и дают возможность однозначного определения характеристик состояния и выходных сигналов через параметры: входные сигналы и начальные условия. На практике, однако, часто приходится рассматривать случаи, когда характеристики состояний и выходные координаты представляют собой *случайные функции времени*. Это является результатом того, что по указанным ранее причинам фактически случайными величинами являются начальные условия, случайными величинами или функциями являются входные воздействия и параметры, кроме того, на элементы системы действуют случайные возмущения, возникающие внутри системы. В этом недетерминированном случае с помощью математической модели однозначно должны определяться распределения вероятностей для характеристик состояний системы, если заданы распределения вероятностей для начальных условий, параметров, возмущений, входных сигналов. Для исследования такого рода процессов строится *вероятностная модель*.

Отметим, что детерминированная модель может быть построена и для исследования случайных явлений. Примером таких моделей являются соотношения, связывающие числовые характеристики законов распределений входов и выходов систем. С другой стороны, вероятностные схемы могут использоваться для решения детерминированных задач. В частности, это случайный поиск экстремумов функций, использование метода Монте-Карло для вычисления многомерных интегралов и др.

Общая характеристика метода математического моделирования. *Первый шаг* исследований на основе моделирования – выявление всех факторов, имеющих отношение к последующему построению математической модели. На этом этапе важно включить в модель переменные величины, оказывающие основное влияние на характеристики состояния, и не менее важно опустить такие детали, кото-

рые не оказывают существенного влияния на результаты. Следует иметь в виду, что никаких формальных правил для решения этих вопросов не существует. Здравый смысл исследователя и проверка соответствия модели реальной системе на основе эксперимента в итоге приводят к построению приемлемой модели.

Можно только отметить, что в качестве характеристик состояния целесообразно выбрать такие функции, которые, с одной стороны, обеспечивали бы удобство определения искомых величин при исследовании, а с другой – давали бы возможность получить достаточно простую модель. Выбор же параметров, характеризующих процесс функционирования системы, обусловлен теми факторами, которые должны учитываться при формализации процесса и обеспечивать достаточную полноту описания различных его сторон. Перечень начальных условий может быть определен однозначно только после построения математической модели. Естественно, он зависит от того, какими были выбраны характеристики состояния. Процесс составления математического описания можно представить состоящим из следующих обобщенных этапов или шагов формализации:

1. Составление содержательного описания, представляющего собой перечень основных сведений об изучаемом процессе, постановку задачи исследования и цели моделирования, перечень исходных данных.

2. Составление формализованной схемы в случае, если перейти к получению математической модели непосредственно по содержательному описанию, не представляется возможным. Здесь устанавливаются характеристики процесса, система параметров, строго определяются все зависимости между ними, уточняются исходные данные.

3. Составление математической модели процесса, т. е. по сути запись в аналитической форме всех соотношений формализованной схемы с использованием тех или иных математических схем, по возможности типовых, таких, например, как вероятностные схемы случайных явлений, дифференциальные уравнения, типовые логические схемы и т. п. Математическая модель является гомоморфной моделью относительно формализованной схемы.

4. В случае реализации математической модели на компьютере – составление моделирующих алгоритмов.

После того как математическая модель получена и в первом приближении соответствует задачам и целям исследования, задача реша-

ется либо аналитически, либо с привлечением обширного арсенала моделирующих средств. Большинство задач исследования поведения систем не может быть решено аналитически, а решение представлено в замкнутой форме. Решение ряда задач вообще стало возможным лишь с появлением современных аналоговых и цифровых вычислительных систем. Исследование системы можно было бы проводить непосредственно путем эксперимента в реальных условиях. Однако такой метод изучения слишком громоздок и дорог. Поэтому метод математического моделирования является основным в проведении исследований мехатронных систем. В настоящее время его широко используют для целей экспериментирования или численной оценки, как средство изучения новых систем, для проверки или демонстрации новой идеи, системы или метода и т. д. Этот метод предполагает построение действующей математической модели, обладающей свойствами (или характеризуемой соотношениями), которые подобны свойствам (или соотношениям) рассматриваемой реальной системы. При этом возникает возможность имитировать работу системы в широком диапазоне условий и принимать решения относительно оптимизации ее характеристик.

Построение модели опирается прежде всего на формулировку проблемы. При статистических исследованиях довольно сложно найти решение задачи даже с использованием компьютерных систем, если пытаться получить математическую модель, связывающую непосредственно статистические характеристики выходных координат со статистическими характеристиками входов, начальных условий, параметров. В настоящее время широкое распространение для исследования мехатронных систем получил метод статистический и спытаний. Моделирование с применением этого метода получило название статистического моделирования.

Применительно к исследованию поведения мехатронных систем с использованием компьютера метод статистического моделирования обычно заключается в том, что:

а) составляется и реализуется на компьютере детерминированная математическая модель системы, отражающая связь значений выходных координат системы со значениями входных воздействий и начальных условий;

б) обеспечивается получение на ЭВМ отдельных реализаций случайных событий, величин, функций, т. е. моделируется случайное

явление с некоторыми заданными характеристиками, соответствующими характеристикам случайных явлений, сопровождающих функционирование реальной исследуемой системы (изменениям параметров, внешних воздействий, начальных условий);

в) производится многократное решение детерминированной задачи, где в каждом из решений условия определяются этими реализациями случайных явлений;

г) производится статистическая обработка полученных результатов в соответствии с характером поставленной задачи.

Каким же основным общим требованиям, не зависящим от цели исследования или характера решаемой задачи, должна удовлетворять математическая модель? Для какой бы из перечисленных выше целей ни строилась математическая модель при упрощенном подходе к ее построению, основными соображениями, которыми следует руководствоваться, являются точность, гибкость, постоянный учет основных характеристик системы, конечной цели моделирования и затрат на эксплуатацию модели. Математическая модель должна быть относительно простой в обращении и понятной тем, кто ее использует, представительной во всем диапазоне применения, достаточно сложной, чтобы с необходимой степенью точности отображать изучаемую систему, а также ориентированной на вычислительные возможности, имеющиеся в распоряжении экспериментаторов.

Можно выделить три важных аспекта в решении общей задачи исследования поведения систем методом математического моделирования. Это моделирование условий функционирования системы или моделирование «среды»; моделирование собственно системы; обработка результатов исследования и их оценка. Каждый из этих аспектов связан с решением ряда проблем, из которых основные состоят в определении характеристик системы и воздействий на нее, составлении и реализации моделей воздействий и системы и алгоритмов обработки результатов эксперимента, планировании компьютерного эксперимента.

1.2. Надежность технических систем

Надежность системы – это ее способность выполнять свои функции при сохранении структуры и основных характеристик в течение запроектированного интервала времени.

Надежность определяется характеристиками, которые носят вероятностный или статистический характер.

Безотказная работа технической системы зависит от внутренней и внешней нагрузки на систему в целом и на отдельные элементы. Например, в электропроводящих элементах – это величины токов, тепловых потоков, в механических компонентах – механические напряжения, обусловленные внутренними и внешними причинами, например, перегрузки статического и динамического характера, внешней температуры, вибрации, ударов и т. д.

Количественно мера надежности – это вероятность безотказной работы, т. е. вероятность того, что в предусмотренных условиях эксплуатации системы в пределах запроектированного времени отказ не произойдет.

Отказы подразделяют на два типа:

- 1) *внезапные*, редко возникающие;
- 2) *усталостные* отказы, которые обусловлены изменением (старением) компонентов системы.

Могут быть отказы *комбинированные*, обусловленные ускоренным по сравнению с проектируемым старением какого-либо компонента системы и его отказа, носящего внезапный (неожиданный) характер.

Обозначим *вероятность безотказной работы* системы

$$P = P(t),$$

где t – время,

тогда вероятность внезапных редко возникающих отказов определяется функцией

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right),$$

где $\lambda(t)$ – *интенсивность отказов*.

Интенсивность отказов вычисляется как относительное число отказов в единицу времени.

График функции $\lambda(t)$ изображен на рис. 1.1. В диапазоне $0 < t < t_1$ идет приработка системы и выявляются скрытые дефекты, обуславливающие высокий уровень интенсивности отказов. Основной пе-

риод работы $t_1 < t < t_2$ характеризуется тем, что интенсивность отказов практически не зависит от t , являясь величиной практически постоянной, при $t > t_2$ интенсивность отказов растет, что обусловлено выработкой ресурса системы (износ элементов, старение материалов и т. д.).

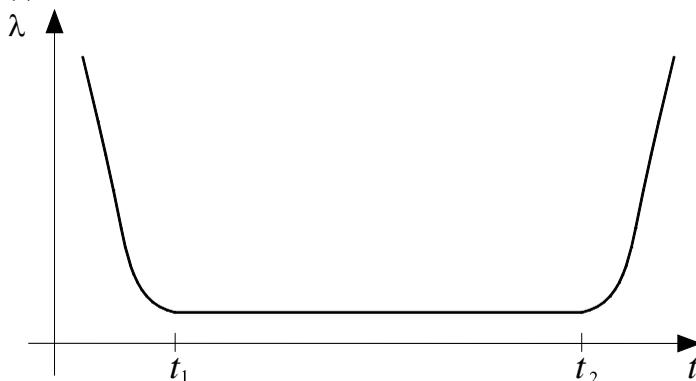


Рис. 1.1. График функции $\lambda(t)$

При $t > t_2$ система становится ненадежной и требуется ее ремонт или утилизация.

Таким образом, на интервале $t_1 < t < t_2$ вероятность безотказной работы определяется соотношением

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (1.1)$$

Рассмотрим теперь гетерогенную систему, состоящую из N разных подсистем, вероятности безотказной работы которых равны P_1, P_2, \dots, P_N . Если система построена так, что отказ любой подсистемы ведет к отказу всей системы, тогда

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n = \prod_{i=1}^N P_i,$$

или, учитывая, что зависимость $P_i(t)$ согласно (1.1) имеет универсальный характер для всех технических систем, получим

$$P = \exp\left(-t \sum_{i=1}^N \lambda_i\right) = \exp(-\Lambda t),$$

где λ_i – интенсивность отказа i -й подсистемы;

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{ – интенсивность отказа всей системы.}$$

Для применяемых стандартных элементов (резисторы, конденсаторы и т. д.) λ_i даются в справочниках, для других элементов они должны определяться из экспериментальных данных методами статистической обработки.

Например, выявляется m – число групп однотипных элементов, n_i – число элементов в группе, тогда

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m n_i \cdot \lambda_i.$$

Среднее время безотказной работы системы определяется по формуле

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\Lambda}.$$

Рассмотрим теперь отказы, обусловленные *усталостью компонентов системы*.

В качестве модели здесь используется нормальный закон распределения для времени t безотказной работы системы. Обозначим $T_0 = \langle t \rangle$ – математическое ожидание, $\sigma_0^2 = \langle (t - \langle t \rangle)^2 \rangle$ – дисперсию времени безотказной работы. Считаем, что *внезапные и усталостные отказы* несовместны и независимы. Тогда вероятность безотказной работы по причине усталости примет вид

$$P_{\text{уст}}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{T_0 - t}{\sigma_0}\right) \right].$$

Для функции Φ примем выражение вида

$$\Phi\left(\frac{T_0 - t}{\sigma_0}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Значения Φ затабулированы.

Вследствие независимости двух процессов внезапного отказа и постепенного накопления повреждений общая вероятность безотказной работы имеет вид

$$P(t) = \frac{1}{2} e^{-\Lambda t} \left[1 + \Phi\left(\frac{T_0 - t}{\sigma_0}\right) \right].$$

Таким образом, зная T_0 , σ_0 , Λ , можно вычислить надежность системы.

Повышение надежности системы в процессе ее проектирования является одной из важнейших задач. Для достижения этой цели применяются различные методы.

1. *Блочно-модульная структура* системы используется с целью быстрой замены отказавших блоков, модулей, что позволяет сократить время и стоимость ремонта.

2. *Облегченный режим эксплуатации системы* реализуется за счет снижения внутренних нагрузок типа напряжения тока, что увеличивает срок службы компонентов.

3. *Поэлементное резервирование* применяется в ответственных системах. Резервные элементы могут находиться как в рабочем режиме, так и в режиме ожидания. В наиболее ответственных системах, связанных с жизнью людей, резервироваться может вся система полностью.

Ясно, что резервирование ведет к удорожанию системы, увеличению ее массы, габаритов и т. д., поэтому при проектировании здесь возникают многокритериальные задачи математического программирования.

Например, можно поставить задачу: какова должна быть кратность m_i резервирования системы, состоящей из n элементов, чтобы обеспечить требуемую надежность P_m . Решение этой задачи дает следующее выражение для m_i :

$$m_i = \frac{\ln\left(\frac{z - a_i}{a_i}\right)}{-\ln(1 - P)}$$

$$a_i = \frac{G_i}{-\ln(1 - P_i)}$$

$$z = \frac{P_m \sum_{i=1}^n a_i}{1 - P_m}$$

где G_i – «цена» (масса, габариты, стоимость) резервирования i -й подсистемы;

z – математическое ожидание суммарного ущерба отказов.

Очевидно, что резервирование является наиболее эффективным способом повышения надежности системы, однако технико-экономическая цена его высока, и при проектировании системы следует учитывать, что не каждый отказ подсистем и даже системы в целом приводит к опасной (аварийной) ситуации.

1.3. Безопасность системы и методы ее повышения

Более точной эксплуатационной характеристикой, чем надежность, является безопасность системы.

Безопасность системы – это вероятность того, что параметры режима функционирования системы не выйдут за проектные допустимые пределы в случае отказа каких-либо подсистем.

Эффективным путем повышения безопасности функционирования системы являются встроенные подсистемы контроля, которые включают в себя датчики (сенсоры) состояния компонентов системы, передачи информации, обработка информации, принятия решений и исполнения необходимых управляющих (регулирующих) воздействий.

Выделим два типа режимов функционирования системы. *Опасные режимы* – это режимы, при которых происходит отказ системы, приводящий к прекращению ее функционирования. *Безопасные режимы* – это режимы, при которых не возникают опасные ситуации (штатный режим).

Рассмотрим получение критерия оценки вероятности безопасности функционирования системы и способ его вычисления методом статистического моделирования.

Пусть состояние системы оценивается совокупностью компонент вектора

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В любой динамической системе среди параметров x_1, x_2, \dots, x_n имеются такие, которые, изменяясь в некоторых пределах, могут достигать опасных значений.

Перенумеруем параметры x_1, x_2, \dots, x_n так, чтобы m параметров, которые могут достигать опасных значений, составили подмножество $x_1 \dots x_m$ ($m < n$). В пространстве параметров $x_1 \dots x_m$ построим область G , границами которой являются опасные значения этих параметров или их комбинаций.

Построение области G для каждой конкретной системы должно проводиться индивидуально.

Обозначим $\bar{x}_* = (x_1 \dots x_m)$ – вектор параметров в области G . Если $\bar{x} \in G$ не достигает границ, то состояние системы безопасное. При достижении \bar{x} границы области G состояние системы становится опасным. Достижение вектором \bar{x}_* границы будем рассматривать как случайное событие A , которое происходит совместно с одним из событий (гипотез) H_0, H_1, \dots, H_k , образующих полную группу событий, оценивающих различные возможные отказы при функционировании системы.

Вероятность безопасного функционирования (событие A) вычисляется по формуле

$$P(A) = \sum_{i=0}^k P(H_i)P(A/H_i), \quad \sum_{i=1}^k P(H_i) = 1, \quad (1.2)$$

где $P(H_i)$ – вероятность попадания системы в состояние H_i ;

$P(A/H_i)$ – вероятность безопасной работы при нахождении системы в состоянии H_i .

Очевидно, $P(H_i)$ определяет надежность, а $P(A/H_i)$ – безопасность функционирования системы в состоянии H_i . Из (1.2) следует, что повышение безопасности может быть достигнуто за счет повышения надежности и за счет уменьшения опасных последствий отказов, т. е. увеличения $P(A/H_i)$.

Вычисление $P(A/H_i)$ производится на основе различных моделей аналитически или на основе метода статистического моделирования. Метод статистического моделирования, как экспериментальный метод, позволяет вычислять условные вероятности безопасной работы системы как в процессе ее проектирования, так и в процессе эксплуатации существующих систем. При отказах опасная ситуация развивается в течение некоторого времени, когда системы регулирования (управления) или человек-оператор могут на основании информации, полученной от датчиков, совершить действия, выводящие систему из опасного состояния.

Разделим отказы системы на группы, в каждой из которых сосредоточены отказы, приводящие к одинаковым последствиям, и присвоим каждой группе коэффициент вида

$$S_i = \Delta Q_i / Q_{i_0} \quad (i = 1, \dots, p),$$

где ΔQ_i – математическое значение параметра объекта, достигаемого этим параметром за время переключения на резервную систему или за время, необходимое человеку-оператору для принятия решения и управления после начала проявления отказа;

Q_{i_0} – предельно допустимое значение указанного параметра.

Статистическое моделирование сводится к реализации функционирования системы, состоящей из математической модели объекта и реальной (или смоделированной) системы в условиях действия на систему случайных возмущений и реальных отказов системы как случайных событий.

Вероятность получения любого из возможных значений коэффициента S_i вычисляется по формуле

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^i n_j}{N_o},$$

где n_j – количество отказов j -го элемента;

i – число типов (групп) отказов;

N_o – общее количество отказов, полученных на основе обработки данных эксплуатации.

По результатам статистического моделирования строится функция $F(S_i)$ распределения вероятностей проявления различных последствий, характеризуемых значением S_i . На рис. 1.2 изображена зависимость $F(S_i)$, из которой следует, что составляющая P_m при $S_i = 1$ является условной вероятностью безопасной работы системы. При $S_i > 1$ возникают опасные ситуации.

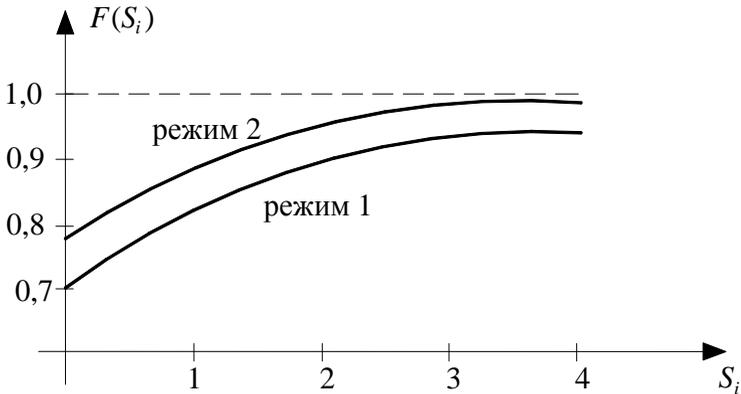


Рис. 1.2. Зависимость $F(S_i)$

Статистические данные показывают, что различия между значениями надежности и безопасности могут достигать больших значений, например, в авиации безопасность на порядок больше надежности.

Рассмотрим некоторые аналитические оценки безопасности. Обозначим через B событие – отказ подсистемы B . Полная группа со-

стоит из двух событий: система работоспособна (\bar{B} – исправна), система неработоспособна (B – неисправна):

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1.$$

Пусть отказы системы подчиняются экспоненциальному распределению, тогда согласно (1.2) можем записать

$$P(A) = P_0 e^{-\lambda_B t} + P_0 (1 - e^{-\lambda_B t}) P(A/B), \quad (1.3)$$

где P_0 – вероятность безотказной работы системы исключая B ;

λ_B – интенсивность отказов подсистемы B ;

$P(A/B)$ – условная вероятность безотказной работы системы после отказа B .

В выражении (1.3) не учитывается вероятность опасных последствий из-за случайных воздействий при исправной системе. Обычно этой вероятностью по сравнению с другими в (1.3) можно пренебречь.

С другой стороны, вероятность безопасной работы зависит от надежности, поэтому можно предположить, что распределение опасных последствий при отказах системы также имеет экспоненциальный вид. Для $P(A)$ возьмем приближение в форме

$$P(A) = P_0 e^{-\lambda_B s_B t}, \quad (1.4)$$

где s_B – коэффициент, учитывающий степень влияния отказа B на безопасность всей системы.

Приравняв (1.3) и (1.4) и заменяя экспоненты их разложениями в ряд Тейлора

$$e^{-\lambda_B t} \approx 1 - \lambda_B t, \quad e^{-\lambda_B s_B t} \approx 1 - \lambda_B s_B t,$$

получим

$$s_B = 1 - P(A/B); \quad (1.5)$$

$$P(A) = P_0 \exp[-\lambda_B (1 - P(A/B)t)]. \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что для увеличения $P(A)$ нужно уменьшить λ_B (т. е. увеличить надежность) и увеличить $P(A/B)$. Также видно, что безотказность отличается от надежности тем, что в выражение надежности каждой подсистемы необходимо ввести коэффициент, учитывающий степень влияния отказа данной подсистемы на безопасность работы всей системы. Из (1.5) видно, что этот коэффициент определяется на основе обработки результатов статистического моделирования в зависимости от вызываемых этим отказом изменений, существенных для безопасности работы параметров системы, с учетом времени реакции человека-оператора на отказ или с учетом быстрогодействия локальной системы контроля (ЛСК).

1.4. Наблюдаемость

Измерение (наблюдение) является необходимой составной частью управления. Даже тогда, когда программное управление формируется как функция времени, определяемая, например, на стадии проектирования, исходным является измерение, доставившее необходимую информацию об управляемом процессе. Связь управления с информацией, получаемой посредством измерения, является органической и может быть положена в основу определения понятия управления.

При автоматическом управлении предполагается, что наблюдение сопровождается измерением координат, параметров, и в понятия «наблюдение», «измерение» вкладывается практически одинаковый смысл. В дальнейшем в основном будет применяться термин «наблюдение».

Под *наблюдаемостью* обычно понимается возможность косвенного определения переменных состояний на основе измерения некоторых других величин и использования априорной информации. Косвенные измерения давно известны в классической метрологии. В теории управления под наблюдаемостью понимается возможность косвенных измерений, но в расширенном по сравнению с традиционной метрологией смысле.

Можно рассматривать наблюдаемость как в пространстве состояний, так и в пространстве сигналов. Однако компоненты вектора сигналов чаще всего выбираются измеримыми, так что в пространстве сигналов обычно имеет место непосредственная наблюдаемость.

Виды общей наблюдаемости в пространстве состояний. Достаточная постановка задачи определения состояния системы по наблюдениям заключается в следующем.

Через наблюдение получено множество величин, связанное известным оператором с множеством X , принадлежащим пространству состояний системы, описываемых математической моделью. Требуется определить X или некоторое его подмножество $X_{\Pi} \subset X$.

Самая распространенная постановка задачи наблюдения такая, при которой элементом множества X является вектор состояния в некоторый начальный момент времени $\bar{x}(t_0)$. Известно уравнение детерминированного процесса, которому подчиняется $\bar{x}(t)$, задана функция наблюдения $\bar{z} = \bar{h}[\bar{x}(t), t]$, измеряемая на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ и имеющая размерность меньше размерности \bar{x} . Таким образом, элементом множества Z здесь служит функция $\bar{z}(t)$ на указанном интервале, причем число компонент векторной функции $\bar{z}(t)$ меньше числа компонент $\bar{x}(t)$, в частности $\bar{z}(t) = z_1(t)$ может представлять скалярную функцию при многомерном пространстве состояний. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 1.3, а. Ясно, что задача определения (восстановления) $\bar{x}(t_0)$ в этой постановке разрешима только за счет использования *априорной информации* об $\bar{x}(t)$, т. е. уравнения процесса.

На практике решение последней задачи почти эквивалентно решению задачи восстановления текущего вектора состояния по измерениям текущего значения наблюдения. Так как за *начальный* момент времени в данной задаче можно выбрать любой момент, предшествующий конечному моменту наблюдения t_1 , то при соблюдении соответствующих условий может быть восстановлено состояние процесса, непосредственно предшествующее текущему и для непрерывных процессов мало отличающееся от текущего (рис. 1.3, б).

Если в рассмотренных выше постановках задачи наблюдаемости множество X имеет такую же размерность, что и пространство состояний, тогда возможно определение (восстановление) полного вектора состояния и говорят о *полной наблюдаемости*. Соответствующая система называется *вполне наблюдаемой*. Если же существует возможность восстановления лишь подмножества $X_{\Pi} \subset X$, а именно, части компонент вектора состояния, другая же часть не может

быть определена в заданных условиях, то имеет место *неполная наблюдаемость*, а система называется *не вполне наблюдаемой*.

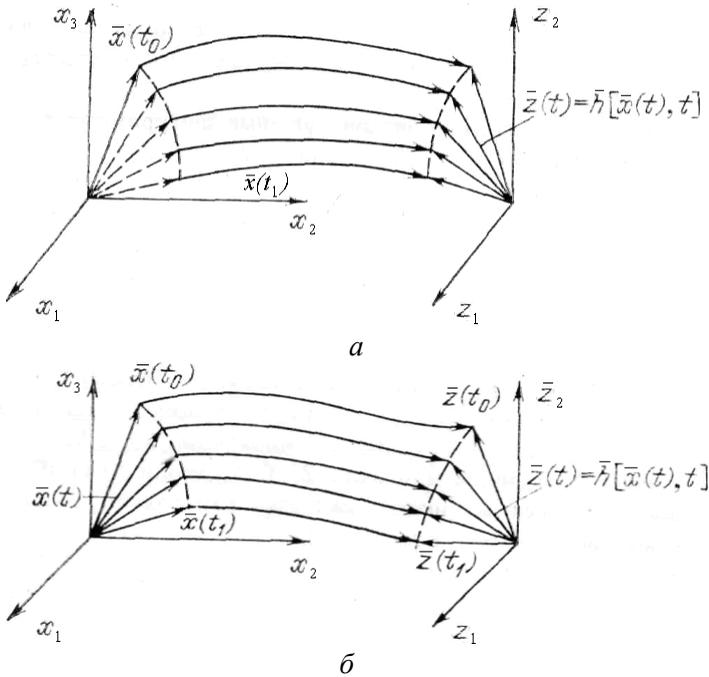


Рис. 1.3. Схема восстановления (определения) вектора состояния $\bar{x}(t)$ по наблюдениям вектора $\bar{z}(t)$

Изучение наблюдаемости, как и других свойств систем, нуждается в критериях (условиях), которые позволяли бы судить о наблюдаемости на основе некоторых правил, оперирующих априорной информацией (заданными условиями).

1.4.1. Идентифицируемость

Понятие *идентифицируемости*, по крайней мере параметрической, можно рассматривать как частный случай наблюдаемости. Однако в практическом применении идентифицируемость представляет собой важное и специфическое свойство, так что его обычно выделяют в специальную категорию. *Параметрическая идентифицируе-*

мость представляет собой возможность определения параметров математической модели системы или процесса по результатам измерения определенных выходных величин в течение некоторого интервала времени. Параметры, вектор которых в дальнейшем обозначается через \bar{a} , отличаются от координат (вектор \bar{x}) скоростью изменения. Параметры, как правило, считаются медленно изменяющимися величинами, а в идеальном случае – постоянными ($\dot{\bar{a}} = 0$).

При изучении идентифицируемости, так же как наблюдаемости, целесообразно, по крайней мере на первом этапе, рассматривать идеальные условия, когда шумы (помехи) отсутствуют, а идентифицируемые параметры постоянны.

В соответствии с этим уравнения для задачи параметрической идентифицируемости непрерывного процесса записываются в виде

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{a}, t);$$

$$\dot{\bar{a}} = 0, \bar{z} = h(\bar{x}, \bar{u}, \bar{a}, t),$$

где \bar{x} – вектор переменных состояний;

\bar{u} – вектор управления;

\bar{a} – вектор параметров системы;

\bar{z} – вектор переменных наблюдения.

В рамках этой постановки задачи возможны различные варианты и различные формы условий идентифицируемости.

1.4.2. Управляемость

Понятие *управляемости* связано с возможностью перевода (перехода) системы посредством управления из одного состояния в другое. Этому понятию придается либо структурно-качественный, либо количественный смысл. При рассмотрении структурно-качественной стороны управляемости интересуются принципиальной возможностью перехода управляемой системы из одного заданного множества состояний в другое заданное множество состояний, как правило, за конечное время. При количественном изучении управляемости рассматривают те или иные характеристики переходных про-

цессов при простейших типовых управляющих воздействиях. Управляемость рассматривают применительно как к детерминированным процессам, так и для стохастических аналогов задач управляемости. Можно рассматривать управляемость как динамических объектов, не оснащенных регуляторами, так и систем, содержащих множество замкнутых контуров управления. В большой системе с иерархической структурой обычно изучают управляемость каждого уровня, начиная от низшего и кончая высшим. В любом случае управляемость зависит от структуры системы, состава органов управления, значений параметров, располагаемой энергии управления.

Применяется целая группа понятий управляемости, различающихся как условиями перехода системы, так и ограничениями, накладываемыми на управление.

Различные виды переходов иллюстрирует рис. 1.4. В *случае I* рассматривается переход из произвольной точки n -мерного пространства состояний в произвольную точку этого пространства, причем никаких ограничений на характер движения, кроме конечности времени перехода $t_1 - t_0$, не накладывается. В *случае II* в пространстве состояний задана замкнутая область G и должен обеспечиваться переход из любой точки этой области в произвольную ее точку без выхода за пределы области G . Это случай существования ограниченной типа неравенств в пространстве состояний.

Случай III соответствует переходу из заданной области пространства состояний полной размерности n в заданную область меньшей размерности. Например, управление должно обеспечивать переход из любой точки пространства состояний на прямую, проходящую через начало координат.

Случай IV является противоположным предыдущему: здесь управление должно обеспечить перевод системы из любой точки области меньшей размерности в любую точку полноразмерной области.

Случай V соответствует управляемости в малом. Здесь управление должно обеспечить переход из любой точки пространства состояний x^0 в любую точку малой n -мерной ε – окрестности точки \bar{x}^0 . Порядок малости окрестности может быть связан со временем перехода.

Случай VI соответствует управлению для перевода системы из малой окрестности точки $\bar{x}(t_0)$ в плоскости $3D$ в малую окрестность точки $\bar{x}(t_1)$ в объем $2D$, что соответствует неполной управляемости.

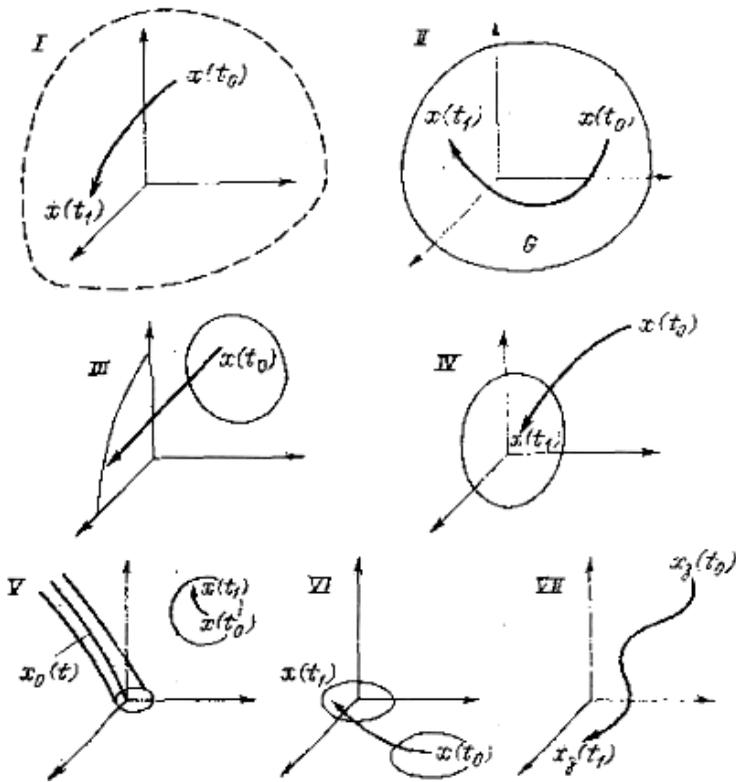


Рис. 1.4. Типы переходов при различных видах управляемости

Управляемости в малом может быть дано другое определение. Пусть при управлении $\bar{u}^0(t)$ и начальном условии $\bar{x}^0 = \bar{x}(t_0)$ имеет место процесс $\bar{x}^0(t)$. При управлении

$$\bar{u} = \bar{u}^0(t) + \Delta \bar{u}(t)$$

процесс описывается функцией

$$\bar{x} = \bar{x}^0(t) + \Delta \bar{x}(t).$$

При этом каждая точка траектории $\bar{x}^0(t)$ служит центром.

Важное практическое значение имеет понятие управляемости, соответствующее *случаю VII*. Здесь задается множество программных траекторий $\bar{x}_3(t)$ перехода из одной точки $\bar{x}_3(t_0)$ в другую $\bar{x}_3(t_1)$. Система считается управляемой, если существуют управления, обеспечивающие движение по заданным траекториям при условиях

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_3(t_0);$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}_3(t_1).$$

Существует большое число видов управляемости. Наиболее эффективным в теоретическом и практическом отношении инструментом исследования управляемости является необходимый и достаточный аналитический и структурный критерий управляемости того или иного вида. Подобные критерии получены для основных видов управляемости линейных систем. Во многих случаях приходится довольствоваться лишь необходимыми или достаточными критериями управляемости, а в ряде случаев – лишь условиями, способствующими управляемости, подобно тому как это имеет место при изучении наблюдаемости.

Наконец, во многих практических задачах аналитические и структурные подходы анализа управляемости оказываются неприемлемыми по причине чрезмерной громоздкости или неразработанности. В этих случаях приходится прибегать к численному эмпирическому изучению управляемости путем моделирования.

1.5. Устойчивость равновесия и движения систем

Понятие устойчивости равновесия и движения динамических систем появилось и получило значительное развитие главным образом в области механики. Это естественно, так как устойчивость является категорией, относящейся прежде всего к собственным движениям системы, порождаемым начальными условиями (возмущениями) и внутренними свойствами системы, но не внешними воздействиями. Поэтому устойчивость может рассматриваться применительно к любой системе, как управляемой, так и неуправляемой. Неуправляемые механические системы, например в механике – колебания всех видов, явились первым предметом исследования в теории устойчивости.

Если рассматривать идеальные условия без влияния на систему шумов и постоянно имеющихся воздействий, т. е. исходить из тех же предпосылок, что и при определении управляемости, наблюдаемости, идентифицируемости, то понятия устойчивости могут быть определены в пространстве состояний или в пространстве сигналов как некоторые свойства операторов системы. Здесь устойчивость рассматривается в пространстве состояний.

Как уже отмечалось, устойчивость рассматривается как внутреннее свойство системы или движения. Поэтому система уравнений, описывающих движение или процесс, замкнута, а движение свободно.

Устойчивость рассматривается в терминах пространства состояний. В целом нужно отметить, что понятия наблюдаемости, управляемости, идентифицируемости являются фундаментом для постановки и решения задач анализа и синтеза в теории мехатронных систем.

1.5.1. Понятия устойчивости в пространстве состояний

Для определения большинства понятий устойчивости будем использовать евклидово пространство состояний R^n .

Для общего определения понятия устойчивости в R^n и времени t рассмотрим два множества (области) начальных состояний $G_0 \subset R^n$ и множество конечных состояний или процессов G_K . Множество G_K в общем случае задается в пространстве R^n и времени. Элементы множества G_K обычно удовлетворяют уравнению процесса (движения). Для детерминированных процессов с непрерывным временем это уравнение без управления \bar{u} имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t). \quad (1.7)$$

Область $G_0 \subset R^n$ обычно имеет ту же размерность, что и пространство состояний, т. е. n , хотя в специальных задачах может рассматриваться устойчивость по отношению к начальным состояниям, образующим континуум или дискретное множество точек меньшей размерности, чем n .

Множество G_K , рассматриваемое в пространстве R^n , чаще всего имеет размерность, меньшую n , хотя в специальных случаях эти размерности могут совпадать. Так, если (1.7) имеет решение $\bar{x} = 0$, то рассматривается устойчивость состояния равновесия, а множест-

во G_K состоит из одной-единственной точки – начала координат. Здесь имеет место нулевая размерность области конечных состояний. На рис. 1.5, а множество G_K , состоящее из одной точки, находится внутри области G_0 , что является наиболее характерным случаем. На рис. 1.5, б эта точка находится вне области G_0 .

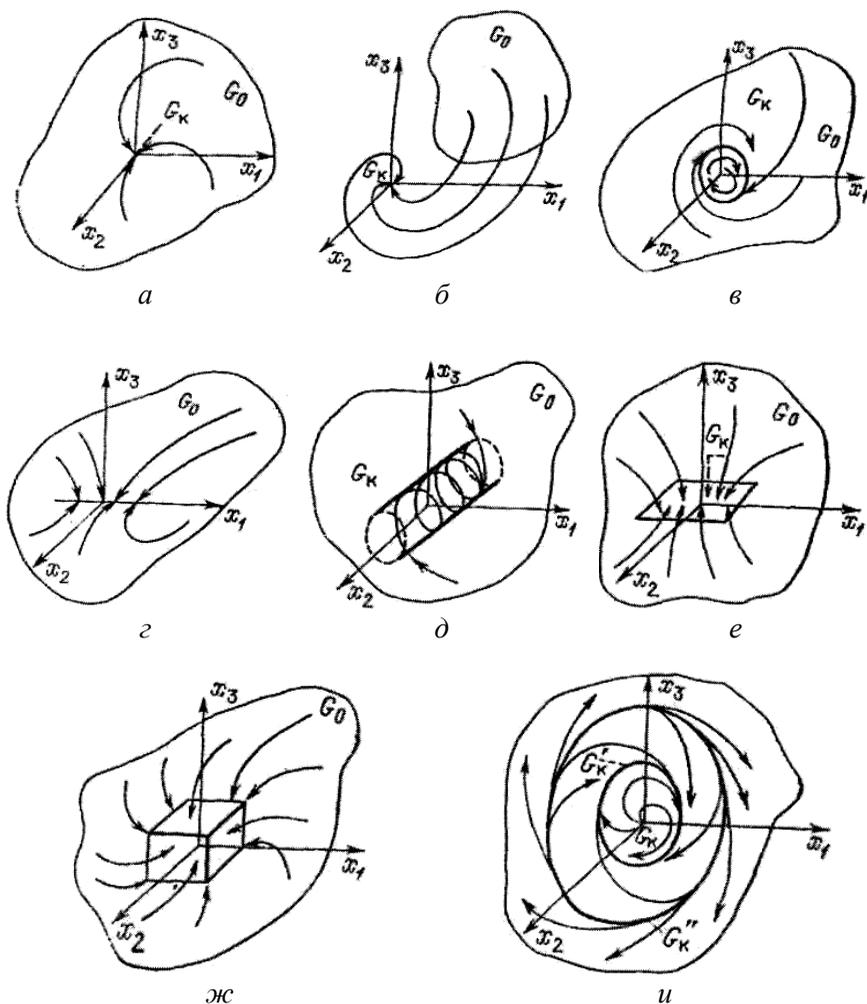


Рис. 1.5. Иллюстрации понятий устойчивости состояний с доопределением поведения решений на границах областей

Если множество G_K представляет собой одну из траекторий, удовлетворяющих уравнению (1.7) и имеющих параметрическое представление $\bar{x}(\theta)$ (параметром θ может служить время t), то размерность множества G_K есть единица. Этот случай, весьма распространенный, иллюстрирует рис. 1.5, а, б. Движение по указанной траектории называется *невозмущенным движением*. В предыдущем примере точку G_K можно рассматривать как частный случай невозмущенного движения. Рис. 1.5, в иллюстрирует случай, когда невозмущенным движением являются *автоколебания*, траектория которых называется *предельным циклом*. Автоколебания могут существовать в нелинейных системах как с гладкими, так и с разрывными функциями $f(x, t)$.

На рис. 1.5, г представлен случай, когда множество G_K является отрезком прямой в пространстве состояний. Подобные случаи обычно не рассматриваются в классической качественной теории дифференциальных уравнений, так как здесь само уравнение (1.7) заведомо не удовлетворяет условию существования и единственности решения Липшица. Эти случаи, связанные, в частности, с так называемыми *скользящими режимами*, могут иметь место, когда функция f является разрывной или определена в соприкасающихся областях пространства.

В качестве множества G_K может фигурировать поверхность любой размерности $p < n$, на которой лежат траектории, соответствующие решениям исходного уравнения (1.7). Уравнение поверхности может иметь вид

$$F(x, t) = \text{const}, \quad (1.8)$$

где размерность векторной функции F меньше n . В качестве поверхностей (1.8) могут фигурировать цилиндры (рис. 1.5, д), торы и любые другие поверхности. Для разрывных и негладких функций f скользящих режимов поверхность (1.8) может иметь вид гиперплоскости или даже участка гиперплоскости (рис. 1.5, е). Наконец, для систем специального вида, в частности систем, в которых функция f обращается в нуль в области G_K размерности n , множество G_K представляет поверхность полноразмерной области в пространстве состояний. Соответствующий случай иллюстрирует рис. 1.5, ж. Множество G_K будем называть *множеством невозмущенных состояний*

или *множеством невозмущенных движений* (процессов), множество G_0 – областью притяжения (при наличии устойчивости). Одна система может иметь несколько множеств невозмущенных движений и соответствующих областей притяжения. Классическим примером является автоколебательная система с несколькими предельными циклами. Так, на рис. 1.4, *и* одно невозмущенное состояние G_K представлено началом координат. Два других невозмущенных движения соответствуют предельным циклам G'_K, G''_K .

Множество невозмущенных состояний (движений) G_K называется *асимптотически устойчивым* с областью притяжения G_0 , если всякое движение, начавшееся в G_0 , в силу уравнений (законов) динамической системы с течением времени приходит в сколь угодно малую окрестность G_K .

Сколь угодно малая окрестность области G_K понимается в смысле сколь угодно малого расстояния всех точек этой окрестности до границ области G_K в метрическом (евклидовом) пространстве состояний.

Если хотя бы одно движение, начавшееся в G_K или в его сколь угодно малой окрестности, с течением времени в силу уравнений (законов) динамической системы выходит за пределы некоторой окрестности множества G_K , то множество состояний (движений) G_K называется *неустойчивым*.

Данное общее понятие устойчивости может без каких-либо изменений быть перенесено на процессы с дискретным временем, описываемые уравнением вида

$$x[k+1] = f[x[k], k].$$

Устойчивость в целом. Если область притяжения G_0 охватывает все пространство состояний, то соответствующую устойчивость называют *устойчивостью в целом*. В любой реальной системе существует область ограничений, вне которой принятая математическая модель и связанное с ней пространство состояний теряют силу. Поэтому для практики вполне достаточно понятия устойчивости в целом, при котором область притяжения совпадает с указанной областью ограничений.

Устойчивость невозмущенного движения или процесса. Как следует из сказанного, элементами множества G_K обычно являются процессы, движения или состояния, удовлетворяющие уравнениям свободного движения системы. Поэтому можно говорить об устойчивости невозмущенного движения.

Динамическая система (1.7), где функция \bar{f} явным образом зависит от времени t , называется *неавтономной* или нестационарной. Соответственно система

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

называется *автономной* или *стационарной*. Обозначим невозмущенное движение индексом «0» сверху. Для случая (1.7) по определению

$$\dot{\bar{x}}^0 = \bar{f}(\bar{x}^0(t), t). \quad (1.9)$$

Вычитая (1.9) из (1.7) и вводя обозначение

$$\Delta\bar{x}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}^0(t),$$

получаем

$$\Delta\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}(t), t) - \bar{f}(\bar{x}^0(t), t) = \bar{f}(\bar{x}^0(t) + \Delta\bar{x}, t) - \bar{f}(\bar{x}^0(t), t) = \bar{X}(\Delta\bar{x}, t). \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) называется уравнением в отклонениях или *уравнением возмущенного движения*. Уравнение

$$\Delta\dot{\bar{x}} = \bar{X}(\Delta\bar{x}, t) \quad (1.11)$$

имеет нулевое решение $\Delta\bar{x} = 0$. Путем введения уравнения в отклонениях задача об устойчивости невозмущенного движения трансформируется в задачу устойчивости состояния равновесия $\Delta\bar{x} = 0$ (устойчивости нулевого решения). Заметим, что, за исключением специальных случаев ($\bar{x}^0 = \text{const}$ или \bar{f} – линейная, не зависящая

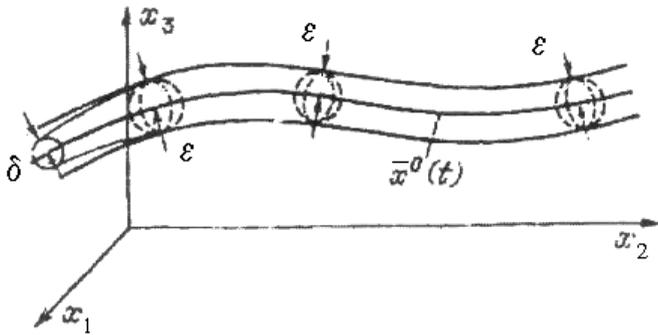
явно от времени функция), уравнение в отклонениях (1.11) является нестационарным (неавтономным), даже если исходная система стационарна, т. е. имеет вид (1.10).

Обозначим норму вектора $\Delta\bar{x}$ через $\|\Delta\bar{x}\|$ и допустим, что в начальный фиксированный момент времени вектор $\Delta\bar{x}(t_0)$ принадлежит некоторой области $G_{0\Delta x}$ пространства отклонений. Невозмущенное движение $\bar{x}^0(t)$ называется *асимптотически устойчивым* с областью притяжения в отклонениях $G_{0\Delta x}$, если при любом $\Delta\bar{x}(t_0) \in G_{0\Delta x}$ в силу уравнения (1.11) $\|\Delta\bar{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

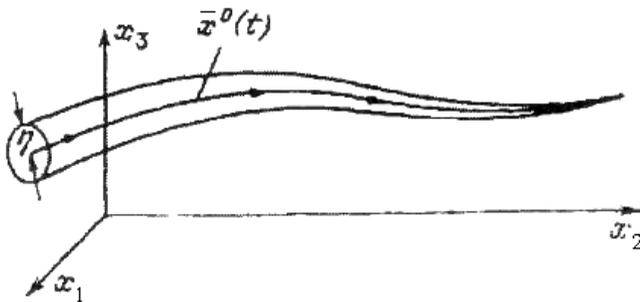
Устойчивость невозмущенного движения по Ляпунову. Невозмущенное движение $\bar{x}^0(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что из неравенства $\|\Delta\bar{x}(t_0)\| < \delta$ при $t > t_0$ следует неравенство $\|\Delta\bar{x}(t)\| < \varepsilon$. Здесь t_0 – фиксированный начальный момент времени.

Устойчивость по Ляпунову является, вообще говоря, локальной устойчивостью, т. е. устойчивостью в малом. Этот вид устойчивости иллюстрирует рис. 1.6. На рис. 1.6, а изображена *трубка траекторий* в окрестности невозмущенного движения $\bar{x}^0(t)$ и сферические окрестности этого движения в отдельные моменты времени. Показана также область начальных отклонений с радиусом δ .

На рис. 1.6, а представлен случай, когда $\delta < \varepsilon$. Устойчивость по Ляпунову здесь означает, что как бы ни были узки трубка и сферическая окрестность невозмущенного движения, возмущенное движение, начавшееся в окрестности δ , равной или меньшей окрестности ε , будет оставаться в указанной трубке и окрестности ε . Понятию *неасимптотической устойчивости* в классической теории соответствует понятие *нейтральности* в инженерном представлении. Так, например, система $\ddot{x} = 0$, нейтральная в инженерном понимании, является устойчивой неасимптотически в указанном выше смысле.



a



б

Рис. 1.6. Иллюстрации понятия устойчивости движения по Ляпунову (a) и асимптотической устойчивости по Ляпунову (б)

Асимптотическая устойчивость невозмущенного движения по Ляпунову. Движение $\bar{x}^0(t)$ называется *асимптотически устойчивым* в смысле Ляпунова, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое положительное число η , что при $\|\Delta\bar{x}(t_0)\| < \eta$ имеет место $\|\Delta\bar{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Понятие асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова поясняет рис. 1.6, б. Здесь существует такая окрестность η начального состояния $\bar{x}^0(t_0)$ невозмущенного движения (вообще говоря, сколь угодно малая), что все движения, начавшиеся в этой окрестности, стремятся с течением времени к $\bar{x}^0(t)$.

Известно, что стремление к пределу может быть равномерным и неравномерным по отношению к тому или иному параметру. Если равномерность стремления к пределу имеет место по отношению к t_0 , то асимптотическая устойчивость называется *равномерной относительно t_0* . Если равномерное стремление к пределу имеет место по отношению к начальному значению $\bar{x}^0(t_0)$ с любым t_0 , то говорят, что невозмущенное движение *равномерно асимптотически устойчиво по отношению к начальным условиям*. Оба вида равномерной устойчивости имеют место для стационарной системы с асимптотически устойчивым невозмущенным движением.

1.5.2. Устойчивость линейных стационарных систем

Рассмотрим систему описываемую уравнением

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}; \quad A = \text{const}.$$

Для системы вне зависимости от того, какое движение $\bar{x}^0(t_0)$ этой системы выбрано за невозмущенное, какой начальный момент времени t_0 задан, имеет место либо асимптотическая равномерная устойчивость в целом, либо просто устойчивость в целом, либо неустойчивость. Все определяется *собственными числами* матрицы A . Поэтому, как отмечалось выше, для линейной стационарной системы свойство устойчивости приписывается не движению, а самой системе.

Устойчивость невозмущенного движения системы с дискретным временем. Все перечисленные выше виды устойчивости невозмущенного движения распространяются на системы с дискретным временем вида

$$\bar{x}[k+1] = f[\bar{x}[k], k].$$

Определения остаются практически без изменений.

1.6. Метод цепей и переходных функций в динамических системах

Любую мехатронную систему можно представить в виде соединения подсистем. Реальные модели и элементы динамических систем

могут иметь различные схемы, конструктивное оформление, в них могут использоваться разные физические явления, они могут выполнять различные функции внутри системы. Однако с точки зрения анализа и синтеза мехатронных систем проблемы могут быть сведены к определению зависимостей, связывающих входные и выходные воздействия на моделях подсистем системы.

Математически можно представить, что вход, определяемый вектором $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, и выход, определяемый вектором $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, связаны соотношением

$$\bar{y} = \hat{\phi}(\bar{x}),$$

где $\hat{\phi}$ – оператор линейный или нелинейный, алгебраический, дифференциальный, интегральный.

Наиболее распространенная связь между $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ записывается в виде дифференциальных уравнений. В случае если $m \neq n \neq 1$, можем записать

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)}y}{dt^i} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{(k)}x}{dt^k}. \quad (1.12)$$

В теории механических, электрических, электронных цепей для описания свойств звеньев цепи удобно пользоваться не дифференциальными уравнениями, а следующими взаимосвязанными величинами, также полностью характеризующими связь между выходной и входной величинами звеньев:

1. *Комплексный коэффициент передачи звена (ККП) – $K(j\omega)$* представляет собой отношение комплексной амплитуды выходного сигнала $y(j\omega)$ к комплексной амплитуде входного сигнала $x(j\omega)$, $j = \sqrt{-1}$. Находится с помощью преобразования Фурье уравнения (1.12):

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{A_{\text{ВЫХ}} e^{j(\omega t = \varphi_{\text{ВЫХ}})}}{A_{\text{ВХ}} e^{j(\omega t = \varphi_{\text{ВХ}})}} = \\ &= \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned}$$

где $A(\omega)$ – модуль ККП, равный отношению амплитуд выходного и входного сигналов для данного значения частоты (амплитудно-частотная характеристика АЧХ):

$$A(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{A_{\text{вых}}(\omega)}{A_{\text{вх}}(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \varphi_{\text{вых}}(\omega) - \varphi_{\text{вх}}(\omega).$$

Здесь φ – фаза, равная разности фаз этих же сигналов (*фазочастотная характеристика – ФЧХ*).

Изменяя частоту входного воздействия в пределах $(0, \infty)$, получим зависимость $\text{Im} K$ от $\text{Re} K$, которая носит название *амплитудно-фазовая характеристика (АФХ)*.

ККП и АФХ находятся экспериментально путем подачи на вход звена синусоидального воздействия с постоянной амплитудой и меняющейся частотой. Измеряя для каждого фиксированного значения частоты и фазы амплитуду выходного сигнала, находим АФХ, АЧХ, ФЧХ.

Представим $K(j\omega)$ в виде

$$K(j\omega) = \text{Re}(K) + j \text{Im}(K),$$

тогда связи между величинами $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $\text{Re}(K)$, $\text{Im}(K)$ запишутся в виде

$$A(\omega) = \sqrt{[\text{Re}(K)]^2 + [\text{Im}(K)]^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(K)}{\text{Re}(K)};$$

$$\text{Re}(K) = A(\omega) \cos \varphi(\omega);$$

$$\text{Im}(K) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

2. *Передающая функция звена $K(p)$* представляет собой отношение изображения по Лапласу выходной величины звена $y(p)$ к изо-

бражению входной величины звена $x(p)$ при нулевых начальных условиях, что соответствует отсутствию накопленной энергии в звене:

$$K(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Преобразование от передаточной функции $K(p)$ к ККП $K(j\omega)$ осуществляется заменой в $K(p)$ аргумента p на $j\omega$.

3. *Переходная функция звена $h(t)$* определяет форму выходного сигнала звена при подаче на его вход воздействия в виде единичного скачка (функции Хевисайда) $1(t)$:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Изображение по Лапласу $H(p)$ для функции $h(t)$ имеет вид

$$Lh(t) = H(p) = y(p) = \frac{K(p)}{p},$$

тогда, применяя обратное преобразование Лапласа $L^{-1}H(p)$, получим выражение для $h(t)$:

$$h(t) = y(t) = L^{-1} \left[\frac{K(p)}{p} \right].$$

Таким образом, между переходной $h(t)$ и передаточной функцией $K(p)$ взаимно однозначное соответствие находится с помощью преобразования Лапласа.

Элементарные линейные звенья. Реальные звенья динамических систем обладают большим структурным разнообразием. Однако представление сложных систем в виде цепей позволяет использовать подход, применяемый в теории механических, электрических, электронных цепей для анализа и синтеза сложных звеньев, цепей систем. Если выделить элементарные (типовые) звенья, то сложные можно

скомпоновать путем параллельных и последовательных соединений элементарных. В качестве типовых звеньев выбираются такие, в которых процессы описываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

1. Рассмотрим типовые звенья, которые описываются дифференциальными уравнениями первого порядка

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x. \quad (1.13)$$

Тогда ККП находим с помощью преобразования Фурье в виде

$$K(j\omega) = \frac{j\omega b_1 + b_0}{j\omega a_1 + a_0}.$$

Количество типовых звеньев, описываемых уравнением (1.13) при различных значениях коэффициентов a_i , b_i в случаях, имеющих смысл, равно 5:

1) *безынерционное (усилительное) звено:*

а) $a_1 = b_1 = 0$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $K(j\omega) = \frac{b_0}{a_0}$;

б) $a_1 \neq b_1$, $b_1 \neq 0$, $a_0 = b_0 = 0$, $K(j\omega) = \frac{b_1}{a_1} = k$, $K(p) = k$, $h(t) = k1(t)$;

2) *инерционное звено:*

$$a_1 \neq 0, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, b_1 = 0,$$

$$K(j\omega) = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0} = \frac{k}{1 + j\omega T},$$

где $k = b_0 / a_0$ – коэффициент усиления звена;

$T = a_1 / a_0$ – постоянная времени звена.

$$K(p) = \frac{k}{1 + pT}, \quad h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t);$$

3) интегрирующее звено:

$$a_1 \neq 0, b_0 \neq 0, a_0 = 0, b_1 = 0, K(j\omega) = \frac{b_0}{j\omega a_1} = \frac{k}{j\omega}, k_1 = b_0 / a_1;$$

$$K(p) = \frac{1}{pT}, T = 1 / k_1, h(t) = \frac{t}{T} 1(t);$$

4) дифференцирующее звено:

$$a_1 = 0, b_0 = 0, a_0 \neq 0, b_1 \neq 0, K(j\omega) = \frac{j\omega b_1}{a_0} = j\omega k_2,$$

$$k_2 = b_1 / a_1, K(j\omega) = j\omega T,$$

$$K(p) = pT, h(t) = T\delta(t), \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0, \\ \infty & t = 0; \end{cases}$$

5) форсирующее звено:

$$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, a_1 = 0, b_1 \neq 0.$$

$$K(j\omega) = \frac{b_0 + j\omega b_1}{a_0} = k(1 + j\omega T), T = b_1 / b_0.$$

$$K(p) = k(1 + pT), h(t) = k[1(t) + T\delta(t)].$$

2. Из звеньев, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка, отметим лишь *колебательное звено* вида

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \pm 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = kx, b_2 = b_1 = 0,$$

$$a_2 = T^2, a_1 = \pm 2\xi T, a_0 = 1,$$

тогда

$$K(j\omega) = \frac{b_0}{a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}.$$

$$K(p) = \frac{K}{p^2 T^2 \pm 2\xi p T + 1},$$

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T} t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\xi}{T} t \sin \omega_1 t \right) \right],$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Здесь T – постоянное время звена, связанное с резонансной частотой звена $\omega_0 = 1/T$;

k – коэффициент усиления звена;

ξ – относительный коэффициент запаздывания.

Синтез звеньев

Звенья могут соединяться между собой последовательно (рис. 1.7, а) или параллельно (рис. 1.7, б, в, г).

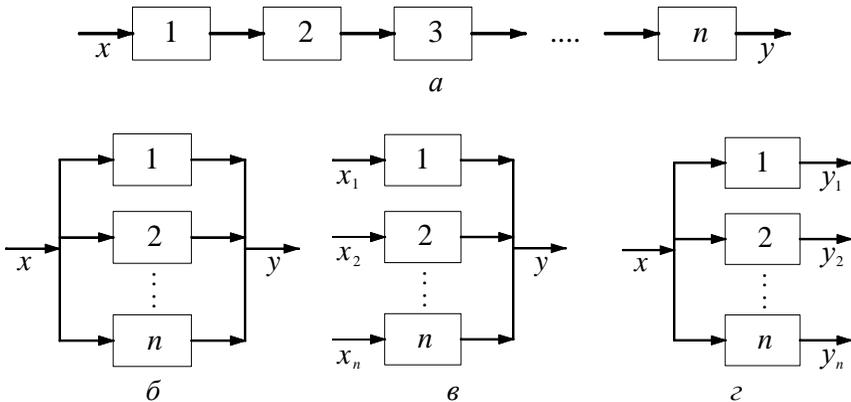


Рис. 1.7. Виды соединений звеньев

В дальнейшем для звеньев конкретной физической природы будут рассмотрены механические, электрические, электронные звенья с последовательным и параллельным соединением.

1.7. Примеры решения задач

Задача 1.1

Двухстепенной интегрирующий гироскоп изображен на рис. 1.8.

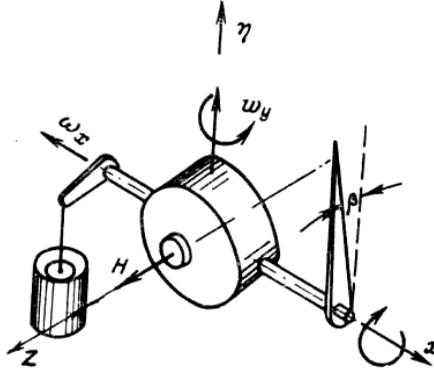


Рис. 1.8. Двухстепенной интегрирующий гироскоп

При вращении основания гироскопа вокруг входной оси (оси чувствительности) с угловой скоростью ω_y , возникает гироскопический момент $M_{\Gamma} = H\omega_y$, под действием которого гироскоп поворачивается вокруг выходной оси x , чему противодействует демпфер, создающий момент $M_{\text{д}} = h\omega_x = h\dot{\beta}$.

Составить дифференциальное уравнение интегрирующего гироскопа.

Решение

В установившемся состоянии $M_{\text{д}} = M_{\Gamma}$, т. е.

$$h\omega_x = H\omega_y, \text{ откуда } \omega_x = \dot{\beta} = \frac{H}{h}\omega_y,$$

а угол поворота гидродвигателя вокруг выходной оси определяется соотношением

$$\beta = \frac{H}{h} \int \omega_y dt.$$

Задача 1.2

Определить переходную и весовую функции усилительного $y(t) = 5x(t)$ и запаздывающего $y_3(t) = 5x(t - 3)$ звеньев.

Решение

Переходные функции звеньев:
усилительного

$$h[1] = 5 \cdot 1(t);$$

запаздывающего

$$h_3[t] = 5 \cdot 1(t - 3).$$

Весовые функции звеньев:
усилительного

$$w[f] = 5\delta[f];$$

запаздывающего

$$w_3[t] = 5\delta[t - 3].$$

Задача 1.3

Определить переходную и весовую функции апериодического звена, заданного уравнением $T \dot{y} + y = kx$ при $T = 2$ с и $k = 20$. Найти момент времени, при котором весовая функция будет иметь значение $w(t) = 0,5$, а переходная функция $h(t) = 19$.

Решение

Для получения переходной и весовой функций апериодического звена необходимо решить его дифференциальное уравнение соответственно при $x(t) = 1(t)$ и $x(t) = \delta(t)$.

Характеристическое уравнение апериодического звена имеют вид

$$T\eta + 1 = 0$$

и его корень $\eta = -1/T$.

Общий вид решения уравнения

$$h = k + Ce^{-\frac{t}{T}}.$$

При $t = 0$ $h = 0$. Следовательно, $C = -k$.

Тогда переходная функция звена

$$h = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

При подстановке числовых значений $k = 20$ и $T = 2$ с получим

$$h = 20(1 - e^{-0,5t}).$$

Весовая функция

$$W(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

или при подстановке численных значений

$$W(t) = 10 e^{-0,5t}.$$

При $t = 6$ с $= 3T$ соответственно получим $h(3T) = 19$; $W(3T) = 0,5$.

З а д а ч а 1.4

Определить переходную и весовую функции аperiodического неустойчивого звена, уравнение которого задано в виде

$$T \dot{y} - y = kx.$$

Р е ш е н и е

Переходная функция

$$h(t) = k \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right).$$

Весовая функция

$$W(t) = \frac{k}{T} e^{\frac{t}{T}}.$$

Задача 1.5

Определить переходную и весовую функции интегрирующего звена, уравнение которого задано в виде

$$T \dot{y} = kx.$$

Решение

Переходная функция

$$h(t) = \frac{k}{T} t.$$

Весовая функция

$$W(t) = 1(t).$$

Задача 1.6

Определить переходную и весовую функции дифференцирующего звена, уравнение которого задано в виде

$$y = T \dot{x}.$$

Решение

Переходная функция

$$h(t) = T \delta(t).$$

Весовая функция

$$W(t) = T \dot{\delta}(t).$$

Задача 1.7

Определить переходную и весовую функции форсирующего звена первого порядка, имеющего уравнение, заданное в виде

$$y = k(x + T\dot{x}).$$

Решение

Переходная функция

$$h(t) = k\{1(t) + T\delta(t)\}.$$

Весовая функция

$$W(t) = k\{\delta(t) + T\delta(t)\}.$$

Задача 1.8

Определить переходную и весовую функции форсирующего звена второго порядка, уравнение которого задано в виде

$$y = k(x + 2\xi T\dot{x} + T^2\ddot{x}).$$

Решение

Переходная функция

$$h(t) = k\{1(t) + 2\xi T\delta(t) + T^2\dot{\delta}(t)\}.$$

Весовая функция

$$W(t) = k\{\delta(t) + 2\xi T\delta(t) + T^2\ddot{\delta}(t)\}.$$

Задача 1.9

Определить переходную и весовую функции колебательного звена, уравнение которого задано в виде

$$T^2\ddot{y} + 2\xi T\dot{y} + y = kxT.$$

Решение

Для определения переходной функции колебательного звена его дифференциальное уравнение записываем в виде

$$T^2 \ddot{h} + 2\xi T \dot{h} + h = k \cdot 1(t). \quad (1.14)$$

Общее решение уравнения (1.14) имеет вид

$$h = k + C e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin\left(\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2} + \varphi\right). \quad (1.15)$$

Задавшись начальными условиями $h(0_+) = 0$ и $\dot{h}(0_+) = 0$ и подставив их в (1.15), получим $0 = k + C \sin \varphi$, откуда $C = -k/\sin \varphi$.

Если уравнение (1.15) продифференцировать и подставить в него $\dot{h}(0_+) = 0$, то получим

$$0 = -\xi \sin \varphi + \sqrt{1-\xi^2} \cos \varphi,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}; \quad \sin \varphi = \sqrt{1-\xi^2}; \quad \cos \varphi = \xi.$$

Окончательное выражение для переходной характеристики имеет вид

$$h(t) = k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin\left(\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2} + \arccos \xi\right) \right].$$

Если продифференцировать $h(t)$, то получим весовую функцию в виде

$$\omega(t) = \frac{k}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin \frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2}.$$

Задача 1.10

Определить переходную и весовую функции резонансного звена, уравнение которого задано в виде

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y} + y = kx.$$

Решение

Переходная функция

$$h(t) = k(1 - \cos \omega_0 t).$$

Весовая функция

$$W(t) = k \omega_0 \sin \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Задача 1.11

Определить переходную и весовую функции неустойчивого колебательного звена, уравнение которого задано в виде

$$T^2 \ddot{y} - 2\xi T \dot{y} + y = kx.$$

Решение

Переходная функция

$$h(t) = k \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{\frac{\xi}{T} t} \sin \left(\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2} - \arccos \xi \right) \right].$$

Весовая функция

$$\omega(t) = \frac{k}{T \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin \frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2}.$$

Задача 1.12

Определить переходную и весовую функции системы, состоящей из двух последовательно соединенных интегрирующих звеньев ($T^2\ddot{y} = kx$).

Решение

Переходная функция

$$h(t) = \frac{k}{2} \frac{t^2}{T^2}.$$

Весовая функция

$$W(t) = \frac{k}{T^2} t \cdot 1(t).$$

2. МЕХАНИКА РАБОЧИХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОДСИСТЕМ

Механическая подсистема мехатронной системы подразделяется на две подсистемы: несущую (рабочую) механическую подсистему (НМПС) и исполнительную подсистему (ИПС), исполнительно-усиливающую подсистему (ИУПС).

Как было установлено в главе 1, НМПС обеспечивает надежность функционирования мехатронной системы в рабочей зоне за счет выбора материалов и геометрических параметров конструкций.

ИПС обеспечивает динамику и статику звеньев НМПС в соответствии с заданными параметрами: нагрузка, скорость, ускорение, точность.

В ИУПС наиболее широко применяются пневмо-, гидро- и электроприводы для усиления управляющих (регулирующих) воздействий.

2.1. Координатные системы и кинематические цепи

2.1.1. Однородные координаты точки

В трехмерном пространстве любые четыре числа (x_1, x_2, x_3, x_4) , не все одновременно равные нулю и связанные с ее декартовыми координатами (x, y, z) равенствами $x = x_1 / x_4$, $y = x_2 / x_4$, $z = x_3 / x_4$, называются однородными координатами:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Однородные координаты определены не однозначно. Если (x_1, x_2, x_3, x_4) – однородные координаты некоторой точки, то числа $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ при $\lambda \neq 0$ тоже будут однородными координатами этой точки. Для каждой точки (x, y, z) пространства можно указать четверку чисел, являющуюся ее однородными координатами, например $(x, y, z, 1)$. Обратное верно, если $x_4 \neq 0$. В противном случае нельзя указать точку в пространстве, для которой числа $(x_1, x_2, x_3, 0)$ были бы ее однородными координатами.

Говорят, что любой четверке чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) соответствует точка пространства, возможно, бесконечно удаленная в направлении вектора $[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4]$, $\lambda \neq 0$, если $x_4 = 0$. Уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

задает плоскость. Два независимых уравнения:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$$

определяют прямую.

Операции над векторами, заданными однородными координатами. Эти операции определяются так, чтобы формулы, по которым вычисляются однородные координаты результирующего вектора, не противоречили формулам, оперирующим с обычными декартовыми координатами.

Умножение вектора $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ на скаляр s определим как

$$s\bar{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4/s].$$

Сложение и вычитание векторов $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ и $\bar{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4]$, дающие результирующий вектор $\bar{r} = [r_1, r_2, r_3, r_4]$, будем определять по формулам

$$r_i = \frac{a_i}{a_4} \pm \frac{b_i}{b_4}, \quad i = 1, 2, 3, \quad r_4 = 1.$$

Для скалярного и векторного произведений двух векторов будем иметь соответственно

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) / a_4b_4, \quad \bar{r} = \bar{a} \times \bar{b},$$

где

$$r_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad r_2 = a_3b_1 - a_1b_3,$$

$$r_3 = a_1b_2 - a_2b_1, \quad r_4 = a_4b_4.$$

Длина вектора \bar{a}

$$|\bar{a}| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} / |a_4|.$$

Эти формулы полезны, если необходимо выполнять операции над векторами в однородных координатах без предварительного перехода к обычным трехмерным координатам.

Преобразование однородных координат. Обычные декартовы координаты – геометрические точки в прямоугольной системе координат $Oxyz$ – можно вычислить, если известны координаты этой точки в другой прямоугольной системе координат $O'x'y'z'$, по формулам преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + r_1, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + r_2, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + r_3 \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где r_1, r_2, r_3 – координаты начала отсчета системы координат $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;

$l_1, m_1, n_1, \dots, l_3, m_3, n_3$ – направляющие косинусы осей системы $O'x'y'z'$ также по отношению к системе $Oxyz$.

Если (x_1, x_2, x_3, x_4) обозначают однородные координаты этой точки в системе $Oxyz$, а числа (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) обозначают ее однородные координаты в системе $O'x'y'z'$, то можно считать, что $x_4 = x'_4$ (однородные координаты можно умножить на любое число, не равное нулю).

После подстановки однородных координат в формулы (2.1) получим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1x'_1 + l_2x'_2 + l_3x'_3 + r_1x'_4, \\ x_2 &= m_1x'_1 + m_2x'_2 + m_3x'_3 + r_2x'_4, \\ x_3 &= n_1x'_1 + n_2x'_2 + n_3x'_3 + r_3x'_4, \\ x_4 &= x'_4. \end{aligned}$$

Таким образом, однородные координаты точки в различных системах координат связаны линейным невырожденным однородным преобразованием. Матрицу этого преобразования структурируем:

$$T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & \vdots & r_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & \vdots & r_2 \\ n_1 & n_2 & n_3 & \vdots & r_3 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & \vdots & \bar{r} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

обозначая матрицу направляющих косинусов относительного поворота размером 3×3 через l , а вектор переноса – через вектор-столбец \bar{r} . Тем самым в матрице T размером 4×4 можно выделить четыре подматрицы: l – размером 3×3 , \bar{r} – размером 3×1 , нулевую матрицу размером 1×3 и единичную матрицу размером 1×1 . Определитель матрицы $T = 1$, если прямоугольные системы координат обе правые или обе левые, и -1 – в противном случае.

Два преобразования систем координат: *преобразование переноса* и *преобразование поворота* в однородных координатах, определяются одним матричным преобразованием

$$\bar{x} = T \bar{x}'. \quad (2.3)$$

Это позволяет компактно записывать геометрические, кинематические, динамические соотношения для сложных пространственных механизмов. В формуле (2.3) и при записи других векторно-матричных операций векторы представляются в виде вектор-столбцов. Если же необходимо записать вектор в виде вектор-строки, будем использовать индекс « T », определяющий операцию транспонирования вектора или матрицы общего вида, например,

$$\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T.$$

Отметим, что преобразование T всегда можно представить как композицию вращения и переноса $T = T_r T_a$, где

$$T_r = \begin{bmatrix} E & \vdots & r \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix};$$

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} l & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

E – единичная 3×3 -матрица, а умножение 4×4 -матриц выполняется по обычным правилам.

Однородные преобразования в механике твердых тел. Матрицу (2.2) интерпретируем следующим образом. Пусть в пространстве с системой координат $Oxyz$ находится твердое тело, имеющее связанную с ним систему координат $O'x'y'z'$, относительно которой полностью определена конфигурация этого тела. Тогда положение тела в системе координат $Oxyz$ определяется матрицей T : подматрица l характеризует ориентацию тела, а подматрица \bar{r} – положение некоторой точки этого тела. По аналогии с понятием вектора состояния системы матрицу T называют *матрицей состояния тела*.

Положение системы координат $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$ можно задать шестью параметрами, например вектором \bar{r} и тремя углами Эйлера. Для этой цели вычисление всех элементов матрицы T или хранение их в памяти компьютера не обязательно. С другой стороны, например для задач динамики или расчета операции взятия схватом манипулятора какого-либо объекта, необходима дополнительная информация о конфигурации или распределении масс тела относительно связанной системы координат. Однако во всех случаях в памяти компьютера для каждого твердого тела, будь то звено манипулятора или объект манипулирования, удобно иметь матрицу T определенной выше структуры как важнейшую характеристику положения, с помощью которой могут быть получены различные необходимые характеристики путем простого умножения этой матрицы на векторы и другие матрицы.

Такие преобразования выполняются по формуле (2.3). Если $\bar{p}^v = [x'_v, y'_v, z'_v, 1]^T$ – вектор однородных координат некоторой точ-

ки твердого тела в системе координат $O'x'y'z'$ и задана матрица T этого тела, а также производные каждого элемента этой матрицы по времени, то обозначая матрицу, состоящую из первых производных по времени элементов T , через \dot{T} , матрицу, состоящую из вторых производных, через \ddot{T} и т. п., получим векторы положения, скорости, ускорения точки в системе координат $Oxyz$, т. е.

$$\bar{r}^v = [x_v, y_v, z_v, 1]^T;$$

$$\dot{\bar{r}}^v = [\dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v, 0]^T;$$

$$\ddot{\bar{r}}^v = [\ddot{x}_v, \ddot{y}_v, \ddot{z}_v, 0]^T,$$

которые вычисляются по формулам

$$\bar{r}^v = T\bar{\rho}^v;$$

$$\dot{r}^v = \dot{T}\bar{\rho}^v;$$

$$\ddot{r}^v = \ddot{T}\bar{\rho}^v.$$

При обратных преобразованиях вместо матрицы T требуется обратная матрица T^{-1} , которая может быть выражена через подматрицы T следующим образом:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} l^T & \vdots & l - l^T \bar{r} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 000 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.2. Кинематические пары

Рассмотрим способ задания кинематических связей между различными твердыми телами (звеньями). Пусть положения связанных систем координат двух твердых тел i и j относительно некоторой опорной системы координат определяются матрицами T_i и T_j . Запишем соотношение

$$T_i = T_j A_{ij},$$

где 4×4 – матрица $A_{ij} = T_j^{-1} T_i$ имеет ту же структуру (2.2), что и матрица T , и определяет положение звена i в j -й системе координат:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} L & \vdots & \bar{a} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 000 & \vdots & 1 \end{bmatrix}_{ij}.$$

Здесь 3×3 -подматрица L состоит из столбцов направляющих косинусов осей системы координат звена i по отношению к j -й системе координат, а вектор \bar{a} определяет положение начала отсчета системы координат i также в системе координат j -го тела.

На языке геометрических образов можно утверждать, что столбцы матрицы A_{ij} состоят из однородных координат в системе отсчета звена j точек проективного пространства, которые в системе отсчета звена i имеют следующие однородные координаты: $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Три первые точки являются бесконечно удаленными точками осей системы координат i , а четвертая – началом отсчета этой системы. Действительно, возьмем точку на оси $O_i x_i$ на расстоянии $1/\omega$ от начала отсчета (рис. 2.1). Эта точка в системе координат звена i будет иметь однородные координаты

$$R_i = [1/\omega, 0, 0, 1]^T,$$

а в системе координат звена j – координаты

$$R_j = [\alpha_1 + L_{11}/\omega, \alpha_2 + L_{21}/\omega, \alpha_3 + L_{31}/\omega, 1]^T,$$

где L_{11} , L_{21} , L_{31} – направляющие косинусы оси O_{ixi} в j -й системе отсчета.

Умножим очевидное соотношение $T_i B_i = T_j R_j$ на величину ω и устремим ее к нулю. Тогда рассматриваемая точка будет удаляться в бесконечность по оси $O_i x_i$ и в пределе окажется, что векторы $[1, 0, 0, 0]^T$ и $[L_{11}, L_{21}, L_{31}, 0]$ содержат однородные координаты одной и той же бесконечно удаленной точки в различных системах координат.

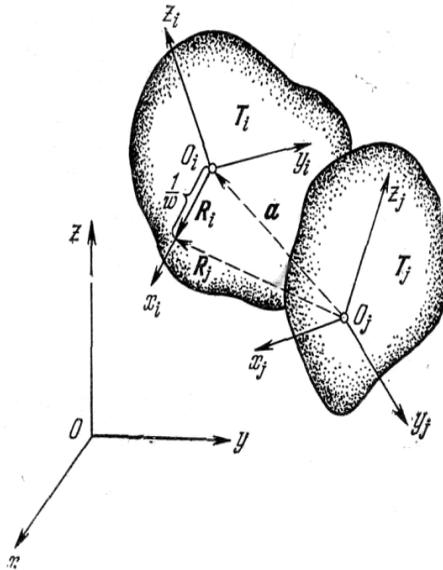


Рис. 2.1. Соотношение между системами координат звеньев i и j кинематической цепи

Аналогично можно рассмотреть бесконечно удаленные точки других осей и отдельно точку начала отсчета системы i . В итоге будут получены все четыре столбца матрицы A_{ij} .

Если звенья движутся в пространстве независимо друг от друга, то эта матрица определяется шестью независимыми параметрами (тело в свободном относительном движении имеет шесть степеней свободы), т. е.

$$A_{ij} = A_{ij}(p_1, \dots, p_6).$$

Если же звенья образуют кинематическую пару, то число условий связи, наложенных на относительное движение каждого звена кинематической пары, может быть в пределах от одного до пяти. Иначе, имеются независимые уравнения связи

$$f_s(p_1, \dots, p_6) = 0, \quad s = 1, \dots, K, \quad 1 \leq K \leq 5,$$

где число K определяет класс кинематической пары по числу потерянных степеней свободы относительного движения. Поэтому число

независимых параметров, определяющих относительное положение звеньев и, следовательно, матрицу A_{ij} , уменьшается до $6 - K$.

Таким образом, в общем случае для кинематической пары K -го класса

$$A_{ij} = A_{ij}(p_1, \dots, p_{6-K})$$

уравнения связей, не удовлетворяющие в совокупности условию независимости, т. е. в избыточном числе, могут быть заданы матричным равенством

$$T_i = T_j A_{ij} (p_1, \dots, p_{6-K}).$$

Уравнения связи относительно скоростей и ускорений получают дифференцированием:

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_i &= \dot{T}_j A_{ij} + T_j \dot{A}_{ij}; \\ \ddot{T}_i &= \ddot{T}_j A_{ij} + 2\dot{T}_j \dot{A}_{ij} + T_j \ddot{A}_{ij} \end{aligned} \right\},$$

где производные по времени матрицы A_{ij} определяются производными параметров, изменяющихся в относительном движении.

Если число уравнений связей равно шести, то звенья теряют относительную подвижность и кинематическая пара переходит в жесткое соединение двух звеньев, а матрица A_{ij} становится постоянной.

Например, в исполнительных органах роботов-манипуляторов наиболее распространены кинематические пары пятого класса: вращательные и поступательные, обеспечивающие одну степень свободы относительного движения. При этом относительное перемещение в кинематической паре определяется одним параметром: углом относительного поворота или линейной величиной относительного смещения.

Кроме этого, исполнительный орган, как правило, представляет собой пространственную кинематическую цепь последовательно связанных твердых тел с номерами $0, 1, 2, \dots, N$. Например, стойка манипулятора имеет номер 0 , схват – номер N , а каждое звено с номером $i, i = 1, 2, \dots, N - 1$, образует кинематическую пару как со звеном $i - 1$, так и со звеном $i + 1$. В этом случае уравнения связей задаются рекуррентными соотношениями

$$T_i = T_{i-1} A_{i,i-1}(q_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где параметры (обобщенные координаты) q_i определяют относительные перемещения звеньев в кинематических парах 5-го класса (рис. 2.2).

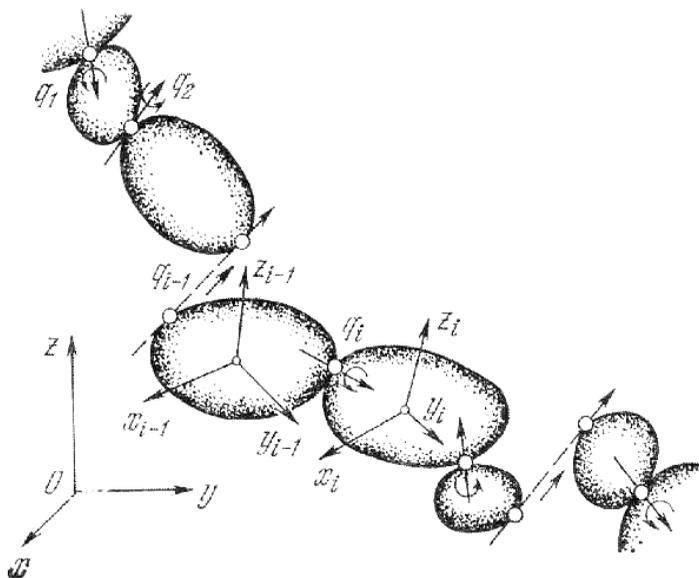


Рис. 2.2. Простая кинематическая цепь

2.2. Представление силовых величин в кинематических цепях

2.2.1. Представление активных сил

Рассмотрим структуру 4×4 -матрицы Φ_i :

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \sum_v F_{1i}^v \rho_{1i}^v & \sum_v F_{1i}^v \rho_{2i}^v & \sum_v F_{1i}^v \rho_{3i}^v & \sum_v F_{1i}^v \\ \sum_v F_{2i}^v \rho_{1i}^v & \sum_v F_{2i}^v \rho_{2i}^v & \sum_v F_{2i}^v \rho_{3i}^v & \sum_v F_{2i}^v \\ \sum_v F_{3i}^v \rho_{1i}^v & \sum_v F_{3i}^v \rho_{2i}^v & \sum_v F_{3i}^v \rho_{3i}^v & \sum_v F_{3i}^v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Четвертая строка этой матрицы всегда равна нулю, поэтому поддерживающая часть матрицы сил имеет фактический размер 3×4 . Существует связь этой матрицы с главным вектором и главным моментом всех сил, приложенных к рассматриваемому телу.

Предварительно отметим, что в записи (2.4) силы заданы в абсолютной системе координат, а радиусы-векторы – в связанной. Если это по каким-либо причинам неудобно, можно представить все характеристики в одной системе координат. Например, можно использовать другую *матрицу сил*

$$\Phi_i^0 = \sum_v F_i^v (r_i^v)^T,$$

полностью определенную в абсолютной системе координат и связанную с исходной матрицей Φ_i преобразованием

$$\Phi_i^0 = \Phi_i T_i^T. \quad (2.5)$$

Однако во многих задачах статики и динамики механизмов именно матрицы вида Φ_i в записи (2.4) возникают наиболее естественным образом.

Главный вектор и главный момент сил. Введем *проектирующие 4×4 -матрицы*, которые используются при преобразованиях сил в задачах динамики:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Theta_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

Приведем все силы, действующие на i -е тело, к началу некоторой системы координат, тогда три проекции главного момента и три проекции главного вектора сил на оси этой системы координат дают всю информацию о силах, необходимую для расчета движения твердого тела. Обозначим шестимерный вектор, состоящий из этих проекций, в абсолютной системе координат через $F_i^0 = (F_{1i}^0, \dots, F_{6i}^0)$, а в связанной системе – через $F_i = (F_{1i}, \dots, F_{6i})$. Тогда с помощью введенных проектирующих матриц и операции вычисления следа эти характеристики определяются следующим образом:

$$F_{ki}^0 = tr \{ \Phi_i T_i^T \Theta_k^T \}, \quad (2.6)$$

$$F_{ki} = tr \{ \Phi_i \Theta_k^T T_i^T \}. \quad (2.7)$$

Формулы (2.6) и (2.7) при $k = 1, 2, 3$ дают моменты, в противном случае – силы.

Обратное преобразование. Обратная задача вычисления 4×4 -матриц сил по заданному главному вектору сил и главному моменту решается неоднозначно. Дело в том, что при эквивалентных преобразованиях сил, например при переносе некоторой силы вдоль линии ее действия, матрица Φ_i меняется. Другими словами, в матрицах Φ_i содержится больше информации, чем это необходимо при расчетах движений твердых тел. Поэтому дадим некоторое вполне достаточное представление 4×4 -матриц сил по результатам приведения:

$$\Phi_i^0 = \sum_{k=1}^6 F_{ki}^0 \Theta_k \delta_k, \quad (2.8)$$

где $\delta_k = 1/2$ при $k = 1, 2, 3$ и $\delta_k = 1$, если $k = 4, 5, 6$.

Это своеобразное ортогональное разложение матрицы сил, поскольку подматрицы Θ_k обладают следующим свойством ортогональности:

$$tr \{ \Theta_i \Theta_j^T \} = \begin{cases} 1 / \delta_i & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Можно показать, что для любой совокупности сил матрица Φ_i^0 приводится к виду (2.8) путем соответствующего переноса сил вдоль линии их действия, т. е. путем эквивалентных преобразований системы сил.

Аналогичным свойством ортогональности обладают множества матриц $\{T\Theta_k, k=1, \dots, 6\}$ и $\{\Theta_k T, k=1, \dots, 6\}$. Это свойство позволяет определять коэффициенты разложений по указанным ортогональным системам матриц различных матричных характеристик. Подобным образом определяются коэффициенты рядов Фурье в математическом анализе.

Из выражения (2.4) вытекают также соотношения между матрицами сил, заданных в различных системах координат:

$$\Phi^c = \sum_{k=1}^6 \Theta_k F_k \delta_k;$$

$$\Phi = T\Phi^c = T \sum_{k=1}^6 \Theta_k F_k \delta_k;$$

$$\Phi^0 = T\Phi^c T^T,$$

где Φ^c – матрица сил вида (2.4), в которой как сами силы, так и радиусы-векторы заданы в связанной системе координат твердого тела.

Используя полученные формулы, для совокупности твердых тел меру принуждения в дифференциальном принципе Гаусса в теоретической механике представим в форме

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} tr \left\{ \ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T \right\} - tr \left\{ \Phi_i \ddot{T}_i^T \right\} + \dots, \quad (2.9)$$

где заданы инерционные свойства каждого твердого тела, выраженные 4×4 -матрицами H_i , и системы активных сил, действующих на каждое твердое тело, выраженные 4×4 -матрицами Φ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Активные силы могут быть как внешними, так и внутренними. Внешние силы, такие как силы тяжести, силы гидравлического сопротивления для механизма, работающего в жидкости, и т. п., воз-

никают при взаимодействии механизма с внешней средой. К внутренним активным силам, возникающим в кинематических парах, относятся моменты или силы серводвигателей, а также силы трения.

2.2.2. Представление сил тяжести

Представление сил тяжести в виде (2.4) дается следующими формулами:

$$\Phi_i = GH_i = m_i g \rho_i^T,$$

где 4×4 -матрица

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

а g_1, g_2, g_3 – проекции ускорения свободного падения на оси абсолютной системы координат;

$\rho_i = [\rho_{1i}, \rho_{2i}, \rho_{3i}, 1]^T$ – однородные координаты центра масс i -го тела в связанной системе координат.

2.2.3. Представление активных сил в кинематических парах

Пусть два звена механизма с номерами s и r образуют кинематическую пару пятого класса одного из возможных типов: вращательную или поступательную. Матрицы положений связанных систем координат удовлетворяют условию

$$T_r = T_s A_j(\gamma_j), \quad (2.10)$$

где j – номер кинематической пары;

γ_j – параметр, характеризующий относительное перемещение звеньев.

Выберем системы координат, связанные специальным образом. Пусть их оси z_r и z_s одновременно совпадают с осью относительного вращения или осью относительного поступательного перемещения. Тогда в первом случае

$$A_j(\gamma_j) = \begin{vmatrix} \cos(\gamma_j) & -\sin(\gamma_j) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma_j) & \cos(\gamma_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.11)$$

а во втором

$$A_j(\gamma_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим только такие силы, которые, действуя на одно звено, одновременно действуют и на другое в противоположном направлении. Иначе, среди всех возможных сил, действующих на звенья, рассматриваем только те, которые удовлетворяют условию

$$\Phi_s^0 = -\Phi_r^0,$$

или (см. (2.5) и (2.11))

$$\Phi_s = -\Phi_r A_j^T. \quad (2.13)$$

В число таких сил входят силы реакций идеальных связей, силы трения, а также силы, развиваемые двигателями. В последнем случае одно из звеньев называется *ротором*, а другое – *статором* двигателя.

Условие связи (2.10) относительно ускорений имеет вид

$$\ddot{T}_r = \ddot{T}_s A_j + T_s \Theta A_i \ddot{\gamma}_j + \dots, \quad (2.14)$$

где $\Theta = \Theta_3$ для (2.11), $\Theta = \Theta_6$ для (2.12). Вычислим соответствующее слагаемое в выражении меры принуждения (2.19) с учетом (2.13) и (2.14):

$$\begin{aligned} tr\left\{\Phi_s \ddot{T}_s^T + \Phi_r \ddot{T}_r^T\right\} &= tr\left\{\Phi_r A_j^T \Theta^T T_s^T\right\} \ddot{\gamma}_j + \dots = \\ &= -tr\left\{\Phi_r \Theta^T T_s^T\right\} \ddot{\gamma}_j + \dots = M_j \ddot{\gamma}_j + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Сравнивая выражения (2.15) с (2.7), находим, что M_j является проекцией на ось относительного смещения главного момента или главного вектора всех сил, действующих на одно из звеньев и удовлетворяющих условию (2.13).

Если звенья являются «ротором» и «статором» двигателя, а γ_j – угол относительного поворота «ротора», то в M_j входит момент на валу «ротора», а также силы трения. В противном случае M_j – это только силы трения.

Таким образом, активные силы, развиваемые в кинематических парах, приводят выражение для меры принуждения к следующему виду:

$$\sum_{j=1}^p M_j \ddot{\gamma}_j.$$

Полученный результат позволяет сделать важный вывод: *при предварительном формировании выражения для меры принуждения (2.9) в обобщенные координаты механизма целесообразно включать непосредственно углы относительного поворота «роторов» двигателей системы приводов. Тогда соответствующий коэффициент M_j будет непосредственно моментом, развиваемым на валу двигателя (с учетом сил трения).* Если окажется, что более выгодными являются другие обобщенные координаты, например q_1, \dots, q_m , связанные с первыми уравнениями

$$\gamma_j = \varphi_j(q_1, \dots, q_m), \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

или

$$\ddot{\gamma}_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \dots,$$

тогда вместо выражения (2.7) в функцию (2.9) необходимо включить приведенную сумму

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^p M_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \right) \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^m Q_i \ddot{q}_i,$$

в которой коэффициенты, взятые в круглые скобки и затем обозначенные через Q_i , представляют собой обобщенные силы, отнесенные к новым координатам.

2.3. Силы инерции в кинематических звеньях мехатронной системы

Инерционные свойства каждого звена, как твердого тела, определяются 4×4 -матрицей H_i . Эти матрицы являются симметричными и имеют следующую структуру:

$$H_i = \begin{pmatrix} I_{xx}^i & I_{xy}^i & I_{xz}^i & S_x^i \\ I_{yx}^i & I_{yy}^i & I_{yz}^i & S_y^i \\ I_{zx}^i & I_{zy}^i & I_{zz}^i & S_z^i \\ S_x^i & S_y^i & S_z^i & m_i \end{pmatrix},$$

где величины

$$\begin{aligned} I_{xx}^i &= \sum_v m_i^v (\rho_{1i}^v)^2; & I_{yy}^i &= \sum_v m_i^v (\rho_{2i}^v)^2; \\ I_{zz}^i &= \sum_v m_i^v (\rho_{3i}^v)^2; & I_{xy}^i &= I_{yx}^i = \sum_v m_i^v \rho_{1i}^v \rho_{2i}^v; \\ I_{xz}^i &= I_{zx}^i = \sum_v m_i^v \rho_{1i}^v \rho_{3i}^v; & I_{yz}^i &= I_{zy}^i = \sum_v m_i^v \rho_{2i}^v \rho_{3i}^v; \\ S_x^i &= \sum_v m_i^v \rho_{1i}^v; & S_y^i &= \sum_v m_i^v \rho_{2i}^v; \\ S_z^i &= \sum_v m_i^v \rho_{3i}^v; & m_i &= \sum_v m_i^v \end{aligned}$$

представляют собой соответственно три момента инерции относительно координатных плоскостей, три центробежных момента инерции, три статических момента, а также массу твердого тела. Эта 4×4 -матрица инерции, очевидно, от характера движения не зависит и несет в себе всю необходимую информацию о распределении масс в твердом теле относительно связанной системы координат.

2.4. Аналитическое представление «роторов» двигателей

Механическая часть двигателей, применяемых в приводах, может рассматриваться как кинематическая пара твердых тел, называемых «ротором» и «статором». Эти твердые тела ничем не отличаются от других твердых тел – звеньев механизма. Однако «статоры» двигателей либо закреплены на неподвижном основании, например стойке робота-манипулятора, либо жестко связаны с какими-либо звеньями. Они не требуют особого изучения в качестве механических подсистем. «Роторы» двигателей – это отдельные твердые тела, требующие специального рассмотрения с целью как можно более простого и в то же время адекватного определения их динамической роли в механической системе.

Рассмотрим следующее состояние. Статор двигателя в общем случае представляет собой движущееся в абсолютной системе координат O_{xyz} тело. С ним связана система координат $O_s x_s y_s z_s$ с 4×4 -матрицей положения T_s . Пусть начало отсчета этой системы координат совпадает с центром масс «ротора», а ее ось z_s – с осью относительного вращения. Следовательно, от распределения масс «ротора» требуются некоторые свойства симметрии: центр масс ротора в процессе относительного движения не меняет своего положения в системе координат «статора». Это не принципиальное, но вполне естественное для большинства задач практики ограничение, несколько упрощающее выкладки. С «ротором» свяжем систему координат $O_r x_r y_r z_r$ с матрицей T_r , равной T_s при значениях угла относительного поворота $\gamma = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В этом случае матрицы T_r и T_s связаны условием (2.10) с матрицей преобразования A . Ускорение «ротора» \ddot{T}_r определяется ускорением «статора», а также скоростью и ускорением относительного движения:

$$\ddot{T}_r = \ddot{T}_s A + B \dot{\gamma} + C,$$

где

$$B = T_s \Theta_3 A;$$

$$C = 2\dot{T}_s \Theta_3 A \dot{\gamma} + T_s \Theta_3^2 A \dot{\gamma}^2.$$

Тогда энергию ускорений «ротора» после выкладок можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} \{ \ddot{T}_r H_r \ddot{T}_r^T \} &= \frac{1}{2} \text{tr} \{ \ddot{T}_s A H_r A^T \ddot{T}_s^T \} + \frac{1}{2} \text{tr} \{ B H_r B^T \} \dot{\gamma}^2 + \\ &+ \text{tr} \{ \dot{T}_s A H_r A^T \Theta_3 (2\dot{T}_s^T \dot{\gamma} + T_s^T \ddot{\gamma}) \} + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Остальные слагаемые либо равны нулю, либо не содержат ускорений.

Рассмотрим первое слагаемое выражения (2.16), в которое входит (как и в другие слагаемые) матрица $A H_r A^T$ – матрица инерции «ротора» относительно системы координат «статора». В общем случае эта матрица зависит от y , но если ротор обладает симметрией относительно оси z_r , т. е.

$$H_r = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}_r,$$

и

$$I_{xx} = I_{yy} = d_r / 2,$$

где d_r – момент инерции «ротора» относительно оси относительного вращения z_r ,

то

$$A H_r A^T = H_r \quad (2.17)$$

независимо от угла y .

Поэтому эту матрицу инерции «ротора» целесообразно добавить к матрице инерции звена «статора» H_s и принять сумму $H_s + H_r$ в качестве новой матрицы инерции «статора». Другими словами, если матрица инерции некоторого звена вычисляется при закрепленном в этом звене «роторе» двигателя, то первое слагаемое $(1/2)tr\{\ddot{T}_s A H_r A^T \ddot{T}_s^T\}$ автоматически войдет в общее выражение меры принуждения (2.9) и вторично в (2.16) вычислять его не нужно.

Второе слагаемое в (2.16) представим в виде

$$\frac{1}{2}tr\{B H_r B^T\} \dot{\gamma}^2 = \frac{1}{2} d_r \dot{\gamma}^2. \quad (2.18)$$

Третье слагаемое в (2.16), учитывающее динамику взаимодействия «ротора» и вращающегося в пространстве «статора», является произведением переносного и относительного движений и с учетом (2.17) может быть представлено в форме

$$\frac{d_r}{2} tr\{\ddot{T}_s \Theta_3^T (2\dot{T}_s^T \dot{\gamma} + \dot{T}_s^T \ddot{\gamma})\}. \quad (2.19)$$

Если звено «статора» в инерциальной системе отсчета участвует только в поступательном движении, то это слагаемое равно нулю.

Выражения (2.18) и (2.19) в сумме составляют ту часть энергии ускорений (с учетом только слагаемых, содержащих ускорения), которую дополнительно вносит в меру принуждения «ротор» двигателя, участвуя в относительном вращении. Поэтому эту составляющую можно представить еще и следующим образом:

$$\frac{1}{2} d_r (\dot{\bar{\omega}}_s + \bar{z}_r \ddot{\gamma} + (\bar{\omega}_s \times \bar{z}_r) \dot{\gamma})^2 - \frac{1}{2} d_r \dot{\bar{\omega}}_s^2, \quad (2.20)$$

где $\bar{\omega}_s$ – угловая скорость «статора» в проекциях на связанные оси системы координат,

\bar{z}_r – единичный вектор оси вращения в этой же системе координат (в нашем случае $z_r = [0, 0, 1]$).

Упрощая (2.20) или сумму выражений (2.18) и (2.19), получим простое выражение, в котором слагаемые, зависящие от ускорения, имеют вид

$$d_r \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}^2 + \dot{\omega}_3 \ddot{\gamma} + (\dot{\omega}_1 \omega_2 - \dot{\omega}_2 \omega_1) \dot{\gamma} \right).$$

Однако, описывая движение сложного механизма в единых обозначениях, будем сохранять форму представления этих слагаемых в виде (2.18) и (2.19). Отметим, что если связанная система координат звена «статора» выбрана из других соображений и никак не связана с расположением «ротора», то вместо кососимметрической матрицы Θ_3 необходимо использовать другую кососимметрическую матрицу

$$\tilde{\Theta} = e_1 \Theta_1 + e_2 \Theta_2 + e_3 \Theta_3,$$

где единичный вектор с компонентами e_1, e_2, e_3 представляет собой орт оси «ротора» двигателя в системе координат «статора». Этот факт выводится из (2.19) путем замены специальной матрицы T_s на матрицу общего вида, связанную с первой 4×4 -преобразованием.

Таким образом реализовано первое упрощение, порожденное симметричностью «ротора» относительно оси вращения. Возможны и дальнейшие упрощения. Например, в прикладных задачах слагаемым (2.19) можно пренебречь по двум причинам: либо вращательная составляющая переносного движения мала, либо влияние (2.18) существенно больше, чем (2.19).

Последний случай типичен, например, для электромеханических манипуляторов, у которых передаточные числа редукторов, связывающие углы поворота двигателей γ с обобщенными координатами, очень велики ($n = 1000 - 2000, \dot{\gamma} = n\dot{q}$). Поэтому приведенное значение (2.18), зависящее от квадрата передаточного числа:

$$\frac{1}{2} d_r \ddot{\gamma}^2 = \frac{1}{2} d_r n^2 \ddot{q}^2 = \frac{1}{2} d \ddot{q}^2;$$

$$d = n^2 d_r,$$

представляется более важной величиной, чем величина (2.19), приведенное значение которой только пропорционально n . В большинстве случаев, когда каждый двигатель управляет одной обобщенной координатой механизма через редуктор с постоянным передаточным числом, вклад двигателей приводов в общее выражение меры принуждения будет оцениваться величиной

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2} d_j \ddot{q}_j^2 - Q_j \ddot{q}_j = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} d_j \left(\ddot{q} - \frac{Q_j}{d_j} \right)^2 + \dots,$$

где d_j – приведенные моменты инерции «роторов» двигателей;

Q_j – приведенная обобщенная сила, развиваемая двигателем.

Если же необходимо учесть полную динамику взаимодействия «роторов» и вращающихся в пространстве «статоров», то в выражение меры принуждения необходимо включить более сложные слагаемые:

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2} d_j \ddot{q}_j^2 - Q_j \ddot{q}_j + \left\{ \frac{d_j}{2n_j} \ddot{T}_{s_j} \tilde{\Theta}^T \left(2\dot{T}_{s_j}^T \dot{q}_j + T_{s_j}^T \ddot{q}_j \right) \right\} \right), \quad (2.21)$$

где n_j – постоянное передаточное число редуктора;

s_j – номер звена механизма, являющегося «статором» для j -го двигателя.

И наконец рассмотрим более общий случай, когда углы относительных поворотов «роторов» двигателей связаны с обобщенными координатами механизма соотношениями общего вида

$$\gamma_k = \Phi_k(q_1, \dots, q_m), \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Тогда необходимое выражение предварительно следует сформировать, используя исходные координаты γ_k , $k = 1, 2, \dots, p$. В результате получим

$$\sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2} d_{\gamma_k} \ddot{\gamma}_k^2 - Q_k \ddot{\gamma}_k + tr \left\{ \frac{d_{\gamma_k}}{2} T_{s_k} \tilde{\Theta}^T \left(2\dot{T}_{s_k}^T \dot{\gamma}_k + T_{s_k}^T \ddot{\gamma}_k \right) \right\} \right), \quad (2.22)$$

после чего необходимо выполнить замену

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_k &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \ddot{\gamma}_k &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_s \dot{q}_t \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

или учитывать эти уравнения в качестве условий связей (ограничений) при минимизации меры принуждения.

При использовании выражений (2.21) или (2.22) с учетом (2.23) единственное упрощение, которое допускается, это симметричность «роторов» двигателей относительно осей вращения.

2.5. Принцип Гаусса для механических систем с кинематическими парами пятого класса

Сформулируем принцип Гаусса для механизма, состоящего из совокупности твердых тел, образующих между собой и другими неподвижными телами кинематические пары пятого класса.

Пусть имеется n твердых тел, с которыми произвольным образом связаны системы координат с 4×4 -матрицами положения T_i , $i=1, 2, \dots, n$, тогда каждая кинематическая пара с номером $j=1, 2, \dots, m$ дает условие связи относительно положений

$$T_{r_j} = T_{s_j} A_j(q_j), \quad j=1, 2, \dots, m,$$

где номера звеньев r_j и s_j , образующие j -ю кинематическую пару, могут быть любыми из совокупности номеров $1, 2, \dots, n$, но $s_j \neq r_j$;

q_j – координата, определяющая относительное положение звеньев.

Дифференцируя соотношение, получим условие связи, линейное относительно ускорений:

$$\ddot{T}_{r_j} = \ddot{T}_{s_j} A_j + B_j \ddot{q}_j + C_j, \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (2.24)$$

$$B_j = T_{sj} \frac{dA_j}{dq_j};$$

$$C_j = 2\dot{T}_{sj} \frac{dA_j}{dq_j} \dot{q}_j + T_{sj} \frac{d^2 A_j}{dq_j^2} \dot{q}_j^2.$$

На каждое звено действуют внешние активные силы Φ_1, \dots, Φ_n . Кроме этих сил в каждой кинематической паре могут действовать активные силы, которые, будучи приведенными к координатам q_1, \dots, q_m , характеризуются обобщенными силами Q_1, \dots, Q_m . Все силы, конфигурация и скорость механизма в рассматриваемый момент времени считаются заданными.

Принцип Гаусса. *Истинные ускорения системы $\ddot{T}_1, \dots, \ddot{T}_n$, $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_m$ отличаются от любых других ускорений, допустимых условиями связей (2.24), тем, что они сообщают минимальное значение функции*

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} \ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T - \Phi_i \ddot{T}_i^T \right\} - \sum_{j=1}^m Q_j \ddot{q}_j, \quad (2.25)$$

квадратической относительно ускорений.

Формулировку задачи определения движения по заданным силам в таком виде нельзя считать завершенной. Дело в том, что в каждую матрицу \ddot{T}_i входят двенадцать содержательных компонент (четвертая строка равна нулю), в то время как ускорения твердого тела определяются только шестью параметрами. Следовательно, элементы этих матриц взаимозависимы и связи между этими элементами в общем случае не определяются условиями связей (2.24). Например, для свободного твердого тела условий связи (2.24) вообще нет. Вместе с тем существуют механизмы, для которых формулировка задачи (2.24)–(2.25) не требует дополнительных уточнений. Это такие механизмы, для которых значения ускорений $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_m$ определяют ускорения твердых тел \ddot{T}_i , $i=1, 2, \dots, n$. В этом случае функция Ω в конечном итоге зависит только от ускорений обобщенных координат. Напри-

мер, исполнительные органы манипуляционных роботов разомкнутого типа относятся именно к этому классу механизмов.

Однако в общем случае необходимо дополнительно учитывать зависимость матриц ускорений твердых тел от минимального числа свободных параметров, определяющих ускорения. Использование таких зависимостей наглядно иллюстрируется при выводе уравнений движения свободного твердого тела.

Применение принципа Гаусса к движению свободного твердого тела. Ускорение свободного твердого тела определяется матрицей \ddot{T} , которая в соответствии с принципом Гаусса должна удовлетворять условию минимума функции

$$\Omega = tr \left\{ \frac{1}{2} \ddot{T} \ddot{T}^T - \Phi \dot{T}^T \right\},$$

где условие связи представляет собой зависимость матрицы \ddot{T} от шести свободных параметров, однозначно (при заданной скорости) определяющих ускорение свободного тела:

$$\ddot{T} = \ddot{T}(\ddot{x}),$$

где $\ddot{x} = [\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_6]^T$. Необходимые и достаточные условия минимума Ω дают шесть соотношений:

$$tr \left\{ \left(\ddot{T}H - \Phi \right) \frac{\partial \ddot{T}^T}{\partial \ddot{x}_k} \right\} = 0, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (2.26)$$

Выбор \ddot{x} в достаточной мере произволен. Пусть, например, $\dot{x} = [\bar{\omega}, \dot{\rho}]^T$ – вектор скорости твердого тела,

где $\bar{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ – угловая скорость твердого тела в связанной системе координат;

$\dot{\rho} = [\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2, \dot{\rho}_3]^T$ – скорость начала отсчета связанной системы координат в проекции на ее оси.

С учетом структуры матриц T сначала получим следующее ортогональное разложение:

$$T^{-1}\dot{T} = \sum_{k=1}^6 \Theta_k \dot{x}_k,$$

дифференцирование которого по времени дает формулу

$$\ddot{T} = \sum_{k=1}^6 T \Theta_k \ddot{x}_k + \dot{T} T^{-1} \dot{T}.$$

Теперь уравнения движения твердого тела (2.26) можно представить в форме

$$\text{tr} \left\{ \left(\ddot{T}H - \Phi \right) \Theta_k^T T^T \right\} = 0, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (2.27)$$

Таким образом из (2.27) находим, что здесь даны соотношения проекций на оси связанной системы координат равнодействующих всех сил ($k = 4, 5, 6$) и всех пар сил ($k = 1, 2, 3$), включая и силы инерции ($\ddot{T}H$).

Рассмотрим другое представление. Пусть теперь

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{x}}^0 = \left[\bar{\omega}^0, \dot{\bar{r}}^0 \right]^T,$$

где $\bar{\omega}^0 = \left[\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0 \right]^T$ – угловая скорость твердого тела в абсолютной системе координат;

$\dot{\bar{r}}^0$ – скорость в абсолютной системе координат той точки твердого тела (или его продолжения), которая в данный момент времени совпадает с началом абсолютной системы координат, т. е. $\dot{\bar{r}}^0 = \dot{\bar{r}} - \bar{\omega}^0 \times \bar{r}$.

Тогда справедливо иное ортогональное разложение:

$$\ddot{T} = \sum_{k=1}^6 T \Theta_k T \dot{\bar{x}}_k^0 + \dot{T} T^{-1} \dot{T},$$

следствием которого будут следующие уравнения движения:

$$\text{tr} \left\{ \left(\ddot{T}H - \Phi \right) \ddot{T}^T \Theta_k^T \right\} = 0, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (2.28)$$

Хотя в уравнения (2.28) входят те же самые матрицы, что и в (2.27), здесь речь идет о проекциях сил и моментов на оси абсолютной системы координат.

При вычислении следа произведения матриц $AB \dots WZ$ возможны циклические перестановки

$$\text{tr} \{AB \dots WZ\} = \text{tr} \{B \dots WZA\} = \text{tr} \{ZAB \dots W\}, \quad (2.29)$$

т. е. след матричного произведения не изменяется при циклической перестановке его сомножителей. Кроме того, поскольку операция транспонирования не изменяет элементы произведения, стоящие на главной диагонали, то след матричного произведения равен следу транспонированного произведения:

$$\text{tr} \{AB\} = \text{tr} \{B^T A^T\}. \quad (2.30)$$

Выражения (2.29) и (2.30) используются часто. Однако этих двух правил недостаточно, чтобы преобразовать одни уравнения (2.27) в другие (2.28). В этом смысле они различны.

Рассмотренные модели динамики (2.27), (2.28) кинематических звеньев описывают абсолютно твердые тела, учитывающие лишь инерционное сопротивление твердых тел движению под действием приложенных сил.

2.6. Упругое (обратимое) деформирование сплошных твердых тел

Материал механических подсистем, выполняющих работу под действием нагрузок, приложенных к ним, оказывает сопротивление изменению их формы и объема, называемому *деформацией* тела. Это является следствием того, что частицы тела оказывают сопротивление их *перемещениям* относительно друг друга, что выражается в появлении сил противодействия, называемых *напряжениями*.

Из механики деформируемого твердого тела известно, что в трехмерных телах перемещения определяются вектором $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, деформации определяются тензором деформации e_{ij} , компоненты которого для малых деформаций выражаются через компоненты вектора \bar{u} :

$$e_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad j, i = 1, 2, 3.$$

Тензор напряжения σ_{ij} и тензор деформации e_{kl} связаны законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} e_{kl}, \quad (2.31)$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование, а λ_{ijkl} – тензор упругих модулей, характеризующих свойства материала, и имеющий в случае общей анизотропии 81 компоненту.

Для однородной изотропной среды компоненты λ_{ijkl} не зависят от пространственных координат и имеют вид

$$\lambda_{ijkl} = K\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

где K – модуль объемного деформирования;

G – модуль сдвига.

Вместо K и G могут быть введены две другие независимые константы материала.

В общем случае при динамическом нагружении должно выполняться уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.32)$$

где ρ – плотность материала;

t – время.

Величины $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, $e_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$, $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ в напряженно-деформированном теле описывают поля перемещений, деформаций, напряжений, распространяющихся в виде вибраций и волн. В случае если силами инерции в правой части уравнения (2.32) можно пренебречь, то u_i , e_{ij} , σ_{ij} не зависят от t , тогда получаем уравнения квазистатического нагружения или статического состояния.

Начальные и граничные условия для уравнения (2.32) могут быть сформулированы в перемещениях:

$$u_i(0, x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2, x_3) \text{ при } t = 0; \quad (2.33)$$

$$u_i(t, x_1, x_2, x_3)|_S = u_i^s(t) \text{ при } x_1, x_2, x_3 \in S. \quad (2.34)$$

Подставляя (2.31) в (2.32) получим замкнутую систему дифференциальных уравнений (три уравнения) в частных производных относительно трех компонент вектора перемещений, что при условиях (2.33), (2.34) обеспечивает единственность решений начальной и граничной задачи.

Если начальные и граничные условия формулируются в напряжениях:

$$\sigma_{ij}(0, x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3); \quad (2.35)$$

$$\sigma_{ij}n_j|_S = P_i(t), \quad (2.36)$$

где n_j – компоненты вектора нормали к поверхности тела;

P_i – векторы сил, приложенных к телу на поверхности S , то в этом случае к уравнениям (2.32) необходимо добавить уравнения совместности, что позволяет получить замкнутую систему дифференциальных уравнений в напряжениях, имеющую единственное решение при условиях (2.35), (2.36).

Также ставятся смешанные граничные условия, когда на части поверхности тела заданы перемещения (кинематические условия), а на оставшейся части заданы силовые условия.

При взаимодействии с другими телами рабочие органы мехатронных систем испытывают деформации, которые после прерывания контакта (снятия нагрузки) исчезают полностью или частично. В первом случае говорят об обратимом (упругом) деформировании, во втором случае – необратимом (пластическом). В первом случае отрицательным следствием упругих деформаций может быть ухудшение точности выполнения операций, во втором необратимые деформации могут приводить к потере мехатронной системой возможности выполнять требуемые операции, опасным ситуациям, связанным с тем, что пластическое деформирование может являться началом возникновения аварийной ситуации вследствие разрушения.

При нагрузках энергия упругого формоизменения запасается, а при разгрузке полностью идет на работу по восстановлению геометрических параметров. Если нагрузки таковы, что возникают необратимые деформации, то часть энергии диссипирует в тепло.

Появление диссипации связано с тем, что напряжения (их комбинация) или скорости деформаций достигли некоторых предельных (опасных) значений. В обозначениях первой главы это означает, что параметры x_1, \dots, x_m достигли некоторой предельной поверхности, что может приводить к опасной ситуации. Таким образом, в пространстве напряжений (скоростей деформаций) существует поверхность, ограничивающая область допустимых напряжений (упругого деформирования), когда деформирование компонентов системы безопасно.

2.7. Пластическое (необратимое) деформирование твердых тел

Пластичность – свойство твердых тел приобретать остаточные деформации после снятия нагрузки.

Экспериментально доказано, что объемная деформация металлов в широком диапазоне изменения деформации не вызывает изменения плотности. Это свидетельствует о том, что при пластическом деформировании металлов основным является сдвиговой механизм.

На рис. 2.3 приведена одномерная диаграмма «напряжение–деформация» при растяжении.

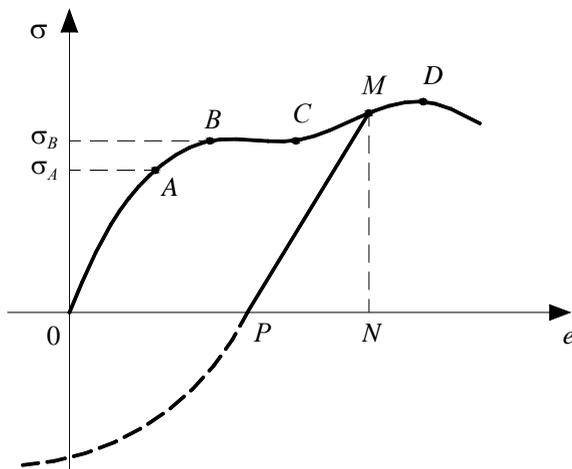


Рис. 2.3. Диаграмма σ - e :

OA – линейная теория упругости, закон Гука; AB – нелинейная теория упругости; BC – площадка текучести; CD – упрочнение; D – разрушение

Характерные точки диаграммы σ - e :

1) напряжение σ_A – предел пропорциональности, максимальное напряжение, при котором справедлив закон Гука;

2) σ_B – предел упругости или предел пластичности, когда после снятия нагрузки не возникает остаточных деформаций. Материал помнит начальное состояние, в которое он должен вернуться. На практике различием между σ_A и σ_B часто пренебрегают;

3) σ_B – предел текучести, определяющий начало площадки текучести. В хорошо выраженном виде она наблюдается для мягкой малоуглеродистой стали и некоторых сплавов;

4) на участке CD напряжения растут с ростом деформаций. Если в точке M остановить нагружение и начать снижать нагрузку, то процесс разгрузки можно аппроксимировать отрезком $MP \parallel OA$. Полная деформация e , соответствующая точке M , состоит из двух частей – упругой e^e и пластической e^p :

$$e = e^e + e^p \quad (e = ON, \quad e^p = OP, \quad e^e = PN).$$

Если после разгрузки (т. P) повторно приложить нагрузку, то материал упруго деформируется до т. M , т. е. произошло упрочнение (наклеп) материала. В связи с этим отрезок CD определяет область упрочнения материала. У многих металлов участок упрочнения следует непосредственно за пределом пластичности. Если после разгрузки из т. P производится нагрузка противоположного знака (сжатие), то диаграмма будет подобна диаграмме при растяжении, однако наклеп материала при растяжении понижает по абсолютной величине предел упругости при сжатии, и наоборот. Это явление называется эффектом Баушингера.

Обычно в теории пластичности диаграмму σ – ϵ аппроксимируют схемой, состоящей из двух участков:

1) упругопластическое тело:

упругоидеально пластическое тело,

упругопластическое тело с упрочнением линейным и нелинейным;

2) жесткопластическое тело:

упругими деформациями пренебрегаем по сравнению с пластическими, тогда полные деформации совпадают с пластическими;

жесткопластическое тело с упрочнением линейным и нелинейным.

Жесткопластическое тело можно рассматривать как предельный случай упругопластического при $\lambda_{ijke} \rightarrow 0$, $G \rightarrow \infty$.

Введем шестимерное пространство напряжений Π , декартовы координаты точек которого являются компонентами симметричного тензора напряжений σ_{ij} . Каждому значению σ_{ij} в пространстве Π соответствует точка или радиус-вектор $\vec{\sigma}$.

Рассмотрим в пространстве Π область Q , содержащую начало координат, в которой упругопластическое тело считаем упругим, подчиняющимся закону Гука. Для жесткопластического тела в области Q материал жесткий. Обозначим Σ граничную поверхность области Q . Точки поверхности Σ соответствуют пределам упругости или пластичности, и поэтому Σ называется поверхностью пластичности.

Идеально пластическим называется тело, для которого Σ фиксирована в пространстве Π .

История нагружения определяется кривой в пространстве Π . В идеально пластическом материале напряжения не могут превосходить определенного предела текучести (пластичности), упругая область Q

и поверхность текучести Σ фиксированы и не зависят от истории нагружения.

Условие текучести записывается в виде

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (2.37)$$

При нагрузке и нейтральном нагружении (точка нагружения движется по поверхности Σ)

$$\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0.$$

При разгрузке

$$\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0.$$

Рассмотрим некоторые вопросы теории предельного состояния твердого нагруженного тела. Для этого используем простейшую модель жесткопластического тела – схему Прандтля.

Будем предполагать:

- 1) упрочнение отсутствует;
- 2) материал тела остается изотропным;
- 3) тело нормально изотропно, т. е. отсутствуют различия в поведении материала при различных нагружениях, отличающихся знаком;
- 4) поведение материала в процессе пластического деформирования не зависит от действия всестороннего давления;
- 5) пренебрегаем упругими деформациями по сравнению с пластическими;
- б) материал тела однороден.

Если условие пластичности имеет вид (2.37), где $f(\sigma_{ij})$ – дифференцируемая функция в окрестности т. σ_{ij} , тогда в этой точке имеется единственная нормаль к Σ . Элемент деформируемого тела находится в жестком состоянии, когда $f(\sigma_{ij}) < 0$ – деформации отсутствуют.

Кусочно-гладкие поверхности текучести, имеющие особенности в виде ребер или угловых точек, описываются при помощи некоторого числа гладких функций текучести:

$$f^p(\sigma_{ij}) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Жесткому состоянию материала соответствуют $f^p(\sigma_{ij}) < 0$, $p = 1, 2, \dots, n$. Пластическое состояние достигается, когда выполняется $f^p(\sigma_{ij}) = 0$, $p = 1, 2, \dots, n$, т. е. и $f^p(\sigma_{ij}) < 0$, $p = m + 1, \dots, n$.

Для изотропного идеального пластического тела функции f^p зависят от инвариантов σ , Σ_2 , Σ_3 тензора напряжений σ_{ij} , т. е. $f^p(\sigma_{ij}) = f^p(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3)$ или обычно

$$f^p(\sigma_{ij}) = f^p(\sigma, \Sigma'_2, \Sigma'_3), \quad (2.38)$$

где $\sigma = (1/3)\sigma_{kk}$, $\Sigma'_2 = \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$, $\Sigma'_3 = \sigma'_{ij}\sigma'_{ik}\sigma'_{jk}$.

Через σ'_{ij} обозначаются компоненты *девиатора напряжений*:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}.$$

Предположение о нормальной изотропии приводит к независимости пластического состояния от перемены знака напряжений на обратный, и, следовательно, выражение (2.38) должно иметь вид

$$f^p(\sigma_{ij}) = f^p(|\sigma|, |\Sigma'_2|, |\Sigma'_3|).$$

Независимость свойств металлов от действия всестороннего давления дает

$$f^p(\sigma_{ij}) = f^p(\Sigma'_2, |\Sigma'_3|), \quad (2.39)$$

что эквивалентно условию

$$\frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{22}} + \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{33}} = 0.$$

Введем трехмерное пространство главных напряжений σ_i ($i=1, 2, 3$), в котором декартовы координаты точки совпадают с компонентами главных напряжений.

В пространстве главных напряжений условие пластичности (2.39) представляет собой цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Поэтому для определения свойств условия пластичности (2.39) достаточно рассмотреть кривую пластичности (текучести), лежащую на пересечении цилиндрической поверхности текучести с девиаторной поверхностью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Наиболее часто используются три условия:

1. Условие пластичности максимального касательного напряжения (Треска) имеет вид

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = k, \quad k = \text{const},$$

где τ_{\max} – максимальное касательное напряжение.

На рис. 2.4 изображено условие пластичности Треска: a – в девиаторной плоскости, b – в пространстве гладких напряжений в виде шестигранной призмы, равнонаклоненной к осям координат.

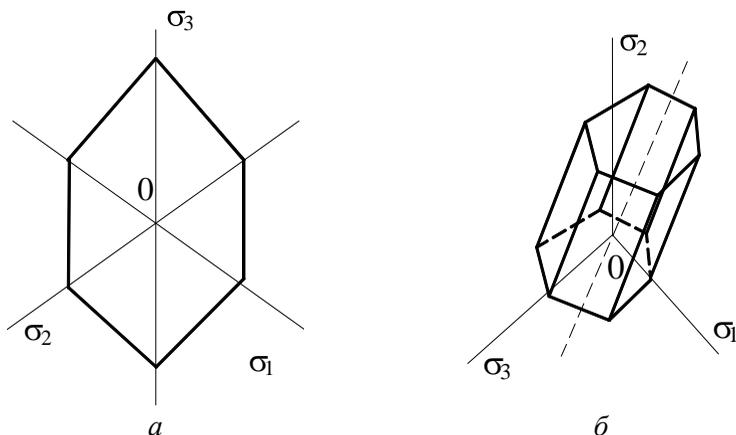


Рис. 2.4. Условие пластичности Треска в пространстве главных напряжений

2. Условие пластичности максимального приведенного напряжения имеет вид

$$|S_{\max}| = \max \{ |\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma| \} = \frac{2}{3}k,$$

где S_{\max} – максимальное приведенное напряжение.

На рис. 2.5 изображено условие пластичности: a – в девиаторной плоскости, \bar{b} – в пространстве главных напряжений в виде шестигранной призмы, равнонаклоненной к осям координат.

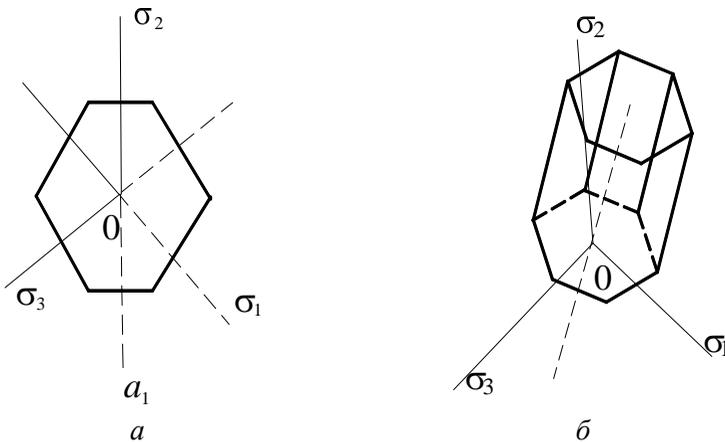


Рис. 2.5. Условие пластичности максимального приведенного напряжения в пространстве главных напряжений

3. Условие пластичности октаэдрического напряжения (Мизеса)

$$\Sigma'_2 = \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}k^2.$$

На рис. 2.6 изображено условие Мизеса: a – в девиаторной плоскости, \bar{b} – в пространстве главных напряжений в виде кругового цилиндра, равнонаклоненного к осям координат.

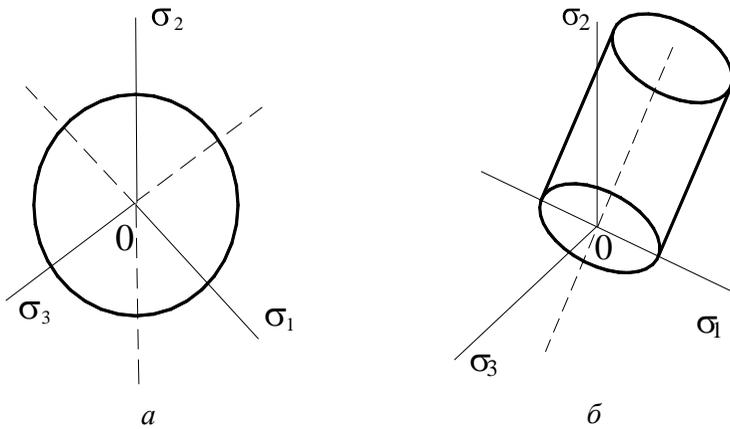


Рис. 2.6. Условие пластичности Мизеса в пространстве главных напряжений

В идеально пластическом теле напряжения не могут превосходить предел текучести, следовательно, внешние силы, действующие на тело из идеально пластического материала, не могут возрастать неограниченно.

Систему нагрузок, при которой в теле впервые возникает пластическое течение, называют *предельной*.

Коэффициентом запаса, соответствующим системе нагрузок F_i, p_i , не превышающих предельные, называют число $n \geq 1$, если нагрузки nF_i, np_i образуют систему предельных нагрузок.

Распределение напряжений σ_{ij}^* называют *статически допустимым*, если в теле оно удовлетворяет уравнениям равновесия ($\sigma_{ij,j} + F_i = 0$), граничным условиям в усилиях на S_p и нигде в теле не превышает предела текучести $f(\sigma_{ij}^*) \leq 0$.

Распределение напряжений σ_{ij}^S называют *статически безопасным*, если в теле оно удовлетворяет уравнениям равновесия, граничным условиям в усилиях на S_p и нигде в теле не достигает предела текучести $f(\sigma_{ij}^S) < 0$.

Если системе внешних сил F_i, p_i соответствует некоторое статически безопасное поле напряжений σ_{ij}^S , то существует число n^* такое, что напряжения $n^* \sigma_{ij}^S = \sigma_{ij}^*$ станут статически допустимыми для нагрузок $n^* F_i, n^* p_i$. Число n^* называют *статически допустимым коэффициентом*.

Теорема 1: Тело может выдержать системы нагрузок, приложенных в любой последовательности, если для каждой последовательности существует статически безопасное распределение напряжений.

То есть существование **статически безопасного распределения напряжений** в теле является достаточным условием способности тела выдерживать внешние нагрузки.

Эквивалентная формулировка теоремы 1: Коэффициент запаса n является *наибольшим допустимым коэффициентом* $n^* \leq n$.

То есть статически допустимый коэффициент является линейной оценкой коэффициента запаса.

Альтернативное утверждение к теореме 1: Тело не может выдерживать систему внешних нагрузок, для которой не существует статически допустимого поля напряжений.

То есть существование **статически допустимого распределения напряжений** является необходимым условием способности тела выдерживать внешние нагрузки.

Рассмотрим кинематическое нагружение твердого тела.

Распределение скоростей перемещений v_i^0 называют *кинематически допустимым*, если оно удовлетворяет *условию несжимаемости* на S_v ($v_{i,i}^0 = 0$).

Распределение скоростей деформаций $\varepsilon_{ij}^0 = \dot{\varepsilon}_{ij}^0$, соответствующее кинематически допустимому полю скоростей перемещений, называют *кинематически допустимым*. Системе внешних давлений F_i, p_i , не превышающих предельные, и скоростям перемещений v_i^0 соответствует определенная скорость изменения работы внешних сил N

(мощность). Существует число $n^0 N = D$ ($D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ – диссипация).

Число n^0 называют *кинематически допустимым коэффициентом*.

Теорема 2: Тело может выдержать допустимую систему нагрузок, если существует кинематически допустимое поле скоростей деформации ε_{ij}^0 , для которого скорость изменения работы (мощность) всех внешних сил N больше диссипации механической работы во всем теле.

То есть необходимым условием способности тела выдержать внешние нагрузки является условие $N \leq D$.

Эквивалентная формулировка теоремы 2: Коэффициент запаса n является *наименьшим кинематически допустимым коэффициентом* $n \leq n^0$.

То есть кинематически допустимый коэффициент является верхней оценкой коэффициента запаса.

Альтернативное утверждение для теоремы 2: Тело может выдержать внешние нагрузки, если для всех кинематически допустимых полей скоростей деформации скорость изменения работы внешних сил меньше скорости диссипации механической работы $N < D$.

То есть неравенство $N < D$ для всех кинематически возможных полей скоростей деформации является достаточным условием способности тела выдерживать нагрузки.

Следствия теорем предельного равновесия

1. Если к части поверхности, свободной от внешних усилий, добавить материал, то предельная нагрузка не уменьшится.

2. Если от части поверхности, свободной от внешних усилий, удалить часть материала, то предельная нагрузка не увеличится.

3. Увеличение предела текучести в некоторых частях тела не может повысить предельную нагрузку.

4. Уменьшение предела текучести в некоторых частях тела не может увеличить предельную нагрузку.

5. Коэффициент запаса для внешнего условия текучести не меньше коэффициента запаса для внутреннего условия текучести.

2.8. Предельное состояние материала конструкции при квазихрупком разрушении

Как следует из теорем и следствий предельного состояния идеально пластического тела, рассмотренных в параграфе 2.7, рабочее тело (модель) не может выдержать механических нагрузок, если мощность внешних сил больше скорости диссипации энергии. В этом случае часть энергии, которая не идет на пластическое деформирование, будет преобразовываться в другие виды энергии, например, образование внутренних свободных поверхностей в виде пор, микротрещин, дислокаций. Дальнейшее нагружение тела ведет к возникновению и распространению в нем трещины (трещин).

Разрушение рабочего тела (детали) машины предполагает исчерпание его несущей способности выдерживать нагрузки и обусловлена его разделением на части одной или несколькими трещинами. Процесс роста трещины может быть быстрым, катастрофическим или медленным и, при определенных профилактическо-восстанавливающих мероприятиях, безопасным. Первый тип разрушения называют хрупким (квазихрупким), второй – вязким.

В теории разрушения существуют два основных подхода к оценке несущей способности тела: энергетический подход, основанный на подсчете энергетического баланса для тела с трещиной, который берет свое начало от Гриффитса, и силовой подход, берущий начало от Ирвина. Первый подход для решения практических задач более труден, поэтому в приложениях более применим силовой подход. Согласно методу Ирвина для решения вопроса о развитии трещин в линейной упругой постановке задачи достаточно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений на контуре трещины, которые позволяют полностью определить локальное распределение напряжений, деформаций и смещений так, что дальнейшее решение задачи имеет чисто алгебраический характер.

Развитие поверхностей разрыва (трещин, дислокаций) начинается с несовершенств структуры материала, которые в начальный момент времени рассматриваются как существующие а priori дефекты структуры материала. Дальнейшее развитие начальных несовершенств структуры происходит по разным сценариям. Для дислокаций присуще практически одновременное и стабильное развитие сразу многих дислокаций, образующих полосы скольжения и целые пластические

области. Рост трещин, как правило, характеризуется развитием одной, наиболее опасной трещины, обладающей способностью к быстрому неустойчивому росту, приводящему к разделению тела на части.

При создании критерия прочности на основе теории трещин получаются обычные феноменологические теории прочности (типа условия теорий пластичности), однако входящие в них константы зависят от размеров начальной трещины.

Теория предельного состояния и теория хрупких трещин составляют содержание механики разрушения.

Прочность реальных твердых тел зависит от материала, геометрии тела, времени, числа циклов нагрузки-разгрузки, температуры, степени агрессивности внешней среды, скорости деформирования, внешнего излучения (радиации), электромеханических полей и др.

Существует переходная зона изменения указанных параметров, которая отделяет область вязкого разрушения от области хрупкого разрушения, в которой эксплуатация конструкций считается недопустимой. В области вязкого разрушения расчет прочности производят или по теории предельного состояния, или по теории прочности. Вывод о недопустимости работы конструкции в области хрупкого разрушения связан с трудностью диагностирования методами неразрушающего контроля трещин, способных привести к разрушению.

Пусть в теле имеется трещина, представляющая собой пересечение двух поверхностей (рис. 2.7, а). Поместим начало координат на линии пересечения поверхностей трещин (фронте трещины). Ось z направим по фронту, оси x , y – перпендикулярно оси z .

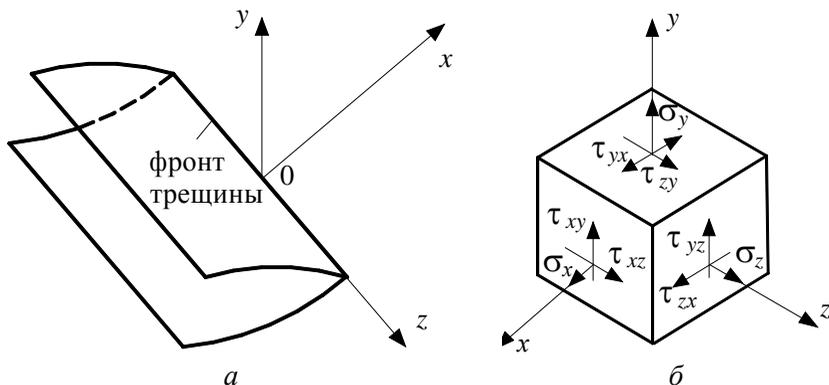


Рис. 2.7. Напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины

Общее решение задачи о напряженно-деформированном состоянии в окрестности трещины зависит от трех параметров, обозначаемых K_I , K_{II} , K_{III} и называемых *коэффициентами интенсивности напряжений*. Они зависят от геометрии тела, внешних нагрузок, расположения и длины трещины и имеют размерность силы, деленной на диаметр в степени три вторых.

Сложное напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины (рис. 2.7, б) можно представить в виде суперпозиции трех простейших состояний.

1. *Нормальный разрыв или отрыв*. Трещина локально представляет собой разрыв нормального смещения v (по оси y), симметричный относительно плоскостей xz , yz , смещения u (вдоль x) и w (вдоль z) равны нулю, рис. 2.8. Коэффициенты интенсивности напряжений (*КИН*) в этом случае: $K_I \neq 0$, $K_{II} = 0$, $K_{III} = 0$.

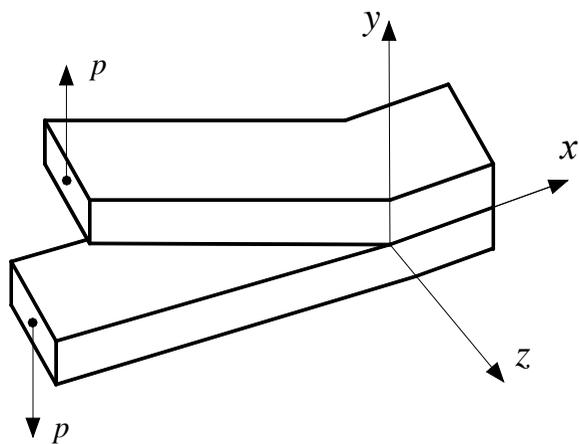


Рис. 2.8. Разрыв нормального смещения

2. *Поперечный сдвиг*. Трещина вблизи своего фронта представляет собой разрыв касательного смещения u (вдоль оси x), симметричный относительно плоскости xu и кососимметричный относительно плоскости xz . Смещения v (вдоль оси y), w (вдоль оси z) равны нулю рис. 2.9.

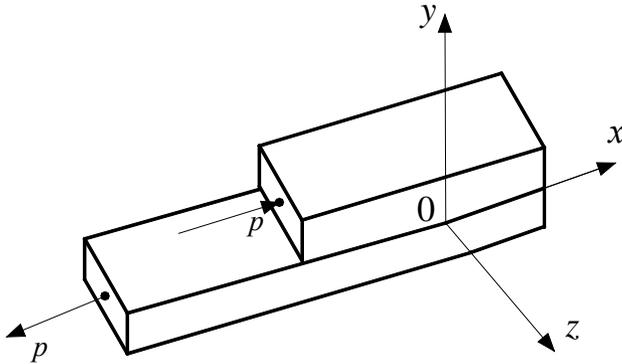


Рис. 2.9. Разрыв касательного смещения u

КИН в этом случае: $K_{II} \neq 0$, $K_I = K_{III} = 0$.

3. *Продольный сдвиг.* Трещина вблизи края представляет собой разрыв касательного смещения w . Смещения u и v на разрезе равны нулю, рис. 2.10.

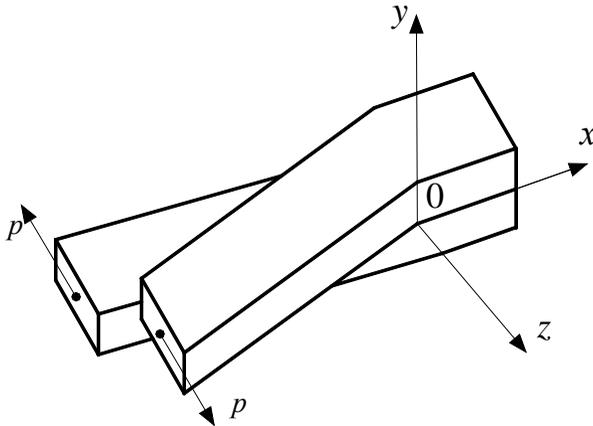


Рис. 2.10. Разрыв касательного смещения w

КИН в этом случае: $K_{III} \neq 0$, $K_I = K_{II} = 0$.

Не приводя выражений для напряжений и перемещений для каждого из трех случаев, отметим, что все они обладают одной и той же структурой вида

$$\sigma = \frac{K_j}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) + \dots, \quad u = \frac{K_j}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g(\theta) + \dots, \quad j = \text{I, II, III.} \quad (2.40)$$

Из (2.40) видно, что для напряжений вблизи вершины трещины ($r=0$) имеется особенность типа $r^{-1/2}$. Различие между случаями определяется постоянным множителем K_j , зависящим от внешних нагрузок и геометрии тела.

Условие локального разрушения может быть сформулировано в пространстве параметров K_I, K_{II}, K_{III} , рассматриваемых как декартовы координаты точки, характеризующей состояние процесса развития трещин, и геометрии, представляющей собой замкнутую поверхность, охватывающую начало координат и записываемую в виде

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0.$$

Попадание конца радиуса-вектора $\{K_I, K_{II}, K_{III}\}$ на поверхность свидетельствует о том, что в т.О фронта трещины происходит локальное разрушение.

Функция $f(K_I, K_{II}, K_{III})$ определяется экспериментально из модельных представлений. Для трещин основных трех типов критерий локального разрушения имеет вид:

нормальный разрыв:

$$K_I = K_{Ic}, \quad K_{II} = K_{III} = 0;$$

поперечный сдвиг:

$$K_{II} = K_{IIc}, \quad K_I = K_{III} = 0;$$

продольный сдвиг:

$$K_{III} = K_{IIIc}, \quad K_I = K_{II} = 0.$$

Величины K_{Ic} , K_{IIc} , K_{IIIc} называются коэффициентами вязкости разрушения и являются константами материала.

2.9. Усталостное разрушение

Явление усталости металлов при циклическом нагружении было открыто Велером. Причиной преждевременного хрупкого разрушения конструкций при циклических нагрузках оказалось медленное развитие трещин в процессе эксплуатации.

Выделяют два этапа роста усталостных трещин.

1-й этап (инкубационный) – характеризуется накоплением поврежденных типа дислокаций и зарождением трещины. Если существует трещина, то на этом этапе она не растет;

2-й этап (роста трещины) – характеризуется ростом наиболее опасной трещины.

Рассмотрим 2-й этап, который может быть описан уравнением

$$\frac{dl}{dn} = f(K_{i \max}, K_{i \min}), \quad (2.41)$$

где l – длина трещины;

n – число циклов;

$\frac{dl}{dn}$ – скорость роста трещины;

$K_{i \max}$, $K_{i \min}$ – максимальное и минимальное значения коэффициента интенсивности напряжений за цикл.

Согласно концепции существования K_c трещина в упругом твердом теле начинает расти только после того, как коэффициент интенсивности напряжений на фронте трещины достигнет величины вязкости разрушения, причем в процессе квазистатического роста выполняется равенство $K_i = K_{ic}$.

Если наибольшее и наименьшее значения нагрузки за цикл P_{\max} , P_{\min} не зависят от времени, измеряемого числом циклов, а форма и размер трещин определяются только параметром l , то решение уравнения (2.41) имеет вид

$$n = \int_{l_0}^l \frac{dl}{f(K_{i \max}, K_{i \min})}. \quad (2.42)$$

В качестве f в (2.42) в общем случае можно взять

$$f = \beta \left(\frac{K_{i \max}^2 - K_{i \min}^2}{K_c^2} + \ln \frac{K_c^2 - K_{i \max}^2}{K_c^2 - K_{i \min}^2} \right) + \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) V_0 \exp \left[(\lambda / 2) (K_{i \max} + K_{i \min}) \right] I_0 (\lambda / 2) (K_{i \max} - K_{i \min}). \quad (2.43)$$

$$l = l_0 \text{ при } n = 0.$$

Константы K_c , β , V_0 , λ определяются экспериментально.

Функция f , взятая в виде (2.43), учитывает:

амплитуду и среднее значения нагрузки за цикл;

структуру тела, расположение и величину начального дефекта;

геометрию тела;

частоту цикла ω ;

температуру тела.

В качестве верхнего предела интегрирования в (2.42) возьмем $l = l_*$, определяемое как минимальный корень уравнения

$$K_{i \max} (p_{\max}, l_*) = K_c.$$

Величина n , определяемая формулой (2.42) представляет наибольший практический интерес и определяет число циклов нагружения до разрушения. В каждом конкретном случае она вполне определенным образом зависит от параметров цикла p_{\max} , p_{\min} , от частоты ω , размера l_0 и формы начальной трещины, от конфигурации тела, температуры, внешней среды, от характеристик материала K_c , β , V_0 , λ .

2.10. Моделирование физико-механических свойств материалов методом механических цепей и диаграмм

Различные материалы обладают тремя основными механическими свойствами – упругостью, пластичностью и вязкостью. Эти свойства проявляются в разной степени в зависимости от структуры материала, условий работы (температуры, влажности и т. п.) и типа нагрузки (статической, динамической, импульсной или длительной и т. п.). При различных комбинациях этих трех факторов один и тот же материал может проявлять одно из трех основных механических свойств или некоторую комбинацию из них. При изменении некоторых из названных факторов можно изменить поведение материала и получить другую преобладающую комбинацию механических свойств.

Теоретическое описание этого многообразного поведения материалов производится посредством механико-математических моделей, которые идеализируют реальное поведение материала, отражая его наиболее характерные свойства. Большое разнообразие материалов и свойств, проявляющихся при различных условиях работы, а также стремление к более подходящему описанию этого многообразия породили механико-математические модели определяющих соотношений.

Одномерные эксперименты являются основой для создания одномерных механико-математических моделей. При помощи идеализации зависимости между напряжениями и деформациями, полученной экспериментальным путем, находится определяющая связь между ними для соответствующей механико-математической модели.

Рассмотрим некоторые одномерные механико-математические модели, которые встречаются чаще всего.

2.10.1. Модель линейно-упругого тела

Эксперименты при одномерном растяжении, сжатии и кручении показывают, что существуют материалы, обладающие линейно-упругими свойствами. Для них связь между напряжениями и деформациями представляется в виде идеализированной диаграммы – прямой линии (рис. 2.11, 2.12).

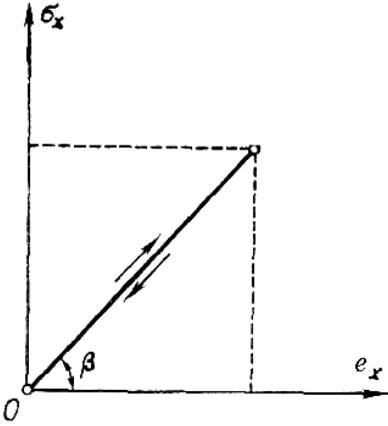


Рис. 2.11. Линейно-упругое тело

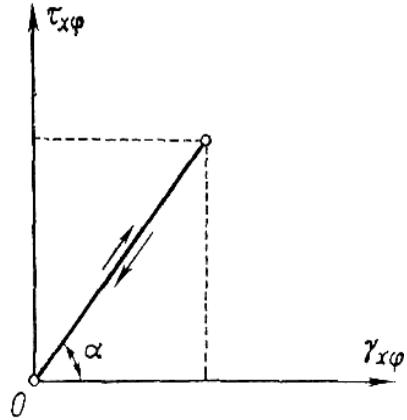


Рис. 2.12. Линейно-упругое тело

В аналитическом виде это выражается при помощи следующей определяющей связи между основными напряжениями и деформациями: при растяжении (сжатии)

$$\sigma_x = E e_x; \quad (2.44)$$

при кручении

$$\tau_{x\varphi} = G \gamma_{x\varphi}, \quad (2.45)$$

где $E = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{const}$ – модуль упругости Юнга;

$G = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$ – упругий модуль сдвига.

В этом случае коэффициент поперечной деформации также является константой и называется коэффициентом Пуассона $\nu = \operatorname{const}$.

Уравнения (2.44) и (2.45) представляют собой математическое выражение линейного закона Гука.

Линейно-упругие материалы, имеющие различные модули упругости при растяжении и сжатии, называются *разномодульными*. Идеализированная диаграмма таких материалов дана на рис. 2.13.

Определяющая связь между σ_x и e_x имеет вид

$$\sigma_x = \begin{cases} E^+ e_x, & E^+ = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{const} \text{ (растяжение);} \\ E^- e_x, & E^- = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{const} \text{ (сжатие).} \end{cases}$$

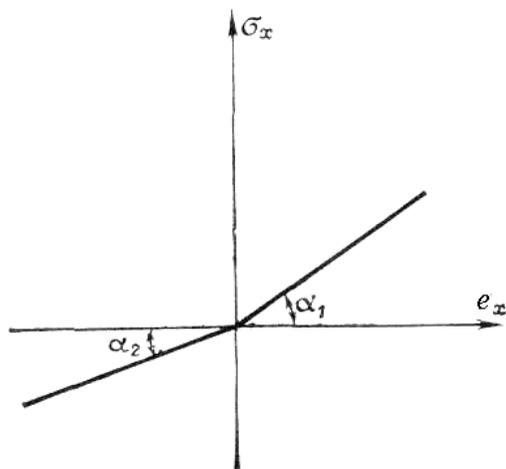


Рис. 2.13. Разномодульное линейно-упругое тело

2.10.2. Модель нелинейно-упругого тела

Связь между напряжениями и деформациями в телах с нелинейно-упругими свойствами представляется идеализированной кривой, показанной на рис. 2.14.

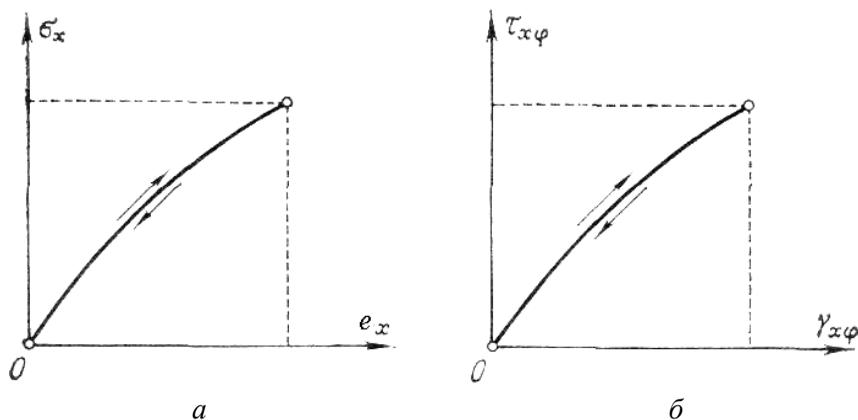


Рис. 2.14. Нелинейно-упругое тело

Соответствующая определяющая связь имеет вид:
при растяжении (сжатии)

$$\sigma_x = f_1(e_x);$$

при кручении

$$\tau_{x\varphi} = f_2(\gamma_{x\varphi}).$$

Для *разносopротивляющихся нелинейно-упругих* тел определяющая связь имеет вид

$$\sigma_x = \begin{cases} f^+(e_x) & \text{(растяжение);} \\ f^-(e_x) & \text{(сжатие).} \end{cases}$$

Соответствующая идеализированная кривая показана на рис. 2.15.

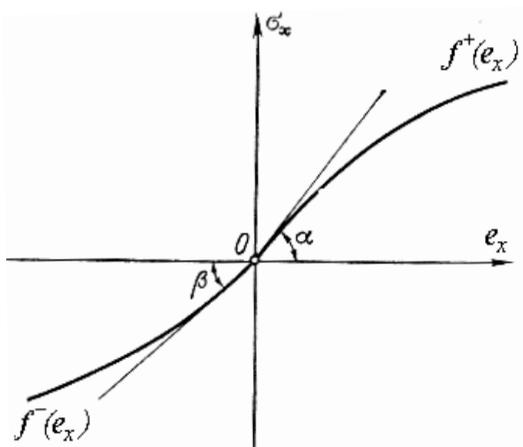


Рис. 2.15. Разнопрочное нелинейно-упругое тело

2.10.3. Модели пластических тел

Материалы, проявляющие пластические свойства, в зависимости от вида этого проявления могут аппроксимироваться различными механико-математическими моделями, данными в табл. 2.1.

		Определяющие зависимости	
№	Модель	Растяжение (сжатие)	Кручение
1	2	3	4
1	Уруго-идеально-пластическое тело	$\sigma_x = \begin{cases} Ee_x & \text{при } e_p = 0 \\ \sigma_p & \text{при } e_x \geq e_p \text{ и } \dot{e}_x > 0 \text{ (нагружение)} \\ \sigma_3 - E(e_1 - e_x) & \text{при } \dot{e}_x < 0 \text{ (разгрузка)} \end{cases}$	$\tau_{x\varphi} = \begin{cases} G\gamma_{x\varphi} & \text{при } \gamma_{x\varphi} < \gamma_p \\ \tau_p & \text{при } \gamma_{x\varphi} \geq \gamma_p \text{ и } \dot{\gamma}_{x\varphi} > 0 \text{ (нагружение)} \\ \tau_p - G(\bar{\gamma}_{x\varphi} - \gamma_{x\varphi}) & \text{при } \dot{\gamma}_{x\varphi} < 0 \text{ (разгрузка)} \end{cases}$
2	Уруго-пластическое тело с линейным упручением	$\sigma_x = \begin{cases} Ee_x & \text{при } \sigma_x < \sigma_p \\ \sigma_p + E_1(e_x - e_p) & \text{при } \sigma_x \geq \sigma_p \text{ и } \dot{P} > 0 \text{ (нагружение)} \\ \sigma_1 - E(e_1 - e_x) & \text{(разгрузка)} \end{cases}$ $E = \text{tg}\alpha = \text{const}, E_1 = \text{tg}\beta = \text{const}$	$\tau_{x\varphi} = \begin{cases} G\gamma_{x\varphi} & \text{при } \tau_{x\varphi} < \tau_p \\ \tau_p + G_1(\gamma_{x\varphi} - \gamma_p) & \text{при } \tau_{x\varphi} > \tau_p \\ \bar{\tau}_{x\varphi} - G(\bar{\gamma}_{x\varphi} - \gamma_{x\varphi}) & \text{при } \dot{M}_t > 0 \text{ (нагружение)} \end{cases}$ $G = \text{tg}\alpha = \text{const}, G_1 = \text{tg}\beta_1 = \text{const}$
3	Уруго-пластическое тело с нелинейным упручением	$\sigma_x = \begin{cases} E\varepsilon_x & \text{при } \sigma_x < \sigma_p \\ f(\varepsilon_x) & \text{при } \sigma_x > \sigma_p \text{ и } \dot{P} > 0 \text{ (нагружение)} \\ \sigma_1 - E(e_1 - e_x) & \text{при } \dot{P} < 0 \text{ (разгрузка)} \end{cases}$	$\tau_{x\varphi} = \begin{cases} G\gamma_{x\varphi} & \text{при } \tau_{x\varphi} < \tau_p \\ f_1(\gamma_{x\varphi}) & \text{при } \tau_{x\varphi} > \tau_p \text{ и } \dot{M}_t > 0 \text{ (нагружение)} \\ \bar{\tau}_{x\varphi} - G(\bar{\gamma}_{x\varphi} - \gamma_{x\varphi}) & \text{при } \dot{M}_t < 0 \text{ (разгрузка)} \end{cases}$

1	2	3	4
4	Нелинейно-упруго-пластическое тело	$\sigma_x = \begin{cases} f(e_x) & \text{при } \dot{P} > 0 \text{ (нагружение)} \\ \sigma_1 - E_0(e_1 - e_x) & \text{при } \dot{P} < 0 \text{ (разгрузка)} \end{cases}$ $E_0 = \left(\frac{df}{de_x} \right)_{\sigma_x=0} = \text{tg}\alpha_0$	$\tau_{x\varphi} = \begin{cases} f_1(\bar{\gamma}_{x\varphi}) & \text{при } \dot{M}_t > 0 \text{ (нагружение)} \\ \bar{\tau}_{x\varphi} - G_0(\bar{\gamma}_{x\varphi} - \gamma_{x\varphi}) & \text{при } \dot{M}_t < 0 \text{ (разгрузка)} \end{cases}$ $G_0 = \left(\frac{df_1}{d\bar{\gamma}_{x\varphi}} \right)_{\tau_{x\varphi}=0} = \text{tg}\alpha$
5	Жестко-идеально-пластическое тело	$\sigma_x = \sigma_p$	$\tau_{x\varphi} = \tau_p$
6	Жестко-пластическое тело с линейным упручением	$\sigma_x = \sigma_p + E_1 e_x$ $E_1 = \text{tg}\alpha$	$\tau_{x\varphi} = \tau_p + G_1 \gamma_{x\varphi}$ $G_1 = \text{tg}\beta$
7	Жестко-пластическое тело с линейным упручением	$\sigma_x = \sigma_p + f(e_x)$ $f(0) = 0$	$\tau_{x\varphi} = \tau_p + f_1(\gamma_{x\varphi})$ $f_1(0) = 0$

№ 1. Модель упругоидеально пластического тела (№ 1, см. табл. 2.1, рис. 2.16) характеризуется определенной граничной величиной напряжений $\sigma_x = \sigma_p$, называемой **пределом текучести** при чистом растяжении или сжатии, соответственно $\tau_{x\varphi} = \tau_p$ – предел текучести при чистом сдвиге. До этого предела материал является линейно-упругим, а после его достижения он необратимо деформируется при постоянном напряжении, т. е. течет пластически. При разгрузке (уменьшении нагрузки) тело обладает линейно-упругим поведением с модулем упругости, равным начальному, и, кроме того, возникает **остаточная деформация**. При повторном нагружении материал снова упруго деформируется до достижения предшествующего предела текучести, после чего снова начинает пластически течь.

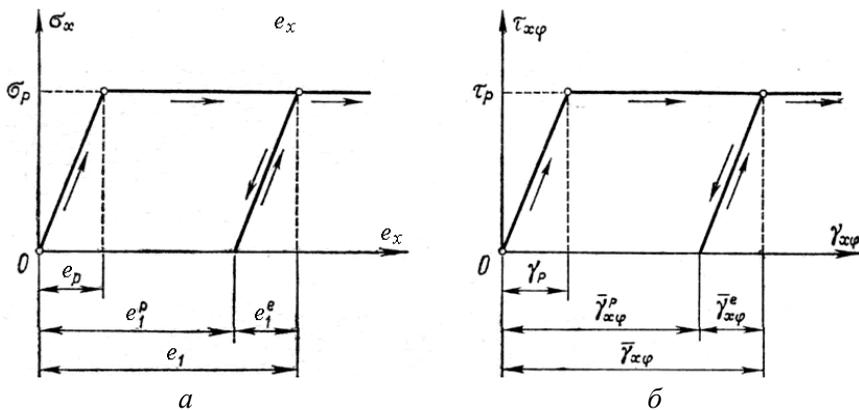


Рис. 2.16. Упругоидеально пластическое тело

№ 2. Материал модели упругопластического тела с линейным упрочнением (№ 2, см. табл. 2.1, рис. 2.17) также деформируется упруго до достижения предела текучести.

При превышении этого предела при нагружении (увеличении нагрузки) связь между напряжениями и деформациями также будет линейной, но с другим угловым коэффициентом. При разгрузке материал является линейно-упругим, с образованием остаточных деформаций. При повторном нагружении материал будет деформиро-

ваться линейно-упруго до достижения напряжения, с которого началась разгрузка. Это напряжение играет роль нового предела текучести, превышающего первоначальный, вследствие чего мы считаем, что материал получил пластическое упрочнение. Если продолжить нагружение, то связь между напряжениями и деформациями будет следовать первоначальной линейной зависимости. Поэтому говорят, что упрочнение является линейным.

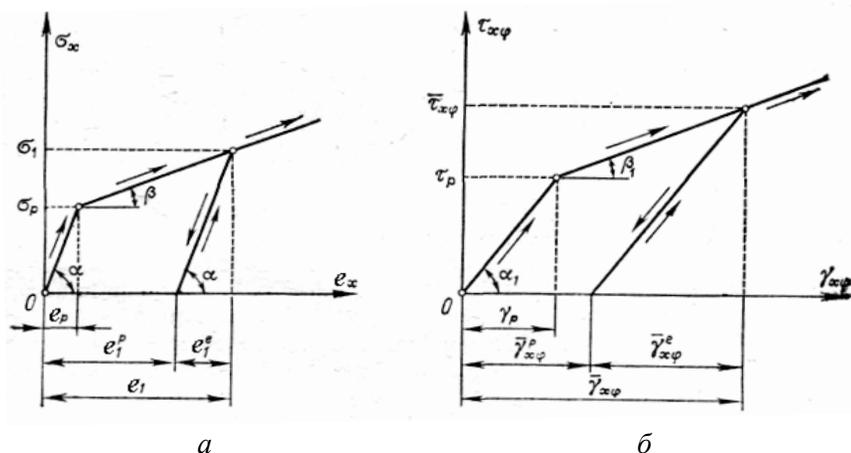


Рис. 2.17. Уругопластическое тело с линейным упрочнением

№ 3. Модель уругопластического тела с нелинейным упрочнением (№ 3, см. табл 2.1, рис. 2.18) обладает свойствами, подобными свойствам предыдущей модели.

В обоих случаях материал характеризуется двумя различными аналитическими зависимостями между напряжениями и деформациями при нагружении и разгрузке. Отличие от предшествующей модели состоит в том, что при превышении предела текучести связь между напряжениями и деформациями является нелинейной, т. е. материал упрочняется нелинейно.

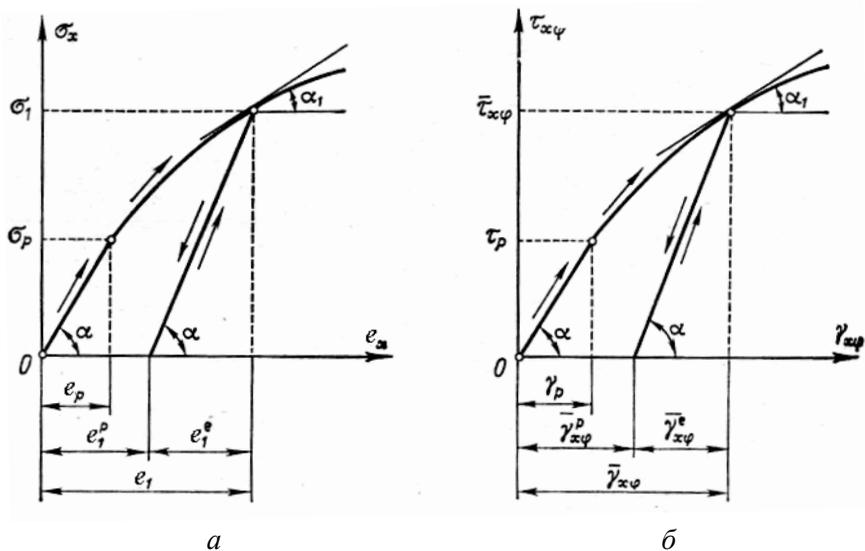


Рис. 2.18. Уругопластическое тело с нелинейным упрочнением

№ 4. В случае модели нелинейно-уругопластического тела (№ 4, см. табл. 2.1, рис. 2.19) предел текучести отсутствует и пластические деформации возникают с самого начала нагружения.

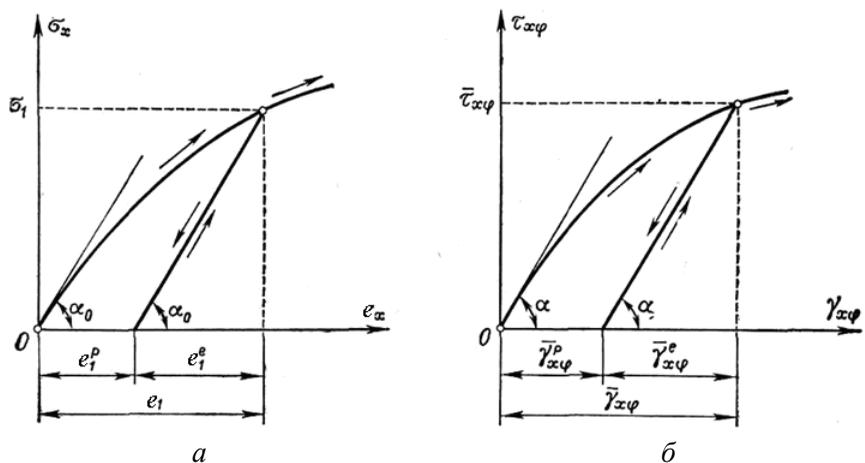


Рис. 2.19. Нелинейно-уругопластическое тело

При нагружении связь между напряжениями и деформациями является нелинейной и материал упрочняется нелинейно. Разгрузка дает линейно-упругую зависимость между напряжениями и деформациями с наклоном, равным наклону касательной в начальной точке к кривой $\sigma_x(\varepsilon_x)$ (соответственно $\tau_{x\varphi}(\gamma_{x\varphi})$). При повторном нагружении пластические деформации начинаются после достижения напряжений, при которых началась разгрузка.

№ 5–7. Если пластические деформации тела достаточно развиты и в значительной степени превышают упругие, то последними можно пренебречь и пользоваться моделями жесткопластических тел (см. модели № 5–7, см. табл. 2.1, рис. 2.20–2.22).

Модель нелинейно-упругопластического тела может обладать и нелинейной пластической разгрузкой (рис. 2.23).

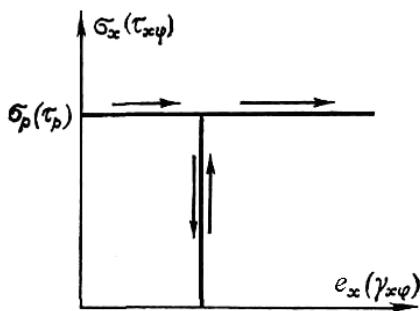


Рис. 2.20. Жестко-идеально пластическое тело

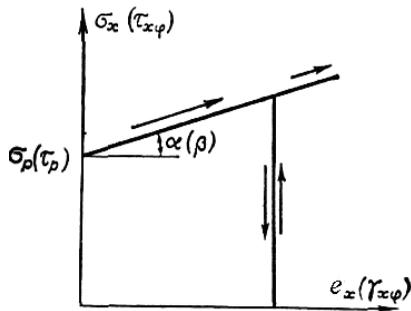


Рис. 2.21. Жесткопластическое тело с линейным упрочнением

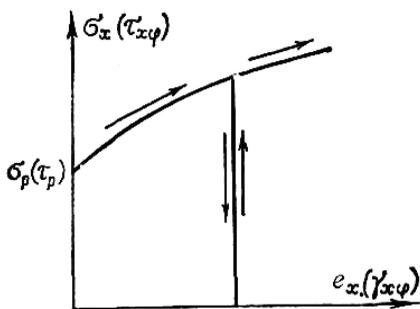


Рис. 2.22. Жесткопластическое тело с нелинейным упрочнением

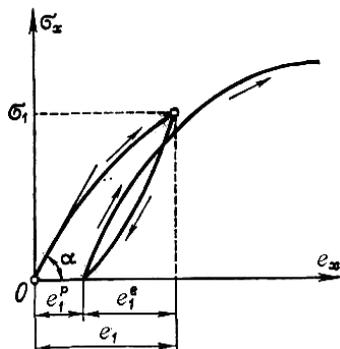


Рис. 2.23. Уругопластическое тело с нелинейным упрочнением

Если материалы обладают более сложными пластическими свойствами, можно пользоваться некоторыми модификациями указанных выше моделей. Так, например, в случае разносопротивляющихся материалов, имеющих различные модули упругости и пределы текучести при растяжении и сжатии, используются модели с идеализированными диаграммами типа, представленной на рис. 2.24.

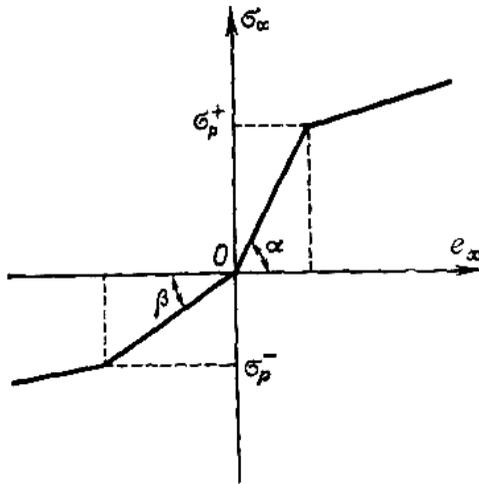


Рис. 2.24. Разнопрочное упругопластическое тело

Для материалов, обладающих *эффектом Баушингера*, можно принять различные идеализированные диаграммы (рис. 2.25) в зависимости от способа проявления этого эффекта. Изменение предела текучести можно представить различными аналитическими способами, принимая различные одноосные модели упругопластических тел, проявляющих анизотропное упрочнение (т. е. различное упрочнение в зависимости от предварительной пластической деформации).

Согласно довольно общему случаю, если $\sigma_p^+ = \sigma_p^- = \sigma_p$ – начальный предел текучести, то вследствие предварительной пластической деформации растяжения ε^p предел текучести при сжатии выразится формулой

$$(\sigma_p^-)_1 = A_a(e^p) \left[\sigma_p - B_a(e^p) \right],$$

где $A_a(e^p)$ и $B_a(e^p)$ – однозначно определяемые из эксперимента функции предварительной пластической деформации ε^p .

В частном случае можно принять, что $A_a = 1$, $B_a(e^p) = C_a e^p$, $C_a = \text{const}$, тогда

$$(\sigma_p^-)_1 = \sigma_p - C_a e^p.$$

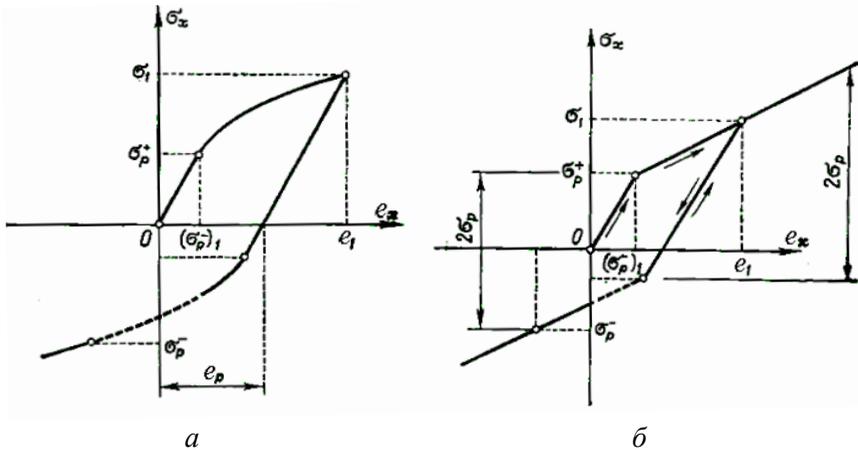


Рис. 2.25. Эффект Баушингера, уменьшение предела пластичности при повторном нагружении противоположного знака.

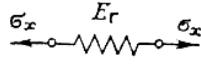
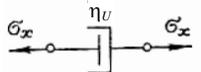
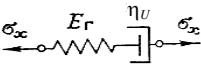
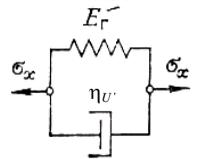
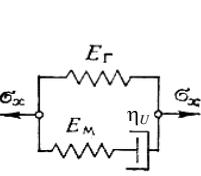
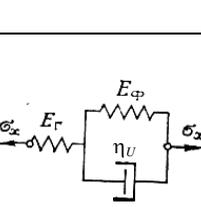
2.10.4. Модели линейно-вязкоупругих тел

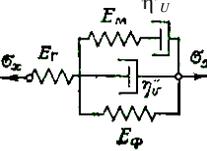
Линейные вязкие и упругие свойства проявляются по-разному. Кривые ползучести $\varepsilon_i(t)$ и релаксации $\sigma_i(t)$, а также влияние скорости деформации на связь между напряжениями и деформациями можно идеализировать разными способами, пользуясь различными одноосными моделями линейно-вязкоупругих тел.

Как правило, иногда эти механико-математические модели представляются механическими моделями, составленными из поршней и пружин. Такое представление делается со вспомогательной целью и имеет чисто условный характер. Следует подчеркнуть, что составляющие элементы (поршни и пружины) не моделируют структуру материала. В табл. 2.2 даны некоторые одномерные механико-математические модели линейно-вязкоупругих тел, их механические мо-

дели и определяющие связи, дающие возможность получить различные зависимости между $\epsilon_x(t)$ и $\sigma_x(t)$, приведенные на рис. 2.26. и 2.27.

Таблица 2.2

Обозначение	Механико-математическая модель	Соответствующая механическая модель	Определяющие зависимости
1	2	3	4
1Г	Линейно-упругое тело Гука		$\sigma_x = E_r e_x$ E_r – модуль упругости Юнга
1Н	Вязкая жидкость Ньютона		$\sigma_x = \eta_U \dot{e}_x$ η_U – коэффициент вязкости
2М	Вязкоупругая жидкость Максвелла		$\dot{e} = \frac{1}{E_r} \dot{\sigma}_x + \frac{1}{\eta_U} \sigma_x$
2Ф	Упруговязкое тело Фойгта		$\sigma_x = E_r e_x + \eta_U \dot{e}_x$
3П	Упруговязкое тело Пойнтинга–Томсона		$\sigma_x + \dot{\sigma}_x \tau_{re} = E_r (e_x + \dot{e}_x \tau_{cr})$ $\tau_{re} = \frac{\eta_U}{E_M}$ – время релаксации $\tau_{cr} = \frac{E_M + E_r}{E_M E_r} \eta_U$ – время ползучести
3З	Упруговязкое тело Зинера		$\sigma_x + \dot{\sigma}_x \tau_{re} = E_r (e_x + \dot{e}_x \tau_{cr})$ $\tau_{re} = \frac{\eta_U}{E_\phi}$ $\tau_{cr} = \frac{E_r + E_\phi}{E_r E_\phi} \eta_U$

1	2	3	4
5Б	Упруговязкое тело Бранкова		$\frac{\eta''_U}{E_r E_M} \ddot{\sigma}_x + \left(\frac{1}{E_r} + \frac{1}{E_M} + \frac{E_\phi}{E_r E_M} + \frac{\eta''_U}{E_r \eta'_U} \right) \dot{\sigma}_x + \left(\frac{1}{\eta'_U} + \frac{E_\phi}{E_r \eta'_U} \right) \sigma_x =$ $= \frac{\eta''_U}{E_M} \ddot{e}_x + \left(1 + \frac{E_\phi}{E_M} + \frac{\eta''_U}{\eta'_U} \right) \dot{e}_x + \frac{E_\phi}{\eta'_U} e_x$

Обобщением этих моделей служит модель линейно-вязкоупруго-го тела, ведущая к следующей определяющей связи:

$$B \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_x = A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) e_x,$$

где B и A – суть полиномиальные операторы степеней соответственно n и m . Степени полиномов дифференциальных операторов могут быть равными, т. е. $n = m$. В противном случае, чтобы модель имела физический смысл, должно соблюдаться условие $m - n = 1$.

Можно применять и модели, ведущие к определяющим зависимостям в интегральном виде. Так, например, при применении одномерной механико-математической модели упругого тела с наследственностью актуальное деформированное состояние (соответственно напряженное) зависит от истории изменения напряжения (деформации) до рассматриваемого момента времени, а также от актуальных значений напряжения (деформации). Это приводит к определяющим уравнениям типа

$$e_x(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma_x(t) + \int_{-\infty}^t K_t(t - \tau) \sigma_x(\tau) d\tau \right]$$

или

$$\sigma_x(t) = E \left[e_x(t) - \int_{-\infty}^t \Gamma_t(t-\tau) e_x(\tau) d\tau \right].$$

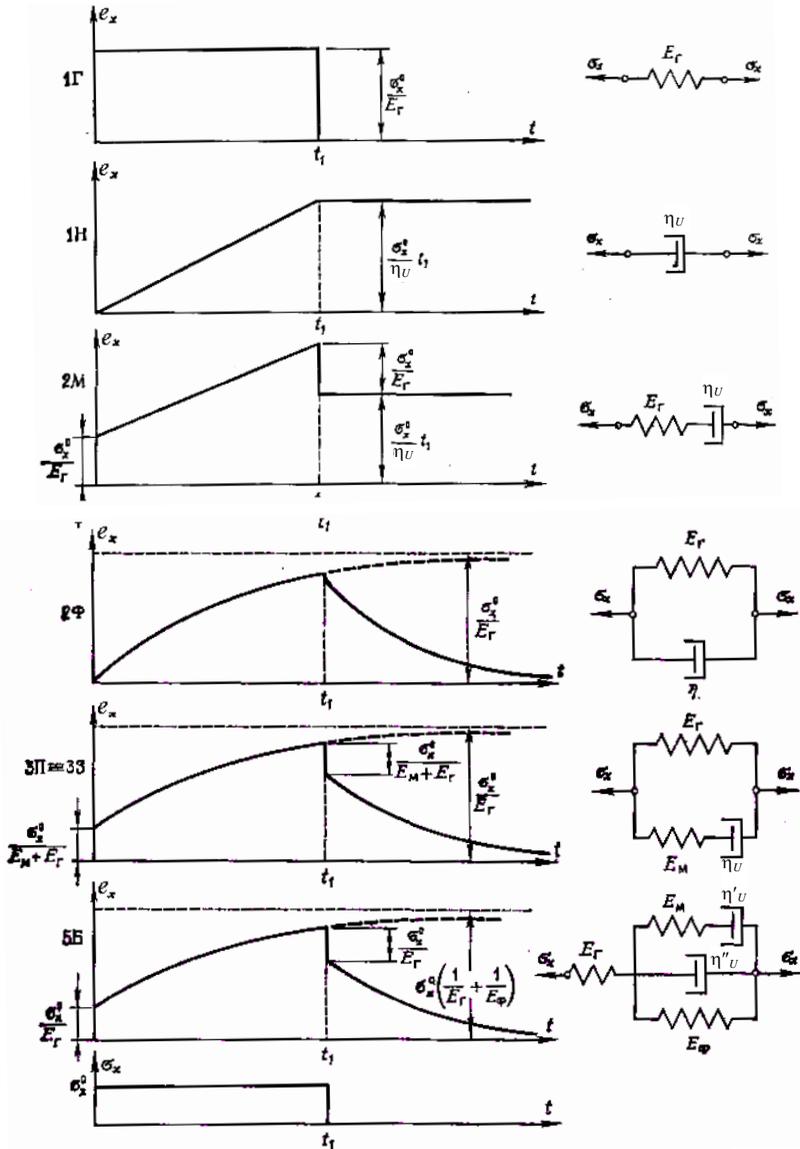


Рис. 2.26. Кривые ползучести для разных моделей линейно-вязкоупругих тел

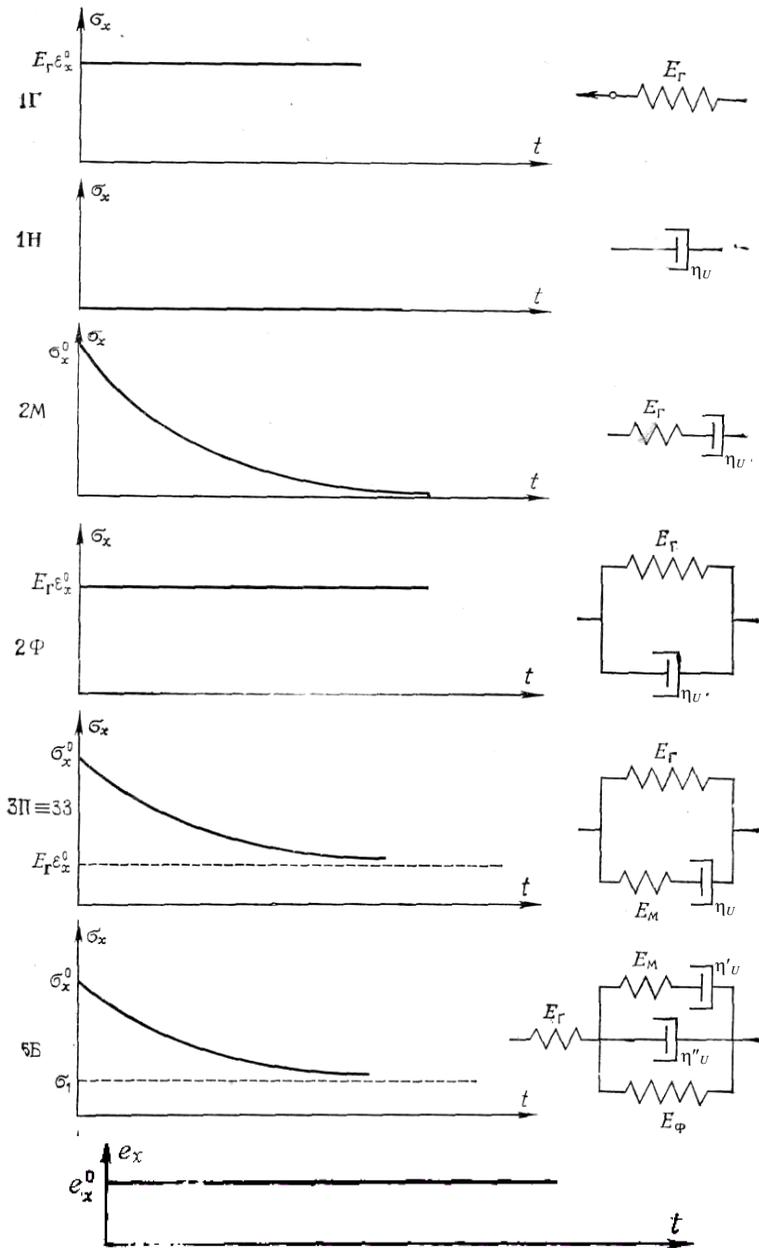


Рис. 2.27. Кривые релаксации для разных моделей линейно-вязкоупругих тел

Функция K_t называется *ядром ползучести*, а функция Γ_t – *ядром релаксации*; обычно они определяются экспериментальным путем. Эти функции выражают эффект «памяти» материала: материал «помнит» всю историю напряженного и деформированного состояний, а актуальное состояние определяется этой историей. При подходящем выборе упомянутых функций модели, данные выше, можно получить в качестве частных случаев.

При помощи общего термодинамического подхода, использующего внутренние параметры состояния, можно описать разнообразные термомеханические процессы, происходящие в деформируемых телах. Путем подходящего выбора энергетических функций, внутренних параметров состояния и уравнений эволюции можно получить рассмотренные выше модели линейно-упруговязких тел при изотермических условиях.

2.10.5. Модели упруговязкопластических тел

Модели упруговязкопластических тел не обладают резко выраженным пределом текучести; у них упругие, вязкие и пластические свойства проявляются одновременно. Приведем некоторые примеры.

1. *Упруговязкопластическое тело Одквиста* с определяющим уравнением вида

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x^e + \dot{\epsilon}_x^p + \dot{\epsilon}_x^u,$$

где $\dot{\epsilon}_x^e = E^{-1} \dot{\sigma}_x$ – скорость мгновенной упругой деформации;

$\dot{\epsilon}_x^p = k g_p(\sigma_x) \dot{\sigma}_x$ – скорость мгновенной пластической деформации $e_x^p = g_p(\sigma_x)$, причем принимается $k = 1$ для нагружения и $k = 0$ для разгрузки;

$\dot{\epsilon}_x^u = f_{cr}(\sigma_x)$ – скорость вязкой деформации; она определяет установившуюся ползучесть материала.

Функции $g_p(\sigma_x)$ и $f_{cr}(\sigma_x)$ находятся экспериментально; для их аппроксимации чаще всего принимают степенные функции.

2. *Упруговязкопластическое тело с упрочнением Клепачко и Леметра*:

$$e_x = e_x^e + e_x^a, \quad e_x^e = \frac{1}{E} \sigma_x, \quad \sigma_x = k_u (\tilde{e}_x^a)^{1/m} (\dot{e}_x^a)^{1/n};$$

$$\tilde{e}_x^a(t) = \int_0^t |\dot{e}_x^a(\tau)| d\tau,$$

где E, m, n, k_u – константы материала, причем $\dot{e}_x^a = 0$ принимается при разгрузке и $\dot{e}_x^a \neq 0$ при нагружении;

\tilde{e}_x^a играет роль меры меры пластического упрочнения материала;

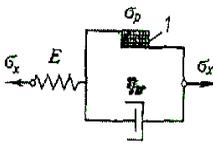
e_x^a – вязкопластическая деформация;

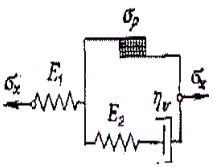
e_x^e – упругая деформация.

К этим материалам также можно применить общий термодинамический подход и предложить соответствующие одномерные механико-математические модели с внутренними параметрами состояния.

В табл. 2.3 приведены модели упруговязкопластических тел.

Таблица 2.3

Механико-математическая модель	Определяющие зависимости	Примечания
1	2	3
Упруговязкопластическое тело Бингама	$\sigma_x = \begin{cases} E\varepsilon_x, & \sigma_x \leq \sigma_p, \\ \sigma_p + \eta_U \left(\dot{e}_x - \frac{\dot{\sigma}_x}{E} \right), & \sigma_x > \sigma_p; \end{cases}$ <p>E – модуль упругости, σ_p – начальный предел текучести при одномерном растяжении, η_U – коэффициент вязкости</p>	<p>Механическая модель имеет вид</p>  <p>где элемент трения 1 дает деформацию при напряжении, превышающем предел текучести σ_p. Материал не имеет пластического упрочнения</p>

1	2	3
<p>Упруговязко-пластическое тело Шведова</p>	$\dot{\epsilon}_x = \begin{cases} \frac{1}{E_1} \dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_x \leq \sigma_p \\ \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) \dot{\sigma}_x + \frac{(\sigma_x - \sigma_p)}{\eta_U}, \sigma_x > \sigma_p, \end{cases}$ <p>E_1, E_2, η_U – константы материала; σ_p – предел текучести при чистом растяжении</p>	<p>Механическая модель имеет вид</p>  <p>Материал не имеет пластического упрочнения</p>
<p>Упруговязко-пластическое тело Малверна–Пэжины</p>	$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_x + \frac{1}{\eta_U} < \Phi(\sigma_x - \sigma_p) >, \\ < \Phi > = \begin{cases} 0, & \sigma_x \leq \sigma_p, \\ \Phi, & \sigma_x > \sigma_p, \end{cases}$ <p>Φ – нелинейная функция разности; $\sigma_x - \sigma_p$, определяемая экспериментально и чаще всего аппроксимируемая степенной, экспоненциальной и другими функциями</p>	<p>Модель можно применять и для тела с пластическим упрочнением, если</p> $\sigma_p = f_p(\chi),$ <p>где χ – соответствующий параметр упрочнения, связанный с неупругой деформацией</p>
<p>Упруговязко-пластическое тело Гилмана</p>	$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x^e + \dot{\epsilon}_x^a, \\ \dot{\epsilon}_x^e = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_x, \\ \dot{\epsilon}_x^a = A_D \left[\rho_0 + C_D (\dot{\epsilon}_x^a)^\beta \right] \exp \left[\frac{-D_C + H_c (\dot{\epsilon}_x^a)}{\sigma_x} \right], \\ \dot{\epsilon}_x^a \neq 0 \text{ при } \sigma_x \leq \sigma_p (\dot{\epsilon}_x^a), \\ \dot{\epsilon}_x^a \neq 0 \text{ при } \sigma_x > \sigma_p (\dot{\epsilon}_x^a),$ <p>$A_D, \rho_0, C_D, \beta, D_C, H_c$ – константы материала, определяемые на основании микроструктуры материала и теории дислокации</p>	<p>Модель основывается на микромеханизме вязкопластических деформаций, связанном с движением дислокации. Материал обладает пластическим упрочнением</p>

1	2	3
<p>Упруговязко-пластическое тело с мгновенной пластичностью по Кристеску</p>	$\dot{e}_x = \dot{e}_x^e + \dot{e}_x^a,$ $\dot{e}_x^e = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_x,$ $\dot{e}_x^a = f_K(\sigma_x, e_x) \dot{\sigma}_x + g_K(\sigma_x, e_x^a) \text{ при } \sigma_x > \sigma_p(e_x^a),$ $\dot{e}_x^a = 0 \text{ при } \sigma_x \leq \sigma_p(e_x^a).$ <p>Функции f_K и g_K определяются экспериментально, а E – модуль упругости</p>	<p>Скорость неупругой деформации состоит из скорости мгновенной пластической деформации (первый член) и скорости вязкопластической деформации (второй член)</p>
<p>Упруговязко-пластическое тело с внутренними параметрами состояния Пэжины и Войно</p>	$\Psi = \hat{\Psi}(e_x, e_x^a),$ $\sigma_x = \rho \partial_{e_x} \hat{\Psi}(e_x, e_x^a),$ $\dot{e}_x^a = f_{\text{ПВ}}(e_x, e_x^a),$ <p>Ψ – удельная свободная энергия;</p> <p>e_x^a – неупругая деформация;</p> <p>$f_{\text{ПВ}}$ – принимается чаще всего в виде</p> $f_{\text{ПВ}} = \gamma_U < \Phi \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_p(e_x^a)} - 1 \right) >, $ $< \Phi > = \begin{cases} \Phi, & \sigma_x > \sigma_p(e_x^a), \\ 0, & \sigma_x \leq \sigma_p(e_x^a) \end{cases}$	<p>Модель тела с внутренним параметром состояния – неупругой деформацией.</p> <p>Функции Ψ и $f_{\text{ПВ}}$ определяются экспериментально</p>

Подводя итоги рассмотренным моделям, в дальнейшем будем использовать определения для случая линейных звеньев:

1. Упругое звено, линейная связь между напряжением и деформацией

$$\sigma = Ee;$$

$$e = \frac{1}{E} \sigma,$$

будем называть усиливающим (ослабляющим), упругий коэффициент E – коэффициент усиления.

2. Вязкое звено, линейная связь между напряжением и скоростью деформации

$$\sigma = \mu \dot{e},$$

будем называть интегрирующим звеном:

$$e = \frac{1}{\mu} \int \sigma dt.$$

3. Звено сухого трения описывает пластические свойства материала.

Комбинируя звенья, можно наглядно видеть, какими свойствами обладают или должны обладать материалы для рабочих частей мехатронной системы. Такими свойствами, как жесткость, прочность, теплопроводность, должны обладать все компоненты системы, причем не только те, которые выполняют механическую работу, но и компоненты электронных и электрических цепей.

2.11. Примеры решения задач

Задача 2.1

В температурных регуляторах применяются биметаллические элементы. Биметаллический элемент представляет собой две жестко соединенные металлические пластинки с различными коэффициентами температурного расширения α_1 и α_2 (рис. 2.32). При нагреве биметаллическая пластинка изгибается за счет различного удлинения ее составляющих. Если один конец пластинки неподвижно закрепить, то второй, свободный, конец переместится на некоторую величину. Получаемые таким образом перемещения используются как источник движения и необходимых механических усилий.

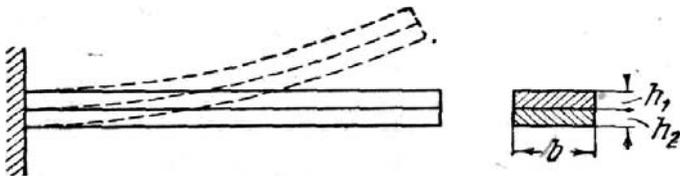


Рис. 2.32. Схема к задаче 2.1

Установить, как меняется кривизна пластинки в зависимости от ее геометрических размеров и температуры нагрева.

Решение

Выделим из биметаллической полоски элементарный участок, имеющий длину ds и начальную кривизну поверхности сая $\frac{1}{\rho_0}$ (биметаллические элементы часто делаются криволинейными) рис. 2.33.

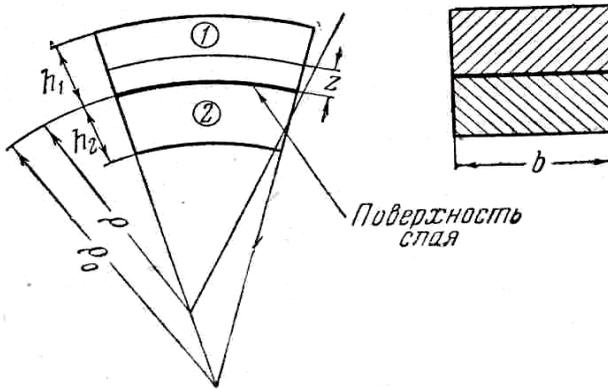


Рис. 2.33. Схема к задаче 2.1

Относительное удлинение волокна, отстоящего на расстояние z от поверхности сая, будет складываться из двух величин: из удлинения в саяе e_0 и удлинения, обусловленного изгибом полоски:

$$z \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) - \text{новая кривизна.}$$

Таким образом,

$$e = e_0 + z \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right).$$

Вычитая отсюда температурное удлинение и умножая полученную разность на модуль упругости E , находим напряжение, действующее в волокне, расположенном на расстоянии z от поверхности сжая. Для первой пластинки имеем

$$\sigma_1 = E_1 \left[e_0 + z \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) - \alpha_1 T \right] \quad (0 \leq z \leq h_1);$$

для второй –

$$\sigma_2 = E_2 \left[e_0 + z \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) - \alpha_2 T \right] \quad (-h_2 \leq z \leq 0);$$

E_1 и E_2 – модули упругости первой и второй пластинок.

Нормальное усилие и изгибающий момент в сечении биметаллического элемента равны нулю. Поэтому

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 b dz + \int_{-h_2}^0 \sigma_2 b dz = 0, \quad \int_0^{h_1} \sigma_1 b z dz + \int_{-h_2}^0 \sigma_2 b z dz = 0.$$

Подставляя сюда σ_1 и σ_2 и интегрируя, получим

$$e_0 (E_1 h_1 + E_2 h_2) - (\alpha_1 E_1 h_1 + \alpha_2 E_2 h_2) T + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{q}{\rho_0} \right) (E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2) = 0,$$

$$\frac{1}{2} e_0 (E_1 h_1^2 + E_2 h_2^2) - \frac{1}{2} (E_1 \alpha_1 h_1^2 - E_2 \alpha_2 h_2^2) T + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{q}{\rho_0} \right) (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^2) = 0.$$

Исключим отсюда e_0 и найдем изменение кривизны:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{6T(\alpha_1 - \alpha_2)}{\frac{(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)}{E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)} + 4(h_1 + h_2)}.$$

Изменение кривизны пропорционально изменению температуры и разности коэффициентов температурного расширения.

Наибольшее изменение кривизны, как это видно из полученного выражения, будет иметь место тогда, когда толщины составляющих пластинок подобраны так, чтобы

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2} T \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}.$$

З а д а ч а 2.2

Спроектирован температурный регулятор термостата, в котором в качестве чувствительного элемента была применена биметаллическая пластинка, установленная так, как это показано на рис. 2.34. При повышении температуры пластинка по замыслу конструктора начинает изгибаться. Когда температура достигнет заданной величины, контакт *A* замкнется и сработает командное реле, регулирующее нагрев термостата. Будет ли работать подобный регулятор?

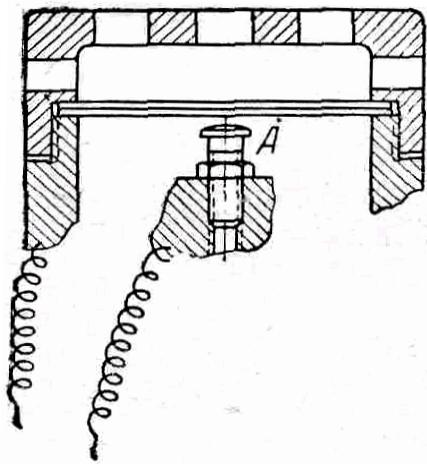


Рис. 2.34. Схема к задаче 2.2

Решение

Система работать не будет, так как биметаллическая пластинка, защемленная по концам, под действием равномерного нагрева не меняет своей кривизны.

В самом деле, если бы пластинка была свободно оперта, она изогнулась бы при равномерном нагреве по дуге окружности. В данном случае на пластинку действуют еще и реактивные моменты заделок. Под их действием пластинка также изогнется по дуге окружности, но в обратную сторону (рис. 2.35, *a*).

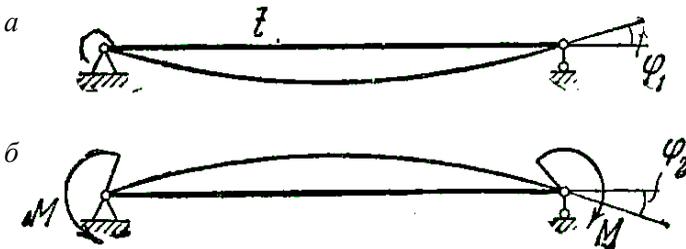


Рис. 2.35. Схема к задаче 2.2

При этом, накладывая требование равенства углов поворота φ_1 и φ_2 на концах пластинки, необходимо потребовать равенства кривизны обеих окружностей, а это означает, что суммарные углы поворота и перемещения во всех точках пластинки (при соблюдении условия $\varphi_1 = \varphi_2$) равны нулю. Таким образом, защемленная по концам биметаллическая пластинка при равномерном нагреве не изогнется.

Следовательно, для того чтобы указанная система (см. рис. 2.32) отвечала своему назначению, достаточно, например, заменить защемление пластинки шарнирным ее закреплением (рис. 2.35).

Задача 2.3

Три бруса, имеющие одинаковую жесткость на изгиб, но различную форму поперечного сечения (рис. 2.36, *a*), изгибаются в вертикальной плоскости моментами M . Построить для каждого

бруса зависимость изменения кривизны от момента M , если диаграмма растяжения материала брусьев может быть схематически представлена упругоидеально пластическим телом (рис. 2.36, б).

$$\frac{\sigma_T}{E} = 0,002.$$

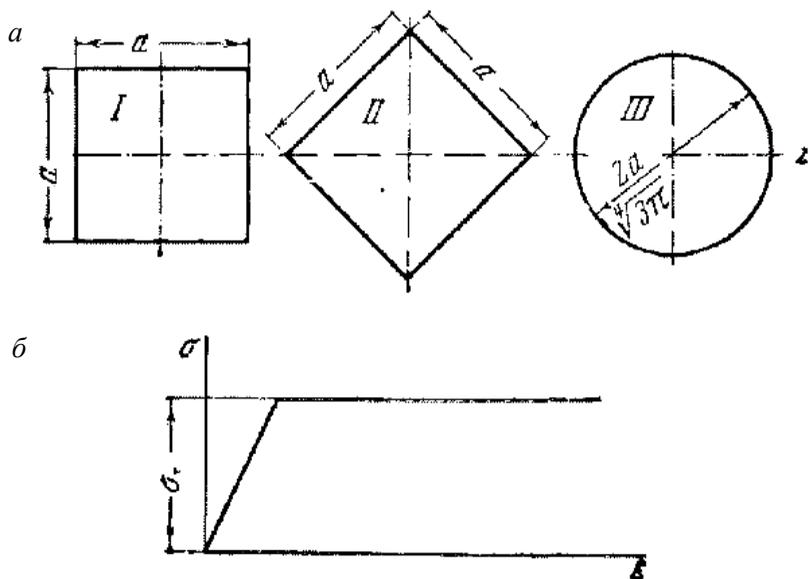


Рис. 2.36. Схема к задаче 2.3

Решение

Пока балки работают упруго, имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{12M}{Ea^4} \quad \text{или} \quad \frac{a}{\rho} = 12 \frac{M}{Ea^3},$$

и между кривизной и моментом существует линейная зависимость, которая сохраняется до тех пор, пока максимальное напряжение не достигнет предела текучести σ_T . Это произойдет при

$$\sigma_T = \frac{12M}{a^4} y_{\max} \quad \text{или} \quad \frac{M}{Ea^3} = \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{a}{y_{\max}}.$$

Соответственно по каждому из сечений получаем

$$\text{I. } \frac{M}{Ea^3} = 33,3 \cdot 10^{-4};$$

$$\text{II. } \frac{M}{Ea^3} = 2,36 \cdot 10^{-4};$$

$$\text{III. } \frac{M}{Ea^3} = 2,92 \cdot 10^{-4}.$$

При изгибающем моменте, большем указанного, в поперечном сечении бруса следует рассматривать две зоны – упругую ($0 \leq y \leq y_T$) и пластическую ($y_0 \leq y \leq y_{\max}$) (рис. 2.37).

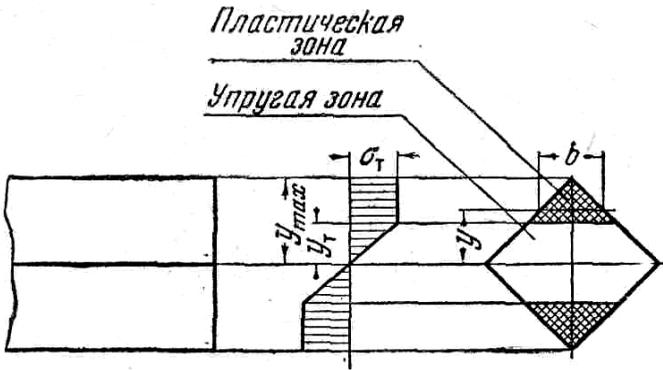


Рис. 2.37. Схема к задаче 2.3

Изгибающий момент в сечении определится следующим выражением:

$$M = 2 \int_0^{y_T} \sigma_T y b dy + M = 2 \int_{y_T}^{y_{\max}} \sigma_T y b dy.$$

Относительное удлинение

$$e = \frac{y}{\rho}.$$

В упругой зоне имеем

$$\sigma = E \frac{y}{\rho},$$

а на границе зон

$$y_T = \frac{\sigma_T}{E} \rho.$$

Таким образом,

$$\frac{M}{Ea^3} = \frac{a}{\rho} \cdot \frac{2}{a^4} \int_0^{\frac{\sigma_T \rho}{E}} by^2 dy + \frac{2}{a^3} \frac{\sigma_T}{E} \int_{\frac{\sigma_T \rho}{E}}^{y_{\max}} by dy.$$

Для каждого из сечений после интегрирования получаем

$$\text{I. } \frac{M}{Ea^3} = \frac{1}{4} \frac{\sigma_T}{E} - \frac{1}{3} \frac{\sigma_T^3}{E^3} \frac{\rho^2}{a^2};$$

$$\text{II. } \frac{M}{Ea^3} = \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{\sigma_T}{E} - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sigma_T^3}{E^3} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{\sigma_T^4}{E^4} \frac{\rho^3}{a^3};$$

$$\text{III. } \frac{M}{Ea^3} = \frac{1}{6\pi} \frac{a}{\rho} \arcsin \alpha + \frac{1}{6} \frac{\sigma_T}{E} (3\pi)^{\frac{3}{4}} (5 - 2\alpha^2) \sqrt{1 - \alpha^2} \left(\alpha = \frac{\sigma_T \rho}{E a} \sqrt[4]{3\pi} \right).$$

Кривые $\frac{M}{Ea^3} = f\left(\frac{a}{\rho}\right)$ показаны на рис. 2.38.

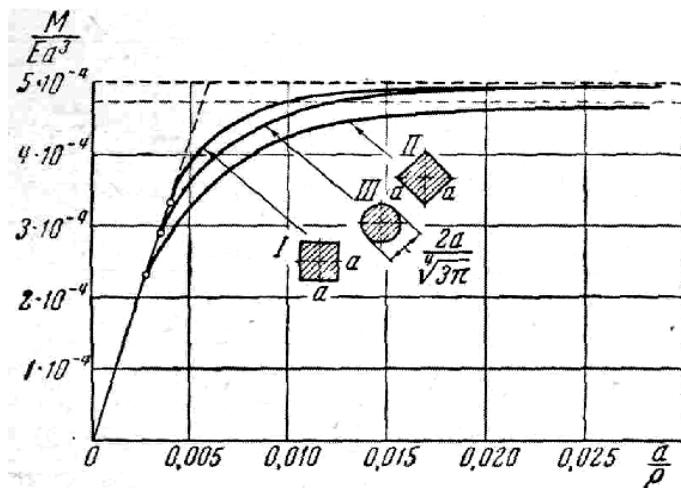


Рис. 2.38. Схема к задаче 2.3

В каждом случае момент $M = f\left(\frac{a}{\rho}\right)$ при $\frac{a}{\rho} \rightarrow \infty$ имеет предельное значение (так называемый момент пластического шарнира). Им определяется предельная нагрузка для балки.

Соответственно каждому из сечений при $\frac{\sigma_{\tau}}{E} = 0,002$ получаем:

$$\text{I. } \frac{M_{\text{пр}}}{Ea^3} = 0,0005;$$

$$\text{II. } \frac{M_{\text{пр}}}{Ea^3} = 0,000471;$$

$$\text{III. } \frac{M_{\text{пр}}}{Ea^3} = 0,000497.$$

Если бы сечения не были симметричными относительно горизонтальной оси, то решение значительно усложнялось. В этом случае было бы необходимо предварительно определить положение нейтральной оси из условия

$$\int_F \sigma dF = 0.$$

Задача 2.4

Цилиндр с внутренним диаметром d_1 и внешним d_2 нагружен давлением, равномерно распределенным:

- а) по торцам;
- б) внутренней и внешней поверхностям;
- в) всей поверхности (рис. 2.39).

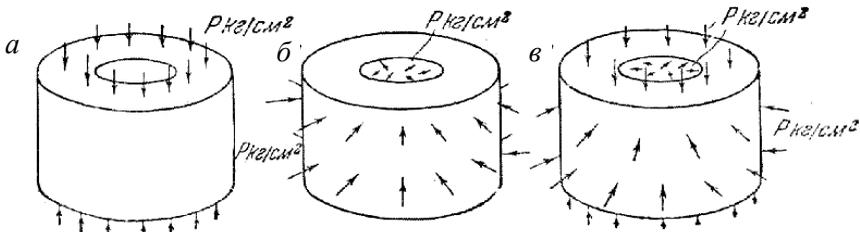


Рис. 2.39. Схема к задаче 2.4

Определить изменение внутреннего диаметра и изменение объема внутренней полости в каждом из указанных случаев нагружения.

Решение

а). В случае, представленном на рис. 2.39, а, диаметр увеличивается на $\frac{\mu}{E} p d_1$, объем уменьшается на $\rho \frac{1-2\mu}{E} V$.

б). В случае, представленном на рис. 2.39, б, диаметр уменьшается на $\frac{1-\mu}{E} p d_1$, объем уменьшается на $2\rho \frac{1-2\mu}{E} V$.

в). В случае, представленном на рис. 2.39, в, диаметр уменьшается на $\frac{1-2\mu}{E} p d_1$, объем уменьшается на $3\rho \frac{1-2\mu}{E} V$, где V – начальный объем внутренней полости.

Задача 2.5

Пластинка закреплена и нагружена так, как показано на рис. 2.40. Определить критическую силу для пластинки в двух случаях:

1) сила направлена вниз; 2) сила направлена вверх.

Жесткость на изгиб средней части равна сумме жесткостей крайних частей.

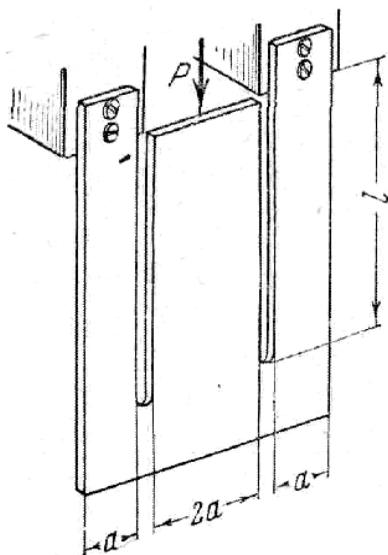


Рис. 2.40. Схема к задаче 2.5

Решение

Рассмотрим контур изогнутой пластинки (рис. 2.41).

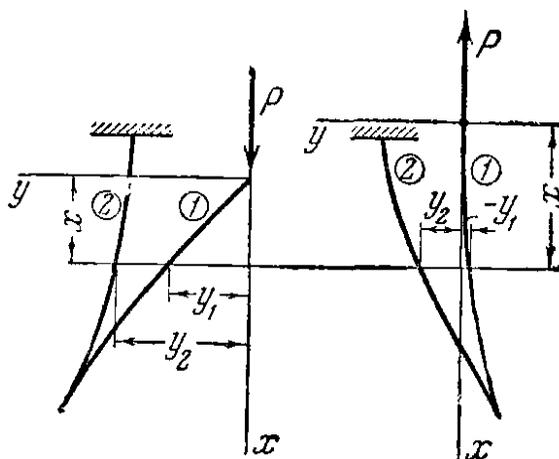


Рис. 2.41. Схема к задаче 2.5

Дифференциальные уравнения упругой линии для первой и второй частей пластинки при силе P , направленной вниз:

$$EJy_1'' + Py_1 = 0;$$

$$EJy_2'' - Py_2 = 0.$$

Обозначая $\frac{P}{EJ} = \alpha^2$, получаем

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = 0;$$

$$y_2'' - \alpha^2 y_2 = 0,$$

откуда

$$y_1 = A_1 \sin \alpha x + B_1 \cos \alpha x,$$

$$y_2 = A_2 \operatorname{sh} \alpha x + B_2 \operatorname{ch} \alpha x.$$

Постоянные определяются из следующих условий:

1) при $x=0$ $y_1 = 0$,

2) при $x=l$ $y_1 = y_2$,

3) при $x=l$ $y_1 = y_2'$,

4) при $x=0$ $y_2' = 0$.

Из первого и последнего условий получаем

$$B_1 = A_2 = 0,$$

из второго и третьего –

$$A_1 \sin \alpha l = B_2 \operatorname{ch} \alpha l,$$

$$A_1 \cos \alpha l = B_2 \operatorname{ch} \alpha l,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha l \operatorname{th} \alpha l = 1$$

или

$$\alpha l = 0,938; \quad P_{\text{кр}} = \frac{0,88EJ}{l^2}.$$

Если сила P направлена вверх, знак при α_2 меняется на обратный и трансцендентное уравнение принимает вид

$$\operatorname{tg}(i\alpha l) \operatorname{th}(i\alpha l) = 1.$$

Но $\operatorname{tg} i\alpha l = -\frac{\operatorname{th} \alpha l}{i}$, а $\operatorname{th} i\alpha l = i \operatorname{tg} \alpha l$.

Поэтому имеем

$$\operatorname{tg} \alpha l \operatorname{th} \alpha l = -1,$$

откуда

$$\alpha l = 2,35, \quad P_{\text{кр}} = \frac{5,53EJ}{l^2}.$$

Задача 2.6

В трубку вставлен с зазором длинный болт (рис. 2.42). Определить силу затяжки болта P , при которой система потеряет устойчивость. Размеры трубки таковы, что ее следует рассматривать как длинный стержень, а не как оболочку. Жесткость трубки на изгиб $E_1 J_1$. Жесткость болта $E_2 J_2$.

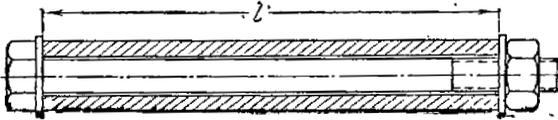


Рис. 2.42. Схема к задаче 2.6

Решение

Снимем мысленно гайку с болта и рассмотрим силы, действующие на болт и трубку. На рис. 2.43 показаны оси болта и трубки после потери устойчивости, а также внутренние силовые факторы P , Q и M_0 . Очевидно, для трубки

$$M_{\text{изг}} = Py_1 - Qx - M_0,$$

для болта

$$M_{\text{изг}} = -Py_2 + Qx + M_0.$$

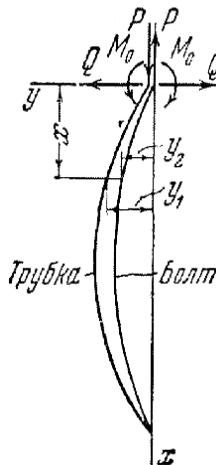


Рис. 2.43. Схема к задаче 2.6

Дифференциальные уравнения упругих линий трубки и болта будут следующими:

$$E_1 J_1 y_1'' + P y_1 = Qx + M_0;$$

$$E_2 J_2 y_2'' - P y_2 = -Qx - M_0.$$

Обозначим

$$\frac{P}{E_1 J_1} = \alpha_1^2;$$

$$\frac{P}{E_2 J_2} = \alpha_2^2$$

и тогда имеем

$$y_1'' + \alpha_1^2 y_1 = \frac{Q}{P} \alpha_1^2 x + \frac{M_0}{P} \alpha_1^2;$$

$$y_2'' - \alpha_2^2 y_2 = -\frac{Q}{P} \alpha_2^2 x - \frac{M_0}{P} \alpha_2^2.$$

Решая эти уравнения, получим

$$y_1 = A_1 \sin \alpha_1 x + B_1 \cos \alpha_1 x + \frac{Q}{P} x + \frac{M_0}{P};$$

$$y_2 = A_2 \sin \alpha_2 x + B_2 \operatorname{ch} \alpha_2 x + \frac{Q}{P} x + \frac{M_0}{P}.$$

Последние два слагаемых обоих выражений представляют собой частные решения уравнений. Постоянные величины A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , Q и M_0 определяются из следующих условий:

при $x=0$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_1' = y_2';$$

при $x = l$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y'_1 = y'_2.$$

Из первых трех условий находим

$$B_1 = B_2 = -\frac{M_0}{P};$$

$$A_2 = A_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Последние три условия дают

$$A_1 \sin \alpha_1 l + B_1 \cos \alpha_1 l + \frac{Q}{P} l + \frac{M_0}{P} = 0;$$

$$A_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l + \frac{Q}{P} l + \frac{M_0}{P} (1 - \operatorname{ch} \alpha_2 l) = 0,$$

$$A_1 \alpha_1 (\cos \alpha_1 l - \operatorname{ch} \alpha_2 l) + \frac{M}{P} (\alpha_1 \sin \alpha_1 l + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l) = 0.$$

Приравнявая нулю определитель системы, получаем

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha_1 l & l & 1 - \cos \alpha_1 l \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \operatorname{sh} \alpha_2 l & l & 1 - \operatorname{ch} \alpha_2 l \\ \alpha_1 (\cos \alpha_1 l - \operatorname{ch} \alpha_2 l) & 0 & \alpha_1 \sin \alpha_1 l + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$lz_1 z_2 (\operatorname{ch} z_2 \cos x_1 - 1) = (z_2^2 - z_1^2) \operatorname{sh} x_2 \sin z_1,$$

где $z_1 = \alpha_1 l$, $z_2 = \alpha_2 l$.

При заданном отношении жесткостей z_2 можно выразить через z_1 , а затем, решая трансцендентное уравнение, определить критическую силу затяжки P .

В частности, при $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$ имеем

$$z_1 = z_2 = z,$$

и тогда $\operatorname{ch} z \cos z = 1$, откуда

$$z = 4,73,$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{z^2 EJ}{l^2} = \frac{22,4 EJ}{l^2}.$$

Задача 2.7

По мере натяжения струны частота ее колебаний увеличивается (тон повышается).

Исследовать, как будет изменяться частота колебаний резиновой нити по мере ее натяжения в двух случаях закрепления, показанных на рис. 2.44. Диаграмма растяжения нити задана (рис. 2.45).

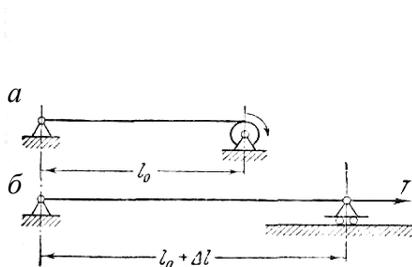


Рис. 2.44. К задаче 2.7

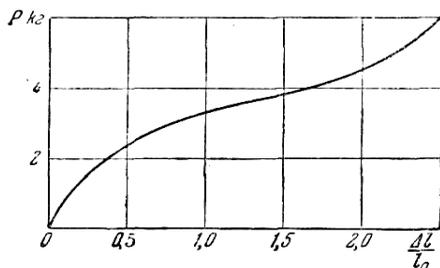


Рис. 2.45. К задаче 2.7

Решение

Частота колебаний струны в основном тоне определяется, как известно, формулой

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{ml}},$$

где T – сила натяжения струны;

m – ее масса;

l – длина.

В первом случае закрепления по мере увеличения силы натяжения изменяется масса колеблющейся струны при неизменной длине l_0 , причем эта масса, очевидно, будет

$$m_0 \frac{l_0}{l_0 + \Delta l},$$

где m_0 – масса ненатянутой струны, имеющей длину l_0 .

Таким образом, получаем

$$v_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{m_0 l_0^2} (l_0 + \Delta l)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)}{\sqrt{m_0 l_0}}};$$

$$2v_1 \sqrt{m_0 l_0} = \sqrt{T \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)}.$$

Во втором случае находим

$$v_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{m_0 (l_0 + \Delta l)}};$$

$$2v_2 \sqrt{m_0 l_0} = \sqrt{\frac{T}{1 + \frac{\Delta l}{l_0}}}.$$

В обоих случаях $\frac{\Delta l}{l_0}$ задается диаграммой на рис. 2.45 как функция силы натяжения, поэтому легко определяется зависимость ν_1 и ν_2 от T . На рис. 2.46 показана искомая зависимость.

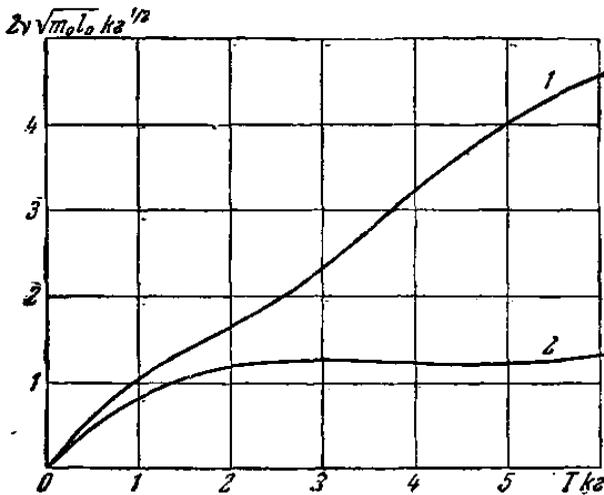


Рис. 2.46. К задаче 2.7

Таким образом, видно, что при первом способе натягивания частота колебаний нити с натяжением возрастает. Во втором случае при возрастающем усилии частота может уменьшиться. На опыте это явление хорошо наблюдается. Нужно только учесть, что не всякая резина обладает диаграммой растяжения того типа, что и рассмотренная.

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНО-УСИЛИТЕЛЬНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ

3.1. Гидравлические и пневматические приводы

Основным элементом исполнительных органов, работа которых основана на использовании находящейся под давлением жидкости или сжатого воздуха, является силовой гидро(пневмо)цилиндр, представленный на рис. 3.1. В цилиндре под действием напора жидкости (воздуха), поступающей от источника, в котором она содержится под давлением, происходит перемещение поршня.

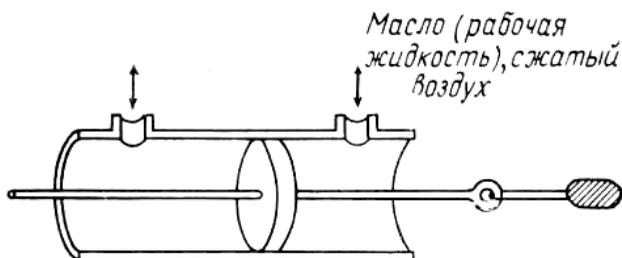


Рис. 3.1. Силовой гидро(пневмо)цилиндр

Чтобы обеспечить непрерывное управление (с обратной связью) силового цилиндра, используют исполнительный клапан. На рис. 3.2 показана система управления, составленная из исполнительного (управляющего) клапана и силового гидро(пневмо)цилиндра.

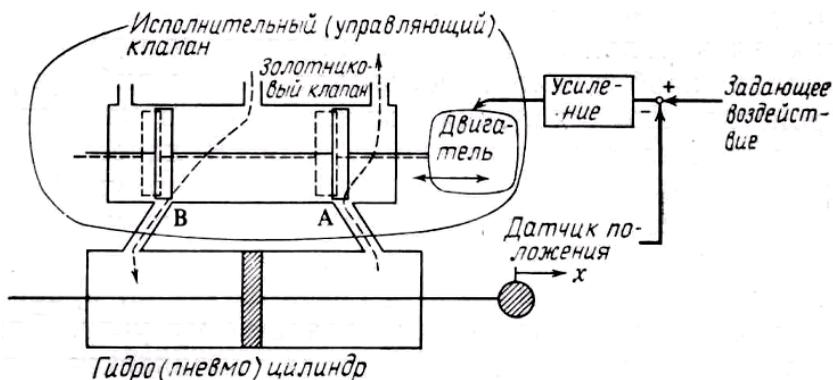


Рис. 3.2. Исполнительный (управляющий) клапан и гидро(пневмо)цилиндр

Пневмоприводы имеют низкие жесткостные характеристики и ограниченные возможности для программирования по сравнению с гидроприводами.

Гидроприводы по сравнению с электроприводами обеспечивают более высокие значения рабочих параметров МС, однако имеют большие эксплуатационные расходы. Начиная с 1980 г. использование пневмо- и гидроприводов в мехатронных системах снижается, а электроприводов – растет (рис. 3.3).

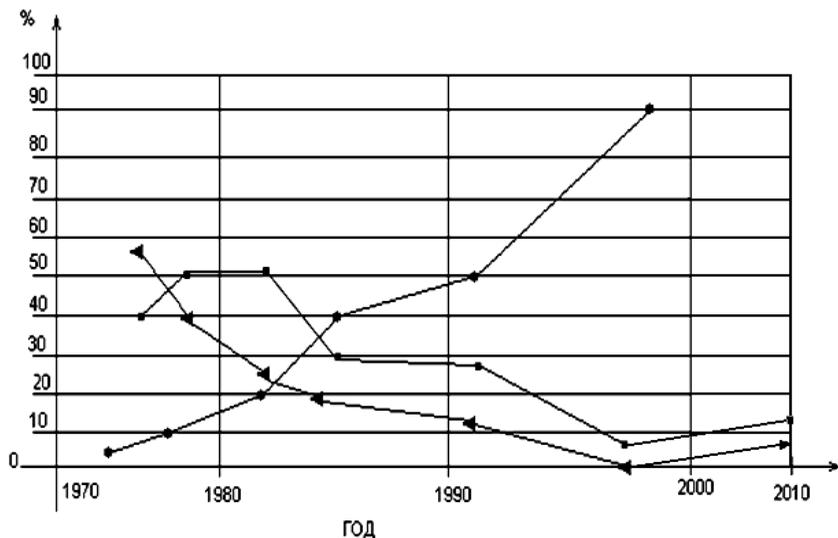


Рис. 3.3. Использование механических и электрических приводов в мехатронных системах:

Δ – гидро-; □ – пневмо-; * – электроприводы

Тем не менее пневмо- и гидроприводы достаточно широко используются в различных мехатронных системах, что обусловлено появлением жидкостей с новыми реологическими свойствами и их применением.

При непрерывном управлении с обратной связью датчик преобразует координаты положения силового цилиндра в электрические сигналы, которые сравниваются с заданной величиной (уставкой). Разность между величиной электрического сигнала и заданной (требуемой) величиной определяет силу тока, который поступает на вход моментного двигателя, определяющего положение поршня (золотни-

ка) управляющего клапана. При сдвинутом влево золотнике клапана жидкость поступает в силовой цилиндр через канал B и перемещает поршень вправо. Если золотник управляющего клапана находится справа, жидкость протекает по каналу A и перемещает поршень силового цилиндра влево. Несмотря на свои небольшие размеры, гидравлические и пневматические приводы позволяют развивать большие усилия. Однако они требуют создания специальных источников, из которых должна поступать жидкость высокого давления или сжатый газ. При использовании гидропривода могут возникнуть проблемы, связанные с защитой окружающего пространства от загрязнений, что обусловлено возможной утечкой гидравлической жидкости. При использовании пневмопривода такой проблемы не возникает. Однако из-за сжимаемости воздуха возникают трудности, связанные с управлением точностью функционирования.

3.1.1. Гидроцилиндры. Модуль объемной упругости реальной жидкости

Типовые схемы исполнения гидроцилиндров с двусторонним штоком показаны на рис. 3.4, *а*, с односторонним – на рис. 3.4, *б*, дифференциального действия, при котором в схеме управления используется разность площадей F поршневой и F_1 штоковой полостей гидроцилиндра, – на рис. 3.4, *в* и плунжерного – на рис. 3.4, *г*.

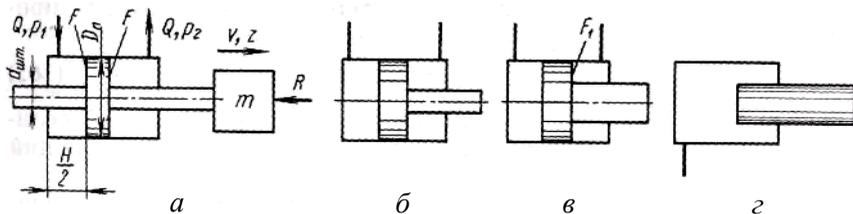


Рис. 3.4. Типовые схемы исполнения гидроцилиндров

При использовании гидроцилиндров в качестве силовых двигателей в следящем приводе представляют интерес такие параметры, как сила, развиваемая цилиндром, скорость перемещения, количество перетекания масла (утечек) между полостями цилиндра, потери холостого хода, жесткость, передаточная функция, энергетические показатели.

Сила, развиваемая на поршне цилиндра, при подводе жидкости под давлением в одну из полостей цилиндра с двусторонним штоком и соединении второй со сливом (с нулевым избыточным давлением) определяется уравнением

$$R = Fp_{\Pi} = \frac{\pi(D_{\Pi}^2 - d_{\text{шт}}^2)}{4} p_{\Pi},$$

где p_{Π} – подводимое в полость цилиндра давление, кгс/см²;

D_{Π} – диаметр поршня, см;

$d_{\text{шт}}$ – диаметр штока, см.

При подводе в каждую из полостей цилиндра давлений, разность которых составляет

$$p = p_1 - p_2,$$

сила на поршне цилиндра определится из выражения

$$R = Fp = \frac{\pi(D_{\Pi}^2 - d_{\text{шт}}^2)}{4} p.$$

Коэффициент усиления по нагрузке определится по формуле

$$K_R = \frac{R}{p} = F.$$

Аналогичные зависимости могут быть получены для цилиндров других типов.

Скорость перемещения поршня цилиндра в квазистатике (при установившемся движении) определяется по уравнению

$$u = \frac{Q}{F},$$

где Q – расход масла, подводимого в полость цилиндра или отводимого из нее, см³/с;

F – рабочая площадь поршня в полости цилиндра, к которой подводится масло, см².

Коэффициент усиления по скорости

$$K_u = \frac{u}{Q} = \frac{1}{F}.$$

Утечки жидкости (перетекание) между полостями цилиндра зависят от величины зазоров между поршнем и стенками цилиндра, в замках поршневых колец, от неплотности прилегания поршневых колец к гильзе цилиндра, а также от разности давлений в полостях цилиндра.

Обычно полагают, что утечки жидкости $Q_{\text{ут}}$ между полостями цилиндра имеют ламинарный характер течения и поэтому пропорциональны перепаду давления, т. е.

$$Q_{\text{ут}} = C_{\text{ут}} p,$$

где $C_{\text{ут}}$ – коэффициент утечек, $\text{см}^5/\text{с} \cdot \text{кг}$, определяющий величину утечки в $\text{см}^3/\text{с}$ при перепаде давления $1 \text{ кгс}/\text{см}^2$, зависящий от размеров зазоров в элементах уплотнения поршня.

Потери давления на перемещение поршня цилиндра на холостом ходу (без нагрузки) должны быть как можно меньше для обеспечения высокой чувствительности следящего привода и плавности движения.

Эти потери определяются силами трения в уплотнениях поршня и штока и зависят от качества сборки цилиндра. Для цилиндров меньших размеров требуется больший перепад давления для преодоления силы холостого хода.

В среднем можно положить, что для цилиндров с диаметром поршня 90–180 мм давление масла, необходимое для перемещения поршня со штоком в обоих направлениях, не должно превышать $2 \text{ кгс}/\text{см}^2$.

Жесткость гидроцилиндра как силового двигателя, воспринимающего внешние нагрузки при рациональной конструкции, определяется главным образом сжимаемостью жидкости, наполняющей его полости.

Количественное содержание свободного воздуха в жидкости работающего гидропривода зависит от герметичности гидросистемы, возможности возникновения в магистралях гидросистемы давления ниже атмосферного, от конструкции маслобака, обеспечивающего

разделение воздуха и масла до поступления последнего в полость всасывания насоса, от количества воздуха, растворенного в масле, часть которого выделяется при дросселировании в рабочих щелях золотника и предохранительного клапана и других факторов.

Расчет изотермического модуля объемной упругости двухфазной (масло с нерастворенным воздухом) жидкости можно произвести следующим образом.

Объем $V_{см}$ двухфазной жидкости состоит из объема масла $V_{ж}$ и объема нерастворенного воздуха $V_{в}$. Таким образом

$$V_{см} = V_{ж} + V_{в}. \quad (3.1)$$

Принимая

$$V_{в} = \frac{V_{в0} p_0}{p},$$

где $V_{в0}$ – объем воздуха в смеси при давлении p_0 , и дифференцируя уравнение (3.1) по p , получим

$$\frac{dV_{см}}{dp} = \frac{dV_{ж}}{dp} - \frac{V_{в0} p_0}{p^2}. \quad (3.2)$$

Модуль упругости масла, выраженный в дифференциальной форме, определяется соотношением

$$E_{ж} = -\frac{dp}{dV_{ж}}$$

или

$$\frac{dV_{ж}}{dp} = -\frac{V_{ж}}{E_{ж}}.$$

Аналогично в приращениях для жидкостно-воздушной смеси в дифференциальной форме

$$\frac{dV_{см}}{dp} = -\frac{V_{см}}{E_{см}},$$

где $E_{см}$ – модуль упругости жидкостно-воздушной смеси.

Подставляя значения $\frac{dV_{\text{ж}}}{dp}$ и $\frac{dV_{\text{см}}}{dp}$ в уравнение (3.2) и решая его относительно $E_{\text{см}}$, находим

$$E_{\text{см}} = E_{\text{ж}} \frac{V_{\text{см}}}{V_{\text{ж}} + E_{\text{ж}} \frac{V_{\text{в0}} p_0}{p^2}}. \quad (3.3)$$

Подстановка в последнее выражение значений $V_{\text{см}}$, $V_{\text{в}}$ с учетом, что

$$V_{\text{ж}} = V_{\text{ж0}} \left(1 - \frac{p - p_0}{E_{\text{ж}}} \right)$$

($V_{\text{ж0}}$ – объем масла при давлении p_0), окончательно получаем

$$E_{\text{см}} = E_{\text{ж}} \frac{\frac{V_{\text{ж0}}}{V_{\text{в0}} \left(1 - \frac{p - p_0}{E_{\text{ж}}} \right)} + \frac{p_0}{p}}{\frac{V_{\text{ж0}}}{V_{\text{в0}} \left(1 - \frac{p - p_0}{E_{\text{ж0}}} \right)} + E_{\text{ж}} \frac{p_0}{p^2}}. \quad (3.4)$$

Учитывая, что изменение объема жидкости при изменении давления невелико, можем положить $V_{\text{ж}} \approx V_{\text{ж0}}$. Тогда выражение (3.4) приобретает вид

$$E_{\text{см}} = E_{\text{ж}} \frac{\frac{V_{\text{ж0}}}{V_{\text{в0}}} + \frac{p_0}{p}}{\frac{V_{\text{ж0}}}{V_{\text{в0}}} + E_{\text{ж}} \frac{p_0}{p^2}}. \quad (3.5)$$

Полагая, что изменение от давления объемов $V_{\text{ж}}$ и $V_{\text{в}}$ мало изменяет общий объем смеси $V_{\text{см}}$, в выражении (3.3) можно предположить, что

$$V_{\text{см}} \approx V_{\text{см0}} = V_{\text{ж0}} + V_{\text{в0}} \quad \text{и} \quad V_{\text{ж}} \approx V_{\text{ж0}}.$$

Тогда упрощенное значение для модуля упругости жидкостно-воздушной смеси определится следующим образом:

$$E_{\text{см}} = E_{\text{ж}} \frac{\frac{V_{\text{ж0}}}{V_{\text{в0}}} + 1}{\frac{V_{\text{ж0}}}{V_{\text{в0}}} + E_{\text{ж}} \frac{p_0}{p^2}}.$$

Сопоставление расчетных данных, полученных по формуле (3.3), с экспериментальными, показывает хорошее их совпадение.

3.1.2. Статическая и динамическая жесткости цилиндра

Статическая жесткость $C_{\text{ст}}$ цилиндра с рабочей площадью поршня F и с объемом масла в сжимаемой полости W может быть определена как отношение статической нагрузки R к вызываемому ею смещению Δt поршня цилиндра:

$$C_{\text{ст}} = \frac{R}{\Delta t},$$

где $R = pF$ (p – давление масла, необходимое для уравновешивания этой нагрузки);

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{F} \quad \left(\Delta W = \frac{W}{E_{\text{ц}}} = - \text{уменьшение объема масла в полости ци-} \right.$$

линдра).

Таким образом, статическая жесткость цилиндра

$$C_{\text{ст}} = \frac{F^2 E_{\text{ц}}}{W},$$

где $E_{\text{ц}}$ – приведенный модуль упругости стенок цилиндра и находящегося в нем масла, кгс/см².

Динамическая жесткость $C_{\text{ц}}$ цилиндра. При динамическом нагружении в режиме автоколебаний поршня цилиндра, находящегося посередине длины H хода и имеющего равные рабочие площади F при реверсировании, когда давления p_1 и p_2 по обе стороны от поршня при

управлении от дроссельного четырехщелевого золотника колеблются относительно среднего значения $\left(p_1 = \frac{P_n}{2} \pm \frac{P}{2} \text{ и } p_2 = \frac{P_n}{2} \mp \frac{P}{2} \right)$, жесткость цилиндра имеет вид

$$C_{\text{ц}} = \frac{R}{\Delta l} = \frac{4FE_{\text{ц}}}{H},$$

т. е. равна четырехкратной жесткости такого же цилиндра в конце хода, включенного в общую схему подачи и нагруженного статической силой.

Приведенные выше данные о влиянии свободного воздуха на модуль объемной упругости масла следует учитывать в конкретных условиях анализа жесткости цилиндра.

Пример

Смещение Δl поршня цилиндра с длиной полости $L = 50$ см, нагружаемого силой R , эквивалентной давлению $p = 32$ кгс/см², составит: при учете постоянного значения модуля упругости $E_{\text{ц}} = 1,6 \cdot 10^4$ кгс/см²

$$\Delta l = \frac{\Delta W}{F} = \frac{Lp}{E_{\text{см}}} = \frac{50 \cdot 30}{1,6 \cdot 10^4} \approx 0,1 \text{ см} = 1 \text{ мм},$$

а при учете переменного значения, согласно формуле (3.5), и содержанию свободного воздуха при атмосферном давлении ($p_0 = 1$ кгс/см²) в количестве 1 %

$$\Delta l = \int_{p_0}^p \frac{L}{E_{\text{см}}} dp = \int_{p_0}^p \frac{L}{E_{\text{ж}} \left(\frac{V_{\text{ж}0}}{V_{\text{в}0}} + 1 \right)} \left(\frac{V_{\text{ж}0}}{V_{\text{в}0}} + E_{\text{ж}} \frac{p_0}{p^2} \right) dp,$$

что после интегрирования и подстановки числовых значений дает $\Delta l \approx 0,6$ см = 6 мм. Полученные результаты отличаются в шесть раз.

3.1.3. Передаточная функция гидроцилиндра

Передаточная функция представляет собой отношение

$$W_{\text{ц}}(p) = \frac{z(p)}{Q_{\text{ц}}(p)},$$

где $z(p)$ и $Q(p)$ – изображения по Лапласу соответственно перемещения штока цилиндра и расхода жидкости на входе в цилиндр.

Для составления передаточной функции необходимо вывести уравнение движения цилиндра. В качестве расчетной примем схему, показанную на рис. 3.4, а. Нагрузкой служат приведенные к оси штока цилиндра масса m рабочего органа, поршня, штока, жидкости и силы T сухого и вязкого трения с коэффициентом f .

Тогда уравнение сил

$$pF = m\ddot{z} + T \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|} + f\dot{z}$$

и уравнение расхода жидкости имеет вид

$$Q_{\text{ц}} = Q_{\text{п}} + Q_{\text{ут}} + Q_{\text{дц}}, \quad (3.6)$$

где $Q_{\text{п}} = F\dot{z}$ – расход, идущий на перемещение цилиндра;

$Q_{\text{ут}} = k_{\text{ут}}p$ – расход, идущий на утечки в уплотнениях поршня;

$Q_{\text{дц}} = \frac{d(\Delta W_{\text{ц}})}{dt}$ – расход, идущий на компенсацию деформации

$\Delta W_{\text{ц}}$ жидкости и стенок цилиндра при среднем положении поршня цилиндра.

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_{\text{ц}} &= \frac{W_{\text{ц}} \Delta p}{E_{\text{ц}}}; \\ W_{\text{ц}} &= \frac{HF}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Суммарный модуль упругости $E_{ц}$ масла и стенок цилиндра полагаем постоянным.

Тогда

$$Q_{ц} = \frac{HF}{2E_{ц}} \frac{d(\Delta p)}{dt} = \frac{K_{ц}}{2} \frac{dp}{dt},$$

при изменении давлений p_1 и p_2 коэффициент упругости стенок цилиндра и находящегося в нем масла

$$K_{ц} = \frac{HF}{E_{ц} 2}.$$

С учетом входящих величин уравнение (3.6) расходов запишется в виде

$$Q_{ц} = F\dot{z} + K_{yt}p + \frac{K_{ц}}{2} p.$$

3.2. Электроприводы постоянного и переменного тока

К преимуществам электропривода (ЭП) можно отнести то, что для него источником энергии служит сеть постоянного или переменного тока, отсутствует необходимость в использовании трубопроводов, а также проблемы загрязнения окружающей среды. Основным элементом электропривода обычно является электродвигатель постоянного тока, на выходе которого крутящий момент пропорционален силе тока на входе. В таком электродвигателе подача тока к ротору осуществляется через щетки, которые можно легко повредить, и поэтому они требуют должного внимания при обслуживании.

По типу применяемых в ЭП двигателей различают ЭП постоянного и переменного тока, шаговые и на основе бесконтактных двигателей постоянного тока.

ЭП переменного тока создаются на базе асинхронных двигателей с частотным управлением.

ЭП на базе шаговых двигателей обладают тем достоинством, что они не имеют дорогостоящих датчиков обратной связи и позволяют получать приемлемые характеристики в разомкнутом контуре.

ЭП на базе бесконтактных двигателей постоянного тока целесообразно применять в сложных условиях окружающей среды и для достижения больших ресурсов привода.

Наиболее широкое распространение двигатели постоянного тока получили в силу того, что они обладают хорошими свойствами в отношении регулирования (управления), а также массы и габаритов. На выходе электродвигателя крутящий момент пропорционален силе на входе.

Конструктивно ЭП состоит из электродвигателя, механической передачи (редуктор), сенсоров в виде датчиков скорости и блока позиционирования, который может включать ограничители (скорости) и усилители (мощности).

Обычно ЭП с датчиком скорости (тахогенератор) и механическая часть (редуктор) с датчиком положения на выходном валу составляют электромеханический модуль (ЭММ) мехатронной системы.

Важное значение играет механическая передача, соединяющая двигатель с нагрузкой и определяющая рабочие характеристики и конструкцию ЭММ.

В качестве механических передач могут быть использованы: зубчатые, червячные, зубчато-реечные, шарико-винтовые, волновые редукторы и др.

Редуктор ЭММ должен обладать высоким КПД, *реверсом* (обратимость хода), достаточной *жесткостью конструкции*, малой *инерционностью вращающихся частей*, малой величиной *люфта* (зазора) выходного вала.

Наличие люфта в редукторе является причиной возникновения автоколебаний, роста повреждений, разрушения, а также снижения точности позиционирования.

В процессе проектирования зубчатой передачи необходимо выбрать такую конструкцию и материал редуктора, при которых люфты имеют наименьшее значение.

Жесткость (упругость) механической передачи в следящем приводе также оказывает большое влияние на его работоспособность. Она также может явиться причиной возникновения в редукторе незатухающих колебаний и приводить к его разрушению.

Уравнение, описывающее зависимость угла поворота Q выходного вала от нагрузки, имеет вид

$$J_H \frac{d^2 Q}{dt^2} + D_H \frac{dQ}{dt} + C_p Q = M_H(t) + C_p \frac{Q_{дв}}{u_p}, \quad (3.7)$$

где $Q_{дв}$ – угол поворота вала электродвигателя;

$C_p \left(\frac{Q_{дв}}{u_p} - Q \right)$ – упругий момент;

C_p – крутильная жесткость;

u_p – передаточное отношение редуктора;

D_H – постоянная скоростного трения нагрузки.

Из (3.7) видно, что чем больше C_p , тем выше возможность появления незатухающих $D_H = 0$ (слабозатухающих $D_H \approx 0$) колебаний. Учет момента трения D_H редуктора особенно важен для следящих систем, работающих на малую статическую или чисто инерционную нагрузку, так как именно он существенно влияет на точность следящего привода в режиме малых скоростей.

Эквивалентный момент двигателя определяется по формуле

$$M_3 = \left[\left(\frac{M_H}{u_p \eta} + \frac{M_{тр}}{u_p} \right) + \left(\frac{J_H}{u_p^2 \eta} + J_{дв} + J_p \right)^2 \cdot \frac{\xi_{\max} u_p^2}{2} \right]^2. \quad (3.8)$$

Здесь M_H – момент нагрузки;

$M_{тр}$ – момент сухого трения на валу двигателя;

u_p – передаточное число редуктора;

η – КПД редуктора;

J_H – момент инерции нагрузки;

$J_{дв}$ – момент инерции якоря двигателя;

J_p – момент инерции редуктора;

ξ_{\max} – максимальное ускорение на валу нагрузки.

Из формулы (3.8) видно, что при минимальной нагрузке существенное влияние на работу следящей системы оказывает момент сухого трения (момент трогания вала) механической передачи. Наряду с использованием в электроприводах механических передач (цилиндрических, конических, планетарных) широкое распространение

получают волновые зубчатые передачи (ВЗП), что объясняется их лучшими массогабаритными характеристиками и малой величиной люфта. Кинематика ВЗП исключает импульсные удары по поверхностям зубьев.

Электромеханические передачи широко используются в различных следящих системах, применяемых в мехатронных системах.

3.3. Математическая модель типового электрогидравлического преобразователя

Блок-схема электрогидравлического преобразователя (ЭГД) усилителя показана на рис. 3.5. Входом электромеханического преобразователя (ЭМП) является ток управления I , выходом – перемещение h заслонки. Для двухкаскадного гидроусилителя сопло-заслонка-золотник соответственно будут: входом – перемещение заслонки h и выходом – перемещение золотника x . Расход q и перепад давления p во внешней цепи золотника зависят от подсоединенной нагрузки и поэтому обычно относятся к параметрам привода. Между гидроусилителем и ЭМП существует обратная связь от действия на заслонку гидродинамических сил при истечении из сопел струй. Уравнение движения и структурная схема преобразователя-усилителя могут быть получены из совокупности уравнений входящих элементов.

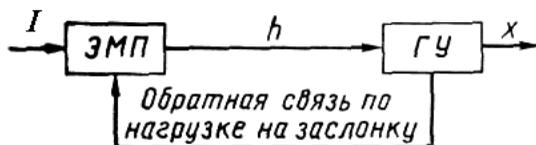


Рис. 3.5. Блок-схема электрогидравлического преобразователя-усилителя

Статическая характеристика. Составим статическую характеристику $x(I)$ при $Q_d = 0$ и допущениях о линейности зависимостей между основными параметрами преобразователя, что не вносит значительных погрешностей для рабочей зоны (пренебрежение трением золотника допустимо в связи с использованием при работе преобразователей осцилляции).

Условие равновесия сил на заслонке

$$F_d = F_n + F_p, \quad (3.9)$$

где $F = K_{FI}I$ – сила тяги ЭМП, приведенная к оси сопла;

K_{FI} – коэффициент усиления по силе тяги ЭМП;

$F_{\Pi} = C_{\text{эмп}}h$ – сила, развиваемая пружинным элементом заслонки и якоря, приведенная к оси сопел;

$C_{\text{эмп}}$ – коэффициент жесткости этого элемента;

$F_p = \frac{\pi d_c^2}{4} p_d = S_c p_d$ – сила воздействия двух струй на заслонку.

Взаимозависимость между параметрами h , p_d и x устанавливают регулировочная характеристика гидроусилителя сопло-заслонка и условие равновесия сил, действующих на золотник:

$$F_{pд} = F_{\text{пр}} + F_{\text{гд}}, \quad (3.10)$$

где $F_{pд}$ – сила от перепада давления p_d по торцам золотника с площадью $S_3 = \frac{\pi d_3^2}{4}$;

$$S_3 = \frac{\pi d_3^2}{4};$$

$F_{\text{пр}} = C_{\text{пр}}x$ – сила, развиваемая пружинами с жесткостью $C_{\text{пр}}$ по торцам золотника;

$F_{\text{гд}} = C_{\text{гд}}x$ – сила, развиваемая осевой гидродинамической силой, вызываемой реактивным действием потока жидкости, проходящим через рабочие щели золотника с жесткостью $C_{\text{гд}}$.

Таким образом, уравнение (3.10) примет вид

$$p_d S_3 = (C_{\text{пр}} + C_{\text{гд}})x. \quad (3.11)$$

По этому уравнению можно определить жесткость пружины $C_{\text{пр}}$, исходя из максимальных перепада давления $p_{d \text{ max}}$ и хода золотника x_{max} . Совместное решение уравнений (3.9) и (3.11) позволяет определить статическую характеристику преобразователя:

$$x = \frac{K_{FI} K_{ph} S_3}{(C_{\text{эмп}} + C_{c3})(C_{\text{пр}} + C_{\text{гд}})} I,$$

где

$$C_{c3} = \frac{\pi d_c^2}{4} \frac{p_d}{h} -$$

жесткость гидравлической пружины заслонки.

Введем обозначение

$$\frac{K_{FI}K_{ph}S_3}{(C_{\text{ЭМП}} + C_{\text{сз}})(C_{\text{пр}} + C_{\text{ГД}})} = K_{\text{ЭГП}}.$$

Тогда

$$x = K_{\text{ЭГП}} I,$$

где $K_{\text{ЭГП}}$ – статический коэффициент усиления электрогидравлического преобразователя-усилителя.

Динамические характеристики. Для анализа динамики ЭГД необходимо составить систему уравнений, описывающих движение входящих в его состав элементов: ЭМП, гидравлического усилителя сопло-заслонка и золотника. Вывод уравнений произведем с допущениями, оговоренными выше при выводе статической характеристики, пренебрегая в связи с относительной малостью массой золотника и утечками по золотнику. Тогда уравнение изменения силы F тяги ЭМП, приведенной к оси сопл от тока I в катушках ЭМП с учетом их индуктивности L_K , сопротивления R_K и внутреннего сопротивления управляющего усилителя R_y , составит

$$K_{FI}I = \frac{L_K}{R_K + R_y} \cdot \frac{dF}{dt} + F. \quad (3.12)$$

Уравнение сил, действующих на якорь ЭМП и заслонку, приведенных к оси заслонки:

$$F = F_{\text{п}} + F_{\text{р}} + F_{\text{ия}} + F_{\text{вт}}, \quad (3.13)$$

где $F_{\text{п}}$ и $F_{\text{р}}$ – соответственно силы, развиваемые пружинным элементом заделки заслонки и якоря, и сила воздействия двух струй, определяемые соотношением (3.9);

$$F_{\text{ия}} = m \frac{d^2h}{dt^2} \text{ – сила инерции массы якоря, заслонки и жидкости,}$$

приведенная к оси сопл;

$$F_{\text{вт}} = f \frac{dh}{dt} \text{ – сила вязкого демпфирования якоря и заслонки.}$$

С учетом значений входящих величин уравнение (3.13) приобретает вид

$$F = C_{\text{эмп}} h + S_c p_d + m \frac{d^2 h}{dt^2} + f \frac{dh}{dt}. \quad (3.14)$$

Уравнение расходов в диагонали моста усилителя сопло-заслонка

$$Q_d = Q_x + Q_{\text{дм}}, \quad (3.15)$$

где Q_d – расход, поступающий в диагональ моста, для обобщенной статической характеристики гидроусилителя сопло-заслонка;

$$Q_x = S \frac{dx}{dt} \text{ – расход, идущий на перемещение золотника;}$$

$$Q_{\text{дм}} = \frac{V}{2E} \cdot \frac{dp_d}{dt} \text{ – расход, идущий на компенсацию деформации}$$

объема жидкости в камере за торцом золотника и магистрали, идущей от балансного дросселя к сопло-заслонке при приведенном значении объемного модуля упругости E .

С учетом значений входящих величин уравнение (3.15) приобретает вид

$$K_{Qh} h - K_{Qp} p_d = S_3 \frac{dx}{dt} + \frac{V}{2E} \frac{dp_d}{dt}. \quad (3.16)$$

Уравнение сил, действующих на золотник, определяется выражением (3.11):

$$P_d S_3 = (C_{\text{пр}} + C_{\text{гд}}) x. \quad (3.17)$$

Преобразуем полученную систему уравнений (3.12), (3.14), (3.16) и (3.17) по Лапласу при нулевых начальных условиях.

Изложим подробнее порядок преобразования уравнения (3.12),

в котором $\frac{L_K}{R_K + R_y} = T_3$ и K_{FI} – известные постоянные;

$I(t)$ – известная заданная функция на входе преобразователя (например, гармоническая или типа единичного скачка);

$F(t)$ – неизвестная функция времени на выходе преобразователя;

$I(0) = I(0) = I(0) = 0$ – начальные значения входной величины.

Применим прямое преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (3.12). Обозначим изображение функции $I(t)$ как $I(p)$, т. е. примем $L[I(t)] = I(p)$. Тогда

$$L[K_{FI}L(t)] = K_{FI}L[I(t)] = K_{FI}I(p).$$

Обозначим изображение функции

$$L[F(t)] = F(p),$$

тогда

$$L\left[T_3 \frac{dF}{dt} + F\right] = T_3 L\left[\frac{dF}{dt}\right] + L[F],$$

где

$$L\left[\frac{dF}{dt}\right] = pF(p) - F(0) = pF(p).$$

Подставляя полученные изображения в исходное уравнение, получаем

$$K_{FI}I(p) = T_3 pF(p) + F(p).$$

Последнее уравнение позволяет получить передаточную функцию W_1 по току и силе тяги ЭМП:

$$W_1(p) = \frac{F(p)}{I(p)} = \frac{K_{FI}}{T_3 p + 1}.$$

Подобно изложенному преобразуем по Лапласу остальные уравнения электрогидравлического усилителя, в результате чего получаем следующую систему уравнений в изображениях:

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \frac{K_{FI}}{T_3 p + 1} I(p); \\ \frac{1}{C_{\text{ЭМП}}} F(p) - \frac{2}{C_{\text{ЭМП}}} p_d(p) &= (T_{\text{ЭМП}}^2 p^2 + 2\xi_{\text{ЭМП}} T_{\text{ЭМП}} s + 1) h(p); \\ K_{ph} h(p) &= (T_{\text{гп}} p + 1) p_d(p); \\ K_{xp} p_d(p) &= x(p), \end{aligned} \right\}, \quad (3.18)$$

где $T_{\text{ЭМП}} \sqrt{\frac{m}{C_{\text{ЭМП}}}}$ – электромеханическая постоянная ЭМП;

$$\xi_{\text{ЭМП}} = \frac{f}{2\sqrt{mC_{\text{ЭМП}}}};$$

$$K_{\text{хр}} = \frac{S_3}{C_{\text{пр}} + C_{\text{гд}}}.$$

Структурная схема электрогидравлического преобразователя, соответствующая системе уравнений (3.18), показана на рис. 3.6.

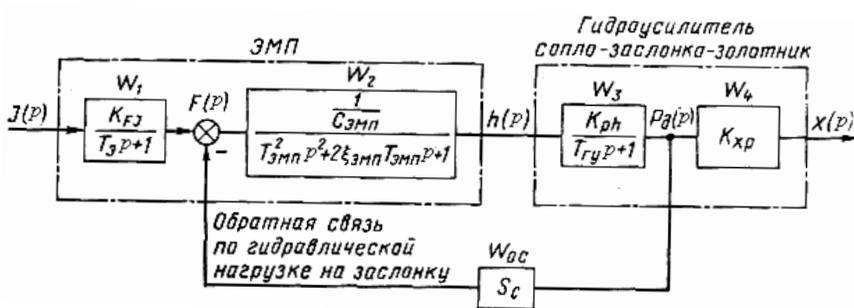


Рис. 3.6. Структурная схема электрогидравлического преобразователя-усилителя

Передаточная функция составит

$$W_{\text{эгп}} = \frac{x(p)}{I(p)} = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4}{1 + W_2 W_3 + W_{\text{ос}}}, \quad (3.19)$$

где W_1 – W_4 передаточные функции (см. рис. 3.6).

Подставив значение передаточных функций W_1 – W_4 в выражение (3.19), получим

$$W_{\text{эгп}} = \frac{K_{\text{эгп}}}{(T_3 p + 1)(A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + 1)},$$

где $K_{\text{эгп}}$ – коэффициент усиления преобразователя:

$$K_{\text{ЭГП}} = \frac{K_{\text{ЭГ}} K_{\text{рп}} K_{\text{хр}}}{C_{\text{ЭМП}} \left(1 + \frac{K_{\text{рп}} S_c}{C_{\text{ЭМП}}} \right)};$$

$$A_3 = \frac{T_{\text{ЭМП}}^2 T_{\text{ГУ}}}{1 + \frac{K_{\text{рп}} S_c}{C_{\text{ЭМП}}}};$$

$$A_2 = \frac{T_{\text{ЭМП}}^2 2T_{\text{ЭМП}} \xi_{\text{ЭМП}} T_{\text{ГУ}}}{1 + \frac{K_{\text{рп}} S_c}{C_{\text{ЭМП}}}};$$

$$A_1 = \frac{T 2_{\text{ЭМП}} \xi_{\text{ЭМП}} T_{\text{ГУ}}}{1 + \frac{K_{\text{рп}} S_c}{C_{\text{ЭМП}}}}.$$
(3.20)

Полученное значение передаточной функции электрогидравлического привода позволяет произвести анализ устойчивости и построить переходный процесс работы привода. Основным фактором, влияющим на устойчивость усилителя, является отношение сопрягаемых частот ЭМП и гидроусилителя, определяемых постоянными времени $T_{\text{ЭМП}}$ и $T_{\text{ГУ}}$; электрическая постоянная T_3 влияет на частотную характеристику преобразователя и переходный процесс. В современных электрогидравлических усилителях постоянные $T_3 \ll T_{\text{ГУ}}$ и $T_{\text{ЭМП}} < T_{\text{ГУ}}$. Выполнению первого неравенства способствует переход к применению операционных усилителей с внутренними обратными связями, которые обеспечивают высокие внутренние сопротивления усилителя на входе в ЭМП. В этих условиях передаточная функция электрогидравлического преобразователя обычно описывается зависимостью, близкой к апериодическому звену, и имеет вид

$$W_{\text{ЭГП}} = \frac{K_{\text{ЭГП}}}{T_{\text{ЭГП}} s + 1}.$$

Из выражения для A_1 в уравнении (3.20)

$$T_{\text{эгп}} = T_{\text{гу}} \frac{1}{1 + \frac{K_{ph} S_c}{C_{\text{эмп}}}}$$

Для электрогидравлических преобразователей, построенных по схемам, отличающимся от рассмотренной, уравнения движения выводятся по приведенной методике. При этом общие закономерности и выводы будут аналогичны изложенным выше.

3.4. Анализ и синтез электрических цепей в мехатронных системах

Современные мехатронные системы содержат большое количество электрических цепей, поэтому вопросы их анализа и синтеза имеют важное значение при проектировании и создании мехатронных систем.

Различают цепи постоянного и переменного (гармонического) тока.

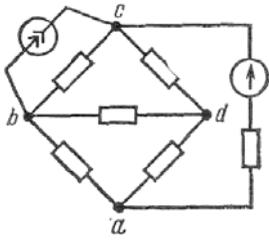
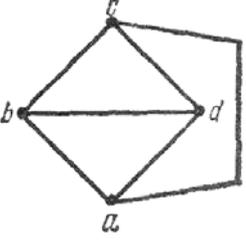
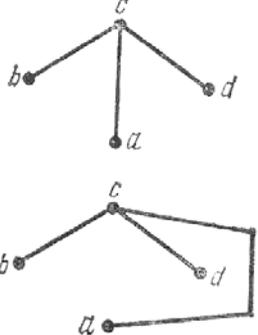
Электрической цепью называют совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении.

Каждой реальной электрической цепи соответствует эквивалентная схема.

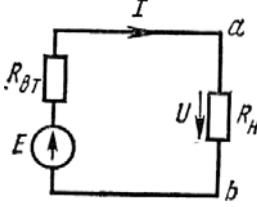
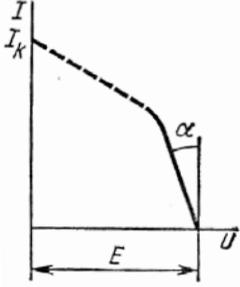
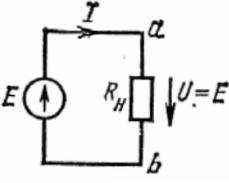
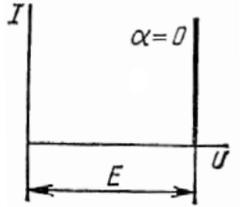
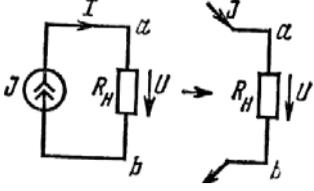
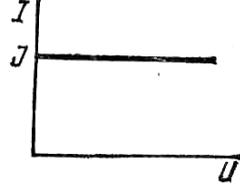
Схемой электрической цепи является графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее их соединение. В схему включают идеализированные элементы, которые являются математической моделью, описывающей физические явления в реальном элементе.

Геометрическая конфигурация схемы характеризуется понятиями *ветвь, узел, контур, граф, дерево графа* и т. п.

Характеристики понятий геометрической конфигурации схемы

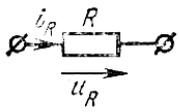
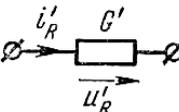
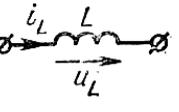
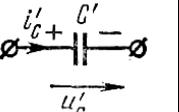
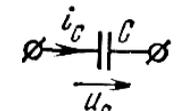
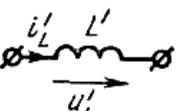
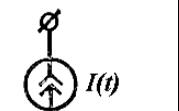
<p>Определение топологических элементов электрической схемы</p>	<p>Пример схемы</p>
<p><i>Ветвь</i> – участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же ток</p> <p><i>Узел</i> – место соединения ветвей электрической цепи</p>	 <p>ab, bc, bd, ad, cd – ветви a, b, c, d – узлы</p>
<p><i>Контур</i> – любой замкнутый путь, образованный ветвями и узлами</p> <p><i>Граф</i> – изображение схемы электрической цепи, в котором ветви схемы представлены отрезками – ветвями (дугами) графа, а узлы – точками (узлами графа)</p>	<p>$adb, abcd, dbc$</p> 
<p><i>Дерево</i> – любая совокупность ветвей графа, соединяющих все его узлы без образования контуров</p>	

Эквивалентные схемы источников энергии в электрических цепях

Источник энергии	Эквивалентная схема	Внешняя вольт-амперная характеристика
<p><i>Источник ЭДС E.</i> Характеризуется ЭДС E и внутренним электрическим сопротивлением $R_{вТ}$</p>	 $U = E - IR_{вТ}$	 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_U}{m_I} R_{вТ}$
<p><i>Идеальный источник ЭДС E.</i> Имеет внутреннее сопротивление, равное нулю: $R_{вТ} = 0$</p>	 <p style="text-align: center;">Напряжение не зависит от тока</p>	 <p style="text-align: center;">$\alpha = 0$</p>
<p><i>Идеальный источник тока I.</i> Имеет внутреннее сопротивление, равное бесконечности: $R_{вТ} = \infty$</p>	 <p style="text-align: center;">Ток не зависит от напряжения</p>	

Дуальные элементы и схемы

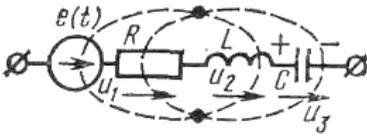
Два элемента электрической цепи называют дуальными, если уравнение зависимости напряжения от тока $u(i)$ одного элемента по форме аналогично уравнению зависимости $i(u)$ тока от напряжения другого элемента. При этом устанавливается соответствие между сопротивлением резистора R и проводимостью резистора G , индуктивностью катушки L и емкостью конденсатора C , источниками ЭДС E и тока I .

Дуальные элементы		Дуальные элементы	
 <p>$u_R = Ri_R$</p>	 <p>$i'_R = G'u'_R$</p>	 <p>$u_L = L \frac{di_L}{dt}$</p>	 <p>$i'_C = C' \frac{du'_C}{dt}$</p>
 <p>$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$</p>	 <p>$i'_L = \frac{1}{L'} \int_{-\infty}^t u'_L dt$</p>	 <p>$e(t)$</p>	 <p>$I(t)$</p>

Две планарные электрические схемы называют дуальными, если уравнения, составленные по методу *контурных токов* для одной схемы, аналогичны уравнениям, составленным по методу *узловых потенциалов* другой схемы. В этом случае контурная матрица одной схемы совпадает с узловой матрицей другой схемы (и наоборот).

Для дуальных схем уравнения, полученные по первому (второму) закону Кирхгофа для одной схемы, совпадают с уравнениями, составленными по второму (первому) закону Кирхгофа для другой схемы.

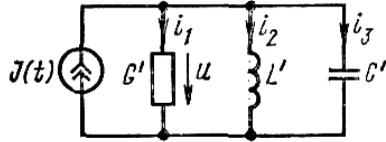
Дуальные схемы



$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt;$$

$$e(t) = \sum u_k$$

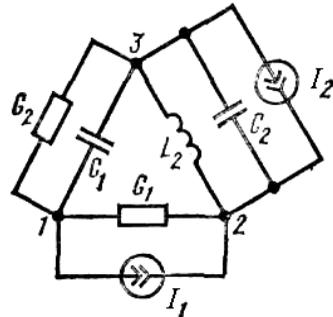
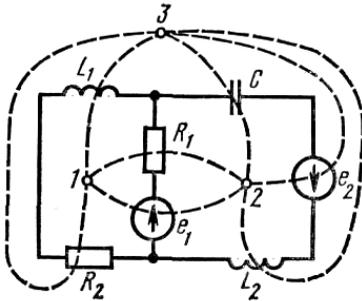
(закон Кирхгофа)



$$J(t) = G'u + C' \frac{du}{dt} + \frac{1}{L'} \int_{-\infty}^t u dt;$$

$$i(t) = \sum i_k$$

(первый закон Кирхгофа)



Алгоритм графического построения дуальной планарной схемы

1. Задаются положительными направлениями контурных токов независимых контуров.

2. Внутри каждого независимого контура, а также вне схемы наносят точки, соответствующие узлам дуальной схемы.

3. Полученные точки соединяют линиями (ветви дуальной схемы). Каждая линия пересекает один элемент смежной ветви.

4. Пересеченные элементы заменяют дуальными элементами, включенными между узлами дуальной схемы.

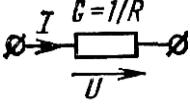
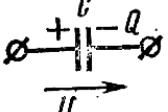
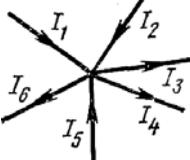
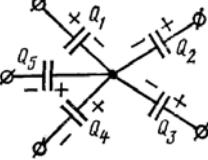
Если направление ЭДС совпадает с положительным направлением контурного тока, то дуальный источник тока направлен к узлу, находящемуся в этом контуре, и численно равен величине ЭДС.

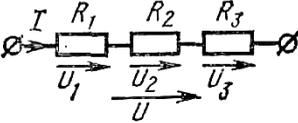
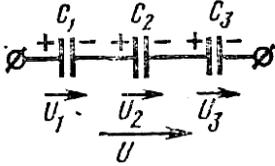
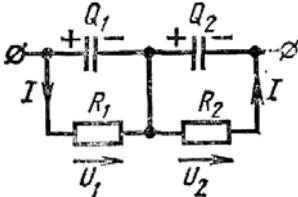
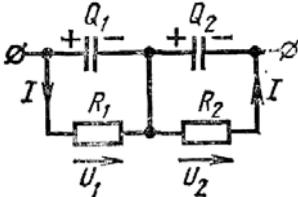
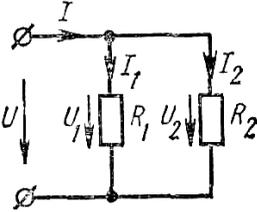
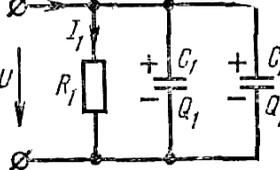
Дуальные элементы численно равны между собой (пропорциональны).

3.4.1. Электрические схемы постоянного тока

Рассмотрим схемы, составленные из источников постоянных ЭДС, резисторов и идеальных конденсаторов. В идеальных конденсаторах сопротивление между обкладками практически равно бесконечности, и поэтому в установившемся режиме эти элементы препятствуют прохождению постоянного тока.

В таком режиме при постоянных ЭДС напряжения и заряды на конденсаторах распределяются в зависимости от величин их емкостей. Формально можно провести аналогию между величинами и законами, характеризующими схемы постоянного тока и электростатические схемы.

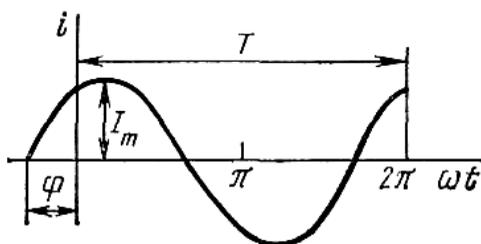
Схема постоянного тока, параметры и законы	Электростатическая схема, параметры и законы	Схема постоянного тока, параметры и законы	Электростатическая схема, параметры и законы
 $u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$	 $i_{L'} = \frac{1}{L'} \int_{-\infty}^t u_{L'} dt$	 <p>Первый закон Кирхгофа</p> $\Sigma I_k = 0$	 <p>Закон сохранения заряда</p> $\Sigma Q_k = 0$
<p>Закон Ома</p> $I = GU$	<p>Закон Ома</p> $I = CU$	<p>Второй закон Кирхгофа</p> $\Sigma E = \Sigma RI$	<p>Второй закон Кирхгофа</p> $\Sigma E = \Sigma \frac{1}{C} Q$

Вид соединения (преобразования)	Схема постоянного тока	Электростатическая схема
Последовательное соединение	 $R_{\text{ЭК}} = R_1 + R_2 + R_3$ $I = I_1 = I_2 = I_3$ $U = U_1 + U_2 + U_3$	 $1/C_{\text{ЭК}} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3$ $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$ $U = U_1 + U_2 + U_3$
		
	$U_1 = R_1 I; \quad U_2 = R_2 I$	$Q_1 \neq Q_2$
Параллельное соединение	 $R_{\text{ЭК}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ $I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	 $C_{\text{ЭК}} = C_1 + C_2; \quad Q_1 = C_1 U$ $Q_2 = C_2 U$

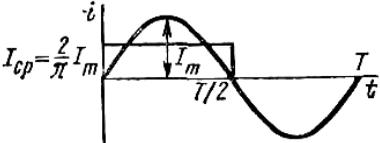
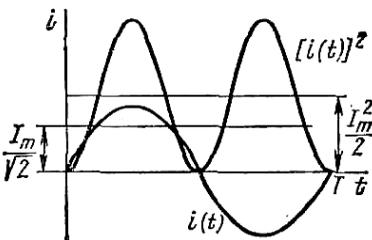
3.4.2. Электрические схемы переменного (гармонического) тока

Гармоническим током называют переменный периодический ток, изменяющийся во времени по синусоидальному (косинусоидальному закону). Мгновенное значение гармонического тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ).$$



Основные величины	Обозначение и размерность
1	2
Амплитуда гармонического тока (напряжения, ЭДС) – максимальное значение функции	I_m, U_m, E_m $[I_m] = A, [U_m] = B, [E_m] = B$
Период – время, за которое совершается одно полное колебание	$T, [T] = c^{-1}$
Частота – число периодов в секунду	$f = 1/T, [f] = \text{Гц}$
Угловая частота – скорость изменения фазы тока (ЭДС напряжения)	$\omega = 2\pi f, [\omega] = c^{-1}$. При $f = 50 \text{ Гц}$ $\omega = 314 \text{ c}^{-1}$
Фаза – аргумент синусоидального (косинусоидального) тока, отсчитываемый от точки перехода тока через нуль (максимум) к положительному значению	$\omega t + \varphi, [\omega t + \varphi] = \text{рад}$
Начальная фаза – значение гармонически изменяющейся величины в начальный момент времени $t = 0$	$\varphi, [\varphi] = \text{рад}$

1	2
<p>Среднее значение гармонически изменяющегося тока (напряжения, ЭДС) – значение, соответствующее положительной полуволне</p>	$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m$  $I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m$ $[I_{cp}] = A$ $U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m; E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m$ $[U_{cp}] = B, [E_{cp}] = B$
<p>Действующее значение гармонически изменяющегося тока (напряжения, ЭДС) – среднеквадратическое значение электрического тока за период</p>	$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$ $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ $U = U_m / \sqrt{2}$ $E = E_m / \sqrt{2}$ 
<p>Коэффициент амплитуды – отношение максимального (амплитудного) значения тока (напряжения, ЭДС) к действующему значению</p>	$K_a = I_m / I = \sqrt{2}$
<p>Коэффициент формы – отношение действующего значения тока (напряжения, ЭДС) к среднему значению</p>	$K_{\phi} = I / I_{cp} = \pi / 2\sqrt{2} = 1,11$

3.4.3. Комплексный метод расчета линейных электрических схем

Расчет линейных электрических схем гармонического тока в установившемся режиме аналогичен расчету электрических схем постоянного тока. В обоих случаях составляют систему алгебраических уравнений по методам, основанным на законах Ома и Кирхгофа.

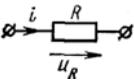
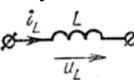
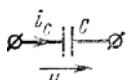
Для схем постоянного тока уравнения составляют по действительным значениям напряжений, токов, сопротивлений и проводимостей. В схемах же гармонического тока для алгебраизации интегрально-дифференциальных уравнений применяют комплексные (символические) величины: \dot{U} , \dot{I} , $Z = R + jX$, $Y = G - jB$. При этом все параметры записывают в виде комплексных чисел в алгебраической, показательной или тригонометрической форме. При переходе от интегрально-дифференциальных уравнений дифференцирование мгновенного значения заменяют умножением $j\omega$ на соответствующую комплексную величину, а интегрирование – делением комплексной величины на $j\omega$:

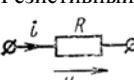
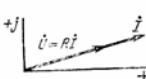
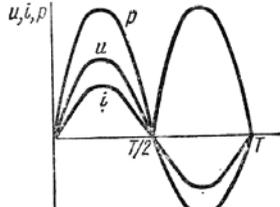
$$\frac{di}{dt} \rightarrow j\omega \dot{i}, \int i dt \rightarrow \frac{\dot{I}}{j\omega},$$

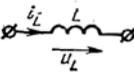
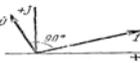
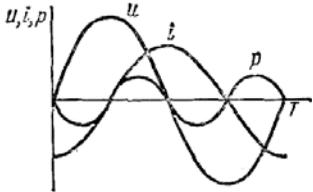
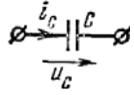
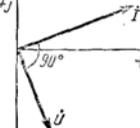
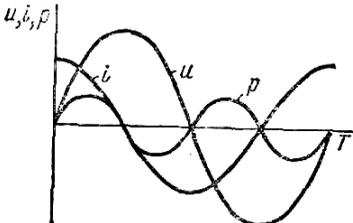
если $i = \text{Im } \dot{I} = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ или $i = \text{Re } \dot{I} = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Полученную систему алгебраических уравнений решают относительно неизвестного комплексного параметра, например, тока $\dot{I} = I e^{j\varphi}$. При необходимости совершают переход от комплексной величины к ее мгновенному значению.

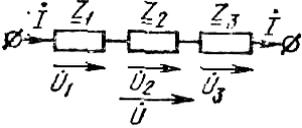
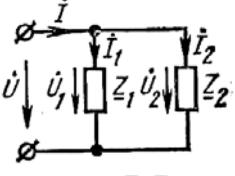
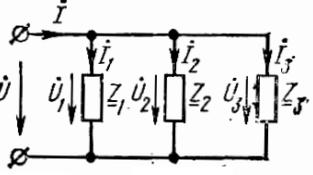
Пассивные элементы в электрических схемах гармонического тока

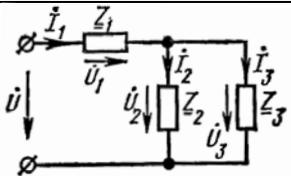
Пассивный элемент	Сопротивление току			Проводимость тока		
	постоянному I	гармоническому $i = I_m \sin \omega t$	k -й гармоники негармонического $ik = I_m k \times \sin k\omega t$	постоянного I	гармонического $i = I_m \sin \omega t$	k -й гармоники негармонического $ik = I_m k \times \sin k\omega t$
Резистивный 	R	$Z = R;$ $\varphi = 0$	$Zk = R$	$G = 1/R$	$G \approx 1/R$	$G = 1/R$
Индуктивный 	0	$Z = j\omega L =$ $= jXL = j90^\circ;$ $= XL e^{j90^\circ};$ $\varphi = 90^\circ$	$Z = jk\omega L =$ $= jkXL = j90^\circ;$ $= kXL e^{j90^\circ};$ $\varphi k = 90^\circ$	∞	$Y = 1/Z =$ $= 1/\omega L =$ $= 1/jXL =$ $= -jBL$	$Yk = 1/Zk =$ $= 1/jk\omega L =$ $= -jBLk$
Емкостный 	∞	$Z = 1/j\omega C =$ $= -j/\omega C =$ $= -jXC =$ $= X_{Ce} - j90^\circ;$ $\varphi = -90^\circ$	$Zk =$ $= 1/jk\omega C =$ $= -j/k\omega C =$ $= -j \frac{X_C}{k} =$ $= \frac{X_{Ce}}{k} - j90^\circ;$ $\varphi k = -90^\circ$	0	$Y = 1/Z =$ $= j\omega C = jBC$	$Yk = 1/Zk =$ $= jk\omega C =$ $= jkXC =$ $= -jBCk$

Пассивный элемент	Ток, напряжение, мощность			Векторная диаграмма	Мощность
	при постоянном токе	мгновенное значение	комплексное значение		
1	2	3	4	5	6
Резистивный 	$UR = RI$	$uR = Ri;$ $p = UI(1 - \cos 2\omega t)$	$\dot{U}_R = R\dot{I}$ $\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m$ $\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^*$ $\tilde{S}' = UI$		$P = I^2 R = UI$ $Q = 0$
					

<p>1</p> <p>Индуктивный</p> 	<p>2</p> $U_L = 0$	<p>3</p> $u_L = L \frac{di}{dt}$ $p = -UI \times \sin 2\omega t$	<p>4</p> $\dot{U}_L = j\omega LI = jX_L I$ $\dot{U}_{mL} = jX_L \dot{I}_m$ $\tilde{S} = \dot{U} I^* = jX_L I^2$	<p>5</p> 	<p>6</p> $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = 0$ $Q_L = X_L I^2 = U_L I$
					
<p>Емкостный</p> 	<p>U_C</p>	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$ $p = UI \sin 2\omega t$	$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} I = -jX_C I$ $\dot{U}_{Cm} = -jX_C \dot{I}_m$ $\tilde{S} = \dot{U} I^* = -jX_C I^2$		$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = 0$ $Q_C = X_C I^2 = U_C I$
					

Соединения и преобразования пассивных элементов в электрических цепях

Вид соединения (преобразования)	Схема
1	2
Последовательное соединение	 $\underline{Z}_{\text{эк}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3; \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3$
Параллельные соединения двух сопротивлений	 $\underline{Z}_{\text{эк}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{Y}_{\text{эк}} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ $\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2; \dot{i}_1 = \dot{i} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2};$ $\dot{U} = \dot{U}_1 = \dot{U}_2; \dot{i}_2 = \dot{i} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$
Параллельное соединение трех сопротивлений	 $\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3; \dot{U} = \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_3$ $\dot{i}_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_1; \dot{i}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_2; \dot{i}_3 = \dot{U}_3 / \underline{Z}_3$ $1/\underline{Y}_{\text{вх}} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ $\underline{Y}_{\text{вх}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$ $\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}$

1	2
Смешанное соединение сопротивлений	 $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \dot{i}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_{\text{вх}}$ $\dot{i}_2 = \dot{i}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \dot{i}_3 = \dot{i}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$ $\dot{U}_{23} = \dot{U}_2 = \dot{U}_3; \quad \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \dot{U}_3$

3.5. Примеры решения задач

Задача 3.1

Принципиальное устройство гидравлического двигателя поступательного движения показано на рис. 3.7, где 1 – золотник; 2 – рабочий цилиндр; 3 – поршень. Гидросмесь под некоторым давлением поступает от насоса в полость I или II рабочего цилиндра и производит перемещение поршня. Управление движением поршня осуществляется путем перемещения поршня золотника, который перекрывает входные отверстия в полости цилиндра I или II.

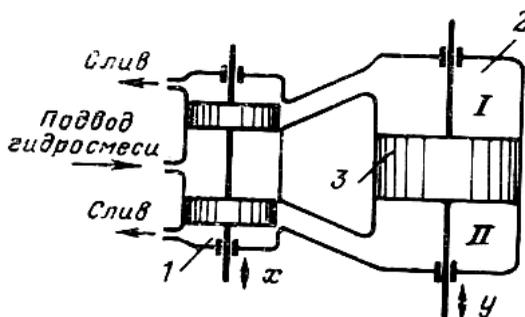


Рис. 3.7. К задаче 3.1

Составить дифференциальное уравнение гидравлического двигателя. При этом внешней нагрузкой и массой поршня пренебречь. Считать, что скорость v прохождения жидкости через отверстие постоянна.

Р е ш е н и е

Используя условия непрерывности струи жидкости, получим

$$F \frac{dy}{dt} = vbx,$$

где F – площадь поршня;

$F \frac{dy}{dt}$ – секундный объем масла, поступившего в полость цилиндра;

dy/dt – скорость перемещения поршня;

y – перемещение поршня;

v – скорость жидкости в сечении $b \times x$;

b – ширина отверстия;

x – перемещение золотника.

Так как $v = \text{const}$, то $dy/dt = kx$ или

$$y = k \int_0^t x dt, \text{ где } k = vb / F.$$

З а д а ч а 3.2

Найти передаточную функцию гидравлического исполнительного устройства (рис. 3.8, *a*), применявшегося совместно с центробежными измерителями угловой скорости (ЦИС) для регулирования скорости вращения тепловых двигателей. За входную величину принять перемещение x муфты ЦИС 3, а за выходную – перемещение y заслонки или регулирующего органа (РО) теплового двигателя (рис. 3.8, *б*).

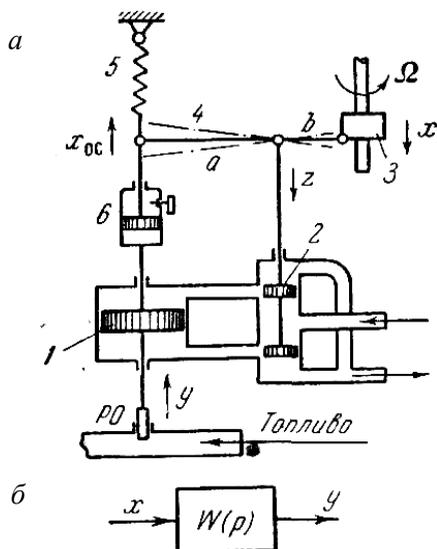


Рис. 3.8. Гидравлическое исполнительное устройство

Решение

Гидравлический двигатель (золотник 2 с силовым поршнем 1) вместе с изодромом (пружина 5 с демпфером 6) могут находиться в покое только при одном определенном положении рычага 4, когда пружина находится в ненапряженном состоянии и золотник 2 – в среднем положении. При этом муфта 3 ЦИС занимает положение, соответствующее заданной угловой скорости Q . При отклонении величины Q от заданной муфта 3 сдвинется, сместит золотник 2 и вся система придет в движение до тех пор, пока скорость Q вновь не станет заданной.

1. *Уравнение гидравлического двигателя.* Усилия, развиваемые силовым поршнем, значительно превосходят силы сопротивления и инерционные силы, поэтому их влиянием можно пренебречь. Тогда, если не учитывать сжимаемость жидкости и считать, что площадь окна, открываемого золотником, пропорциональна его перемещению z , уравнение гидродвигателя будет

$$\frac{dy}{dt} = k_1 z \quad \text{или} \quad py = k_1 z, \quad (3.21)$$

где k_1 – коэффициент передачи.

2. Уравнение рычага, связанного с муфтой, изодромом и золотником. Перемещение муфты x указывает перемещение золотника z и силового поршня, который перемещает поршень демпфера x_{OC} в сторону, обратную перемещению муфты. Следовательно, имеем уравнение

$$z = k_2(x - k_3 x_{OC}), \quad (3.22)$$

где $k_2 = \frac{a}{a+b}$, $k_3 = \frac{b}{a}$ – коэффициенты передачи;

a, b – длины плеч рычага (см. рис. 3.8).

3. Уравнение цепи обратной связи. В цепь обратной связи входят демпфер 6, пружина 5 и рычаг 4. Составим уравнение равновесия сил:

$$c_1 \dot{x}_{OC} + c_2 x_{OC} = c_3 \dot{y}, \quad (3.23)$$

где $c_1 \dot{x}_{OC} = F_d$ – сила демпфера, пропорциональная скорости перемещения поршня демпфера \dot{x}_{OC} ;

$c_2 x_{OC} = F_p$ – сила пружины;

$c_3 \dot{y} = F_c$ – сила, развиваемая силовым поршнем;

c_1, c_2, c_3 – постоянные коэффициенты.

После преобразования уравнения (3.23) получим

$$(T_{OC} p + 1)x_{OC} = k_4 p y. \quad (3.24)$$

где $T_{OC} = \frac{c_1}{c_2}$ – постоянная времени цепи обратной связи;

$k_4 = \frac{c_3}{c_2}$ – коэффициент передачи.

Найдя x_{OC} из (3.22) и подставив в его выражение z из (3.21), получим

$$x_{OC} = \frac{k_2}{k_3} x - \frac{1}{k_1 k_3} p y. \quad (3.25)$$

Подставив (3.25) в (3.24), найдем дифференциальное уравнение гидравлического исполнительного устройства:

$$(Tp + 1)py(t) = k(T_{OC}p + 1)x(t),$$

где

$$T = \frac{T_{OC}}{1 + k_1k_3k_4};$$

$$k = \frac{k_1k_2}{1 + k_1k_3k_4},$$

откуда искомая передаточная функция

$$W(p) = \frac{k(T_{OC}p + 1)}{p(Tp + 1)}.$$

Задача 3.3

Найти передаточную функцию гидравлического демпфера (рис. 3.9), если пренебречь влиянием массы подвижных частей и принять за входную величину силу F , а за выходную – перемещение поршня x .

Решение

Приложенной силе F будет противостоять демпфирующая сила

$$F_d = c_1\dot{x},$$

где c_1 – коэффициент демпфирования, пропорциональный вязкости жидкости и площади поршня и обратно пропорциональный площади пропускного отверстия.

Тогда имеем

$$px = kF,$$

где $k = c_1^{-1}$

и

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{k}{p}.$$

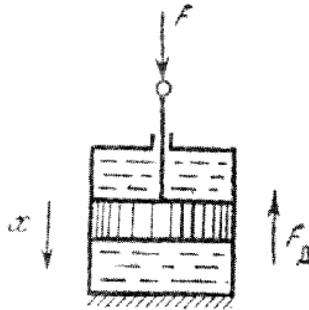


Рис. 3.9. Поршень с цилиндром (демпфер)

Задача 3.4

Составить в общем виде дифференциальное уравнение электромагнита с пружиной и демпфером (рис. 3.10, а), если за входную величину принять напряжение u , а за выходную – перемещение якоря x и считать известными приведенные к точке A силы пружины F_p , демпфера F_d , электромагнита F_3 и инерционную силу $F_{ин}$. Влиянием сил сухого трения пренебречь.

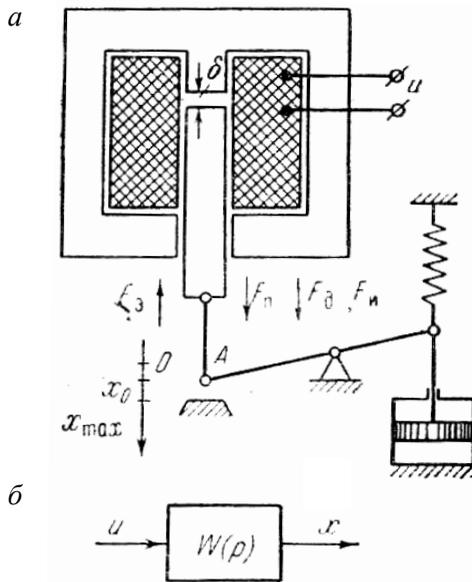


Рис. 3.10. Схема к задаче 3.4

Решение

Выберем начало отсчета, как показано на рис. 3.10, *a*. Составим уравнение равновесия сил, приведенных к точке *A*:

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2x = F_3(i, x) \quad (3.26)$$

и уравнение равновесия напряжений

$$u = iR + L(\delta, i) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(\delta, i)}{dt}, \quad (3.27)$$

где $m\ddot{x} = F_{\text{и}}$ – инерционная сила, пропорциональная ускорению \ddot{x} и приведенной массе подвижных частей m ;

$c_1\dot{x} = F_{\text{д}}$ – сила демпфера, пропорциональная скорости \dot{x} и коэффициенту демпфирования c_1 ;

$c_2x = F_{\text{п}}$ – сила пружины, пропорциональная перемещению x и коэффициенту упругости или жесткости пружины c_2 ;

$F_3 = F_3(i, x)$ – сила электромагнита, являющаяся функцией двух переменных;

u, i – напряжение и ток обмотки электромагнита;

R – активное сопротивление обмотки электромагнита;

$L = L(\delta, i)$ – индуктивность обмотки электромагнита, зависящая в общем виде от рабочего зазора δ тока и i (при насыщении магнитопровода).

Предположим, что всегда остается рабочий зазор $\delta_0 \neq 0$, причем такой, что справедливо соотношение

$$F_3(i, x) = c_3 i^2 x^{-2} \quad \text{при } \delta \geq \delta_0, \quad (3.28)$$

где c_3 – постоянный коэффициент.

Наличие воздушного зазора ($\delta > \delta_0$) и рабочих (ограниченных) значений тока i исключает насыщение магнитопровода. Поэтому индуктивность не зависит от тока, а только от перемещения $L = L(x)$. На основании гипотезы малых отклонений будем считать при $L = L_0 = \text{const}$, что в окрестности выбранного постоянного значения $x = x_0$. Тогда нелинейное уравнение (3.27) становится линейным:

$$u = iR + L_0 \frac{di}{dt}. \quad (3.29)$$

В уравнениях (3.26), (3.28) и (3.29) только член в правой части уравнения (3.26) или его выражение (3.28) являются нелинейными. Линеаризуем его, для чего запишем в виде

$$F_3(F_1, i, x) = F_3 - c_3 i^2 x^{-2} = 0.$$

Тогда линеаризованное уравнение в малых отклонениях относительно установившегося статического значения имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial F_3}\right)^0 \Delta F_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial i}\right) \Delta i + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Delta x = 0.$$

Задача 3.5

Найти передаточную функцию и дифференциальное уравнение пассивной электрической цепи (рис. 3.11) относительно напряжений u_1 и u_2 .

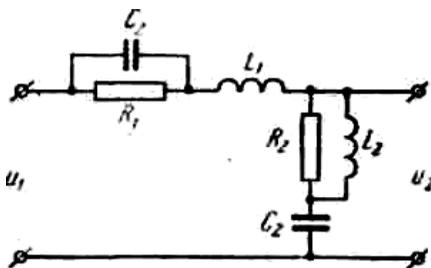


Рис. 3.11. Схема к задаче 3.5

Решение

Для нахождения передаточных функций электрических цепей, подобных изображенной на рис. 3.11, удобно пользоваться операторной формой записи сопротивлений; индуктивного – pL , емкостного – $\frac{1}{pC}$ и активного – R , где $p = \frac{d}{dt}$ – символ или оператор дифференцирования.

Преобразуем электрическую цепь, рис. 3.11, в эквивалентную ей (рис. 3.12), где

$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{pC_1} \cdot R_1}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} + pL_1 = \frac{R_1(T_{1c}^2 p^2 + T_{1L}p + 1)}{T_{1c}p + 1}; \quad (3.30)$$

$$Z_2(p) = \frac{R_2 L_2 p}{R_2 + L_2 p} + \frac{1}{C_2 p} = \frac{R_2(T_{2c}^2 p^2 + T_{2L}p + 1)}{p(T_{2c}p + 1)}; \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \sqrt{C_1 L_1}, \quad T_{1L} = \frac{L_1}{R_1}, \quad T_{1c} = R_1 C_1; \\ T_2 &= \sqrt{C_2 L_2}, \quad T_{2L} = \frac{L_2}{R_2}, \quad T_{2c} = R_2 C_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

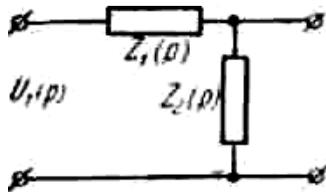


Рис. 3.12. Эквивалентная схема

Размерность всех постоянных времени (3.32) $[T] = \text{с}$.

Так как падение напряжения на последовательно соединенных сопротивлениях пропорционально величине сопротивлений, то передаточная функция эквивалентной цепочки (см. рис. 3.12) находится как отношение

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{z_{\text{ВЫХ}}(p)}{z_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \quad (3.33)$$

Подставив (3.30), (3.31) в (3.33), получим искомую передаточную функцию электрической цепи:

$$W(p) = \frac{R_2(b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3)}{R_2(b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3) + R_1(d_0 p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p)};$$

$$b_0 = T_2^2 T_{1C}, \quad b_1 = T_2^2 T_{2L} T_{1C}, \quad b_2 = T_{2L} + T_{1C}, \quad b_3 = 1;$$

$$d_0 = T_1^2 T_2^2, \quad d_1 = T_1^2 T_{2C} + T_2^2 T_{1L}, \quad d_2 = T_{1L} T_{2C} + T_2^2, \quad d_3 = T_{2C}.$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой электрической цепи относительно напряжений имеет вид

$$[R_2(b_0 p^3 + \dots + b_3) + R_1(d_0 p^4 + \dots + d_3 p)]u_2(t) = R_2(b_0 p^3 + \dots + b_3)u_1(t).$$

Задача 3.6

Составить дифференциальное уравнение и найти передаточную функцию трансформатора (рис. 3.13) относительно напряжений u_1 и u_2 . Электрические параметры трансформатора приведены на рис. 3.13.

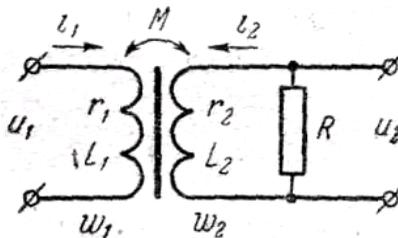


Рис. 3.13. Схема трансформатора к задаче 3.6

Решение

Дифференциальные уравнения равновесия напряжений цепей первичной и вторичной обмоток трансформатора имеют вид

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 p i_1 + M p i_2; \quad (3.34)$$

$$0 = r_2 i_2 + L_2 p i_2 + M p i_1 + u_2, \quad (3.35)$$

где u_1, u_2 – входное и выходное напряжения трансформатора;

r_1, L_1, i_1 – сопротивление, индуктивность и ток первичной обмотки;

r_2, L_2, i_2 – то же для вторичной обмотки;

M – коэффициент взаимоиндукции обмоток.

Найдя выражение для тока i_1 из уравнения (3.34) и подставив его в (3.35), получим дифференциальное уравнение трансформатора:

$$\left[\frac{L_1 L_2 - M^2}{r_1 (R + r_2)} p^2 + \frac{L_2 r_1 + L_1 (R + r_2)}{r_1 (R + r_2)} p + 1 \right] u_2(t) = -\frac{MR}{r_1 (R + r_2)} p u_1(t)$$

или

$$\left[(T_1 T_2 - T_3^2) p^2 + (T_1 + T_2) p + 1 \right] u_2(t) = k \tau_1 p u_1(t), \quad (3.36)$$

где $T_1 = \frac{L_1}{r_1}$;

$$T_2 = \frac{L_2}{R + r_2};$$

$$T_3 = \sqrt{\frac{M^2}{r_1 (R + r_2)}};$$

$$k = \frac{R}{R + r_2};$$

$$\tau_1 = \frac{M}{r_1};$$

R – сопротивление нагрузки.

Размерность коэффициента τ_1 и всех постоянных времени $[T_i] = \text{с}$ ($i = 1, 2, 3$). Так как коэффициент связи $M / L_1 L_2$ в трансформаторе со стальным сердечником близок к единице, то $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$, а $L_1 L_2 - M^2 \approx 0$ или $T_1 T_2 - T_3^2 \approx 0$.

Тогда уравнение трансформатора (3.36) упростится:

$$\left[(T_1 T_2) p + 1 \right] u_2(t) = -k \tau_1 p u_1(t). \quad (3.37)$$

Для режима холостого хода ($R = \infty, T_2 = 0$) имеем

$$(T_1 p + 1)u_2(t) = -\tau_1 p u_1(t).$$

На основании дифференциального уравнения (3.37) можно записать передаточную функцию трансформатора по напряжению:

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{k\tau_1 p}{(T_1 = T_2)p + 1},$$

из которой видно, что трансформатор является инерционным дифференцирующим звеном. Знак «минус» в дифференциальных уравнениях трансформатора означает, что фаза выходного напряжения изменяется на 180° относительно входного.

Задача 3.7

Составить дифференциальное уравнение движения и передаточную функцию двигателя с независимым возбуждением (рис. 3.14, а) относительно угловой скорости Ω при моменте нагрузки $M_H = 0$.

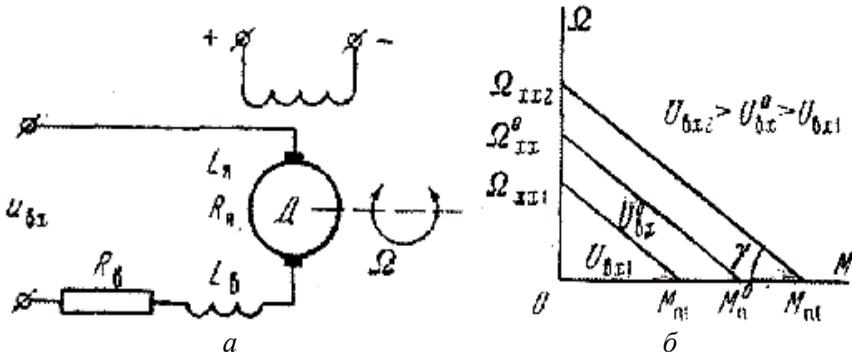


Рис. 3.14. Схема и механические характеристики к задаче 3.7

Решение

Дифференциальное уравнение движения

$$(T_я T_M p^2 + T_M p + 1)\Omega(t) = k u_{вх}(t), \quad p \leftrightarrow d/dt,$$

где $T_{\text{я}} = \frac{L_{\text{я}} + L_{\text{в}}}{R_{\text{я}} + R_{\text{в}}}$ – электромагнитная постоянная времени цепи якоря;

$L_{\text{я}}, R_{\text{я}}$ – индуктивность и активное сопротивление якоря;

$L_{\text{в}}, R_{\text{в}}$ – индуктивность и внутреннее сопротивление оконечного каскада усилителя, питающего двигатель;

$$T_{\text{м}} = J \frac{R_{\text{я}}}{c_{\text{м}} c_{\text{е}}} = J \frac{\Omega_{\text{хх}}}{M_{\text{п}}} = J \cdot \beta \quad \text{– электромеханическая постоянная}$$

времени двигателя;

J – приведенный к валу двигателя момент инерции вращающихся частей;

$M_{\text{п}}$ – пусковой момент двигателя при $\Omega = 0$;

$\Omega_{\text{хх}}$ – угловая скорость холостого хода при моменте двигателя $M = 0$;

$$c_{\text{е}} = \frac{U_{\text{вх}}^0}{\Omega_{\text{хх}}^0}; \quad c_{\text{м}} = \frac{M_{\text{п}}^0}{I_{\text{я.к.з}}^0};$$

$$I_{\text{я.к.з}}^0 = \frac{U_{\text{вх}}^0}{R_{\text{я}} + R_{\text{в}}} \quad \text{– ток короткого замыкания цепи якоря двигателя}$$

при $\Omega = 0$;

$$\beta = \left| \frac{d\Omega}{dM} \right| = \frac{\Omega_{\text{хх}}}{M_{\text{п}}} \quad \text{– коэффициент наклона механических характеристик двигателя};$$

ристик двигателя;

$$k = \frac{\Omega_{\text{хх}}^0}{U_{\text{вх}}^0} = \frac{1}{c_{\text{е}}} \quad \text{– коэффициент передачи.}$$

Для двигателей постоянного тока с независимым возбуждением $\beta = \text{const}$ при $u_{\text{вх}} = \text{var}$.

Передаточная функция двигателя

$$W_{\Omega}(p) = \frac{k}{T_{\text{я}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1}.$$

Задача 3.8

Найти дифференциальное уравнение движения и передаточную функцию двигателя с независимым возбуждением (рис. 3.15, а) относительно угла поворота α .

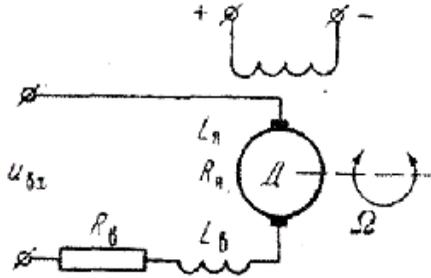


Рис. 3.15. Схема к задаче 3.8

Решение

$$(T_M T_{\text{я}} p^2 + T_M p + 1) p \alpha(t) = k u_{\text{вх}}(t);$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_{\text{я}} T_M p^2 + T_M p + 1)}.$$

Задача 3.9

Найти передаточные функции двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, пренебрегая влиянием электромагнитных переходных процессов в цепи якоря (см. задачи 3.7 и 3.8).

Решение

$$W_{\Omega}(p) = \frac{k}{T_M p + 1};$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_M p + 1)}.$$

Задача 3.10

Найти передаточные функции двухфазного асинхронного двигателя (рис. 3.16, а) при моменте нагрузки $M_n = 0$. Механические характеристики имеют вид, показанный на рис. 3.16, б, а электромагнитными переходными процессами в статоре и роторе можно пренебречь.

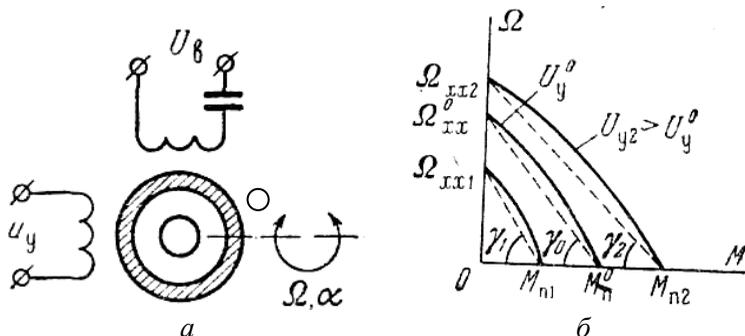


Рис. 3.16. Схема к задаче 3.10

Решение

Аналогично предыдущей задаче передаточные функции асинхронного двигателя по угловой скорости

$$W_{\Omega}(p) = \frac{k}{T_M p + 1}$$

и по углу

$$W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_M p + 1)}.$$

Электромеханическая постоянная времени T_M пропорциональна коэффициенту наклона механической характеристики β (см. задачу 3.7):

$$T_M = J\beta_0 = J \frac{\Omega_{xx}^0}{M_{\Pi}^0},$$

где J – приведенный к валу двигателя момент инерции вращающихся частей;

$\Omega_{\text{хх}}^0$, $M_{\text{п}}^0$, β_0 – соответственно угловая скорость холостого хода, пусковой момент и коэффициент наклона аппроксимированной прямой линии механической характеристики, соответствующей наиболее часто принимаемым значениям управляющего напряжения $u_y = U_y^0$ в автоматической системе (см. рис. 3.16).

Задача 3.11

Для компенсации индуктивного сопротивления обмотки управления двухфазного асинхронного двигателя в ее цепь включают конденсатор емкостью C (рис. 3.17, а). Требуется найти передаточную функцию двигателя с учетом динамических свойств образовавшегося контура LCR в цепи обмотки управления.

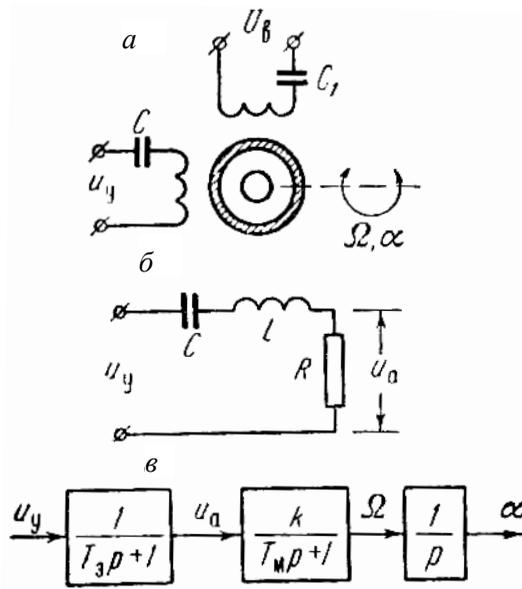


Рис. 3.17. Схема к задаче 3.11

Решение

Динамические свойства, выражающиеся инерционностью электро-механических процессов двигателя, полностью определяются передаточными функциями $W_{\Omega}(p)$ и $W_{\alpha}(p)$ (см. задачу 3.10).

Для определения передаточной функции контура LCR обмотки управления составим эквивалентную схему цепи обмотки управления,

рис. 3.17, б, где L – индуктивность; $R = \frac{P_y}{I_y^2}$ – приведенное активное

сопротивление обмотки управления; P_y – номинальная активная мощность обмотки управления; I_y – номинальный ток; C – емкость конденсатора, включаемого в цепь управления. Влиянием внутреннего сопротивления источника, питающего обмотку управления, пренебрегаем.

Передаточная функция контура LCR по огибающей модулированного сигнала с несущей частотой, равной частоте сети f_c или круговой частоте сети $\omega_c = 2\pi f_c$, равна

$$W(p) = \frac{1}{T_3 p + 1}; \quad (3.38)$$

$$T_3 = 2 \frac{L}{R}.$$

Передаточная функция (3.38) справедлива при выполнении условий $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$; $\frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 2\pi f_c$.

При выполнении обоих условий передаточные функции двухфазного асинхронного двигателя

$$W_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_y(p)} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_M p + 1)};$$

$$W_{\alpha}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_y(p)} = \frac{k}{p(T_3 p + 1)(T_M p + 1)}.$$

Структурная схема двигателя принимает вид, изображенный на рис. 3.17, в.

После незначительных преобразований можно получить новое выражение для определения эквивалентной постоянной времени:

$$T_3 = 2 \frac{L}{R} - \frac{2}{\omega_c} \frac{x_L}{R} = \frac{2}{\omega_c} \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi},$$

где $\omega_c \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

$x_L = \omega_c L$ – индуктивное сопротивление обмотки управления;

$\cos \varphi$ – коэффициент мощности обмотки управления при работе без конденсатора (в номинальном режиме).

4. ЭЛЕМЕНТЫ СЕНСОТРОНИКИ И СХЕМОТЕХНИКИ – ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ, УСИЛИТЕЛЬНЫЕ, ДЕТЕКТОРНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ЗВЕНЬЯ

Используемые в машинах датчики (первичные преобразователи) соответствуют органам чувств человека, т. е. «очувствляют» машину. Они являются инструментами, дающими сведения о состоянии самой машины и окружающей ее среды. На основе поступающей с датчиков информации процессор вырабатывает программу работы машины.

Чем больше датчиков используется, тем больше информации можно получить об окружающей среде и системе. Однако следует иметь в виду, что в реальных условиях может существовать такая информация, которую невозможно непосредственно снять с помощью датчиков. Такая ситуация может иметь место, например, тогда, когда измеряемый сигнал искажен шумами, контролируемую величину нельзя преобразовать в электрический сигнал, а также когда из-за стоимостных или пространственных ограничений не удастся использовать необходимый датчик. Если в таких случаях известны шумовые свойства или динамические характеристики объекта, за которым ведутся наблюдения, то с помощью соответствующих алгорит-

мов расчетов можно оценить интересующий сигнал. Например, по контролируемому значению угла поворота шарнира можно оценить угловую скорость.

4.1. Моделирование непрерывных и дискретных информационных систем

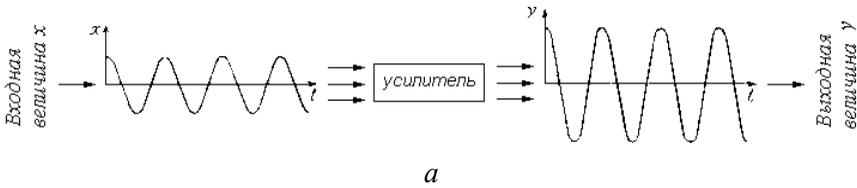
Замена аналоговых элементов машин на дискретные и технических средств – на программные изменила парадигму проектирования, конструирования и производства машин. Мехатроника выступает как новая технология, при которой машина, составленная из механических компонентов, органично включает в себя информационное обеспечение для получения, передачи, обработки информации и принятия решений.

Перед тем как стало возможным применение микропроцессоров для обработки информации внутри машины, часто использовали транзисторные электрические аналоговые устройства или механические, классическим примером которых может служить регулятор скорости. Состояние в таких системах измерялось непрерывно, что позволило назвать эти системы *непрерывными*. При использовании компьютеров для обработки информации результаты обработки становятся *прерывистыми*, т. е. *дискретными*. Системы, в которых содержатся такие элементы, носят название *дискретных систем*. Если обработка выполняется достаточно быстро, то дискретную систему можно рассматривать как непрерывную. Математическую модель непрерывной системы можно представить дифференциальными уравнениями, а математическую модель системы дискретных величин – разностными уравнениями с соответствующей оценкой точности.

Изложенное выше проиллюстрируем простым примером. На рис. 4.1, *а* имеется входная величина x , которая изменяется по синусоидальному закону. В непрерывной системе сигнал x должен возрасти в два раза, т. е. на выходе $y = 2x$.

В аналитической дискретной системе, рис. 4.1, *б*, выполняющей аналогичную функцию, через интервал времени T в компьютер поступает значение $X(T)$, которое на выходе y оказывается увеличенным в два раза (см. рис. 4.1, *б*).

Аналоговая (непрерывная) система



Дискретная система

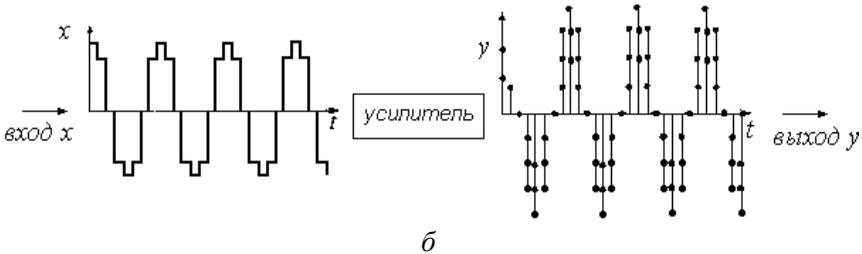


Рис. 4.1. Изменение входной величины x :
а – преобразование непрерывного сигнала в непрерывный;
б – преобразование непрерывного сигнала в дискретной

Уравнение состояния и модель наблюдения

Рассмотрим пример электромеханической системы, представленной на рис. 4.2.

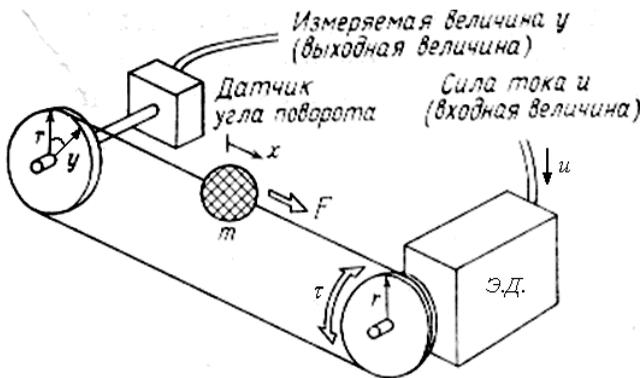


Рис. 4.2. Сосредоточенная масса, приводимая в движение электродвигателем

В ней с помощью электродвигателя Э.Д., создающего крутящий момент τ , приводится в движение сосредоточенная масса m . Поскольку момент электродвигателя пропорционален силе тока i , протекающего через него, то

$$\tau = ai. \quad (4.1)$$

Если положить радиус шкива равным r , то силу, действующую на сосредоточенную массу, определим с помощью формулы

$$F = \tau / r. \quad (4.2)$$

Для сосредоточенной массы можно записать следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x} = F. \quad (4.3)$$

Если формулы (4.1) и (4.2) подставить в уравнение (4.3) и провести соответствующие преобразования, то получим следующий вид уравнения, описывающего движение сосредоточенной массы:

$$\ddot{x} = ai / mr. \quad (4.4)$$

Чтобы знать положение сосредоточенной массы, можно измерять угол поворота шкива y . Тогда

$$y = x / r. \quad (4.5)$$

Здесь x – переменная состояния системы;
 y – измерение.

В случае непрерывной системы связь выходного параметра y с силой тока i можно представить в виде дифференциального уравнения, полученного из уравнений (4.4) и (4.5):

$$\ddot{x} = \frac{aiy}{mx}.$$

Перейдем к рассмотрению дискретного варианта системы. Положим, что мы имеем дело с тем же устройством, представленным на рис. 4.2. Через интервал времени T компьютер осуществляет выборку координаты y . При этом результаты расчета выводятся как пара-

метр u . В рассматриваемом примере часть системы от параметра u до координаты x остается без изменения и является непрерывной. Поскольку в компьютере обрабатывается дискретная информация, соответствующая моменту времени kT , регулируемая величина (регулируемый параметр) $u(k)$ и выборка координаты $x(k)$ являются дискретными. Здесь необходимо отметить, что $u(t), x(t), \dots$ представляют собой величины, которые во времени являются непрерывными. Что касается величин $u(k), x(k), \dots$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, то это величины u и x , выбранные в момент времени kT . В терминах *непрерывная* или *дискретная* отражается характер, который присущ рассматриваемой системе. В приведенном выше примере может существовать такое положение, при котором часть системы будет непрерывной (аналоговой). Однако и в таком случае систему в целом следует рассматривать как дискретную.

Если ограничиться рассмотрением того состояния, которое имеет место в момент времени kT , то для описания движения системы можно воспользоваться конечно-разностными уравнениями. В качестве примера рассмотрим определение регулируемого параметра $u(k)$ по величине $x(k)$. Вполне естественно, что целесообразно начать вычисление с $x(k-1)$. При $kT \leq t \leq (k+1)T$ можно положить, что $u(t) = u(k) = \text{const}$. Тогда в моменты времени kT и $(k+1)T$ решения уравнения (4.4) удовлетворяют следующим зависимостям:

$$x(k+1) = x(k) + \dot{x}(k)T + \frac{1}{2} \frac{a}{mr} T^2 u(k); \quad (4.6)$$

$$\dot{x}(k+1) = \dot{x}(k) + \frac{a}{mr} T \cdot u(k).$$

При выводе выражений (4.6) использовали тот факт, что решение при начальных условиях $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ соответствует функции

$$x(t) = x_0 + v_0 t + (1/2) a t^2.$$

Функцию $y(k)$ можно представить следующим образом:

$$y(k) = x(k) / r. \quad (4.7)$$

Выше говорилось о том, что состояние непрерывной системы может быть описано дифференциальным уравнением (4.4), а дискретной системы – разностным уравнением (4.6). При этом измеряемые величины удовлетворяют выражениям (4.5) и (4.7). Уравнения (4.4) и (4.6) называются *уравнениями состояния*, а уравнения (4.5) и (4.7) – *наблюдательными уравнениями (модель наблюдения)*.

Уравнение состояния и вектор состояния. Уравнения состояния и уравнения наблюдения можно представить на основе единого подхода, изложенного ниже.

Уравнение состояния (4.4) непрерывной системы представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Как известно, можно пользоваться следующей эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка, где x_1 соответствует x , а $x_2 = \dot{x}_1$, тогда имеем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = au / mr. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) можно записать в матричном виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a / mr \end{bmatrix} \cdot u$$

или

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (4.9)$$

где

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ a / mr \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = u.$$

Наблюдательное уравнение (4.5) запишем в виде

$$\bar{y} = C\bar{x},$$

где

$$\bar{y} = y, \quad C = [1/r, 0].$$

Компоненты вектора \bar{x} называются *переменными состояния*, а \bar{x} – *вектором состояния*. Если воспользоваться матрицами, то

уравнение состояния (4.6) и наблюдательное уравнение (4.7) для дискретной системы можно представить следующим образом:

$$\bar{x}(k+1) = \Phi(T)\bar{x}(k) + H(T)\bar{u}(k), \quad (4.10)$$

$$\bar{y}(k) = C\bar{x}(k),$$

где

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \end{bmatrix};$$

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H(T) = \begin{bmatrix} aT^2 / 2mr \\ aT / mr \end{bmatrix}.$$

Выражение (4.10) можно также получить непосредственно из выражения (4.9). При $kT \leq t \leq (k+1)T$ можно получить решение дифференциального уравнения (4.9), для которого удовлетворяются условия

$$\bar{x} = \bar{x}(k) \quad \text{при} \quad t = kT$$

и

$$u(t) = u(k) = \text{const} \quad \text{при} \quad kT \leq t \leq (k+1)T.$$

Решение представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= e^{A(t-kT)}\bar{x}(k) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)}B\bar{u}(\tau)d\tau = \\ &= e^{A(t-kT)}\bar{x}(k) + \int_0^{t-kT} e^{A\tau}B\bar{u}(t-\tau)d\tau = \\ &= e^{A(t-kT)}\bar{x}(k) + \int_0^{t-kT} e^{A\tau}Bd\tau\bar{u}(k). \end{aligned}$$

Если принять во внимание, что $t = (k + 1)T$, то получаем

$$\bar{x}(k+1) = e^{AT} \bar{x}(k) + \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \bar{u}(k). \quad (4.11)$$

Сопоставляя выражения (4.10) и (4.11), можно заметить, что

$$\Phi(T) = e^{AT};$$

$$H(T) = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau.$$

4.2. Дифференциальные уравнения для нелинейной системы

Положим, что \bar{u} – входная, а \bar{y} – выходная величины. Рассмотрим случай, когда уравнения и наблюдения состояния непрерывной системы можно представить следующим образом:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}), \quad (4.12)$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}). \quad (4.13)$$

Следует отметить, что \bar{x} , \bar{y} и \bar{u} представляют собой соответственно n , m , r -мерные векторы:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T;$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T;$$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T.$$

$$B(t) = (b_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \Big|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}^*(t) \\ \bar{u}=\bar{u}^*(t)}} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r;$$

$$C(t) = (C_{ij}) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^*(t)} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

причем $\bar{x} - \bar{x}^*$, $\bar{u} - \bar{u}^*$ и $\bar{y} - \bar{y}^*$ можно заменить на x , u , y соответственно.

Если в выражениях (4.14) и (4.15) время t не входит в явном виде, т. е. если $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – матрицы постоянных величин, то

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (4.16)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}. \quad (4.17)$$

Здесь A – матрица размерностью $n \times n$, B – матрица размерностью $n \times n$, а C – матрица размерностью $n \times m$. Будем в основном рассматривать системы, описываемые формулами (4.16) и (4.17).

Решение уравнений состояния. Для непрерывных систем, описываемых выражениями (4.16) и (4.17), важными являются приведенные ниже свойства, изучаемые в курсах обыкновенных дифференциальных уравнений. Для матрицы A размерностью $n \times n$ и действительного числа t разложение матричной показательной функции e^{At} можно представить следующим образом:

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots, \quad (4.18)$$

где I – единичная матрица.

Правую часть можно почленно продифференцировать и установить, что она равномерно сходится к Ae^{At} . Если воспользоваться функцией e^{At} , то решение уравнения

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \text{ с начальным условием } \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (4.19)$$

можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}_0. \quad (4.20)$$

Воспользуемся этим выражением и найдем решение уравнения состояния. Например, уравнение

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее гармоническое колебание с начальными условиями $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$, причем $x_1 = \dot{x}$ и $x_2 = \ddot{x}$. С помощью выражения (4.18), определяющего разложение функции e^{At} , ее можно вычислить в матричной форме:

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \frac{t^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^4}{4!} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots = \\ &= \left[1 - t^2/2! + t^4/4! - \dots t/1! - t^3/3! + \dots \right] = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда решение можно представить в виде

$$\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим другой способ определения функции e^{At} . Если воспользоваться несобственной матрицей P и диагонализировать матрицу A , т. е.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

то можно установить следующее равенство:

$$e^{At} = PP^{-1}e^{At}PP^{-1} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1};$$

$$Pe^{P^{-1}APt} = I + \frac{t}{1!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \lambda_2^2 & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \dots +$$

$$+ \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & e^{\lambda_n(t)} \end{bmatrix}.$$

Поэтому функцию e^{At} можно определить в виде

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & e^{\lambda_n(t)} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

(Если при невозможности диагонализации матрицы A преобразовать $P^{-1}AP$ к стандартной форме Жордана, то получаются аргументы, аналогичные полученным выше.) В рассматриваемом примере

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если провести вычисления для уравнения

$$\det(A - \lambda) = 0,$$

то $\lambda^2 + 1 = 0$.

Следовательно, собственные значения имеют вид $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, а собственные векторы – вид

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, используя матрицы

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix};$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix},$$

функцию e^{At} можно представить следующим образом:

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом случае следует обратить внимание на то, что даже тогда, когда собственные значения и собственные векторы представляют собой комплексные числа, элементы разложения функции e^{At} являются действительными числами.

Устойчивость решения. В решении уравнения (4.19), представленном функцией (4.20), при произвольном значении \bar{x}_0 можно считать, что, если при $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$, имеет место *асимптотическая устойчивость*. Если выражение для x расходится, то имеем дело с неустойчивостью. Если возможна диагонализация матрицы A , то асимптотическое решение уравнения (4.30) можно получить при условии, что

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Действительная часть λ_i является отрицательной, т. е. $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ ($i = 1, \dots, n$). Это проверяется непосредственно.

Указанное условие можно также получить из выражения

$$\dot{w} = P^{-1}APw,$$

которое представляет собой уравнение (4.19), преобразованное с помощью подстановки $x = Pw$. При использовании несобственной матрицы P в ряде случаев можно провести следующую диагонализацию матрицы $P^{-1}AP$:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

В этом случае, поскольку $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, можно получить следующие зависимости:

$$\dot{w}_1 = \lambda_1 w_1;$$

$$\dot{w}_2 = \lambda_2 w_2;$$

$$\dot{w}_n = \lambda_n w_n.$$

Так как матрица P является несобственной, то выражения $x \rightarrow \infty$ и $w \rightarrow 0$ имеют одинаковый смысл. Необходимым и достаточным условием стремления $w \rightarrow 0$ является $w_i \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, n$). В общем случае λ_i представляет собой комплексное число. Если $w_i \rightarrow 0$, то λ_i имеет отрицательную действительную часть. Для обеспечения асимптотической устойчивости решения уравнения (4.19) все собственные значения матрицы A должны иметь отрицательные действительные части. При использовании стандартной формы Жордана можно прийти к таким же выводам даже тогда, когда невозможно провести диагонализацию матрицы $P^{-1}AP$.

Если воспользоваться выражением для e^{At} , то условие удовлетворения решением (4.16) начальному условию $x(0) = x_0$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u}(\tau) d\tau. \quad (4.21)$$

Импульсная характеристика. При рассмотрении дифференциального уравнения (4.16) часто возникают проблемы нахождения решений $\bar{x}(t)$ при специальных (особых) видах входных сигналов $\bar{u}(t)$. Если

$$\bar{u} = [u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_r]^T$$

при начальном значении $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{u}_j = \delta(t)$ (при $i \neq j$ $\delta = 0$, при $i = j$ $\delta = \infty$ – дельта-функция), то реакция состояния \bar{x} называется *импульсной характеристикой* по отношению к u_i . Действие $\delta(t)$ записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0).$$

Поэтому импульсная характеристика, определяемая из выражения (4.21), записывается в виде

$$x(t) = e^{At}B[0\dots 0 \ 1 \ 0\dots 0]^T \quad (i\text{-й элемент соответствует } 1).$$

Таким образом, для u_1, u_2, \dots, u_r можно определить соответствующие импульсные характеристики. Понятно, что расположенные по порядку, начиная слева, члены представляют собой разложение функции $e^{At}B$.

4.3. Уравнения дискретной системы (система разностных уравнений)

На рис. 4.3 с помощью компьютера производится дискретное представление выходной координаты \bar{y} непрерывной системы

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{y} = C\bar{x},$$

являющейся типичным примером дискретной системы.

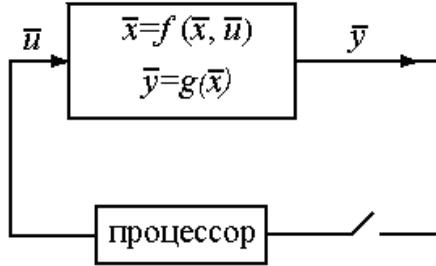


Рис. 4.3. Наблюдение с помощью компьютера
(выбор дискретных данных)

В момент k -й выборки $t = kT$. В этот момент имеет место переменная состояния $\bar{x}(k)$. Интервал выборки T является постоянным. Когда компьютер в непрерывной системе осуществляет управление \bar{u} , то этот параметр может изменяться только в момент выборки. В момент $t = kT$ рассматриваемый параметр принимает значение $\bar{u}(k)$. При

$$kT \leq t \leq (k + 1)T$$

можно считать, что

$$\bar{u}(t) = \bar{u}(k) = \text{const.}$$

Вполне допустимо такое положение, при котором время выборки отличается от времени изменения \bar{u} . Однако в рассматриваемом случае воспользуемся допущением о том, что выборка и изменение указанного параметра происходят одновременно. При использовании этого допущения можно, руководствуясь значениями $\bar{x}(k)$ и $\bar{u}(k)$, записать уравнение для $\bar{x}(k + 1)$. В частности, положим, что непрерывная система описывается следующим дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}.$$

Для $\bar{x}(k+1)$ и $\bar{y}(k+1)$ можно составить следующие уравнения:

$$\bar{x}(k+1) = \Phi(T)\bar{x}(k) + H(T)\bar{u}(k);$$

$$\Phi(T) = e^{AT}; \quad H(T) = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau; \quad (4.22)$$

$$\bar{y}(k) = C\bar{x}(k).$$

Когда в выражениях (4.22) $\bar{u} = 0$, то решение можно представить в виде

$$\bar{x}(k) = \Phi^k(T)\bar{x}(0), \quad \bar{y}(k) = C\bar{x}(k). \quad (4.23)$$

Устойчивость решения. Как и при рассмотрении устойчивости решения дифференциального уравнения непрерывной системы, для дискретной системы важным является условие асимптотической устойчивости решения $x(k)$ уравнений (4.23). Под асимптотической устойчивостью решения $x(k)$ следует понимать $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$. Из урав-

нения (4.23) условие асимптотической устойчивости записывается в виде $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^k(T) = 0$. Когда с помощью несобственной матрицы P можно провести диагонализацию матрицы Φ , то получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi^k &= PP^{-1}\Phi PP^{-1}\Phi PP^{-1}\dots P^{-1}\Phi PP^{-1} = P\{P^{-1}\Phi P\}^k P^{-1} = \\ &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}, \end{aligned}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы Φ .

Поскольку P является несобственной матрицей, то пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^k = 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \{P^{-1}\Phi P\}^k = 0$ эквивалентны. Условием эквивалентности служит предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Поэтому для комплексных чисел λ_i существует условие $|\lambda_i| < 1$, все абсолютные величины собственных значений меньше единицы. Известно, что для $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^k = 0$ условие аналогично даже тогда, когда матрицу Φ диагонализировать нельзя. Следовательно, в случае (4.22) необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости $\bar{x}(k)$ является такое условие, при котором все абсолютные величины собственных значений $\Phi(T)$ меньше единицы.

4.4. Сенсорные алгоритмы оценивания состояния системы

Преимущество очувствления, проводимого с использованием компьютера, состоит в том, что можно получить эффективную информацию на основе измеряемых в реальном масштабе времени сигналов. Простым примером может служить случай внесения соответствующих поправок в работу датчика (чувствительного элемента), выходной сигнал которого нелинеен. Допустим, что у объекта A возникает напряжение, пропорциональное квадрату приложенной силы. Если с помощью объекта измеряется сила, то необходимо извлекать квадратный корень из величины возникающего напряжения. Для компьютера эта операция элементарна. Возможен такой случай, когда прикладываемая сила и возникающее напряжение связаны зависимостью, представленной на рис. 4.4. Эта зависимость может храниться в памяти компьютера в виде формулы или таблицы. С помощью данных, хранящихся в памяти, можно по величине замеренного напряжения определить действующую силу. Таким образом, если существует воспроизводимость входных и выходных сигналов, то независимо от сложности их обмена между входом и выходом применение компьютера удобно при практическом использовании датчиков.

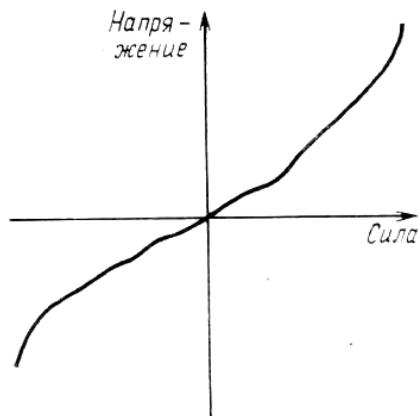


Рис. 4.4. Нелинейная выходная характеристика датчика

Выше был приведен пример очень простого очувствления, поскольку между силой и напряжением существовало однозначное соответствие. Однако в реальных условиях приходится сталкиваться со сложными случаями, когда необходимо получить сведения о переменных состояниях, число которых превышает количество выходных сигналов, поступающих с датчиков. В качестве примера можно рассмотреть систему, приведенную на рис. 4.2, в которой сосредоточенная масса движется в горизонтальной плоскости. Величину скорости, которую в данном случае непосредственно наблюдать (измерять, контролировать) не удастся, можно определить с использованием сведений о положении сосредоточенной массы, которое легко находится. Рассмотрим возможность оценки состояния в этом случае.

Фильтр Калмана–Бьюси для оценки состояния. Параметр состояния \bar{x} и наблюдаемая (контролируемая) величина \bar{y} связаны следующими соотношениями:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (4.24)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}. \quad (4.25)$$

Для примера, приведенного на рис. 4.2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]. \quad (4.26)$$

Если матрица C , входящая в уравнение (4.25), имеет обратную матрицу, то по наблюдаемой величине \bar{y} можно непосредственно определить переменную состояния \bar{x} . Даже при отсутствии обратных матриц в (4.26) возможны случаи оценки величины \bar{x} .

Остановимся на рассмотрении приведенной ниже зависимости в том случае, когда для величин A , B и C , входящих в уравнения (4.24) и (4.25), существует такая величина G , для которой матрица $A - GC$ становится устойчивой. Тогда для оценки z имеем уравнение

$$\dot{\bar{z}} = (A - GC)\bar{z} + G\bar{y} + B\bar{u}; \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}} &= \dot{\bar{z}} - \dot{\bar{x}} = \{(A - GC)\bar{z} + G\bar{y} + B\bar{u}\} - \{A\bar{x} + B\bar{u}\} = \\ &= (A - GC)\bar{z} + GC\bar{x} - A\bar{x} = (A - GC)(\bar{z} - \bar{x}) = (A - GC)\bar{e}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $\bar{e} = \bar{z} - \bar{x}$ – погрешность оценивания величины; \bar{e} удовлетворяет уравнению (4.28).

Для проведения соответствующих преобразований воспользуемся выражениями (4.24), (4.25) и (4.27). Если матрица $A - GC$ устойчива, то $\bar{z} \rightarrow 0$, т. е. $\bar{z} \rightarrow \bar{x}$. По истечении достаточно большого времени независимо от начального значения величины \bar{z} по ней можно сделать оценку величины \bar{x} . Если остановиться на рассмотрении примера, приведенного на рис. 4.2, и положить $G = [g_1, g_2]^T$, то можно определить разность $A - GC$ следующим образом:

$$A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 & 1 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для $A - GC$ существует следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + g_1\lambda + g_2 = 0.$$

Чтобы матрица $A - GC$ была устойчивой, необходимо выбирать такие значения g_1 и g_2 , которые были бы больше нуля. Представ-

ленная здесь оценочная формула (4.27) носит название *формулы Калмана–Бьюси для оценки состояния (фильтр Калмана–Бьюси)*.

Изложенную выше теорию можно аналогично применить к случаю дискретной системы. Уравнения (4.24) и (4.25), описывающие дискретную систему, представим следующим образом:

$$\bar{x}(k) = \Phi \bar{x}(k-1) + H\bar{u}(k-1);$$

$$\bar{y}(k) = C \bar{x}(k).$$

Остановимся на рассмотрении оценки, которую можно получить с помощью приведенного ниже уравнения, соответствующего уравнению (4.27):

$$\bar{z}(k) = (\Phi - GC) \bar{z}(k-1) + G \bar{y}(k-1) + H\bar{u}(k-1).$$

Если положить

$$\bar{e}(k) = \bar{z}(k) - \bar{x}(k),$$

то получим

$$\begin{aligned} \bar{e}(k) &= \bar{z}(k) - \bar{x}(k) = \\ &= \{(\Phi - GC) \bar{z}(k-1) + G \bar{y}(k-1) + H\bar{u}(k-1)\} - \\ &\quad - \{\Phi \bar{x}(k-1) + H\bar{u}(k-1)\} = \\ &= (\Phi - GC) \bar{z}(k-1) + GC \bar{x}(k-1) - \Phi \bar{x}(k-1) = \\ &= (\Phi - GC)(\bar{z}(k-1) - \bar{x}(k-1)) = (\Phi - GC) \bar{e}(k-1). \end{aligned}$$

Следовательно, для величины G , для которой удовлетворяется условие $(\Phi - GC)^n \rightarrow 0$, существует предел $\bar{e}(k) \rightarrow 0$, а это в конечном счете означает, что $\bar{z}(k) \rightarrow \bar{x}(k)$ и $\bar{z}(k)$ дает оценочное значение $\bar{x}(k)$.

Структура оценки Калмана–Бьюси обладает динамикой, порядок которой соответствует уравнению (4.24). Этот порядок можно понизить, однако в таком случае теория становится сложнее.

4.5. Формирующие фильтры непрерывных сигналов в информационных системах

Если информацию с сенсоров о динамике изменения состояния обработать в соответствии с вышеуказанными алгоритмами, то можно оценить параметры состояния. Чем точнее информация о динамике, тем точнее можно осуществлять оценку. Однако следует иметь в виду, что всегда существует расхождение между действительностью и моделью. В некоторых случаях из рассмотрения нельзя исключать влияние, оказываемое таким расхождением. Сигнал, генерируемый в той части действительности, которую не удастся смоделировать, представляет собой шум. К шумам, которые необходимо подавлять, относятся белый шум или шумы, имеющие частоту, превышающую 90 кГц. Если известна природа шумов, их можно выделить на фоне наблюдаемых данных и подавить (отфильтровать). Остановимся на рассмотрении теории фильтрации, когда шумами являются высокочастотные составляющие.

Часто используются фильтры, у которых связь между входным (y) и выходным (z) сигналами можно представить следующим линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \dots + b_m y, \quad (4.29)$$

где $z^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} z$;

$$y^{(m)} = \frac{d^m}{dt^m} y,$$

а коэффициенты – действительные числа.

Общее решение уравнения (4.29) складывается из общего решения, полученного в случае равенства нулю правой части этого уравнения и частного решения. При нахождении решения в случае равенства правой части нулю можно считать, что существует асимптотическая устойчивость. Следует иметь в виду, что в рассматриваемом случае цель заключается в построении фильтра, описываемого уравнением (4.29). Поэтому решение этого уравнения не должно расходиться.

Сначала найдем стационарное решение (решение при $t \rightarrow \infty$), когда

$$y = \alpha e^{j\omega t},$$

где α , ω , t – действительные числа.

Выделим действительные части сигналов y и z и найдем решение, относящееся к

$$y = \alpha \cos \omega t.$$

При этом установим соответствие с действительностью. Положим

$$y = \beta e^{j\omega t}$$

и подставим в уравнение (4.29). В результате получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \left\{ (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n \right\} \beta e^{j\omega t} = \\ & = \left\{ b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m \right\} \alpha e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Если величина β удовлетворяет уравнению (4.30), то его решением является функция

$$z = \beta e^{j\omega t}.$$

Если из уравнения (4.30) определить отношение входного сигнала к выходному сигналу ($z / y = \beta / \alpha$), то можно установить, что

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (4.31)$$

Если положить $\beta / \alpha = H(\omega)$, то обычно $H(\omega)$ является комплексным числом. Величина $|H(\omega)|$ характеризует отношение вход-

ной и выходной амплитуд, а $\arg H(\omega)$ – фазовое рассогласование. Если с помощью величины ω , содержащейся в показателе экспоненты входного сигнала

$$y = \alpha e^{j\omega t},$$

соответствующим образом менять амплитуду выходного сигнала, иными словами, если можно осуществить проектирование таким образом, что по отношению к частотным составляющим, которые можно рассматривать как шумы, амплитуда выходного сигнала будет достаточно малой, то (4.29) станет фильтром. Поскольку неудобно иметь дело с отношением амплитуды входного и выходного сигналов $|H(\omega)|$, очень часто проектирование проводят используя равенство

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) \bar{H}(\omega)$$

(\bar{H} – сопряженное комплексное число).

Фильтр Баттерворта. Данный фильтр является классическим примером фильтра, «срезающего» высокочастотные составляющие. Фильтр Баттерворта можно описать выражением, приведенным ниже. Меняя стоящие в правой части этого выражения параметры ω_c и N , можно получить характеристики различных фильтров:

$$|H|^2 = 1 / \left[1 + (\omega / \omega_c)^{2N} \right]. \quad (4.32)$$

График этой зависимости представлен на рис. 4.5. При низких частотах в окрестности точки $\omega = 0$ отношение амплитуд входного и выходного сигналов почти равно единице. При высоких частотах это отношение максимально приближается к нулю. Чтобы спроектировать фильтр, имеющий характеристику в виде зависимости (4.32), необходимо на основании этой зависимости определить величину N . Однако величина N должна быть устойчивой и представимой в виде выражения (4.31).

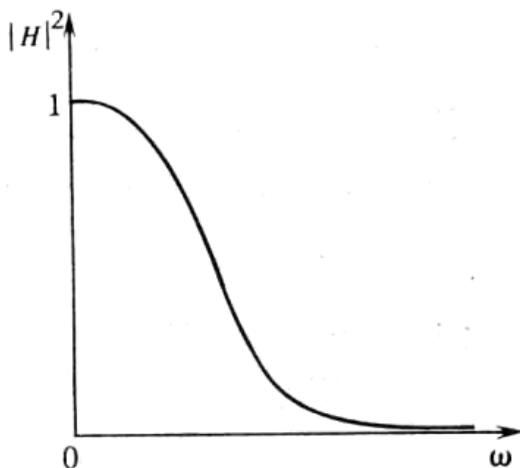


Рис. 4.5. Характеристика фильтра Баттерворта

Остановимся на рассмотрении случая, когда в выражении (4.32) $N = 3$ и $\omega_c = 1$, т. е.

$$|H|^2 = 1 / (1 + \omega^6). \quad (4.33)$$

Поскольку в зависимости (4.33) параметр ω стоит в шестой степени, можно считать, что зависимость H от ω является кубической. Здесь можно воспользоваться действительными значениями a_1, a_2, a_3 и осуществить разложение на множители следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \omega^6} &= \frac{1}{(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3} \times \\ &\times \frac{1}{(-j\omega)^3 + a_1(-j\omega)^2 + a_2(-j\omega) + a_3}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Можно проверить, является ли величина H устойчивой. В выражении (4.34) положим $j\omega = s$. Тогда

$$\frac{1}{1 - s^6} = \frac{1}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \cdot \frac{1}{-s^3 + a_1s^2 - a_2s + a_3}.$$

Примем во внимание, что

$$1 - s^6 = -(s-1)(s - e^{\pi j/3})(s - e^{2\pi j/3})(s+1)(s - e^{4\pi j/3})(s - e^{5\pi j/3}),$$

а условием устойчивости фильтра является наличие решений уравнения

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

с отрицательными действительными частями и также существование для $s - \gamma$ сопряженного комплексного числа $-\bar{s} - \bar{\gamma}$. С учетом этих утверждений можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{1}{(s - e^{2\pi j/3})(s+1)(s - e^{4\pi j/3})} = \\ &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (4.29) для фильтра может принять следующий вид:

$$z^{(3)} + 2z^{(2)} + 2z^{(1)} + z = y.$$

Фильтр дискретной системы. Рассмотрим проектирование фильтра для дискретной системы, соответствующего приведенному выше фильтру для непрерывной системы. В рассматриваемом случае для дискретной системы разностное уравнение, соответствующее выражению (4.29), запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} z(k) + a_1 z(k-1) + a_2 z(k-2) + \dots + a_n z(k-n) = \\ = b_0 y(k) + b_1 y(k-1) + \dots + b_m y(k-m), \end{aligned} \quad (4.35)$$

где a_1, \dots, a_m и b_0, \dots, b_m — действительные числа;

$y(k)$ и $z(k)$ — входная и выходная величины соответственно при k -м дискретном представлении.

Когда выражение (4.35) устойчиво, т. е. все абсолютные значения решения уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

меньше единицы, то оно может описывать характеристику стационарного фильтра.

Проанализируем работу фильтра, когда на вход системы, имеющей характеристику типа (4.35), подается синусоидальный сигнал. При этом воспользуемся подстановкой

$$\rho = e^{i\omega T}, \quad y(k) = \alpha\rho^k \quad \text{и} \quad z(k) = \beta\rho^k,$$

где ω – круговая частота входного сигнала;

T – период выборки.

Тогда на основании теоремы о выборке (дискретного представления величин) следует, что $\omega T < \pi$. После подстановки получим следующее выражение:

$$(\rho^k + a_1\rho^{k-1} + \dots + a_n\rho^{k-n})\beta = (b_0\rho^k + b_1\rho^{k-1} + \dots + b_m\rho^{k-n})\alpha.$$

Зависимость, соответствующая уравнению (4.31) и описывающая связь между входным и выходным сигналами, можно представить в виде формулы

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b_0 + b_1\rho^{-1} + b_2\rho^{-2} + \dots + b_m\rho^{-m}}{1 + a_1\rho^{-1} + a_2\rho^{-2} + \dots + a_n\rho^{-n}}. \quad (4.36)$$

Если $\beta/\alpha = H(\omega)$, то в общем случае H будет представлять собой комплексное число. Так же как и у непрерывной системы, в данном случае $|H(\omega)|$ – отношение амплитуд входного и выходного сигналов, а $\arg H(\omega)$ – фазовое рассогласование. В случае непрерывной системы было использовано выражение для $|H|^2$ и определялась величина H . Однако для выражения (4.36) следует иметь в виду, что H не является рациональной функцией ω , что затрудняет рассмотрение. При этом обычно проводят замену переменной

$$\operatorname{tg}(\omega T/2) = W.$$

Вместо ω используют W и определяют величину H .

Итак, произведя замену

$$\operatorname{tg}(\omega T/2) = W,$$

можно перейти к следующим формулам:

$$\rho = e^{j\omega T} = \frac{1 + jW}{1 - jW}; \quad (4.37)$$

$$W = j \frac{1 - \rho}{1 + \rho}. \quad (4.38)$$

Если выражение (4.37) подставить в выражение (4.36), то последнее станет рациональной функцией аргумента W . Это обстоятельство является очень важным. Согласно указанному выше условию устойчивости для (4.36) меньше единицы должны быть все абсолютные значения решения при приравнивании знаменателя к нулю, когда ρ считаем неизвестной величиной. При замене в (4.36) ω на W в качестве условия устойчивости можно воспользоваться тем, что при неизвестной величине W положительным является решение, полученное для знаменателя, равного нулю. Если $H(\beta/\alpha)$ выразить через W , то необходимо, чтобы удовлетворялось следующее условие (фильтр Баттерворта):

$$|H|^2 = \frac{1}{1 + (W/W_c)^{2N}}. \quad (4.39)$$

Как и в случае непрерывной системы, проведем соответствующие преобразования при $W_c = 1$ и $N = 3$. В результате получим формулу, аналогичную формуле (4.34):

$$\frac{1}{1 + W^6} = \frac{i}{W^3 + p_1 W^2 + p_2 W + p_3} \cdot \frac{-i}{W^3 + \bar{p}_1 W^2 + \bar{p}_2 W + \bar{p}_3}.$$

Вновь примем во внимание, что

$$1 + W^6 = (W - e^{\pi j/6})(W - j)(W - e^{5\pi j/6})(W - e^{7\pi j/6})(W + j)(W - e^{11\pi j/6}),$$

условием устойчивости является наличие положительных мнимых полюсов, а также существование для $W - \gamma$ сопряженного комплексного числа $W - \bar{\gamma}$. Получим следующее выражение:

$$H = \frac{j}{W^3 + p_1 W^2 + p_2 W + p_3} = \frac{j}{(W - e^{\pi j/6})(W - j)(W - e^{5\pi j/6})} = \frac{j}{W^3 - 2jW^2 - 2W + j}. \quad (4.40)$$

С помощью формулы (4.38) выражение (4.40) можно преобразовать к следующему виду:

$$H = \frac{j}{\left(j \frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^3 - 2j \left(j \frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 - 2 \left(j \frac{1-\rho}{1+\rho}\right) + j} = \frac{(1+\rho)^3}{2\rho + 6\rho^3} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\rho^{-1} + \frac{1}{2}\rho^{-2} + \frac{1}{6}\rho^{-3}}{1 + \frac{1}{3}\rho^{-2}}.$$

Следовательно, руководствуясь выражением (4.36), в рассматриваемом случае характеристику фильтра можно представить следующей зависимостью:

$$z(k) + \frac{1}{3}z(k-2) = \frac{1}{6}y(k) + \frac{1}{2}y(k-1) + \frac{1}{2}y(k-2) + \frac{1}{6}y(k-3).$$

4.6. Сенсорные, усилительные и детекторные электронные звенья

Датчики являются одним из основных элементов мехатронных систем. Они преобразуют заданную или регулируемую (управляемую) величину (информацию) в сигнал, удобный для дистанционной передачи и дальнейшей обработки.

Широко распространены датчики, преобразующие механические величины в электрические.

Выделяют три типа сенсоров (датчиков):

1. **Сенсоры аналоговые**, к которым относятся датчики положения, угла, расстояния, толщины, скорости, силы, момента вращения, давления, ускорения, температуры и др.

2. **Сенсоры бинарные**, характеризующиеся двузначным выходным сигналом типа «включено-выключено». Обычно бинарные сенсоры используются как передаточные звенья (переключатели) или аналоговые сенсоры с программным переключением значений. Когда входное значение сенсора достигает порога переключения, бинарный выходной сигнал изменяет значение.

К бинарным сенсорам относятся: **тактильные (контактные) сенсоры, бесконтактные сенсоры, индукционные сенсоры приближения, конденсаторные сенсоры приближения, оптические сенсоры приближения, биметаллические сенсоры температуры и др.**

3. **Цифровые сенсоры** генерируют информацию о значении измеряемой величины в виде цифр, например, **длина отрезка пути, значение энергии** и т. д. Обычно сигналы аналоговых сенсоров преобразуются в цифровые сигналы и используются в специальных применениях, например, сенсорах, которые могут автоматически оценивать **шероховатость материалов**.

Широко распространены **инкрементальные (шаговые) сенсоры** линейного и углового положения, кодовые линейки и циферблаты для измерения абсолютных величин.

Сенсоризация (очувствление) наиболее действенна с использованием микропроцессоров, так как позволяет получать эффективную информацию в реальном масштабе времени. Особенно это важно в случае, если входной и выходной сигналы связаны нелинейной зависимостью, которая хранится в памяти процессора. Еще более эффективно применение процессоров в случае, если необходимо получить сведения о переменных состояния, число которых превышает количество выходных сигналов, поступающих с датчиков (дступных измерению).

Нахождение алгоритмов получения оптимальных оценок (в смысле минимума погрешности) развивается в теории фильтрации. Наиболее известны фильтры Винера–Колмогорова, Калмана–Бьюси и др.

Рассмотрим простейший пример получения алгоритма оценивания состояния с помощью фильтра Калмана–Бьюси для линейной системы в общем виде.

Переменная состояния системы \bar{x} и наблюдаемая (контролируемая) величина \bar{y} удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}. \quad (4.41)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}. \quad (4.42)$$

Истинное значение переменной состояния \bar{x} представим в виде

$$\bar{x} = \hat{\bar{x}} + \bar{e}. \quad (4.43)$$

где $\hat{\bar{x}}$ – оценка состояния \bar{x} ;
 \bar{e} – погрешность оценки.

Очевидно, оценка $\hat{\bar{x}}(t)$ должна быть такой, чтобы при $t \rightarrow \infty$ $\bar{e}(t) \rightarrow 0$ и $\hat{\bar{x}} \rightarrow \bar{x}(t)$.

Подставляя (4.43) в уравнение (4.41) с учетом (4.42), получим уравнения (алгоритмы) для нахождения оценки и погрешности оценивания:

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = (A - GC)\hat{\bar{x}} + G\bar{y} + B\bar{u};$$

$$\dot{\bar{e}} = (A - GC)\bar{e},$$

где G – матрица, элементы которой выбираются из условия $\bar{e} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В случае дискретной системы уравнения (4.41), (4.42) для линейной системы имеют вид

$$\bar{x}(k) = \Phi\bar{x}(k-1) + H\bar{u}(k-1);$$

$$\bar{y}(k) = C\bar{x}(k),$$

а уравнения для оценки и погрешности соответственно записываются в виде

$$\begin{aligned}\hat{x}(k) &= (\Phi - GC)\hat{x}(k-1) - G\bar{y}(k-1) + H\bar{u}(k-1); \\ \bar{e}(k) &= (\Phi - GC)\bar{e}(k-1).\end{aligned}\tag{4.44}$$

Из (4.44) следует, что для матрицы G , для которой выполняется условие $(\Phi - GC) \rightarrow 0$, соответственно $\bar{e}(k) \rightarrow 0$.

Структура уравнений для фильтра Калмана–Бьюси подобна уравнению системы (имеет тот же порядок), т. е. в принципе не упрощает задачу непосредственного решения систем уравнений динамики.

Погрешность оценивания состояния системы возникает не только вследствие того, что не все переменные состояния являются наблюдаемыми, но также вследствие того, что в реальных системах диапазон частот, где данная линейная модель достаточно адекватна реальной системе, ограничен, например областью частот менее 90 кГц. Тогда высокие частоты описываются как шум (например, белый) в модели системы. Полезный сигнал регистрируется на фоне шума, и для того чтобы его очистить (выделить), применяют фильтры, подавляющие шум.

Пусть фильтр, связывающий входной y и выходной z сигналы, описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными действительным и коэффициентами:

$$\sum_{i=0}^m a_i \frac{d^{(m-i)} z}{dt^{(m-i)}} = \sum_{i=0}^n b_i \frac{d^{(n-i)} y}{dt^{(n-i)}};\tag{4.45}$$

$$a_0 = 1.$$

Представим

$$y = \alpha e^{j\omega t}, \quad z = \beta e^{j\omega t}.\tag{4.46}$$

Тогда, подставляя (4.46) в (4.45), получим

$$\sum_{i=0}^m a_i (j\omega)^{(m-i)} \beta e^{j\omega t} = \sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^{(n-i)} \alpha e^{j\omega t}.$$

Отношение входного сигнала к выходному дает

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i(j\omega)^{n-i}}{\sum_{i=1}^m a_i(j\omega)^{m-i}}.$$

Подставляем $\beta / \alpha = H(\omega)$, тогда $|H(\omega)|$ характеризует отношение входной и выходной величин, $\arg H(\omega)$ – фазовое рассогласование. Меняя величину ω в показателе экспоненты входного сигнала

$$y = \alpha e^{j\omega t},$$

получим изменение амплитуды выходного сигнала. Благодаря этому можно проектировать фильтр таким образом, что по отношению к частотным составляющим (которые можно рассматривать как шумы) амплитуда выходного сигнала будет достаточно малой, т. е. система (4.45) является фильтром низких частот. При проектировании фильтров, как было отмечено выше, удобнее использовать величину

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)\bar{H}(\omega),$$

где $\bar{H}(\omega)$ – сопряженное значение $H(\omega)$.

4.7. Усилительные устройства

Существует большое число усилительных устройств, основная функция которых состоит в усилении частот рабочего диапазона. Физические основы их работы различные:

1. *Магнитные усилители* (МУ) представляют собой электромагнитные устройства, которые позволяют усиливать электрические сигналы как по мощности, так и по напряжению. Они не имеют движущихся частей и по своей конструкции похожи на трансформаторы. Единым для всех магнитных усилителей является использование физических свойств материалов, вследствие чего индук-

тивное сопротивление с ферромагнитным сердечником зависит от подмагничивания сердечника постоянным полем.

Кривая зависимости между намагничиванием B и напряженностью H имеет нелинейный характер, вследствие чего при неизменном значении переменной составляющей индукции B , при увеличении постоянных составляющих $B' = B''$ и т. д. по мере перехода в область насыщения напряженность поля H'' будет резко возрастать по амплитуде.

С точки зрения динамических свойств МУ нужно рассматривать как инерционные звенья, тогда комплексный коэффициент передач (ККП) МУ записывается в виде

$$K(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T_{bx}},$$

где T_{bx} – общая постоянная времени входного контура.

Электромагнитные усилители (ЭМУ) используют энергию вспомогательного двигателя вращающегося вала генератора. Эта механическая энергия превращается в электрическую на выходе ЭМУ.

2. *Электромагнитный усилитель* представляет собой последовательное соединение двух инерционных звеньев, соответствующих управляющей обмотке поперечной цепи. ККП ЭМУ записывается в виде

$$K(j\omega) = \frac{k_{\text{ЭМУ}}}{(1 + j\omega T_y)(1 + j\omega T_g)},$$

где $k_{\text{ЭМУ}}$ – коэффициент усиления;

T_y – постоянная времени управляющей обмотки;

T_g – постоянная времени поперечной цепи.

3. *Многокаскадные усилители*, например полупроводниковые, реализуются как состоящие из n одинаковых каскадов, каждый из которых является инерционным звеном, тогда передаточная функция записывается в виде

$$K(p) = \frac{k^n}{(1 + pT_a)^n} \approx k^n e^{-pnT_a}, \quad (4.47)$$

где T_a – постоянная времени выходной цепи усилителя.

Формула (4.47) справедлива в диапазоне частот $\omega T_a \ll 1$, и многокаскадный усилитель представляет собой звено с чистым запаздыванием.

4. *Усилители постоянного тока* (УПТ). Применение постоянного тока в исполнительных устройствах, например, реверсивных двигателях, магнитных муфтах и т. д., требует усилительных устройств, к которым предъявляются жесткие требования: коэффициент усиления должен быть порядка $(3-5) \cdot 10^8$. Полоса пропускания должна быть достаточно широкой (от нуля до нескольких килogerц), что обеспечивает достаточное быстродействие. УПТ должны обладать высоким уровнем стабильности в работе.

4.8. Детекторы (различители)

Различители – сравнивающие устройства, простейшие типы устройств регулирования, выполняющих операцию вычитания. Условное обозначение сравнивающего устройства изображено на рис. 4.6.

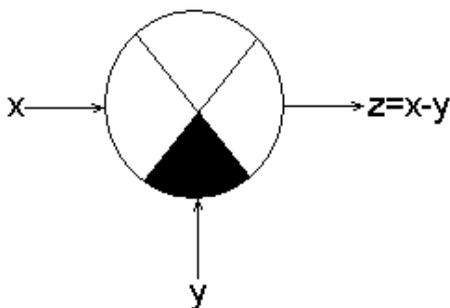


Рис. 4.6. Сравнивающее устройство

Различители одновременно с операцией вычитания выполняют преобразование одного вида сигналов в другой или их усиление.

Сигнал обычно передается изменением какой-либо электрической величины: уровня тока или напряжения, амплитуды, фазы или частоты синусоидальных колебаний.

Различители уровня (РУ) предназначены для преобразования разности двух входных напряжений в выходное напряжение. Выходное напряжение V зависит от входных напряжений u_1, u_2 :

$$V = k(u_1, u_2),$$

где k – коэффициент усиления.

Если частотный спектр входного сигнала так широк, что пренебречь параметрами схемы нельзя, то блок-схема различителя будет состоять из сравнивающего устройства и инерционного звена.

Различители фазы (РФ) преобразуют разность двух фаз синусоидальных колебаний одинаковой частоты в напряжение:

$$V = F(\varphi),$$

где $F(\varphi)$ – однозначная, периодическая по φ , непрерывная функция, зависящая в общем случае от амплитуд входных сигналов;
 φ – сдвиг фаз.

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2}{\pi} k u \cos \varphi,$$

где k – коэффициент усиления.

Различители частоты предназначены для преобразования разности частот в напряжение:

$$V = F(\omega - \omega_0) = F(\Delta\omega),$$

где ω_0 – эталонная частота.

Различители амплитуд (РА) предназначены для преобразования разности амплитуд в напряжение. В цепи регулирования мехатронной системы РА представляются безынерционным звеном и одним или двумя инерционными в зависимости от спектра входного воздействия.

Если характерный масштаб изменения входного сигнала – периода постоянной времени различителя, то полоса пропускания различителя значительно шире спектра входных сигналов и различитель можно считать безынерционным звеном.

4.9. Электронные цепи

Аналоговые стандартные блоки, состоящие из резисторов, конденсаторов, индукторов и транзисторов, требуют математического описания. Экспоненциальному возрастанию или убыванию переменных величин, а также производным (скорости изменения) не всегда удобно дать словесное описание, вследствие чего попытка проектирования аналоговых цепей без использования математических уравнений приводит к резкому ограничению сложности устройства. Соотношения между током и напряжением, легко отражаемые на языке математики, плохо поддаются описанию на естественных языках.

Цифровые стандартные блоки на интегральных схемах (ИС), напротив, трудно описать математически. При проектировании комбинационных схем используют полуматричные методы, такие как метод карт Карно или методы Квайна и Мак-Класки, но область их применения в значительной степени ограничена. При введении сложных временных соотношений эти методы становятся бесполезными. Диаграммы переходов являются эффективным инструментом анализа систем, однако с точки зрения проектирования цифровых стандартных блоков они оставляют желать лучшего. Были разработаны классические методы минимизации количества вентилей. В большинстве случаев более важными параметрами являются количество выводов и число кристаллов.

В большинстве случаев при проектировании цифровых систем достаточно использовать диаграммы логических схем, дополняемые описаниями на естественных языках (схематика).

В системах машинного проектирования используются более мощные полуматематические методы.

До недавнего времени основным преобразованием являлось топологическое преобразование элементов, из которых строится система. Схемы на основе резисторов, конденсаторов, индукторов и нелинейных активных приборов подчиняются сложным уравнени-

ям. Например, напряжения на элементах могут быть описаны следующим образом:

1) линейной зависимостью

$$e = iR \text{ (резистор);}$$

2) интегралом

$$e = (1/C) \int idt \text{ (конденсатор);}$$

3) производной

$$e = L (di/dt) \text{ (индуктор);}$$

4) нелинейной функцией

$$e = f(i) \text{ (транзистор).}$$

Следствием этих соотношений является тот факт, что разработчик, желающий проектировать систему на базе этих основных элементов, должен иметь дело с интегродифференциальными уравнениями, решение которых не всегда легко получить. Вместо указанных элементов можно использовать топологически преобразованные ИС, соединенные одна с другой, при этом интересующие проектировщика состояния описываются при помощи булевой алгебры и двоичной арифметики. Соотношениями, зависящими от времени, обычно являются простые неравенства. Отметим, что по сравнению с усилиями, затрачиваемыми на построение реальных аналоговых схем, цифровое проектирование является более простым.

Переход от аналоговых стандартных блоков к цифровым устройствам коренным образом меняет методы конструирования в результате упрощения соотношений, описывающих связи между устройствами. Цифровые устройства должны быть изготовлены из аналоговых элементов: резисторов, конденсаторов и индуктивностей.

Рассмотрим использование аналоговых элементов в цифровых устройствах, а также кратко опишем свойства таких основных устройств, называемых *логическими схемами*. *Интегральные схемы*, состоящие из нескольких логических схем, называются интегральными схемами с малым уровнем интеграции (МИС). Более сложные соединения логических схем в цифровых подсистемах известны как интегральные схемы со средним уровнем интеграции (СИС).

4.9.1. Двоичные устройства на аналоговых элементах

Сопротивление электрическому току в среде является одним из основных параметров для большей части электрических схем. К числу первых практических использований переменного сопротивления относится микрофон Белла, в котором изменение давления воздуха приводит к изменению плотности угольного порошка и его сопротивления таким образом, что переменный электрический ток, протекающий через угольный порошок, воспроизводит изменение давления воздуха. Зависимость величины тока, протекающего через резистор, от величины сопротивления резистора определяется законом Ома

$$U = IR,$$

где U – напряжение;

I и R – соответственно ток и сопротивление.

Если вместо резистора с сопротивлением R использовать два последовательно соединенных резистора с сопротивлениями R_1 и R_2 , то

$$U = IR = I(R_1 + R_2) = IR_1 + IR_2 = U_1 + U_2.$$

Если же к двум последовательно соединенным резисторам приложено постоянное напряжение и сопротивление одного из них изменяется, то напряжение на каждом резисторе изменяется таким образом, что величина приложенного напряжения остается постоянной (рис. 4.7).

Для того чтобы получить более полное представление об изменении входного напряжения $U_{\text{вх}}$ в зависимости от изменения сопротивления, рассмотрим несколько случаев. Так, если $R_1 = R_2$, то

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{2}U. \text{ Более интересным является случай, когда } R_1 = 99R_2;$$

тогда

$$V = I(R_1 + R_2) = I(100R_2),$$

и, следовательно,

$$I = U/100R_2.$$

Таким образом, падение напряжения на сопротивлении R_2 определяется произведением

$$IR_2 = (U/100R_2) R_2 = 0,01U.$$

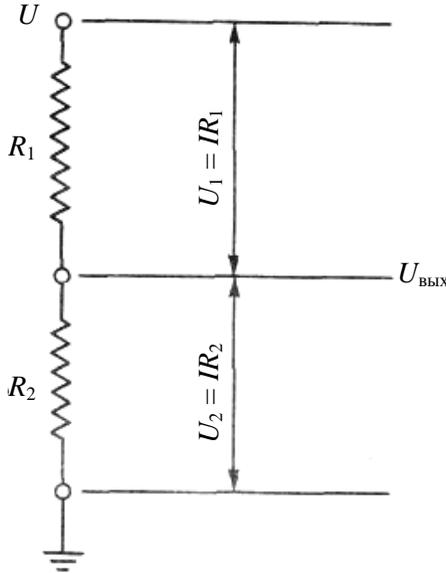


Рис. 4.7. Схема двоичного устройства

Если же $R_2 = 99R_1$, то падение напряжения на сопротивлении R_2 составит $0,99U$. Отсюда следует, что если поддерживать величину сопротивления R_1 постоянной, а величину сопротивления R_2 изменять в пределах от первого до четвертого порядка, выходное напряжение можно получать в пределах 1–99 % величины приложенного напряжения. Большая часть применений линейной электроники связана с использованием небольших напряжений для изменения сопротивления в целях получения больших изменений выходной величины. Все это относится к способам усиления сигналов. В цифровой электронике существенным является не изменение выходного напряжения в пределах некоторого диапазона, а тот факт, что оно может становиться приблизительно равным либо приложенному напряжению, либо потенциалу земли. В первом случае говорят, что на выходе высокий уровень, во втором – что он низкий (состояние

низкого уровня). Существуют также и другие названия этих состояний: «Включено»/«Выключено», ИСТИНА/ЛОЖЬ, 1/0 и т. д.

Поскольку рассматриваемые электронные процессы изучаются в физике твердого тела, то здесь будет приведено лишь краткое описание физических явлений в электронных приборах.

Как известно, атомы примесей вводятся в кристаллическую решетку для изменения структуры энергетических зон таким образом, что приложение к кристаллу управляющих потенциалов обеспечивает изменение этих зон. Сопротивление электрическому току, протекающему через кристаллическую решетку, в значительной степени зависит от энергетических зон. Следовательно, изменение структуры энергетических зон сильно влияет на величину сопротивления. Так как кристалл кремния покрыт слоем окиси металла, то соответственно полупроводниковый прибор называют прибором со структурой *металл-окисел-полупроводник (МОП-прибор)*. Приложение к затвору из окиси металла электрического поля обуславливает изменение сопротивления. Таким образом, *полевой транзистор* со структурой металл-окисел-полупроводник (полевой МОП-транзистор) регулирует величину тока в зависимости от величины приложенного электрического поля. Сущность работы полевого МОП-транзистора заключается в том, что его затвор управляет величиной тока между истоком и стоком. Физическая структура и схемное обозначение полевого МОП-транзистора даны на рис. 4.8.

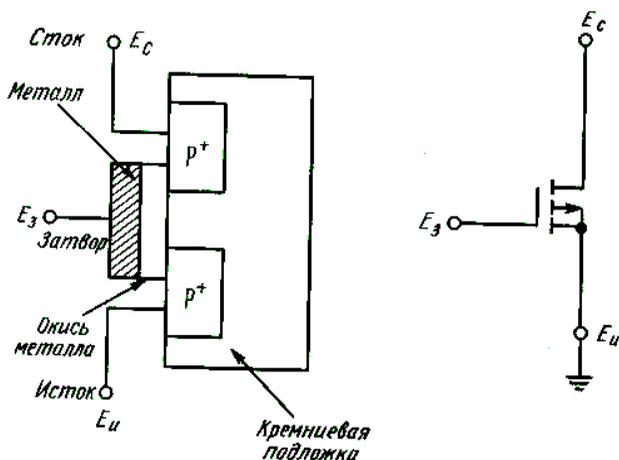


Рис. 4.8. Логический элемент «Истина–ложь»

Поскольку полевой МОП-транзистор можно представить в виде переменного сопротивления, управляемого потенциалом зазора, заменим переменное сопротивление R_2 резисторной пары полевым МОП-транзистором (рис. 4.9).

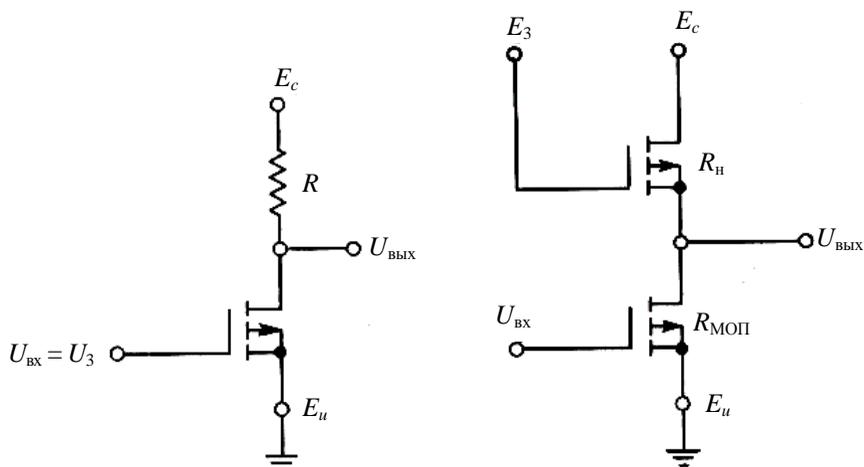


Рис. 4.9. Полевой МОП-транзистор

Так как сопротивление полевого МОП-транзистора изменяется в зависимости от изменения потенциала затвора, то любое сопротивление (в пределах диапазона сопротивлений полевого МОП-транзистора) можно получить посредством приложения соответствующего потенциала к затвору полевого МОП-транзистора. Таким образом, постоянное сопротивление нагрузки, изображенное в схеме как сопротивление R , можно также заменить полевым МОП-транзистором (см. рис. 4.9). Теперь резисторная пара образована полевыми МОП-транзисторами, при этом сопротивление верхнего резистора, соответствующее сопротивлению нагрузки $R_н$, фиксируется подачей постоянного потенциала затвора, а сопротивление нижнего, или переменного, резистора регулируется переменным потенциалом затвора.

Ограничивая величину $U_{вх}$ значениями, которые обеспечивают удовлетворение величины сопротивления полевого МОП-транзистора $R_{МОП}$ одному из следующих условий:

$$R_{\text{МОП}} > 9R_{\text{н}}$$

или

$$R_{\text{МОП}} < (1/9)R_{\text{н}},$$

можно получить выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ либо больше $0,9E_c$, либо меньше $0,1E_c$ соответственно. Пока мы пренебрегаем переходными значениями между этими уровнями. Выходное напряжение считают высоким ($U_{\text{вых}} > 0,9E_c$) или низким ($U_{\text{вых}} < 0,1E_c$), а полупроводниковый прибор, схема которого показана на рис. 4.8 справа, является базовым элементом схем на полевых МОП-транзисторах. В больших интегральных схемах (БИС, схемы с большим уровнем интеграции) в одном (монокристаллическом) кремниевом кристалле размещаются тысячи таких приборов.

Технология БИС, в которой используются p -канальные МОП-транзисторы, позволяет получать монокристаллический центральный процессор (ЦП). Соотношения между входными и выходными напряжениями имеют логические аналогии, что следует из приводимого ниже анализа. Поскольку полупроводниковые приборы выполняются на одном кристалле, в схеме на рис. 4.10 изображена общая подложка. Схема работает таким образом, что низкому входному напряжению соответствует высокое выходное напряжение и, наоборот, высокое входное напряжение обеспечивает низкое напряжение на выходе. Способность этого физического прибора инвертировать напряжение имеет логическую аналогию с функцией НЕ, т. е. логическое описание этой зависимости есть ВЫХОД = НЕ (ВХОД). Но одной только схемы НЕ недостаточно для реализации различных других логических операций. Расширим область применения МОП-транзисторов, рассмотрев схему с двумя последовательно включенными переменными сопротивлениями R_A и R_B . Так как нас интересуют только состояния с весьма большим и малым сопротивлениями (по отношению к сопротивлению нагрузки), то очевидно, что сумма обоих сопротивлений мала по сравнению с сопротивлением нагрузки только в том случае, когда величины R_A и R_B незначительны.

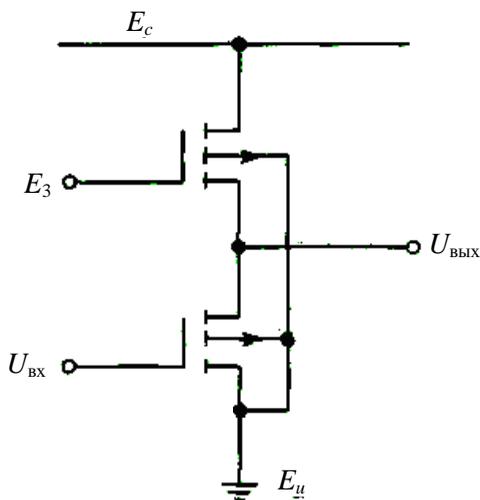


Рис. 4.10. Логический элемент НЕ И

В схеме с двумя полевыми МОП-транзисторами, соединенными последовательно с нагрузочным полевым МОП-транзистором (рис. 4.11), выходное напряжение будет низким лишь в том случае, когда входные напряжения U_A и U_B высокие. Поскольку инверсия сохраняется, логическое выражение, описывающее эту зависимость, имеет вид

$$K_{\text{вых}} = \text{НЕ}(U_A \text{ И } U_B).$$

Это выражение настолько часто употребляется, что сокращенно названо логической функцией NAND (НЕ И). Черта над символами, плюс (+) и точка (•) в системе стандартных логических обозначений в электронике соответствуют логическому отрицанию, операциям ИЛИ и И соответственно. В данной системе обозначений выражение для выходного напряжения примет вид

$$\text{ВЫХОД} = A \cdot B.$$

Символы, соответствующие напряжениям, здесь вообще опущены, поскольку для нас интерес представляют прежде всего логические соотношения и только затем – уже физические величины. Прибор с цепью общей подложки, реализующий эту логическую функцию, показан на рис. 4.10. Так как мы будем рассматривать только

полевые МОП-транзисторы на общей подложке, цепь подложки схематически изображать в дальнейшем не будем. Две схемы без цепи подложки показаны на рис. 4.12, при этом под каждой электрической схемой дано ее логическое обозначение.

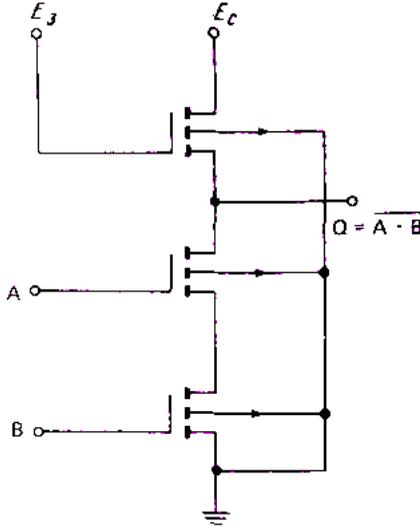


Рис. 4.11. Логический элемент ИЛИ И

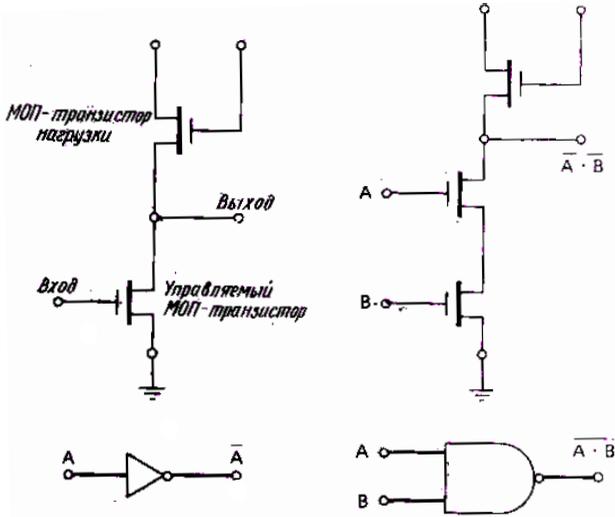


Рис. 4.12. Схема без цепи подложки

Из сказанного выше следует, что логическую схему ИЛИ можно построить на двух параллельно включенных полевых МОП-транзисторах. Фактически она выполняется в виде инвертора, или схемы НЕ ИЛИ, по тем же соображениям, что и схема НЕ. Можно было бы построить логические схемы И и ИЛИ, подав выходное напряжение на вход инвертора, но дополнительные затраты в этом случае, т. е. лишний инвертор, не оправданы.

На языке теории множеств соответствующие схемы изображены на рис. 4.13.

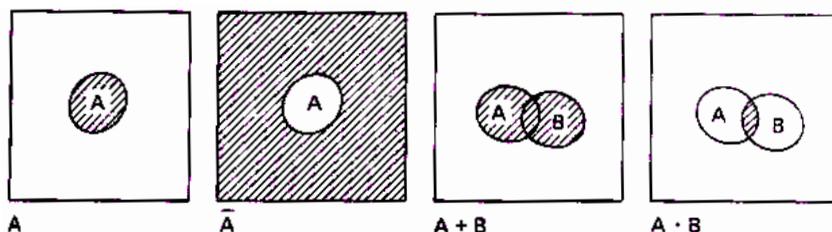


Рис. 4.13. Логические операции на языке множеств

Причины, обусловившие переход к двоичным системам, весьма разнообразны, но, пожалуй, самым очевидным достоинством таких систем является снижение требований, предъявляемых к выходу двоичной схемы, по сравнению с выходом аналоговой схемы. Информация в аналоговой схеме представлена в виде величины напряжения (или тока), и любые отклонения от требуемого значения, даже самые малые, приводят к потере информации. С двоичной схемой связан всего лишь 1 бит информации, значение которого определяется тем, в каком из двух возможных состояний находится выход схемы.

Рассмотрим проблему передачи фиксированного количества информации, например 20 бит, посредством электронного сигнала. Каждый бит информации позволяет сделать выбор между двумя равновероятными вариантами; поэтому с использованием 20 бит можно представить 220 или 1048576 возможных вариантов. Таким образом, весь диапазон выходного сигнала делят на 220 равных частей и, определяя, в какой части этого диапазона находится аналоговый выходной сигнал, выделяют 20 бит информации.

Для диапазона напряжений 0–10 В приращение составляет 10 мкВ, и сконструировать реальную схему с такой точностью в пределах

существующих диапазонов изменения рабочих температур и помех очень трудно или по крайней мере дорого. Один из вариантов решения проблемы заключается в использовании 20 двоичных схем, каждый выход которых несет 1 бит информации. Хотя это и ведет к увеличению числа используемых схем, зато стоимость каждой такой схемы значительно снижается.

Рассмотрим другой пример. Получение 40 бит информации обеспечивается либо аналоговой схемой, способной генерировать и выделять напряжение 10 пВ, либо 40 обычными двоичными схемами типа Включено/Выключено. Очевидно, что при обработке большого количества информации из-за разницы в стоимости предпочтение отдается двоичным схемам. Диаграммы на рис. 4.14 иллюстрируют информационные возможности аналоговой и двоичной схем.

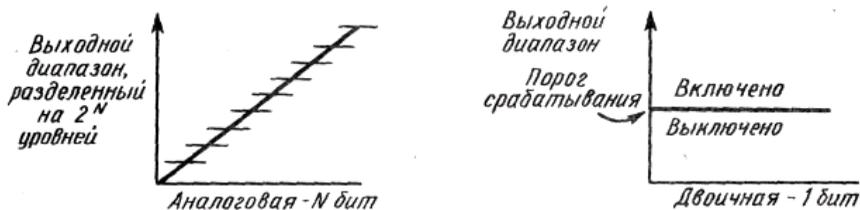


Рис. 4.14. Диаграммы информационных возможностей аналоговой и двоичной схем

В аналоговой схеме напряжение помех в одно приращение, добавленное к выходному сигналу на любом уровне, искажает информацию, тогда как в двоичном устройстве это возможно лишь в определенной области от порога срабатывания. Добавление помех к любому другому значению двоичного выхода не оказывает никакого влияния на работу схемы. Даже эту критическую для двоичных схем область можно исключить, образовав «запрещенную зону», разделяющую две области, при условии что (за исключением переходов) уровень выходного напряжения всегда должен быть выше (в состоянии «Включено») или ниже (в состоянии «Выключено») этой зоны. Данная зона является запрещенной в следующем смысле. Изготовитель прибора гарантирует, что при выполнении определенных, довольно простых, требований в процессе его эксплуатации уровень напряжения включения никогда не станет ниже

минимального значения, а уровень напряжения выключения никогда не превысит установленной величины (при отсутствии помех). Большая часть СИС, используемых для сопряжения БИС на МОП-структурах, – биполярные ТТЛ-схемы; уровни напряжения для этого семейства приборов показаны на рис. 4.15.

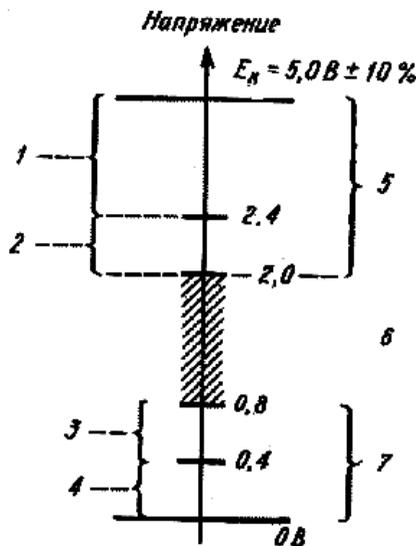


Рис. 4.15. Уровни напряжения семейства приборов СИС:

- 1 – гарантированный диапазон выходного напряжения для логической 1; 2 – гарантированный запас помехоустойчивости постоянной составляющей для логической 1;
- 3 – гарантированный запас помехоустойчивости постоянной составляющей для логического 0; 4 – гарантированный диапазон выходного напряжения для логического 0;
- 5 – допустимый диапазон входного напряжения для логической 1; 6 – для входных сигналов входного напряжения для логического 0

Самые простые *вентильные схемы* или просто *вентили* известны как схемы И, ИЛИ, НЕ ИЛИ и НЕ И. Название схем связано с их обычным использованием. Вентиль И — схема с N входами и одним выходом; при этом на выходе высокий уровень сигнала имеет место в том случае, когда на всех входах также высокий уровень сигналов (т. е. вход 1 И, вход 2 И, вход 3 И...). Работа такой схемы определяется таблицей истинности, представленной на рис. 4.16 вместе с условным обозначением вентиля.

Таблица истинности схемы ИЛИ

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

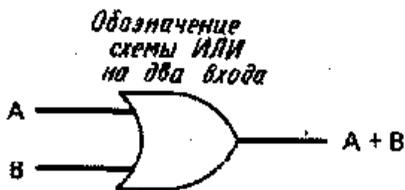


Рис. 4.16. Схема ИЛИ

Для простоты на рис. 4.16 дано условное обозначение схемы И только на два входа. Схема названа *вентилем* (gate) потому, что, как видно из таблицы истинности, один входной сигнал можно использовать для прохождения (gating) через схему другого сигнала. Так как схема полностью симметрична, сигнал на входе *A* назовем условно управляющим сигналом, а сигнал на выходе схемы – сигналом, управляемым сигналом *A*. Пусть сигнал на входе *B* – последовательность прямоугольных импульсов, а на входе *A* – последовательность импульсов гораздо большей длительности. Форма выходного сигнала в зависимости от формы входных сигналов показана на рис. 4.17.

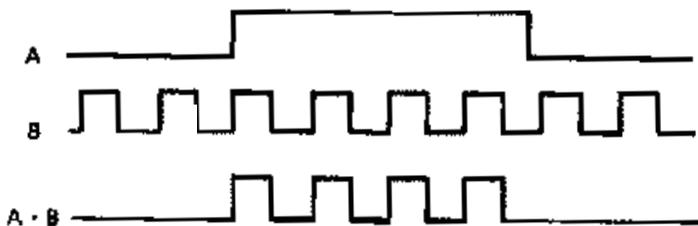


Рис. 4.17. Схема действия вентиля

Другой основной двоичной логической схемой является вентиль ИЛИ. Вентиль ИЛИ – схема с *N* входами и одним выходом, на котором устанавливается сигнал высокого уровня в том случае, если хотя бы на одном из входов действует сигнал высокого уровня (т. е. вход 1 ИЛИ, вход 2 ИЛИ, вход 3 ИЛИ...). Таблица истинности и условное обозначение этого вентиля показаны на рис. 4.18.

Таблица истинности схемы И

A	B	A · B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Рис. 4.18. Схема И

Форма выходного сигнала при действии на входах таких же сигналов, как и в рассмотренном выше случае, показана на рис. 4.19.

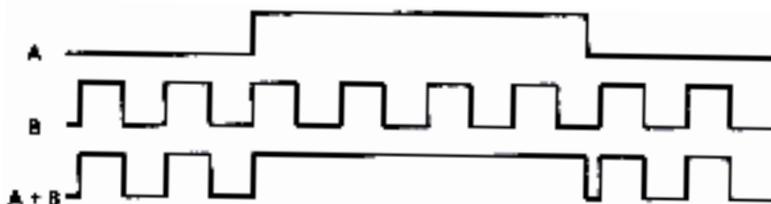


Рис. 4.19. Форма выходного сигнала

Простейшая вентиляная схема – инвертор или схема НЕ, таблица истинности и условное обозначение которой приведены на рис. 4.20.

Таблица истинности инвертора

A	\bar{A}
0	1
1	0

Обозначение инвертора



Рис. 4.20. Схема-инвертор

Использование инверторов в схемах показано на рис. 4.21.

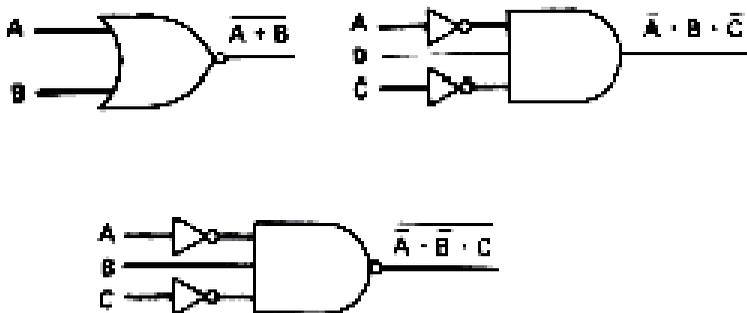


Рис. 4.21. Использование инверторов в логических схемах

Схема ИЛИ с инвертором (см. рис. 4.21 вверху слева) известна как схема НЕ ИЛИ. Другие схемы – вентили И и НЕ И с тремя входами и с инверторами на некоторых из них (см. рис. 4.21). Исходя из стоимости и эффективности, в качестве базовых схем ТТЛ-семейства используют схемы НЕ, НЕ ИЛИ и НЕ И.

Еще одной базовой логической схемой является вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, на выходе которого присутствует сигнал низкого уровня, если на обоих входах сигналы одинакового уровня, и высокого – в противном случае. Таблица истинности и условное обозначение вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ показаны на рис. 4.22.

Таблица истинности схемы ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

A	B	$A \times B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Обозначение схемы ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ



Рис. 4.22. Схема ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

Из таблицы истинности видно, что вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ можно использовать как компаратор для сравнения входных сигналов; на выходе вентиль всегда высокий уровень сигнала при несовпадении последних. Схема ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, реализованная на рассмотренных выше вентилях, показана на рис. 4.23.

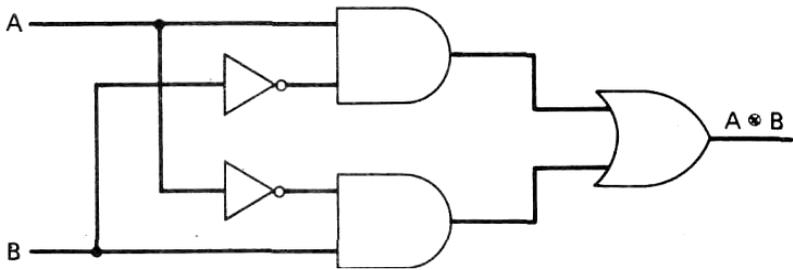


Рис. 4.23. Вентиль схемы ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

Функция сравнения имеет существенное значение при выполнении арифметических и логических операций, однако схема ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ предоставляет еще большие возможности. Следующая схема идентифицирует сумму S и перенос C . Из рассмотрения всех возможных комбинаций входных сигналов видно, что схема вырабатывает соответствующий сигнал суммы и сигнал переноса. Такая схема получила название *полусумматора* (рис. 4.24).

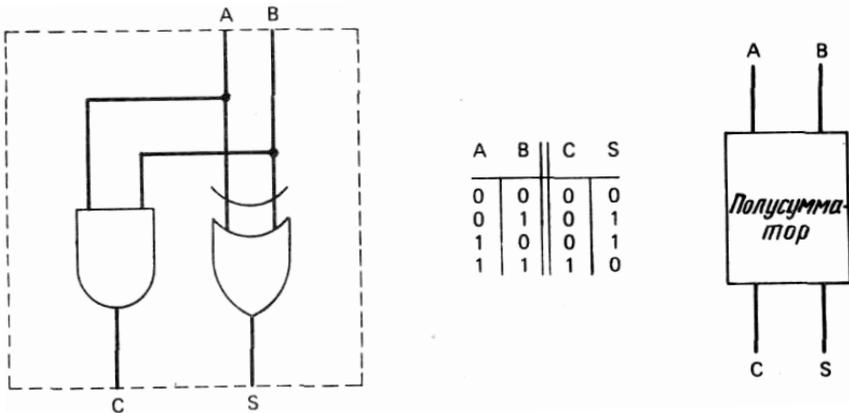


Рис. 4.24. Полусумматор

Схема носит такое название потому, что в ней производится сложение только первых разрядов чисел. Для сложения двух старших разрядов в такой схеме предусмотрены прием и прибавление переноса из предыдущего разряда. Два полусумматора, включенные

так, как показано на рис. 4.25, выдают требуемый результат сложения во всех случаях, что нетрудно проверить по таблице истинности. Такие схемы можно включать в параллель для получения любого числа разрядов. Следовательно, с учетом того, что вычитание, умножение и деление можно производить посредством инвертирования и сложения, мы уже располагаем основными схемами, необходимыми для использования двоичной арифметики.

$C_{вх}$	A	B	$C_{вых}$	Сумма
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

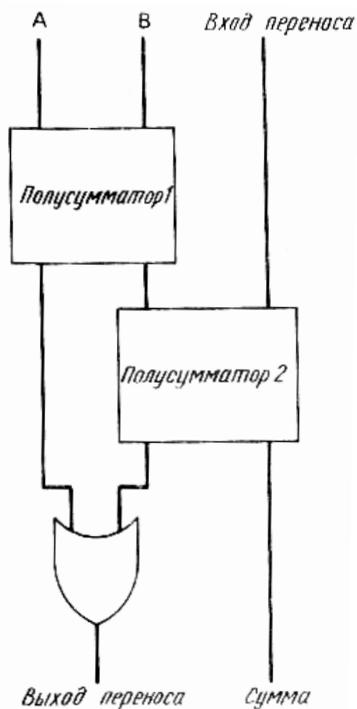


Рис. 4.25. Схема включения полусумматора

При рассмотрении простых вентильных схем следует заметить, что согласно *теореме де Моргана* в курсе дискретной математики функцию НЕ ИЛИ можно выразить через функции И и НЕ, т. е. любую логическую операцию можно свести к двум основным логическим операциям – либо И НЕ, либо ИЛИ НЕ (рис. 4.26).

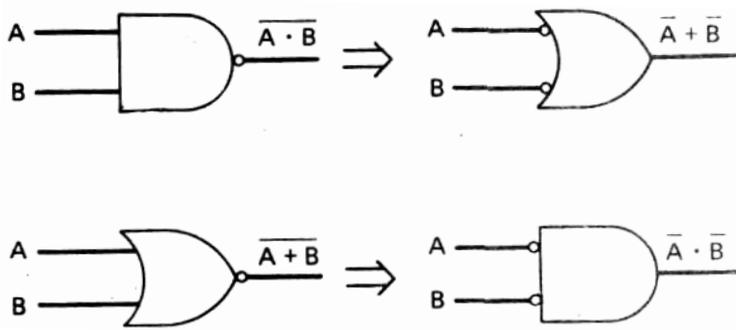


Рис. 4.26. Сведение логических операций к операциям И НЕ, ИЛИ НЕ

Аппаратные средства на уровне вентиляльных схем – это интегральные схемы с малым уровнем интеграции. Имеются модули почти всех используемых логических схем на два, три, четыре входа. Например, основные интегральные схемы семейства TTL 7400 показаны на рис. 4.27.

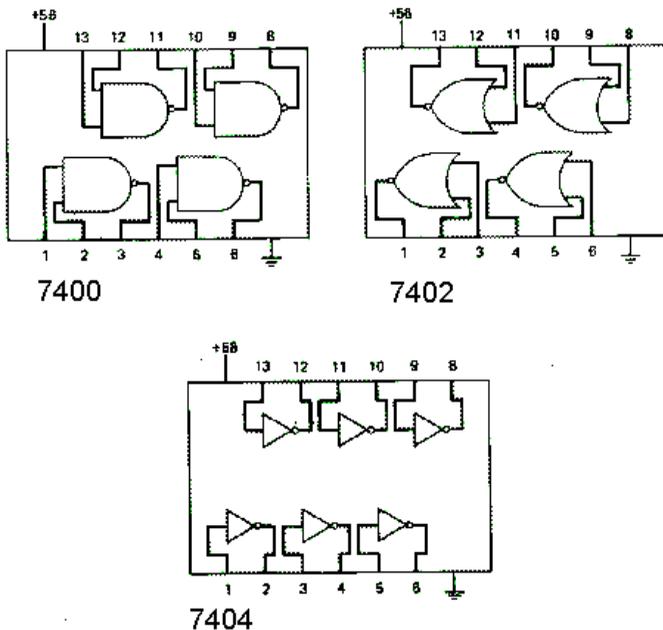


Рис. 4.27. Интегральные схемы семейства TTL 7400

Из анализа работы схемы на рис. 4.28 видно, что это вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, состоящий из вентилях НЕ И.

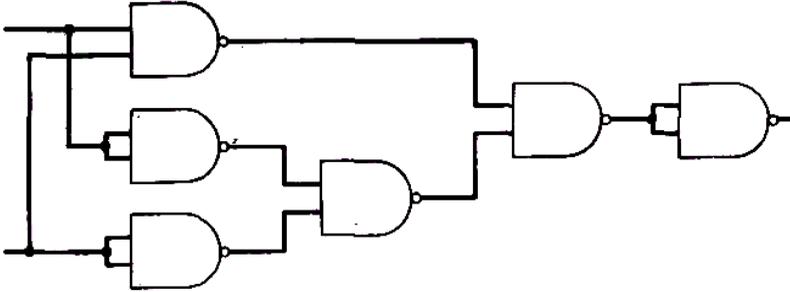


Рис. 4.28. Пример вентиля ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

На аналогичных примерах можно показать, что как функция НЕ И, так и функция НЕ ИЛИ являются основными функциями булевой алгебры, через которые можно выразить все остальные логические функции. Ниже приведено аналитическое доказательство.

Определим функцию НЕ И как

$$f(a, b) = \overline{a \cdot b};$$

тогда

$$\bar{a} = f(a, a);$$

$$a \cdot b = f[f(a, b), f(a, b)];$$

$$a + b = f[f(a, a), f(b, b)].$$

Переход от булевой алгебры к логическим схемам достаточно прост. Рассмотрим равенство

$$y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \overline{(C + D)} + \overline{(A + B)},$$

схемная реализация которого показана на рис. 4.29.

Имеются четыре входа для переменных и один выход результата. Из рассмотрения схемы сразу нельзя сказать, можно ли ее представить в более простом виде. На основании булевых теорем приведенное выше равенство преобразуем к виду

$$y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \overline{(C + D)} + \overline{(A + B)} = \overline{(A + B)} \cdot \overline{(C + D)} + \overline{(A + B)} = A + B.$$

Таким образом, существует более простой и дешевый путь получения того же выхода – реализация функции НЕ ИЛИ переменных A и B , так как выход не зависит от переменных C и D .

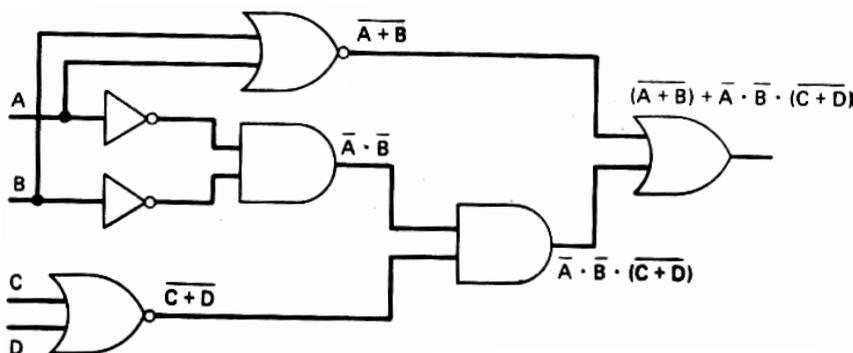


Рис. 4.29. Реализация перехода к логическим схемам

В качестве примера использования дискретных логических вентилей рассмотрим следующий.

Пример

Я пойду в кино, если идет хороший фильм и есть машина или если телевизор сломан и нет дождя. Построить схему, которая даст ответ, пойду ли я в кино, при задании соответствующих условий. Условие можно записать в виде логического выражения

$$F(A, B, C, D) = (A \cdot B) + (C \cdot D),$$

где A – демонстрируется хороший фильм;

B – есть машина;

C – телевизор сломан;

D – дождя нет.

Схемная реализация этого выражения показана на рис. 4.30.

Подсоединив выключатели к входам A , B , C и D и индикаторную лампочку к выходу, самостоятельно получить ответы на вопросы, сформулированные в виде выражения F (ДА, НЕТ, НЕТ, ДА).

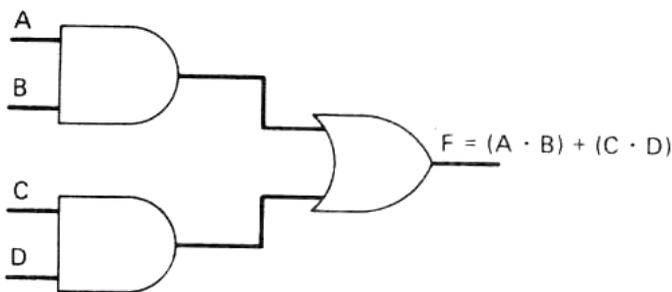


Рис. 4.30. Схемная реализация выражения ДА, НЕТ

4.9.2. Цифровые стандартные блоки

Самые простые из существующих в настоящее время стандартных блоков – блоки, выполняющие логические операции И, НЕ И, ИЛИ, НЕ ИЛИ и ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ над одноразрядными двоичными словами, число которых находится в пределах 2–12. Имеются *блоки сложения* двоичных кодов различной длины, *блоки для подсчета* двоичных импульсов на входе и выдачи их суммы в двоичном коде, а также *счетчики по модулю N*, вырабатывающие один выходной импульс на каждые N входных импульсов.

Блоки компараторов сравнивают два слова в двоичном коде, находящихся в двух входных портах, и в третий порт выдают результат сравнения. *Блоки умножения* умножают два двоичных числа с прибавлением третьего для получения арифметического результата в двоичном коде.

Существуют стандартные *блоки-дешифраторы* двоичных n -разрядных слов команд для выбора одной из 2^n выходных линий и аналогичные *функциональные блоки*, выбирающие одну из 2^n входных линий. *Фиксаторы* принимают и хранят n -разрядные слова, предназначенные для последующего использования. *Последовательные регистры* получают последовательные данные и хранят их в виде цепочки рециркуляции. *Преобразователи* принимают n -разрядные последовательные слова, поступающие по входной линии, и выдают их в параллельном коде на n выходов или последовательно на выходную линию. Имеются также стандартные блоки, выполняющие как ту, так и другую функцию. *Шифраторы приоритетов* выделяют сигнал с наивысшим приоритетом из любой комбинации

сигналов, поступающих по $2n$ входным линиям, и выдают n -разрядное двоичное слово, идентифицирующее эту линию. К увеличивающемуся числу блоков всех типов относятся так называемые *тристабильные устройства*, которые кроме обычных двух состояний Включено/Выключено имеют третье состояние, в котором они для остальной части схемы фактически «не существуют».

Имеются блоки, преобразующие n -разрядные слова в m -разрядные слова, где m – любое целое число, а также блоки, предназначенные для накопления 16 384 бит данных и случайной выдачи любого из них за один временной цикл. Многие из устройств можно группировать для увеличения либо числа обрабатываемых слов, либо длины последних, либо числа и длины слов одновременно. Одни стандартные блоки предназначены для выдачи последовательности импульсов в зависимости от входного слова, другие – для выработки признака четности при передаче или контроле на четность принимаемых кодов. Некоторые запоминающие регистры изменяют свое содержимое в зависимости от команды в порте управления, а блоки памяти, адресуемые по своему содержимому, делают возможным ассоциативный поиск данных на основе некоторых характеристик самих данных. Многофункциональные блоки, такие как АЛУ и ЦП, выбирают команды и данные, выполняют команды и выдают результаты.

Применяется блок *асинхронного приемопередатчика*, который в режиме передачи принимает параллельные слова, добавляет к ним признаки начала, четности и конца слова и передает эту информацию последовательно в аналогичный блок другой асинхронной системы, работающей в режиме приема. Приемник идентифицирует признак начала слова, принимает последовательное слово, контролирует его на четность, отыскивает признак конца слова, исключает дополнительные признаки, затем выдает признак приема слова и само слово в параллельном коде. Другие внутрисистемные блоки принимают до n m -разрядных кодов с одной скоростью и передают их с другой скоростью.

Импульсные синхронизаторы предназначены для синхронизации поступающих импульсов с тактовыми импульсами системы или с другой командой синхронизации.

Блоки сопряжения имеют одинаковые характеристики, что позволяет их непосредственно соединять. Есть также блоки сопряже-

ния семейств, входы которых имеют характеристики одного семейства, а выходы – характеристики другого семейства.

4.9.3. Аналого-цифровые стандартные блоки

Кроме чисто цифровых стандартных блоков, которые были описаны выше, имеется много различных аналого-цифровых блоков, включающих преобразователи кода во временные интервалы, цифроаналоговые (ЦАП) и аналого-цифровые преобразователи (АЦП) напряжения. По одному или более входу или выходу эти блоки совместимы с одним семейством ИС, по остальным входам и выходам – с цифровыми преобразователями напряжения. Эти устройства можно эффективно использовать для сопряжения цифровых систем с аналоговыми.

В качестве наглядного примера таких устройств можно привести *светоизлучающий диод*, воспроизводящий буквенный символ светящимися точками или линиями. Блок противоположного типа – *фотодиодная матрица*, выдающая двоичные 0 или 1 в зависимости от интенсивности света на соответствующем фотодиоде. Еще одним подобным устройством является *фотоматрица* с автоматическим сканированием, состоящая из большого числа рядов элементов, сканирование которых осуществляется аналогично тому, как это делается в телевидении. Входная величина – интенсивность света, выходная – последовательность импульсов зарядки, амплитуда которых прямо пропорциональна интенсивности света соответствующего фотодиода. Синхронизация автоматического сканирования матрицы может осуществляться тактовыми импульсами, совместимыми с устройствами соответствующего семейства цифровых блоков. Существует также большое количество различных преобразователей световых величин в код и кода в световые величины, которые можно считать основными стандартными блоками для разработчиков.

Цифроаналоговые преобразователи напряжения преобразуют n -разрядные двоичные коды, поступающие на дискретные входы, в один из 2^n возможных уровней напряжения. *Аналого-цифровые блоки*, наоборот, устанавливают, какому из 2^n уровней напряжения соответствует уровень входного напряжения, и выдают n -разрядный двоичный код, содержащий эту информацию.

Другие блоки реагируют на переходы пороговых значений, изменяя состояние своего выхода с двоичного 0 на двоичную 1, когда

такие переходы имеют место. *Нуль-детекторы* изменяют состояние своего выхода, если входное напряжение переходит уровень 0. Некоторые *пороговые детекторы* являются приборами мгновенного действия в том смысле, что в каждый момент времени выход определяет состояние входа, тогда как другие устройства срабатывают только при переходе входным напряжением определенного порогового уровня, причем это состояние запоминается до поступления команды СБРОС.

Более сложные блоки измеряют непрерывное входное напряжение и выдают четырехразрядный двоично-десятичный код для управления дисплеями или другими цифровыми блоками. Таймер, совместимый с цифровыми блоками и вырабатывающий импульсы длительностью от микросекунд до часов, является в высшей степени универсальным стандартным блоком.

Имеется довольно большое семейство *линейных устройств*. Так, для сопряжения стандартных цифровых блоков с нерегулируемым источником питания можно использовать *прецизионные регуляторы напряжения*. К другим линейным устройствам, которые редко используются с дискретными системами, относятся *усилители мощности, видеоусилители, операционные и дифференциальные усилители*. Имеются также *детектор ЧМ-сигналов, блок ограничителя, телевизионные системы, блок балансного модема* для системы связи.

Таким образом, использование элементов с переменным сопротивлением в схеме делителя напряжения дает возможность получить *двустабильный* или *двоичный* схемный элемент. Для простоты из большого разнообразия двустабильных элементов здесь рассмотрено только использование полевых МОП-транзисторов. На нескольких простых схемах с этими приборами (см. рис. 4.9–4.30) показано, что зависимость выходных напряжений от входных напряжений определялась логическими функциями НЕ, И, ИЛИ и т. д. Затем посредством комбинации различных вентилях были получены схемы компаратора (ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ) и сумматора. Эти основные логические схемы можно использовать как для выполнения логических операций и операций двоичной арифметики в компьютере, так и для конструирования более сложных элементов со средним уровнем интеграции. Выше был рассмотрен перечень некоторых классов компонентов СИС.

Что касается основных вентилях, то здесь следует заметить, что логическая интерпретация функции вентиля – дело разработчика.

Согласно принятому условию, в терминах «положительной логики» считают входной сигнал 5 В высоким уровнем или ИСТИНОЙ, а 0 В – низким уровнем или ЛОЖЬЮ. В этом случае устройства работают так, как описано выше. Если же для сигналов 0 и 5 В были приняты противоположные значения, то пришлось бы использовать теорему де Моргана для определения того, что вентиль НЕ И положительной логики становится вентилем ИЛИ отрицательной логики и т. д. В принципе, возможно любое обозначение при условии постоянства его использования.

4.10. Запоминающие элементы

Схемы, рассмотренные выше, являлись схемами мгновенного срабатывания в том смысле, что выходной сигнал следовал непосредственно за входным сигналом. Во многих случаях необходимо сохранить информацию о том, что какое-то событие имело место. Вряд ли пройдет применение счетчик импульсов, который всякий раз после прохождения импульса возвращается в исходное состояние. Необходима схема, которая могла бы переходить из своего исходного устойчивого состояния в другое устойчивое состояние, т. е. *двустабильная схема*, остающаяся во втором состоянии по прошествии события, вызвавшего ее переход в это состояние.

Как уже было показано выше, все комбинационные логические схемы можно построить только на вентилях НЕ И; поэтому запоминающий элемент можно создать посредством использования лишь этих вентилях. В основу построения такого элемента положен следующий метод: вентили соединены таким образом, чтобы входной сигнал, поступающий на один из них, как-то воздействовал и на другие вентили. Такое соединение является, вообще говоря, необходимым, так как один вентиль НЕ И не может запоминать информацию. Поэтому выход одного вентиля НЕ И подсоединяется обратно ко входу (или входам) других вентилях НЕ И схемы. Проанализировав вопрос о необходимости обратной связи, попытаемся определить минимально необходимое число таких вентилях. В данном случае интуитивно можно предположить, что двустабильности можно достигнуть обеспечив симметричность схемы, а для наиболее простой двухвентильной схемы обратная связь осуществляется таким образом, что выход одного вентиля НЕ И соединен со входом

другого вентиля. Такая схема с перекрестными соединениями показана на рис. 4.31.

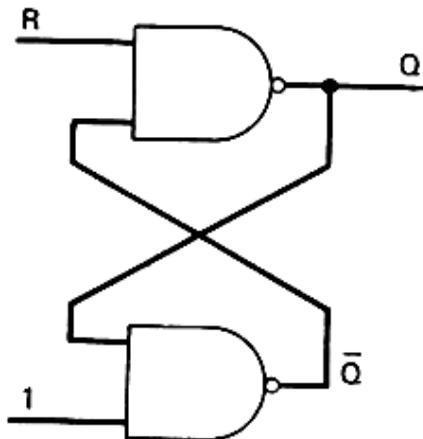
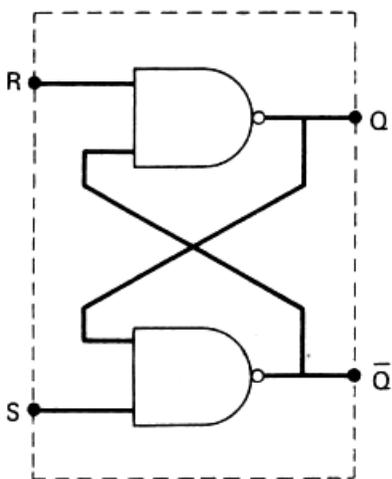


Рис. 4.31. Схема с перекрестными соединениями

Предположим, что на нижний вход схемы действует сигнал, соответствующий логической 1, а на выходе Q – логическому 0. Тогда на выходе Q будет сигнал, соответствующий логической 1, и если на вход R также воздействует сигнал, соответствующий логической 1, то схема будет находиться в устойчивом состоянии. Предположим, что вход R – управляющий. Рассмотрим, что произойдет со схемой, если на входе R установится низкий уровень. В соответствии с таблицей истинности вентиля НЕ И на выходе Q в этом случае установится высокий уровень, который вызовет установку низкого уровня на выходе \bar{Q} . То, что на выходе \bar{Q} уровень сигнала стал низким, не скажется на уровне выхода Q , который останется высоким. Это состояние схемы также устойчивое. Важно то, что когда уровень на входе R становится опять высоким, уровень на выходе Q остается неизменным. Таким образом, схема в целом фиксирует тот факт, что «на вход R поступил 0 в какой-то момент времени в прошлом». Полная симметрия, разумеется, обеспечивает выполнение симметричной операции. Вместо уровня, соответствующего логической 1, на нижнем входе может быть произвольный уровень S . Таблица истинности для такой схемы, получившей название *RS-триггера*, приведена рядом с ее схемным обозначением на рис. 4.32.



R	S	Q	\bar{Q}
0	0	Неопределенно	
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	Не изменяется	

Рис. 4.32. R-S-триггер

Таким образом посредством простой и недорогой схемы обеспечивается запоминание информации. Подобная элементарная схема называется *фиксатором*, так как происходящие на любом из ее входов соответствующие изменения переводят схему в другое состояние. В настоящее время имеется много других схем для запоминания информации, но все они работают по принципу элементарного фиксатора.

Фиксатор вводит в рассмотренные схемы новый параметр – *предысторию*. До его ввода состояние выхода любой схемы на вентилях зависело от сигналов на ее входах в конкретный момент времени. Теперь же можно строить схемы, сигнал на выходе которых будет зависеть не только от входных, но и от *предшествующих* сигналов. При такой возможности запоминания встает новая проблема. Во всех приведенных выше рассуждениях предполагалось, что, подобно множеству электронов, основные элементы по существу идентичны. Тот факт, что элементы практически никогда не бывают в точности одинаковыми, означает, что одни из них будут изменять состояние быстрее других и поэтому могут возникнуть непредусмотренные *промежуточные* состояния. Ранее эти состояния не оказывали никакого влияния из-за их скоротечности, однако сейчас появилась возможность запоминания информации, обусловленной этими (нежелательными) состояниями. Таким образом, проблема проектирования во многих случаях становится труднопреодолимой.

Эта особенность большинства комбинационных логических схем получила название проблемы *состязаний* или *гонок*. Прежде чем приступить к ее рассмотрению, определим элементарный *RS*-триггер в терминах перекрестных вентилей НЕ ИЛИ (рис. 4.33).

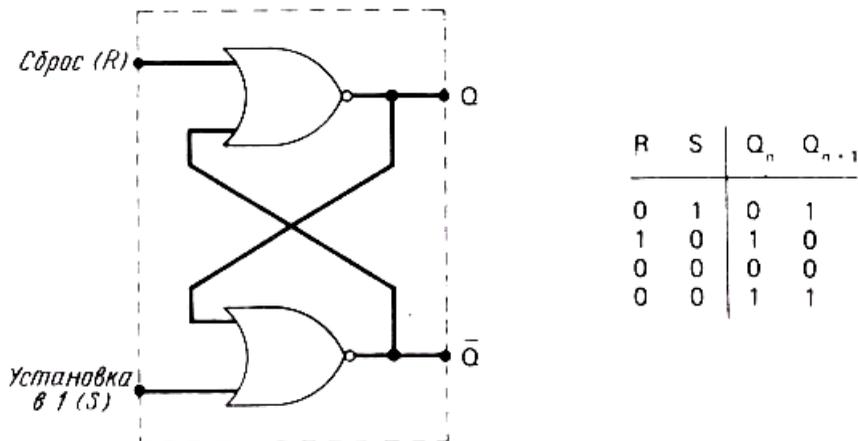


Рис. 4.33. *R-S*-триггер, реализующий схему НЕ ИЛИ

В таблице истинности Q_n обозначает состояние выхода триггера до изменения состояния входов, а Q_{n+1} – состояние выхода триггера после изменения состояния его входов. Как нетрудно видеть, когда на обоих входах низкий уровень, никаких изменений не происходит. Поступление импульса на вход «Установка» вызывает переход выхода Q в состояние с высоким уровнем, а сигнал, подаваемый по линии «Сброс», возвращает выход Q в исходное состояние, которому соответствует низкий уровень. Если на обоих входах будут одновременно находиться высокие уровни, то с установкой на входе «Сброс» низкого уровня определится состояние схемы, которое до этого не было определено. Произвольным образом за стандартную схему *RS*-триггера выберем эту схему, а не схему на вентилях НЕ И, рассмотренную ранее.

Проблема состязаний в комбинационных схемах связана с тем, что сигналы, проходящие через различные логические вентили, могут изменяться от вентиля к вентилю на величину, достаточную для ложного переброса схемы. Предположим, что задержка распространения сигнала в цепи *A* минимальная, а в цепи *B* – максимальная. Схематически такой случай показан на рис. 4.34.

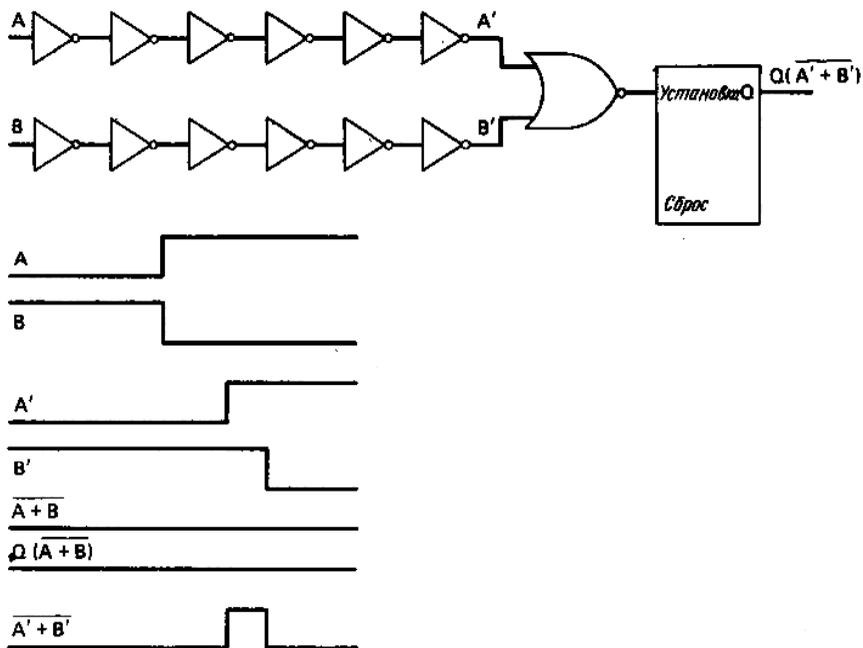


Рис. 4.34. Схема задержки распространения сигнала

Если бы все компоненты одной цепи имели значительно меньшую величину времени задержки прохождения сигнала, чем компоненты другой цепи, ложное срабатывание наверняка имело бы место и было бы зафиксировано. Одним из способов устранения этого недостатка является блокировка срабатывания триггера на время максимальной задержки. *RS*-триггер с такой блокировкой (рис. 4.35) получил название *синхронизируемого триггера*. Синхронизируемый *RS*-триггер срабатывает от высокого уровня, поступающего по любому из входов «Сброс» или «Установка», если на входе «Синхроимпульсы» также высокий уровень.

Подобное прохождение сигналов через схему является эффективным способом решения проблемы «состязаний». В системах с такими схемами весь непрерывный временной интервал работы собственно комбинационных логических схем разделен на дискретные временные интервалы, связанные с синхронизируемыми системами. Схемы такого типа называются *последовательными*, так

как в них вместо состязаний имеет место последовательная смена состояний. Система с одним синхронизирующим сигналом называется *синхронной последовательностной системой*. Если же используются несколько независимых синхронизирующих сигналов, то такая система называется *асинхронной последовательностной системой*. Скорость передачи информации в последовательностной схеме определяется частотой генератора синхроимпульсов. Высокочастотные сигналы с узкими синхронизирующими импульсами используются для получения максимальной скорости передачи информации.

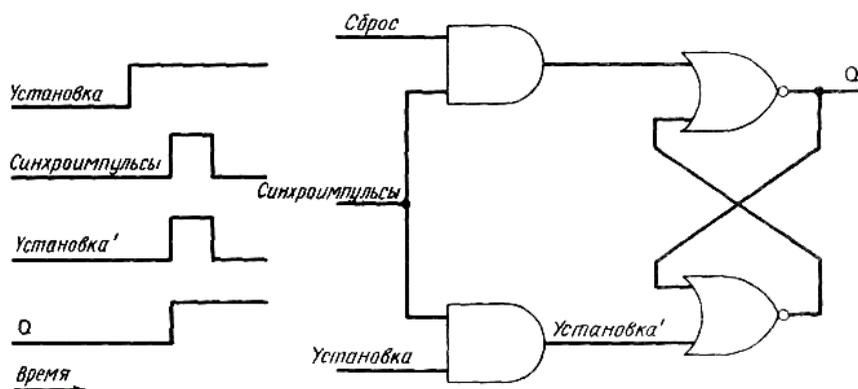


Рис. 4.35. Синхронизируемый триггер

Необходимость в запоминании значительных объемов информации вызвала создание интегральных схем, состоящих из большого числа запоминающих элементов. Основной запоминающий элемент в таких схемах называется *ячейкой памяти*. Ячейки памяти изготавливают с использованием одного, трех, четырех, шести или большего числа транзисторов. Простейшая ячейка памяти – однотранзисторная схема на полевом МОП-транзисторе (рис. 4.36), который выполняет функцию вентиля, т. е. когда транзистор включен, схему можно рассматривать как замкнутую цепь с нулевым сопротивлением, а когда выключен – как разомкнутую цепь фактически с бесконечно большим сопротивлением.

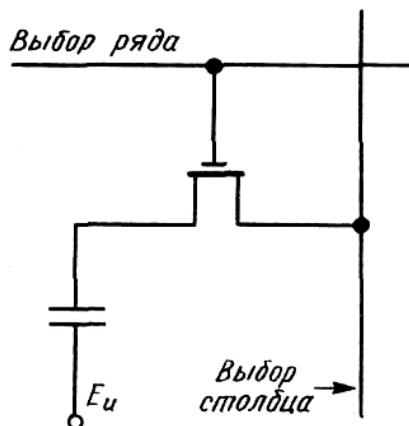


Рис. 4.36. Простейшая ячейка памяти

Таким образом в течение цикла «Запись» конденсатор заряжается до уровня, соответствующего логической 1 или логическому 0, от шины выбора столбца полевого МОП-транзистора, управляемого шиной выбора ряда. Во время цикла «Чтение» заряд конденсатора изменяет потенциал отключенной шины выбора столбца, которая соединена с входом усилителя считывания. Конденсатор должен иметь достаточно большую емкость для получения считываемого сигнала требуемой величины и небольших размеров для большей плотности расположения элементов. Во избежание уменьшения заряда конденсатора вследствие утечки требуется его периодическая регенерация, а так как процесс чтения связан с разрушением данных, содержимое ячейки необходимо восстанавливать после каждого цикла чтения. Ячейки памяти с регенерацией называются *динамическими* в отличие от *статических* ячеек, в которых не требуется дополнительных синхронизирующих и управляющих схем, связанных с этим процессом.

Число запоминающих ячеек на кристаллах памяти определяется технологией изготовления кристаллов. Статические ЗУ имеют память 4096 бит, организованную в виде матриц из 32×32 запоминающих элементов. Стандартная память динамических ЗУ на кристалле включает 16384 бит. Статические элементы проще использовать в схемах, но при этом увеличивается потребляемая мощность

и размер кристалла. В динамических ячейках на полевых МОП-транзисторах для обеспечения временного хранения данных в виде заряда используется паразитная емкость. Это делает ненужными элементы нагрузки, но приводит к появлению проблемы утечки заряда. Поскольку время утечки заряда с конденсатора определяется миллисекундами, необходима регенерация, или восстановление, заряда. Для схем регенерации обычно требуются специальные схемы синхронизации, которые усложняют аппаратуру и увеличивают ее стоимость. Это оправдано лишь в том случае, когда стоимость элементов нагрузки больше стоимости дополнительных схем. Так как с каждым разрядом памяти связаны два элемента нагрузки, значительная экономия имеет место лишь при большом числе разрядов (более 20000).

Таким образом, память объемом 16 кб слов и более следует строить на динамических элементах, в других случаях можно использовать статические элементы. Многие запоминающие устройства могут работать при пониженных уровнях напряжения, что приводит к уменьшению потребляемой мощности без потери данных. Такой режим работы, называемый *режимом хранения*, эффективен во многих случаях. Время обращения к МОП-памяти составляет 0,1–2,0 мкс. Время обращения к ТТЛ-памяти гораздо меньше (50–150 нс), но зато больше потребляемая мощность и меньше число разрядов на один кристалл при большей стоимости.

4.11. Счетчики

На рис. 4.37 для сравнения приведены выходной сигнал схемы с двумя устойчивыми состояниями, или T -триггера, и входной синхронизирующий сигнал. Легко заметить, что двум входным синхронизирующим импульсам соответствует только один выходной импульс. Такое соотношение входного и выходного сигналов – характерная особенность схем деления на два.

Так как метод деления на два с выделением остатка используется для преобразования десятичных чисел в двоичные, то ясно, что последовательное соединение схем деления на два можно использовать для выдачи в двоичном виде любого произвольного числа импульсов. На рис. 4.38 показаны три схемы деления на два, соединенные последовательно для получения схемы деления на восемь.

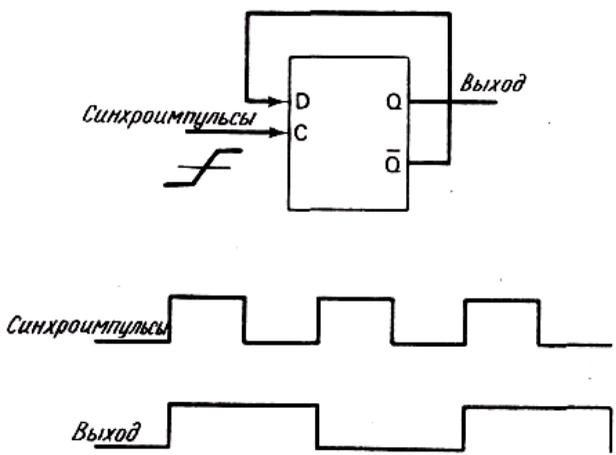


Рис. 4.37. Схема с двумя устойчивыми состояниями

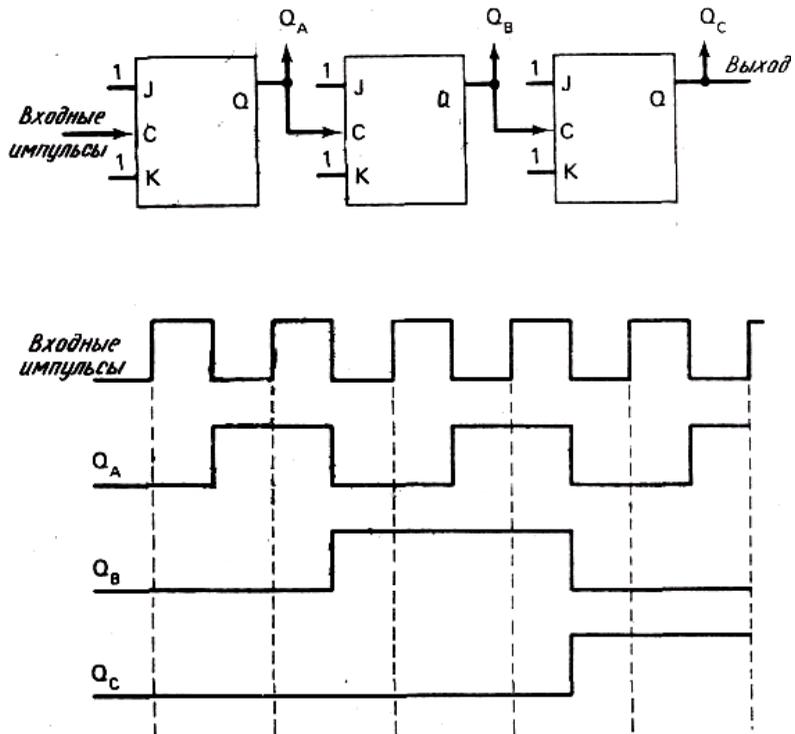


Рис. 4.38. Схемы деления на два

Здесь применяются JK -триггеры с единичными уровнями на обоих входах. Для иллюстрации счета на временной диаграмме показан выход каждого триггера. Так как для синхронизации общий синхронизирующий сигнал не используется, то эта схема асинхронная. Поскольку триггеры ТТЛ-типа обычно перебрасываются отрицательным фронтом входного сигнала, уровень выходного сигнала каждого каскада изменяется с изменением уровня входного сигнала до нуля. Когда уровень входного синхронизирующего сигнала первого каскада становится низким, уровень выходного сигнала этого каскада делается высоким. Выходной сигнал первого каскада является входным синхронизирующим сигналом для второго каскада. Однако уровень выходного сигнала второго каскада не изменится до тех пор, пока уровень его входного синхронизирующего сигнала не станет низким. Уровень выходного сигнала первого каскада также останется прежним, пока на его вход не поступит следующий синхронизирующий импульс, по заднему фронту которого выходной уровень станет высоким. Аналогичным образом при поступлении двух импульсов на счетный вход каждого каскада вырабатывается только один выходной импульс. Следовательно, N -каскадная схема делит частоту входных импульсов на $2N$.

Предположим, что схема находится в исходном состоянии, т. е. на выходе каждого каскада – низкий уровень. Характерная особенность схемы деления на N проявляется в том случае, если просматривать состояния всех ее каскадов перед поступлением первого и каждого последующего входных импульсов. Ниже в таблице приведены состояния всех выходов Q_A , Q_B и Q_C , просмотренные перед приходом каждого входного синхронизирующего импульса.

Число входных импульсов	Q_C	Q_B	Q_A
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1
8	0	0	0

Как видно из таблицы, выходы каскадов подсчитывают двоичные импульсы, поступающие на вход такой схемы. Цикл работы счетчика равен $2N$. Соединяя выходы последующих каскадов с входами предшествующих каскадов, можно получить счетчик по любому модулю, а затем его зациклить. Имеются различные конфигурации таких счетчиков и делителей частоты.

4.12. Сдвиговые регистры

Выше была приведена схема двоичного счетчика, ряд триггеров которой соединен таким образом, что выход каскада n связан со счетным входом каскада $n + 1$. Схему используют для управления дисплеем или другими цифровыми схемами. Рассмотрим, какие еще схемы можно получить посредством последовательного соединения триггеров. Схема на триггерах D -типа, в которой выход каждого предыдущего каскада соединен с входом последующего, показана на рис. 4.39.

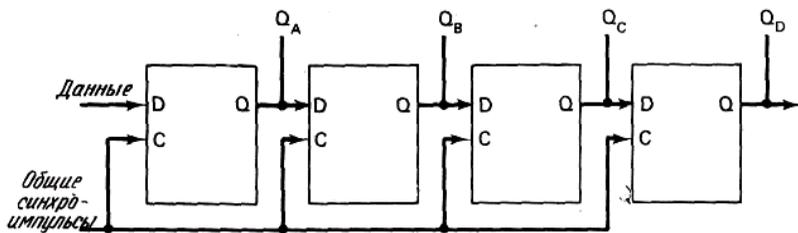


Рис. 4.39. Схема на триггерах D -типа

Цепь синхронная, так как использован единый синхронизирующий сигнал. Предположим, что первоначально она находится в исходном состоянии (на всех выходах низкий уровень). Анализ работы такой схемы показывает, что сигнал на входе первого каскада проходит на его выход Q_A с поступлением первого синхронизирующего импульса. С приходом второго синхронизирующего импульса эти данные передаются на выход второго каскада Q_B .

Аналогичным образом первый разряд данных с приходом каждого последующего синхронизирующего импульса сдвигается вправо. Так как процесс сдвига всех разрядов одинаков, входные данные

записываются в виде выходных сигналов триггеров каскадов таким образом, что их первый разряд оказывается самым крайним справа. Таким образом, для записи n -разрядного слова данных необходимо n синхронизирующих импульсов. Такие схемы временного хранения данных называются *регистрами*. Регистры, обладающие возможностью ввода и вывода данных посредством их последовательного сдвига влево и вправо, получили название *сдвиговых регистров*.

Аналогично другим эффективным модулям имеется большое число сдвиговых регистров на ИС различной конфигурации. Диапазон изменения длины регистров – от 4 до 1000 разрядов и более, т. е. возможно более 1000 последовательных разрядов на модуль. Сдвиговые регистры с несколькими разрядами используются для вычислений и временного хранения данных, тогда как сдвиговые регистры с большим числом разрядов – для построения запоминающих устройств на ИС. В регистрах небольшой длины выход имеют все разряды, тогда как в длинных регистрах возможен доступ только ко входу первого и выходу последнего разряда. В приводимой ниже таблице даны состояния четырехразрядного регистра при последовательной записи кода 1101 четырьмя синхронизирующими импульсами.

Состояние элементов	Вход данных	Q_A	Q_B	Q_C	Q_D
Начальное состояние	0	0	0	0	0
Тактовый импульс 1	1	1	0	0	0
Тактовый импульс 2	0	0	1	0	0
Тактовый импульс 3	1	1	0	1	0
Тактовый импульс 4	1	1	1	0	1

Способом хранения данных в сдвиговых регистрах с периодическим обращением к каждому разряду памяти является петля *рециркуляции*. Выход такого регистра связан с его входом, и данные сдвигаются по бесконечному циклу. Очевидно, что для ввода данных в память должен существовать способ прерывания рециркуляции. Ввод производится по импульсу «Запись», который управляет работой вентиля входной цепи.

4.13. Кодирование и стандартные СИС-блоки

В предыдущих разделах на основе сочетания значений некоторого числа входных двоичных переменных были получены значения меньшего числа выходных двоичных переменных, являющихся функцией сочетания входных сигналов. Так, например, в соответствии с уравнением

$$Y = AB + CD$$

четыре двоичные переменные A , B , C и D заменяются одной переменной Y , которая определяет истинность или ложность логического отношения между переменными в правой части уравнения. Это одно из множества возможных отношений, которые могут существовать между переменными A , B , C и D . В соответствии с двоичной интерпретацией этих четырех переменных мы можем последовательно рассмотреть все возможные комбинации их значений, используя обычное условие

$$1 = \text{ИСТИНА, а } 0 = \text{ЛОЖЬ.}$$

Таким образом, между «полностью ложным» $(A, B, C, D) = (0, 0, 0, 0)$ и «полностью истинным» $(1, 1, 1, 1)$ входами находится набор всех возможных комбинаций переменных. Было отмечено наличие однозначного соответствия между этими состояниями и числами в двоичной системе счисления. Теперь заметим, что для каждой комбинации значений переменных существует возможность построения по крайней мере одного уравнения, принимающего истинное значение только для этой комбинации. Простейшей иллюстрацией является функция И, представленная в приведенной ниже таблице.

Двоичное число	Возможная функция И четырех переменных
0000	$Y_0 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$
0001	$Y_1 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$
0010	$Y_0 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D}$
0011	$Y_0 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D$

Из этой таблицы видно, что для N двоичных разрядов на входе легко получить два разных логических уравнения, которые можно использовать для определения требуемой комбинации значений переменных. Нас интересуют логические схемы, генерирующие множество битов информации на выходе в результате воздействия нескольких битов на входе. Схемы такого рода необходимы для решения задач выбора или адресации устройств.

Выше было рассмотрено одновременное, или параллельное, поступление на схему входных сигналов. Существует множество ситуаций, в которых сигналы поступают на вход в последовательной форме. В этом случае, как и при кодировании параллельных сигналов, с каждой последовательностью входных сигналов можно сопоставить некоторый двоичный код. Примером подобного шифратора является двоичный счетчик импульсов. Если допустить, что вентиль на входе открыт в течение восьми временных периодов, в каждый из которых может поступить импульс, то возможные последовательности входных сигналов могут быть однозначно определены при помощи восьмиразрядных двоичных чисел.

Выходом двоичного счетчика является двоичный код, который содержит информацию о входной комбинации импульсов. Однако такая простейшая схема шифратора отображает входные последовательности сигналов D , F и G в одну точку, что приводит к потере информации, содержащейся во входном потоке. Различия в перестановках можно сохранить за счет введения дополнительных разрядов, необходимых для хранения этой информации. В то время как для описания входной комбинации из n единиц и $(8 - n)$ нулей достаточно трех разрядов, для сохранения относительного расположения единиц и нулей необходимо восемь разрядов. При соответствующем расположении триггеров всю информацию последовательности импульсов можно легко записать восемью битами. Это как раз то, что обычно получают в случае сдвигового регистра. Однако необходимо подчеркнуть, что счетчик не сохранит всей информации.

В случае аналогового сигнала логические уравнения, приведенные вначале, не позволяют различать все $2 - 1$ ложных состояний при выдаче неизменяемого сигнала истинного состояния. Потеря информации при использовании любого одного логического уравнения, связывающего значения нескольких переменных, характерна

для многих цифровых систем, о чем необходимо помнить при проектировании систем.

4.14. Примеры решения задач

Задача 4.1

Определить изменения выходных напряжений дифференциального усилителя (рис. 4.40) при подаче на его входы напряжений $U_{вх1} = 1$ мВ и $U_{вх2} = -2$ мВ, если коэффициенты усиления $K_{U1} = K_{U2} = 20$ и режим линейный. Найти дифференциальный коэффициент усиления.



Рис. 4.40

Решение

Изменения напряжений на отдельных выходах усилителя, по определению, равны

$$\Delta U_{\text{вых1}} = K_{U1}(U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}) = 20(1 + 2) \cdot 10^{-3} = 60 \text{ мВ};$$

$$\Delta U_{\text{вых2}} = -K_{U2}(U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}) = -60 \text{ мВ}.$$

При симметричном включении нагрузки

$$U_{\text{вых2}} = \Delta U_{\text{вых1}} - \Delta U_{\text{вых2}} = 120 \text{ мВ}.$$

По определению, дифференциальный коэффициент усиления

$$K_U = U_{\text{ВЫХ}} / (U_{\text{ВХ1}} - U_{\text{ВХ2}}) = K_{U1} + K_{U2} = 40.$$

Задача 4.2

Изобразить передаточные характеристики $U_{\text{ВЫХ1}}(U_{\text{ВХ}})$ и $U_{\text{ВЫХ}}(U_{\text{ВХ}})$ дифференциального усилителя, схема которого приведена на рис. 4.41, а, если $U_{\text{ВХ}} = U_{\text{ВХ1}} - U_{\text{ВХ2}}$.

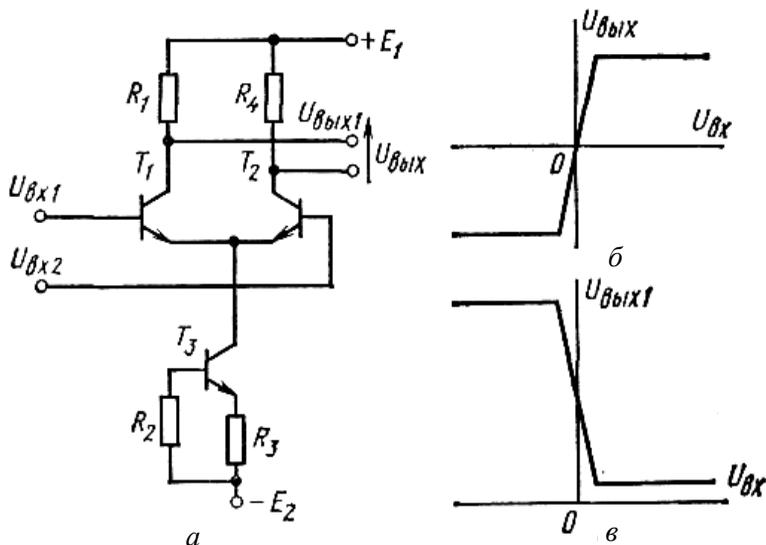


Рис. 4.41. Схема (а) и передаточные характеристики (б) дифференциального усилителя

Ответ: характеристики приведены на рис. 4.41, б, в.

Задача 4.3

На рис. 4.42 изображена типовая схема включения операционного усилителя в масштабном преобразователе. Определить сопротивления резисторов R_1 , R_2 и R_3 , если $K_U = 100$ и $R_{\text{Н}} = 10$ кОм, $R_{\text{ВХ}} = 50$ кОм, $R_{\text{ВЫХ}} = 1$ кОм, $R_f = 100$ Ом.

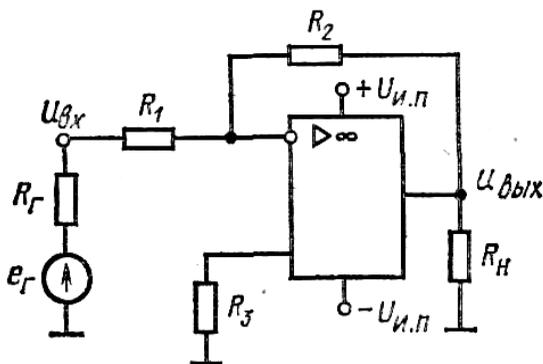


Рис. 4.42. Типовая схема включения операционного определителя

Решение

Для получения высокой стабильности коэффициента усиления сопротивления R_1 выбирают из условия $R_r \ll R_1 \ll R_{вх}$, поэтому $R_1 = 2$ кОм. При $R_2 \gg R_{вых}$ из-за большого K_U (около 1000) для операционного усилителя без отрицательной обратной связи (ООС)

$$K_U = R_2 / R_1 .$$

Поэтому

$$R_2 = 100 \cdot 2 \cdot 10^3 = 200 \text{ кОм.}$$

Эквивалентное сопротивление нагрузки усилителя

$$R'_H \approx R_H R_2 / (R_H + R_2)$$

(или равно значению, рекомендованному в паспорте ОУ). В нашем случае $R'_H = 9,5$ кОм $\gg R_{вых}$.

Для симметричного ОУ необходимо, чтобы

$$R_3 = \frac{(R_1 + R_r)R_2}{R_1 + R_r + R_2} .$$

Задача 4.4

Для масштабного преобразователя, параметры которого приведены в задаче 4.3 (рис. 4.43), найти наибольшее напряжение $U'_{\text{ВХ}}$ в линейном режиме, если $U_{\text{ВЫХ}} = 7$ В.

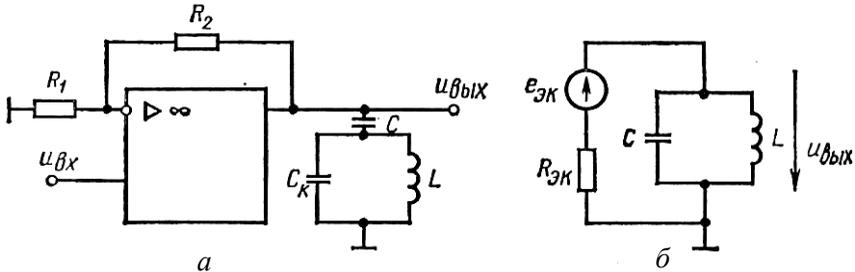


Рис. 4.43. Схема масштабного преобразователя

Ответ: $U'_{\text{ВХ}} = 70$ мВ.

Задача 4.5

Найти выражение для относительной амплитудно-частотной характеристики избирательного усилителя $K_U(\nu)$ рассчитать наибольший коэффициент усиления, соответствующую частоту и полосу пропускания. Схема усилителя приведена на рис. 4.43, а и имеет следующие параметры элементов: $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 20$ кОм, выходное сопротивление ОУ $R_{\text{ВЫХ}} = 1$ кОм, индуктивность $L = 0,1$ мГн, $C = 6,32$ нФ.

Решение

Амплитудно-частотную характеристику усилителя можно получить из схемы замещения, рис. 4.43, б. Активный двухполюсник $E_{\text{ЭК}}$ и $R_{\text{ЭК}}$ отображает ОУ с цепью ООС со стороны выходных полюсов. Поэтому

$$E_{\text{ЭК}} = \frac{R_2}{R_1} U_{\text{ВХ}} = \frac{20 \cdot 10^3}{200} U_{\text{ВХ}} = 100 U_{\text{ВХ}} ;$$

$$R_{\text{ЭК}} = \frac{(R_1 + R_2) R_{\text{ВЫХ}}}{R_1 + R_2 + R_{\text{ВЫХ}}} = \frac{(0,2 + 20) \cdot 1}{0,2 + 20 + 1} \approx 0,95 \text{ кОм.}$$

При гармоническом входном сигнале комплексное выходное напряжение

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \dot{E}_{\text{ЭК}} Z_{\text{К}} / (R_{\text{ЭК}} + Z_{\text{К}}).$$

Здесь $Z_{\text{К}}$ – комплексное сопротивление параллельного колебательного контура:

$$Z_{\text{К}} = \frac{jL\omega \left(-j \frac{1}{C\omega} \right)}{j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = -j \frac{L\omega}{LC\omega^2 - 1}.$$

Для упрощения записи введем характеристическое сопротивление

$$\rho = L\omega_{\text{рез}},$$

где $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC} = 1,26 \cdot 10^6$ рад/с – резонансная частота контура, и относительную частоту

$$v = \omega / \omega_{\text{рез}}.$$

Тогда $\rho = 126$ Ом и

$$Z_{\text{К}} = -\frac{\rho v}{v^2 - 1}.$$

Комплексный коэффициент усиления

$$K_U = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{R_2}{R_1 (R_{\text{ЭК}} / Z_{\text{К}} + 1)} = \frac{R_2}{R_1 \left[1 + j \frac{R_{\text{ЭК}} (v^2 - 1)}{\rho v} \right]} = \frac{100}{1 + j7,5 \frac{v^2 - 1}{v}}.$$

Зависимость относительного коэффициента усиления от частоты имеет вид

$$K_{*U} = \frac{1}{\sqrt{1 + 57,5 \left(\frac{v^2 - 1}{v} \right)^2}}.$$

Наибольший коэффициент усиления достигается при $v = 1$ ($\omega = \omega_{\text{рез}}$) и равен 100. Граница полосы пропускания по уровню $K_{U\text{min}} = 0,707$, $K_{U\text{max}} = 70,7$, определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 57,5 \left(\frac{v^2 - 1}{v} \right)^2}}.$$

Отсюда следует уравнение

$$v^2 \pm 0,132v - 1 = 0,$$

которое позволяет рассчитать относительные граничные частоты:

$$v_{\text{H}} = -\frac{0,132}{2} + \sqrt{\frac{0,132}{4} + 1} = 0,94;$$

$$v_{\text{B}} = -\frac{0,132}{2} + \sqrt{\frac{0,132}{4} + 1} = 1,07.$$

Полоса пропускания в относительных единицах

$$\Delta v = v_{\text{B}} - v_{\text{H}} = 1,07 - 0,94 = 0,13,$$

при этом

$$\Delta\omega = \Delta v \omega_{\text{рез}} = 0,166 \cdot 10^2 \text{ рад/с}$$

и

$$\Delta f = \Delta\omega / (2\pi) = 26,4 \text{ кГц.}$$

Задача 4.6

Определить наибольший коэффициент усиления, резонансную частоту и полосу пропускания избирательного усилителя, схема которого изображена на рис. 4.44, если $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_{\text{вых}} = 1 \text{ кОм}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $C_k = 632 \text{ пФ}$, $R_k = 100 \text{ Ом}$.

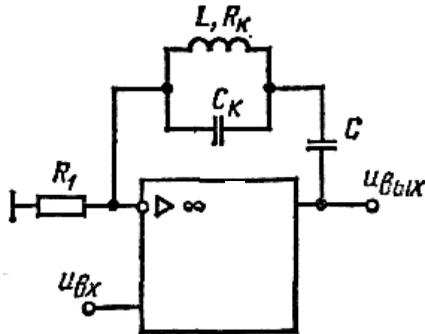


Рис. 4.44. Схема избирательного усилителя

Решение

Комплексное сопротивление колебательного контура

$$Z_k = \frac{(R_k + jL\omega) \left(-j \frac{1}{C_k \omega} \right)}{(R_k + j) \left(L\omega - \frac{1}{C_k \omega} \right)} = \rho \frac{Qv - j}{v + j(v^2 - 1)Q}.$$

Здесь

$$v = \omega / \omega_{\text{рез}},$$

$$\omega_{\text{рез}} \approx 1 / \sqrt{LC} = 0,4 \cdot 10^6 \text{ рад/с},$$

$$\rho = L\omega_{\text{рез}} = 4,0 \text{ кОм},$$

$$Q = \rho / R_k = 40$$

(Q – добротность контура).

Наибольшее значение Z_k достигается на частоте $\nu = 1$:

$$Z_k = \rho \sqrt{1 + Q^2} \approx \rho Q = 158 \cdot 10^3 \text{ Ом},$$

и значительно превышает $R_{\text{вых}}$, R_1 . Поэтому

$$\max K_U = Z_k / R_1 = 158 \cdot 10^3 / 200 = 790.$$

Полосу пропускания усилителя можно определить по добротности контура:

$$\Delta\omega = \omega_{\text{рез}} / Q = 0,4 \cdot 10^6 / 40 = 10^4 \text{ рад/с}$$

и

$$\Delta f = \Delta\omega / (2\pi) \approx 1,6 \text{ кГц}.$$

5. УПРАВЛЯЮЩИЕ ПОДСИСТЕМЫ – СИНТЕЗ КИБЕРНЕТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

5.1. Аналоговое и цифровое управление

Чтобы целенаправленно перемещать предметы с помощью электродвигателей постоянного тока или гидро(пнеumo)приводов и др., необходимо использовать управляющие устройства. До появления микропроцессоров в качестве таких устройств использовались аналоговые системы. В качестве примера рассмотрим управление электродвигателем по углу поворота вала (рис. 5.1, а).

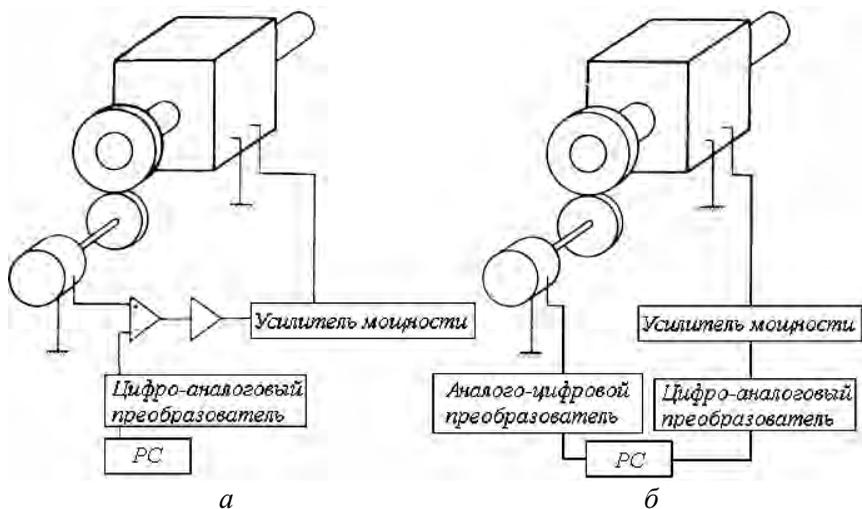


Рис. 5.1. Сопоставление аналоговой обратной связи (а) с обратной связью, использующей программные средства (б)

Для осуществления такого управления можно воспользоваться потенциометром, поворачивающимся вместе с валом двигателя. Напряжение, снимаемое с потенциометра, сравнивается с напряжением, соответствующим задаваемому углу. Определяется разность этих напряжений, которая усиливается в несколько раз и подается на вход электродвигателя. (Следует иметь в виду, что в такой цепи довольно легко могут возникать колебания.) В рассматриваемом случае с помощью аналоговой цепи можно просто определять разность двух входных сигналов, умножать на постоянную величину, дифференцировать

и интегрировать. В большинстве случаев вполне достаточно управляющего устройства, основанного на использовании такой цепи.

Если воспользоваться способом, при котором задаваемая величина (см. рис. 5.1) будет устанавливаться с помощью микропроцессоров, то угол поворота двигателя можно регулировать по программе, реализующей алгоритм управления.

К робототехническим устройствам часто предъявляются требования обеспечения точного управления. Например, когда необходимо определять положение «пальцев» схвата манипулятора, обеспечивать их движение с определенной скоростью, с заданной силой захватывать предмет, целесообразно использовать разнообразные способы управления. В таких случаях за счет соответствующей организации программных средств удобно обеспечить переключение с одного способа управления на другой. Структурная схема управления, которую можно использовать в таком случае, представлена на рис. 5.1, б. При этом в большинстве случаев можно отказаться от использования цепи аналоговой обратной связи, ибо тогда процессор может выполнять вычисления, соответствующие работе аналоговой обратной связи. На рис. 5.1 показаны два классических примера соответственно аналоговой и цифровой систем с обратной связью. Следует отметить, что возможны различные комбинации, образованные из элементов обеих систем.

Что касается использования процессора, то можно сказать следующее. В примере, приведенном на рис. 5.1, а, процессор не может «знать» величины угла поворота двигателя, именно эта величина задается процессором. Следовательно, при сравнении примеров на рис. 5.1, а и б, необходимо отметить важную особенность, заключающуюся в том, что в случае рис. 5.1, а объем вычислений, осуществляемых процессором, небольшой.

5.2. Модель и алгоритм управления звеньями манипулятора

Остановимся на рассмотрении некоторых основных моментов теории управления, осуществляемых на основе использования процессора.

Движения многих управляемых объектов (или их динамические характеристики) можно описать дифференциальными уравнениями. К управляющим воздействиям (регулирующим, управляющим, входным величинам), которые непосредственно изменяются регуляторами,

можно отнести моменты, возникающие в шарнирах, величину и направление вектора тяги ракетного двигателя, конфигурацию крыла самолета и т. д. Используя изменения этих параметров, можно необходимым образом управлять углами поворота шарниров манипуляторов, траекториями искусственных спутников Земли, положением и ориентацией в пространстве летательных аппаратов и т. д. В том случае когда объектом управления является техническое устройство связи, существующие между указанными выше входными и выходными параметрами можно описать дифференциальными уравнениями. Следует иметь в виду, что зависимости входных и выходных параметров, описываемые дифференциальными уравнениями, представляют собой всего лишь приближенные выражения динамических характеристик. С повышением точности аппроксимации происходит усложнение дифференциальных уравнений. Часто это может привести к увеличению времени счета и создавать такое положение, когда можно потерять сущность решаемой проблемы. Поэтому при выводе дифференциальных уравнений следует по возможности их упрощать и так пользоваться аппроксимацией, чтобы динамические характеристики реализуемого движения оказались удовлетворительными.

В качестве примера рассмотрим представленный на рис. 5.2 рычажный механизм, составленный из двух звеньев.

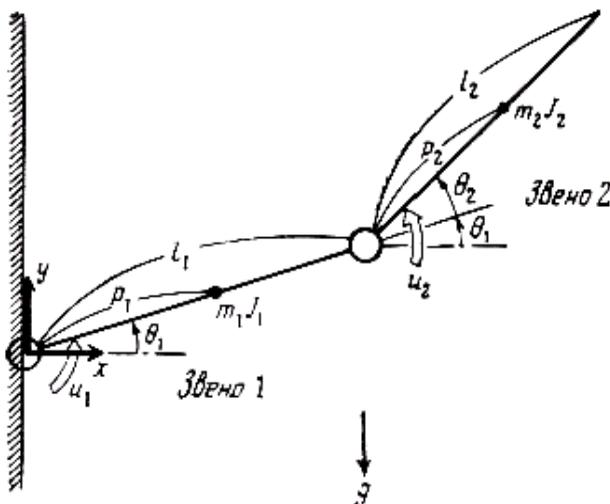


Рис. 5.2. Двухзвенный механизм манипулятора

Выведем уравнение движения для этого механизма. Данный пример является классическим, содержащим проблемы, присущие манипуляционным роботам.

Рычажный механизм содержит два звена, которые можно охарактеризовать массой m_i , моментом инерции относительно центра тяжести J_i и длиной l_i ($i = 1, 2$). Будем считать, что движение этого механизма происходит в вертикальной плоскости. При работе механизма возможны только повороты в его шарнирах, которые на рассматриваемом рисунке характеризуются соответствующими углами θ_i . У каждого шарнира имеется исполнительный орган. Звенья механизма поворачиваются под действием моментов u_i . Положение центров тяжести звеньев (x_1, y_1) и (x_2, y_2) можно представить следующим образом:

$$(x_1, y_1) = (p_1 \cos \theta_1, p_1 \sin \theta_1),$$

$$(x_2, y_2) = (l_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), l_1 \sin \theta_1 + p_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Тогда для скоростей движения центров тяжести получаются выражения

$$(\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (-p_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, p_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1);$$

$$(\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - p_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2);$$

$$l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + p_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)).$$

В этом случае кинетическую энергию T представим в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 p_1^2 \dot{\theta}_1^2 + J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 p_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 = \frac{1}{2} \left\{ J_1 + J_2 + m_1 p_1^2 + m_2 (l_1^2 + p_2^2 + 2l_1 p_2 \cos \theta_2) \right\} \dot{\theta}_1^2 + \\ &+ \left\{ J_2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 \cos \theta_2 \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \left\{ J_2 + m_2 p_2^2 \right\} \dot{\theta}_2^2, \quad (5.1) \end{aligned}$$

а потенциальную U – в виде

$$U = m_1 g p_1 \sin \theta_1 + m_2 g \{l_1 \sin \theta_1 + p_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\}.$$

Под действием моментов u_1 и u_2 происходит поворот звеньев на углы $\delta\theta_1$ и $\delta\theta_2$. При этом совершается работа

$$u_1 \delta\theta_1 + u_2 \delta\theta_2,$$

которую можно представить в виде разности $L = T - U$. Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = u_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = u_2. \quad (5.2)$$

После проведения соответствующих преобразований уравнения (5.2) приводятся к двум дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned} & \left\{ J_1 + J_2 + m_1 p_1^2 + m_2 (l_1^2 + p_2^2 + 2l_1 p_2 \cos \theta_2) \right\} \ddot{\theta}_1 + \\ & + \left\{ J_2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 \cos \theta_2 \right\} \ddot{\theta}_2 - (m_2 l_1 p_2 \sin \theta_2) (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \theta_2^2) = \\ & = u_1 - (m_1 p_1 + m_2 p_2) g \cos \theta_1 - m_2 g p_2 \cos(\theta_1 + \theta_2); \\ & \left\{ J_2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 \cos \theta_2 \right\} \ddot{\theta}_1 + \left\{ J_2 + m_2 p_2^2 \right\} \ddot{\theta}_2 + (m_2 l_1 p_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1^2 = \\ & = u_2 - m_2 g p_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Эти выражения удобно представить в векторно-матричном виде:

$$W(\bar{\Theta}) \ddot{\bar{\Theta}} + \alpha(\bar{\Theta}, \dot{\bar{\Theta}}) = u + \beta(\bar{\Theta}); \quad (5.3)$$

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

$$W(\bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 + m_1 p_1^2 + m_2 (l_1^2 + p_2^2 + 2l_1 p_2 \cos \theta_2) & J_2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 \cos \theta_2 \\ J_2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 \cos \theta_2 & J_2 + m_2 p_2^2 \end{bmatrix};$$

$$\alpha(\bar{\Theta}, \dot{\bar{\Theta}}) = \begin{bmatrix} -(m_2 l_1 p_2 \sin \theta_2) (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ (m_2 l_1 p_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix};$$

$$\beta(\bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} -(m_1 p_1 + m_2 l_1) g \cos \theta_1 - m_2 p_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -m_2 p_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}.$$

Из выражения (5.3) видно, что уравнение движения, в котором в качестве переменной выбран параметр Θ , представляет собой довольно сложное нелинейное дифференциальное уравнение.

Из выражения (5.1) следует, что $\dot{\bar{\Theta}}^T W(\bar{\Theta}) \dot{\bar{\Theta}}$ соответствует кинетической энергии T . Поскольку $W(\bar{\Theta})$ – положительная постоянная величина, то у нее обычно существует обратная матрица. Если обе части уравнения (5.3) умножить на $W(\bar{\Theta})^{-1}$ и провести соответствующие преобразования, то получим следующее выражение:

$$\ddot{\bar{\Theta}} = -W^{-1}\alpha + W^{-1}\beta + W^{-1}u = h(\bar{\Theta}, \dot{\bar{\Theta}}, u),$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Если для $\bar{\Theta} = [\theta_1, \theta_2]^T$ положить $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{\theta}_2$, $\bar{x} = [x_1 x_2 x_3 x_4]^T$, то получим выражение

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ h_1(x, u) \\ x_4 \\ h_2(x, u) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Правая часть этого выражения представляет собой функцию $f(\bar{x}, \bar{u})$, и выражение (5.4) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}). \quad (5.5)$$

Отметим, что для пространственного рычажного механизма уравнение движения, представленное в общем виде, можно записать как (5.5). Поэтому в дальнейшем при рассмотрении вопросов теории управления механической системой будем пользоваться этим уравнением.

5.3. Проектирование регулятора

Из рассмотрения уравнения движения рычажного механизма (5.5) в пространстве можно видеть, что в большинстве случаев динамические характеристики управляемого объекта удовлетворяют системе нелинейных дифференциальных уравнений и уравнениям наблюдения

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}), \\ \bar{y} &= C\bar{x}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Остановимся на рассмотрении управления системой, удовлетворяющей уравнениям (5.6). Если особые условия не оговорены, в наблюдательном уравнении $\bar{y} = C\bar{x}$ можно положить $C = E$, т. е. считать, что $\bar{y} = \bar{x}$. Это означает, что все переменные, характеризующие состояние системы, находятся под контролем (под наблюдением). Здесь E – единичная матрица.

Непосредственное (прямое) управление. Чтобы обеспечить необходимое движение, например робота, обычно следует заранее определить его поведение в каждый момент времени. Это можно назвать

траекторным планированием. Если можно реализовать спланированную траекторию $\bar{x}(t) = \bar{x}^*(t)$, то существует управление $\bar{u} = \bar{u}^*(t)$, причем \bar{x}^* и \bar{u}^* должны удовлетворять уравнению (5.6), т. е.

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = f(\bar{x}^*, \bar{u}^*), \quad (5.7)$$

где \bar{x}^* и \bar{u}^* – решения уравнения (5.6).

При отсутствии внешних возмущающих воздействий с помощью одного управления \bar{u}^* можно реализовать уравнение $\bar{x}(t) = \bar{x}^*$. Управление, осуществляемое в зависимости от \bar{u}^* , носит название *непосредственного (прямого) управления*.

Если можно установить такую величину \bar{u} , для которой величина \bar{x} , входящая в уравнение (5.6), будет устойчивой в окрестностях параметра \bar{x}^* , то даже при наличии внешних воздействий можно обеспечить такое движение робота, которое будет близким к запланированному. Воспользуемся уравнением (5.6) и проанализируем \bar{x}^* и \bar{u}^* , а также те движения, которые имеют место в окрестностях этих параметров.

Положим, что рассматриваемое состояние \bar{x} возмущено относительно состояния \bar{x}^* . Соответствующее возмущение $\Delta\bar{x}$ можно представить следующим образом:

$$\bar{x} = \bar{x}^* + \Delta\bar{x}. \quad (5.8)$$

При $\Delta\bar{x} \rightarrow 0$, т. е. при $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^*$, рассматривая управляющее входное воздействие \bar{u} для $\Delta\bar{u}$, можно записать

$$\bar{u} = \bar{u}^* + \Delta\bar{u}. \quad (5.9)$$

Подставив выражения (5.8) и (5.9) в уравнение (5.6), получим

$$\dot{\bar{x}}^* + \Delta\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}^* + \Delta\bar{x}, \bar{u}^* + \Delta\bar{u}). \quad (5.10)$$

Проведем разложение (5.10) и для $\Delta\bar{x}$ и $\Delta\bar{u}$ ограничимся рассмотрением членов первого порядка. Если воспользоваться уравне-

нием (5.7) и выполнить соответствующие действия, то можно получить следующее соотношение:

$$\Delta \dot{\bar{x}} = A(t)\Delta \bar{x} + B(t)\Delta \bar{u}. \quad (5.11)$$

Если в выражение (5.11) входит такая величина $\Delta \bar{u}$, при которой $\Delta \bar{x} \rightarrow 0$, то на основании $\bar{u} = \bar{u}^* + \Delta \bar{u}$ получаем, что $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^*$. В этом отношении представляет интерес рис. 5.3. Задача определения величины \bar{u}^* из уравнения (5.7) в принципе решается, однако требует выполнения довольно большого объема вычислений. В связи с этим целесообразно использовать различные способы, позволяющие ускорить процесс вычисления.

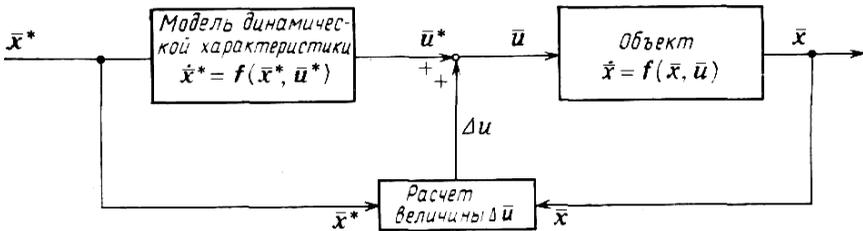


Рис. 5.3. Прямое управление и управление с обратной связью

Следует иметь в виду, что задача определения такого $\Delta \bar{u}$, при котором $\Delta \bar{x} \rightarrow 0$, является довольно сложной. Ниже рассмотрим решение этой задачи. Обычно имеют дело с дифференциальным уравнением для переменной \bar{x} , когда при $\bar{x} \rightarrow 0$ необходимо определить \bar{u} . Если имеют дело с дифференциальным уравнением (5.14) для переменных $\Delta \bar{x}$ и $\Delta \bar{u}$, то логично вместо x использовать $\Delta \bar{x}$, а вместо \bar{u} использовать $\Delta \bar{u}$.

Управление с обратной связью.

Пример 5.1

Рассмотрим движение сосредоточенной массы в горизонтальной плоскости, описываемое уравнением движения $\ddot{x} = u$. Если желательно, чтобы сосредоточенная масса останавливалась в точке $x = 0$,

то вполне естественно с помощью текущей координаты x определять необходимое значение u . Например, в качестве регулятора с обратной связью можно рассмотреть случай $u = -x$, при этом уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Решением этого уравнения в окрестности $x = 0$ является гармоническая функция (x не сходится к 0).

Рассмотрим другой случай:

$$u = -x - \dot{x}.$$

Подставляя u в уравнение движения, получим

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$$

При $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$. Такой способ управления, при котором, как показано выше, по состоянию управляемого объекта x и \dot{x} определяют значение u , называется *управлением с обратной связью*. В рассматриваемом примере значение u определяется в виде линейной связи от x и \dot{x} . вполне естественно, возможны и такие случаи, когда величина u нелинейно зависит от x и \dot{x} .

При управлении с обратной связью могут возникнуть два случая: первый, когда обеспечивается сходимость (стремление) состояния управляемого объекта к нулю, и второй, когда такая сходимость (стремление) не обеспечивается. При рассмотрении управления с обратной связью представляют интерес такие условия, при которых состояние управляемого объекта стремится к нулю.

Рассмотрим теперь линейное управление с обратной связью в общем виде. Пусть управляемый объект можно описать дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Будем полагать, что имеем дело с обычным управлением с обратной связью:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{y} = C\bar{x}. \quad (5.12)$$

Для простоты положим $\bar{y} = \bar{x}$, т. е. $C = E$.

Рассмотрим управление с обратной связью в виде

$$\bar{u} = F\bar{x},$$

где F – коэффициент усиления обратной связи.

Поскольку величины \bar{u} и \bar{x} связаны между собой линейной зависимостью, рассматриваемое управление называется *линейным управлением с обратной связью*. Если подставить $\bar{u} = F\bar{x}$ в уравнения (5.12), получим

$$\dot{\bar{x}} = (A + BF)\bar{x}. \quad (5.13)$$

Чтобы решение уравнения (5.13) было асимптотически устойчивым ($t \rightarrow \infty$, $\bar{x} \rightarrow 0$), необходимо, чтобы все собственные значения $A + BF$ имели отрицательные действительные части. Следовательно, при соответствующем выборе F , обеспечивающем устойчивость $A + BF$, можно гарантировать по крайней мере, что $x \rightarrow 0$.

В уравнении (5.12) среди различных величин u , удовлетворяющих условию $x \rightarrow 0$, существуют такие, которые можно представить в виде $\bar{u} = F\bar{x}$. Важной проблемой является выбор величины \bar{u} . Для решения этой проблемы используются методы, которые позволяют определять штрафную функцию и найти такую величину u , при которой эта функция принимает минимальное значение.

5.4. Оптимальное линейное управление с обратной связью

Пусть заданы функции $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$,

$$\bar{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)].$$

Рассмотрим функционал

$$F[\bar{x}] = \int_0^a F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) dt. \quad (5.14)$$

При изменении вида $\bar{x}(t)$ величина F также меняет свое значение. Если при рассмотрении величины \bar{x} , для которой F принимает минимальное значение, воспользоваться вариационным методом, то

решением для минимума функционала (5.14) будет $\bar{x}(t)$, удовлетворяющее уравнениям Эйлера:

$$F_{,\bar{x}} - \frac{d}{dt} F_{,\dot{\bar{x}}} = 0,$$

где $F_{,\bar{x}}$ и $F_{,\dot{\bar{x}}}$ — частные производные по \bar{x} и $\dot{\bar{x}}$, которые можно определить следующим образом:

$$\bar{F}_{,x} = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]';$$

$$\bar{F}_{,\dot{x}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} \right]'$$

Пусть величины \bar{x} , $\dot{\bar{x}}$, входящие в (5.19), связаны векторной функцией $\bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0$. По своей сути функция $\bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0$ представляет собой ограничение на \bar{x} и $\dot{\bar{x}}$. В этом случае имеем дело с задачей минимизации уравнения (5.14) при наличии ограничения $\bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0$. Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$ и добавим ограничение к уравнению (5.14), тогда получим задачу на безусловный экстремум для функционала вида

$$F = \int_0^a \left\{ F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \lambda^T \bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\} dt.$$

Уравнение Эйлера можно представить в другом виде. При определении \bar{x} должны одновременно удовлетворяться уравнение Эйлера и ограничения, приведенные ниже:

$$F_{,\bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda}^T \bar{s}) - \frac{d}{dt} \left\{ F_{,\dot{\bar{x}}} + \frac{d}{d\dot{\bar{x}}} (\bar{\lambda}^T \bar{s}) \right\} = 0,$$

$$\bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0.$$

Для нахождения \bar{u} , удовлетворяющего условию $x \rightarrow 0$, рассмотрим типичный пример. Сначала рассмотрим определение величины \bar{x} , для которой минимизируется оценочная функция для $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$ (уравнение (5.12)), имеющая вид

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt, \quad (5.15)$$

где $\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}$ – квадратичная форма;

Q и R – матрицы постоянных.

Когда \bar{x} и \bar{u} не равны нулю, то это симметричные матрицы положительных постоянных $\bar{x}^T Q \bar{x} > 0$, $\bar{u}^T R \bar{u} > 0$. Так как имеется ограничение $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$, то, используя метод неизвестных множителей Лагранжа, выражение (5.15) можно преобразовать к виду

$$F = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) + \bar{\lambda}^T (\dot{\bar{x}} - A\bar{x} - B\bar{u}) \right\} dt. \quad (5.16)$$

Уравнение Эйлера с переменными \bar{x} и \bar{u} можно записать следующим образом:

$$(Q\bar{x} - A^T \bar{\lambda}) - \frac{d}{dt} \bar{\lambda} = 0; \quad (5.17)$$

$$(R\bar{u}) - B^T \bar{\lambda} = 0. \quad (5.18)$$

Поскольку R – симметричная матрица положительных постоянных, то существует обратная матрица R^{-1} . Из выражения (5.18) следует

$$\bar{u} = R^{-1} B^T \bar{\lambda}.$$

Это позволяет исключить величину \bar{u} из ограничения $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$ и выражения (5.18) и записать следующее:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + BR^{-1} B^T \bar{\lambda}; \quad (5.19)$$

$$\bar{\lambda} = Q\bar{x} - A^T \bar{\lambda}. \quad (5.20)$$

Решение дифференциальных уравнений (5.19) и (5.20) можно представить в виде $\bar{\lambda} = S\bar{x}$ (S – матрица постоянных). Подставим решение $\bar{\lambda} = S\bar{x}$ в систему уравнений (5.19) и (5.20) и получим

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + BR^{-1}B^T S\bar{x}; \quad (5.21)$$

$$S\dot{\bar{x}} = Q\bar{x} - A^T \lambda S\bar{x}. \quad (5.22)$$

Умножим обе части уравнения (5.21) на S и из полученного результата вычтем уравнение (5.22). Это позволяет исключить $\dot{\bar{x}}$:

$$\{SA + SBR^{-1}B^T S - Q + A^T \lambda S\} \bar{x} = 0.$$

Следовательно, имеет место равенство $\bar{x} \neq 0$:

$$SA + A^T S + SBR^{-1}B^T S = Q. \quad (5.23)$$

В этом случае можно положить, что существуют такие значения \bar{x} и \bar{u} , при которых удовлетворяются ограничение $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$ и уравнения Эйлера (5.17) и (5.18). При этом функционал F , описываемый выражением (5.15), принимает минимальное значение. При более тщательном рассмотрении можно установить, что при определенном условии существует несколько решений S уравнения (5.23). Ясно, что среди величин

$$\bar{u} = R^{-1}B\bar{\lambda} = R^{-1}B^T S\bar{x} \quad (5.24)$$

существуют такие, которые делают устойчивыми уравнения (5.12) и для которых интеграл (5.15) принимает минимальное значение. Поскольку выражение (5.34) имеет вид

$$\bar{\lambda} = F\bar{x},$$

то произведение $R^{-1}B^T S$ представляет собой коэффициент усиления обратной связи. Квадратное уравнение (5.23) называется *уравнением Риккати*.

Пример 5.2

Воспользуемся изложенным выше и определим величину u для системы, в которой движение управляемого объекта описывается уравнением $\dot{x} = u$, а функция штрафа имеет вид

$$F = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (x^2 + u^2) dt.$$

Это соответствует случаю, представленному в (5.16), когда $A = 0$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = 1$. Исходя из (5.23) уравнение Риккати примет вид $S^2 = 1$. Если подставить его в выражение (5.24), можно получить

$$u = \pm x. \quad (5.25)$$

Для обеспечения устойчивости решения уравнения $\dot{x} = u$ в выражении (5.25) необходимо использовать нижний знак, т. е. такое значение $u = -x$, при котором минимизируется интеграл F .

5.5. Релейное управление

Рассмотрим случай, когда уравнение \bar{u} обеспечивает $\bar{x} \rightarrow 0$. При этом будем считать, что штрафную функцию (5.15) можно представить следующим образом:

$$S\dot{\bar{x}} = Q\bar{x} - A^T S\bar{x}. \quad (5.26)$$

Для состояния \bar{x} можно положить $\bar{x} = \bar{x}_0$ при $t = 0$ и $\bar{x} = 0$ при $t = t_f$. Смысл минимизации интеграла (5.26) связан с определением такой величины \bar{u} , для которой за минимальное время происходит переход из состояния $\bar{x} = \bar{x}_0$ в состояние $\bar{x} = 0$. В рассматриваемом случае зависимость, соответствующую выражению (5.16), можно представить в виде

$$F = \int_0^{t_f} \left\{ 1 + \bar{\lambda}^T (\dot{\bar{x}} - A\bar{x} - B\bar{u}) \right\} dt. \quad (5.27)$$

Интегралы (5.27) соответствуют следующие уравнения Эйлера:

$$-A^T \bar{\lambda} - \frac{d}{dt} \bar{\lambda} = 0; \quad (5.28)$$

$$-B^T \bar{\lambda} = 0. \quad (5.29)$$

Таким образом, проблема сводится к тому, чтобы определить такие величины \bar{x} , $\bar{\lambda}$, \bar{u} , которые удовлетворяют уравнениям (5.28), (5.29) и ограничению $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$. Однако следует иметь в виду, что приведенным уравнениям Эйлера (5.28) и (5.29) соответствуют решения, не имеющие смысла ($\bar{\lambda} = 0$ представляет собой решение, не имеющее смысла).

В качестве *примера* можно привести следующее. Для уравнения $\ddot{x} = u$, описывающего движение сосредоточенной массы в горизонтальной плоскости, можно записать

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad (5.30)$$

Уравнения, соответствующие (5.28) и (5.29), имеют вид

$$0 - \dot{\lambda}_1 = 0;$$

$$-\lambda_1 - \dot{\lambda}_2 = 0;$$

$$\lambda_2 = 0.$$

В данном случае решением является $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Это означает, что при отсутствии ограничений для управления \bar{u} (при использовании больших \bar{u}) можно сколь угодно быстро достичь состояния, соответствующего начальной точке. Ограничения по \bar{u} , приемлемые с точки зрения физического смысла, означают, что в регуляции \bar{u} имеется предел. Когда в штрафной функции

$$F = \int_0^a h(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{\lambda}, \bar{u}) dt,$$

величина \bar{u} не ограничена, уравнения Эйлера можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{\bar{x}}} \right) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{u}} = 0. \quad (5.31)$$

В этом случае уравнение (5.31) можно рассматривать как условие, при котором функция h имеет минимум, если в качестве параметра, изменяющегося без ограничений, использовать величину \bar{u} . Следовательно, рассматривая условие минимума функции h (уравнение (5.31)) даже при наложении ограничения на величину \bar{u} , после тщательного исследования можно доказать справедливость изложенного выше соображения. При определении минимального значения интеграла F , связанного с ограничением величины \bar{u} , целесообразно определить границу такого ограничения.

Вновь рассмотрим *пример*, представленный формулой (5.30). При $|\bar{u}| < 1$ анализируем проблему минимального времени, описываемую интегралом (5.26). Уравнения Эйлера по переменной x и ограничения можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 - \dot{\lambda}_1 &= 0, & -\lambda_1 - \dot{\lambda}_2 &= 0, \\ \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Функция h в зависимости от параметра u имеет вид

$$h = 1 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - u)$$

и должна принимать минимальное значение. Поскольку h – линейная функция u , условия, при которых имеют место минимальные значения, можно записать в виде $u = 1$ при $\lambda_2 > 0$ и $u = -1$ при $\lambda_2 < 0$.

Если решить систему уравнений (5.32), то можно установить, что $\lambda_1 = c$, а $\lambda_2 = -ct + d$, где c и d – постоянные. Вполне очевидно, что в рассматриваемом случае u является такой функцией, которая в зависимости от знака λ_2 меняет свой знак не более одного раза. Обратим внимание на состояние (x_1, x_2) , когда $u = 1$ и -1 . Проинтегрируем уравнение $dx_1/dx_2 = \pm c_2$, в котором исключен дифференциал dt из $\dot{x}_1 = x_2$

и $\dot{x}_2 = \pm 1$. Можно считать, что рассматриваемые состояния в пространстве состояний имеют место при $x_1 \mp x_2^2 / 2 = \text{const}$. В таком случае можно получить семейство кривых, представленное на рис. 5.4.

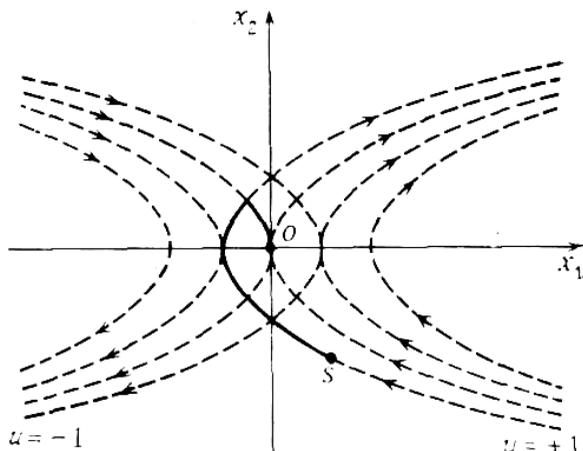


Рис. 5.4. Плоскости точки, характеризующей состояние в фазовой плоскости

Здесь следует обратить внимание на то, что величина u меняет свой знак не более одного раза, а также на то, что управление (см. рис. 5.4), при котором за кратчайшее время происходит перемещение из некоторого начального состояния S в исходную точку O , реализуется вдоль сплошной линии. Таким образом, необходимо отметить то обстоятельство, что при использовании в качестве величины u лишь границы $u = \pm 1$ можно реализовать управление за кратчайшее время. Такое управление носит название *релейного управления*.

5.6. Деинтерференцизация

Рассмотрим уравнение движения, которое можно представить в виде (5.12). Когда имеется возможность измерения величины \bar{x} (размерность которой мала), с помощью изложенного выше метода можно сравнительно легко обеспечить устойчивость. Если для систем, имеющих высокую размерность, удастся осуществить их разложение на системы с одним входом, имеющим физический смысл, и являющихся взаимно независимыми, то такую операцию будем называть *деинтерференциацией*. Однако у большинства объектов

управления, с которыми приходится иметь дело, при управлении по одной входной координате обычно изменяются несколько выходных координат. Поэтому непосредственное (прямое) разбиение на взаимно независимые системы с одним входом оказывается довольно затруднительным. В качестве примера рассмотрим двухзвенный рычажный механизм, приведенный на рис. 5.2, в котором под действием исполнительного органа возникает момент u_2 и происходит вращение: звено 2 поворачивается с возрастанием угла θ_2 . В результате противодействия будет поворачиваться звено 1 и уменьшаться угол θ_1 . Таким образом, момент u_2 влияет не только на угол θ_2 , но и на угол θ_1 . Рассмотрение этой системы упростится, если ее можно разделить на взаимно независимые системы с одним входом.

Рассмотрим *пример* системы из двух единичных сосредоточенных масс, связанных друг с другом пружиной с коэффициентом жесткости k (рис. 5.5). Положения равновесия можно представить исходными точками, а положения сосредоточенных масс – координатами q_1 и q_2 . На сосредоточенные массы действуют силы u_1 и u_2 . Уравнения движения системы запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -k(q_1 - q_2) + u_1; \\ \ddot{q}_2 &= -k(q_2 - q_1) + u_2. \end{aligned} \tag{5.33}$$

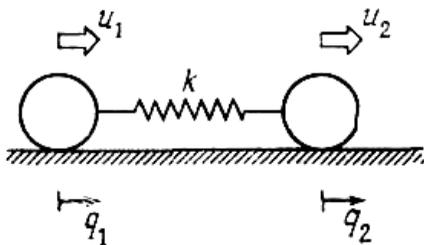


Рис. 5.5. Две сосредоточенные массы (материальные точки), соединенные пружиной

Из рис. 5.5 можно заключить, что сила u_1 оказывает влияние на координату q_2 . Управляющие входные сигналы представим в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= k(q_1 - q_2) + v_1; \\ u_2 &= k(q_2 - q_1) + v_2. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Параметры v_1 и v_2 – новые управляющие входные сигналы. Если подставить в систему (5.33) зависимости (5.34) то получим, что

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= v_1; \\ \ddot{q}_2 &= v_2.\end{aligned}\tag{5.35}$$

В системе (5.35) v_1 оказывает влияние только на координату q_1 , а v_2 – только на координату q_2 , что удовлетворяет указанному выше требованию. Обычно проектировщик определяет, каким образом регулировать параметры v_1 и v_2 . Например, когда хотят отсчитывать координаты q_1 и q_2 соответственно от положений q_1^* и q_2^* , целесообразно считать, что

$$\begin{aligned}v_1 &= f_{11}(q_1 - q_1^*) + f_{12}\dot{q}_1; \\ v_2 &= f_{21}(q_2 - q_2^*) + f_{22}\dot{q}_2.\end{aligned}$$

В общем случае можно полагать, что в случае системы, динамическая характеристика которой удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{q} = [\alpha_{ij}(t)]q_j + [\beta_{ij}(t_j)]\dot{q}_j + [\gamma_{ij}(t)]u_j,\tag{5.36}$$

где $[\gamma_{ij}(t)]$ – регулярная целая функция,

можно воспользоваться выражением

$$u_i^0 = -[\gamma_{ij}]^{-1} \{ [\alpha_{ij}]q_j + [\beta_{ij}]q_j \}$$

и с помощью

$$u_i = u_i^0 + [\gamma_{ij}]^{-1} v_j$$

провести деинтерференцизацию.

Уравнение (5.36) можно представить в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_{11} & \beta_{11} & \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \alpha_{21} & \beta_{21} & \alpha_{22} & \beta_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} u.$$

5.7. Компьютерное управление непрерывной системой

Рассмотренное выше управление с обратной связью относится к теории непрерывных систем. В реальных условиях при проведении управления с помощью компьютера могут возникать ситуации, при которых желаемые характеристики управления не достигаются и требуемая устойчивость не обеспечивается. Это обычно связано с системой дискретного представления данных. Компьютер «не знает», как изменяется состояние управляемого объекта за период выборки от одного момента времени до другого. Следовательно, при использовании теории непрерывных систем необходимо достаточно быстро проводить выборку дискретных данных по сравнению с движениями управляемого объекта.

Вновь в качестве *примера* рассмотрим движение сосредоточенной массы в горизонтальной плоскости.

В рассматриваемом случае уравнение движения имеет вид $\ddot{x} = u$. Если воспользоваться матричной формой записи, то можно получить следующее выражение:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}. \quad (5.37)$$

Положим, что для состояния \bar{x} рассматриваемой системы с помощью компьютера производится дискретное представление данных, при котором период выборки равен T . Тогда $\bar{x}(k)$ – состояние, соответствующее k -й выборке. Можно предположить, что на интервале выборок $k - (k + 1)$ имеет место управляющее входное воздействие $\bar{u}(k)$. Было показано, что между величинами \bar{x} и \bar{u} можно установить связь, которая представляется следующей зависимостью:

$$\bar{x}(k + 1) = \Phi(T)\bar{x}(k) + H(T)\bar{u}(k), \quad (5.38)$$

где

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H(T) = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}.$$

Для случая уравнения (5.37), можно осуществлять непрерывное управление, с обратной связью в виде $\bar{u} = Fx$, когда $\bar{x} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Можно положить, что $F = [f_1, f_2]$. Тогда будем иметь дело с управлением

$$u = f_1x_1 + f_2x_2.$$

В рассматриваемом случае уравнение (5.37) можно представить в виде

$$\dot{\bar{x}} = (A + BF)\bar{x}, \quad (5.39)$$

причем $A + BF$ можно преобразовать к матричной форме:

$$A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix}.$$

Условием, при котором $\bar{x} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, в уравнении (5.35) является тот факт, что все собственные значения $A + BF$ имеют отрицательные действительные части. Собственные значения представляют собой решения следующего характеристического уравнения:

$$\det(A + BF - \lambda E) = 0. \quad (5.40)$$

Раскладывая определитель (5.40), получим

$$\lambda^2 - f_2\lambda - f_1 = 0. \quad (5.41)$$

Из алгебры известно, что $f_2 < 0$ и $f_1 < 0$ представляют собой условия, при которых все решения квадратного уравнения (5.41) имеют отрицательные действительные части.

По аналогии с непрерывной системой можно считать, что и в случае дискретизированной системы, описываемой уравнением (5.38), эффективным является управление с обратной связью вида $\bar{u}(k) = F \bar{x}(k)$. Конечно, можно иметь в виду также, что $\bar{u}(k) = F \bar{x}(k-1)$ и т. д. В дальнейшем воспользуемся выражением

$$\bar{u}(k) = F \bar{x}(k).$$

Если положить, что $F = [f_1, f_2]$, то для $u(k) = Fx(k)$ функция управления будет иметь вид

$$u(k) = f_1 x_1(k) + f_2 x_2(k).$$

Тогда уравнение (5.38) примет форму

$$\bar{x}(k+1) = (\Phi(T) + H(T)F) \bar{x}(k). \quad (5.42)$$

Выражение $\Phi(T) + H(T)F$ можно записать в матричной форме:

$$\Phi + HF = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} [f_1, f_2] = \begin{bmatrix} 1 + T^2 f_1/2 & T + T^2 f_2/2 \\ Tf_1 & 1 + Tf_2 \end{bmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием того, что в уравнении (5.42) все абсолютные собственные значения $\Phi + HF$ меньше единицы, является условие при $x(k) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$. Они являются решением следующего уравнения:

$$\det(\Phi + HF - \lambda E) = 0. \quad (5.43)$$

Если разложить определитель в формуле (5.43), то получим

$$\lambda^2 + \left(-2 - \frac{1}{2}T^2 f_1 - Tf_2\right)\lambda + \left(1 - \frac{1}{2}T^2 f_1 + Tf_2\right) = 0.$$

Легко показать, что

$$1 + a + b > 0;$$

$$1 - a + b > 0; \quad ab < 1$$

являются условиями, при которых все абсолютные значения решения уравнения $x^2 + ax + b = 0$ (a, b – действительные числа) меньше единицы.

Следовательно,

$$1 + (-2 - T^2 f_1 / 2 - T f_2) \lambda + (1 - T^2 f_1 / 2 + T f_2) > 0;$$

$$1 - (-2 - T^2 f_1 / 2 - T f_2) \lambda + (1 - T^2 f_1 / 2 + T f_2) > 0;$$

$$(1 - T^2 f_1 / 2 + T f_2) < 1.$$

Таким образом, условия можно определить в виде

$$\begin{aligned} f_1 &< 0; \\ f_2 &> -2/T; \\ -T f_1 + 2 f_2 &< 0. \end{aligned} \tag{5.44}$$

На рис. 5.6 показаны области f_1 и f_2 , в которых удовлетворяются условия (5.46).

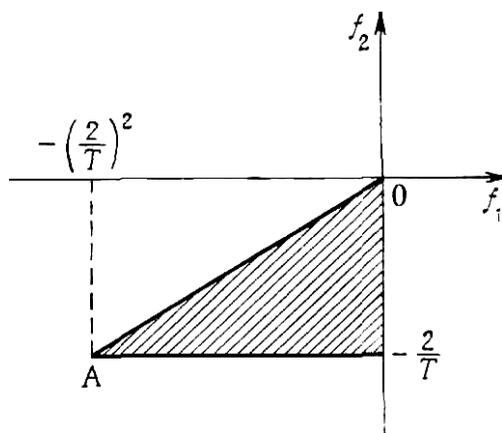


Рис. 5.6. Область устойчивости автоматической импульсной системы относительно коэффициента усиления обратной связи

В том случае, когда по переменной состояния $\bar{x}(t)$, руководствуясь $\bar{u} = F \bar{x}$, непрерывно определяют величину \bar{u} , область ус-

тойчивости является $f_1 < 0$ и $f_2 < 0$. Следует иметь в виду, что при использовании $\bar{x}(k)$, получаемых при дискретном представлении данных, происходит некоторое сужение области устойчивости. При этом с уменьшением интервала выборки T происходит расширение области устойчивости. Причину этого можно легко представить по приведенным на рис. 5.7 результатам моделирования с использованием усиления в окрестностях точки A , где $f_1 = (-2/T)^2$ и $f_2 = -(2/T)$ (см. рис. 5.6).

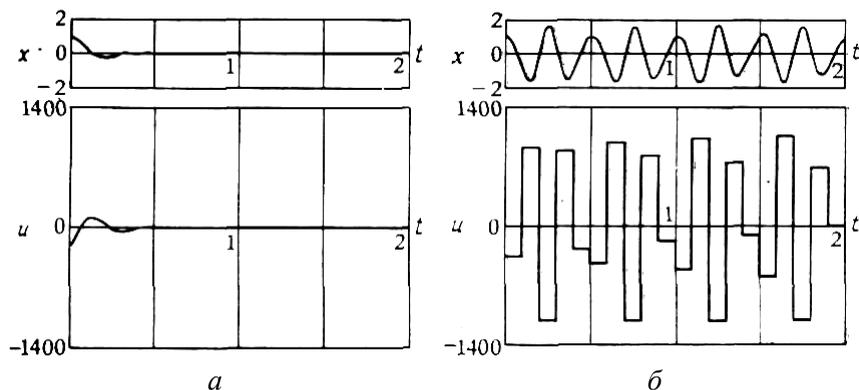


Рис. 5.7. Сопоставление непрерывной системы с импульсной
($T = 0,1$; $f_1 = -360$; $f_2 = -18$):

a – аналоговая система (система непрерывного управления);
б – автоматическая импульсная система

Для непрерывной системы, рис. 5.7, *a*, имеем дело со случаем уравнения (5.39), при котором система стремится к нулю. Импульсной системе, рис. 5.7, *б*, соответствует случай уравнения (5.42), при котором возникают колебания с периодом, примерно в два раза превышающим период дискретного представления данных. Причина заключается в следующем. При высоком коэффициенте усиления обратной связи движения системы становятся быстрыми. При этом регулятор утрачивает способность в достаточной степени «осознавать» изменения состояния системы. Интервал дискретного представления данных может оказывать большое влияние на характеристики импульсной системы. У интервала дискретного представления данных имеется нижний предел, обусловленный скоростью обработки данных в процессоре. Этот интервал нельзя сделать сколь угодно малым.

5.8. Классификация систем управления мехатронными системами

В любой мехатронной системе можно выделить две основные части: объект регулирования (ОР) и автоматическое управляющее (регулирующее) устройство (АУУ). Объектом регулирования может быть любая динамическая система, у которой характеристики и значения величин, определяющих состояние объекта, изменяются во времени под влиянием внешних воздействий (рис. 5.8).

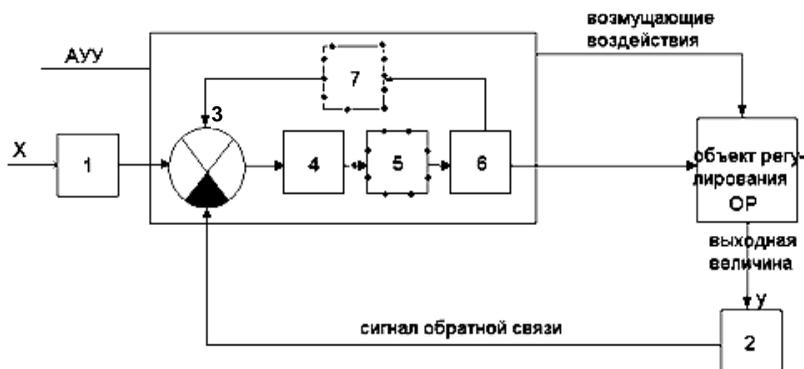


Рис. 5.8. Динамическая система:

1 – задающее устройство; 2 – датчик значений выходной величины; 3 – сравнивающее устройство; 4 – усилитель; 5 – исполнительное устройство; 6 – последовательные корректирующие устройства; 7 – параллельные корректирующие устройства

Состояние объекта регулирования характеризуется рядом величин, часть из которых определяющие и должны измеряться непрерывно или дискретно в процессе регулирования. Эти величины называются *контролируемыми (выходными)*. Внешние (возмущающие) воздействия изменяют состояние объекта регулирования, что выражается в отклонении контролируемых (выходных) величин и заданных (желаемых) значений. Для ликвидации этих отклонений вырабатываются регулирующие (управляющие) воздействия, поступающие на объект управления от автоматического регулирующего (управляющего) устройства (системы).

Системы могут быть построены по разомкнутой и замкнутой схемам.

Разомкнутая система регулирования имеет один канал связи объекта регулирования с регулятором, в результате чего поток информации движется от регулирующего устройства к объекту регулирования (например, станок с ЧПУ).

Разомкнутые системы могут обеспечить требуемое качество регулирования только в том случае, если объект регулирования абсолютно точно выполняет регулирующие воздействия и отсутствуют такие внешние воздействия, которые нарушают заданный (запрограммированный) ход процесса.

Замкнутые системы имеют два информационных канала: канал передачи сигналов регулирования и канал обратной связи для передачи информации о фактических значениях контролируемых величин в объекте регулирования (см. рис. 5.8).

Мехатронная система, как правило, состоит из *объекта управления* и *управляющего устройства* и представляет собой замкнутую систему, в которой объект воздействует на управляющее устройство, а оно в зависимости от величины и знака отклонения воздействует на объект управления. Если к системе приложить воздействие любого вида (возмущающее или управляющее), то в ней возникает *переходный процесс*. После окончания переходного процесса устойчивая система перейдет в *установившееся состояние*, при котором характер управляющих и возмущающих воздействий остается неизменным.

По характеру реакции на управляющие и возмущающие воздействия системы делятся на *статические* и *астатиические*. В *статических системах* в установившемся режиме отклонение стремится к определенному постоянному значению, зависящему от величины воздействия и параметров системы. В *астатиических системах* при установившемся режиме, т. е. при постоянном значении воздействия, отклонение регулируемой величины под действием управляющего воздействия стремится к нулю независимо от величины воздействия. Следует отметить, что одна и та же система в зависимости от точки приложения воздействия может быть как статической, так и астатиической. Если систему разомкнуть, то у статических систем выходная величина будет пропорциональна входной величине, а у астатиических – интегралу входной величины. Такая особенность астатиических систем связана с тем, что в их состав входит хотя бы одно интегрирующее звено.

Пример 5.3

Разница в функционировании статической и астатической систем

Рассмотрим систему автоматической подстройки частоты (АПЧ), блок-схема которой показана на рис. 5.9.

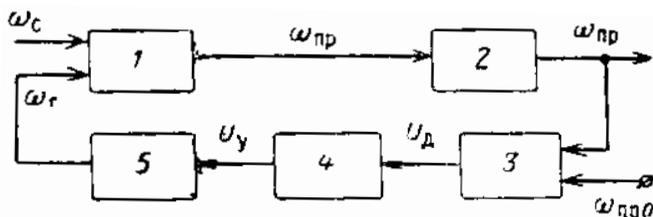


Рис. 5.9. Статическая система автоматической подстройки частоты

Входной сигнал, имеющий частоту ω_c , поступает на вход приемника. На выходе смесителя 1 получается сигнал промежуточной частоты ($\omega_{пр} = \omega_c - \omega_r$), который после прохождения усилителя 2 поступает на выход АПЧ и дискриминатор 3. В дискриминаторе производится сравнение заданного $\omega_{пр0}$ и фактического значения частоты $\omega_{пр}$. В результате этого сравнения дискриминатор вырабатывает напряжение, пропорциональное отклонению частоты $\omega_{пр}$ от заданного значения. Это напряжение повышается усилителем 4 и поступает на управляющий элемент гетеродина 5 в виде управляемой емкости (варикап, варактор) или управляемой индуктивности на феррите, который меняет частоту колебаний ω_r , генерируемых гетеродином.

Задачей АПЧ является поддержание заданного значения промежуточной частоты $\omega_{пр0}$, следовательно, эту систему можно рассматривать как систему *автоматической стабилизации*, у которой регулируемой величиной является значение промежуточной частоты, а возмущающим воздействием – изменение частоты сигнала на входе приемника.

Если же в качестве регулируемой величины рассматривать частоту гетеродина ω_r , то АПЧ можно считать *следающей системой*, в которой

частота гетеродина следит за частотой входного сигнала. В этом случае частота входного сигнала будет управляющим воздействием.

Проанализируем работу статической АПЧ в установившемся режиме. Будем считать, что регулируемой величиной является $\omega_{\text{пр}}$, т. е. что АПЧ работает в режиме автоматического *стабилизатора*.

Пусть в начальный момент времени напряжение на выходе дискриминатора будет равно нулю, т. е. промежуточная частота будет равна заданному значению, при этом частота гетеродина

$$\omega_{r0} = \omega_{c0} - \omega_{\text{пр}0},$$

где ω_{c0} – средняя частота входного сигнала;

$\omega_{\text{пр}0}$ – заданное значение промежуточной частоты.

Если частота входного сигнала отклонилась от среднего значения на $\delta\omega_c$, то, так как частота гетеродина осталась неизменной, промежуточная частота также изменится на величину

$$\delta\omega_{\text{пр}} = \delta\omega_c.$$

Изменение промежуточной частоты вызовет появление напряжения на выходе дискриминатора, причем знак и величина этого напряжения будут зависеть от знака и величины отклонения промежуточной частоты от заданного значения:

$$U_d = k_d \delta\omega_{\text{пр}},$$

где k_d – коэффициент усиления дискриминатора.

Это напряжение будет подано на усилитель на его выходе и вызовет появление управляющего напряжения

$$U_y = k_y U_d = k_y k_d \delta\omega_{\text{пр}},$$

где k_y – коэффициент усиления.

Управляющее напряжение изменит частоту гетеродина на величину

$$\delta\omega_r = k_r U_y = k_r k_y k_d \delta\omega_{\text{пр}}, \quad (5.45)$$

где k_r – коэффициент усиления гетеродина.

В результате отклонение промежуточной частоты от заданного значения (ошибка регулирования) будет

$$\delta\omega_{\text{пр}} = \delta\omega_c - \delta\omega_r. \quad (5.46)$$

Если в уравнение (5.46) подставить значение $\delta\omega_r$ из уравнения (5.45), то получим

$$\delta\omega_{\text{пр}} = \frac{\delta\omega_c}{1 + k_r k_y k_d} = \frac{\delta\omega_c}{1 + k}, \quad (5.47)$$

где k – общий коэффициент усиления системы.

Из уравнения (5.47) видно, что величина ошибки регулирования в статической системе пропорциональна величине возмущающего воздействия $\delta\omega_c$ и уменьшается с ростом *коэффициента усиления системы* k , равного произведению коэффициентов усиления звеньев. Эта ошибка называется *статической*, так как она имеется и в установившемся режиме.

Для уменьшения статической ошибки следует увеличивать коэффициент усиления системы. До известной степени можно считать, что величина коэффициента усиления определяется требованиями к величине статической ошибки.

Если бы такое же изменение частоты сигнала произошло в неавтоматизированной системе, то оно привело бы к такому же по величине изменению промежуточной частоты, т. е. ошибка в величине промежуточной частоты была бы

$$\delta\omega_{\text{пр}} = \delta\omega_c.$$

Использование системы автоматического управления позволяет уменьшить ошибку в $1 + k$ раз. Следует еще раз подчеркнуть, что в статической системе ошибка имеется всегда, так как она обуславливает работу всей системы.

Возмущающее воздействие не обязательно должно быть приложено на входе системы. Аналогичные процессы в системе происходят, если бы под влиянием каких-либо воздействий, например изменения величины напряжения питания, изменилась частота гетеродина.

Пример 5.4

Рассмотрим другой вариант системы АПЧ: астатическую систему АПЧ (рис. 5.10). В этой системе имеется *интегрирующее звено*, например двигатель *1*, у которого угол поворота выходной оси пропорционален интегралу от угловой скорости ее вращения.

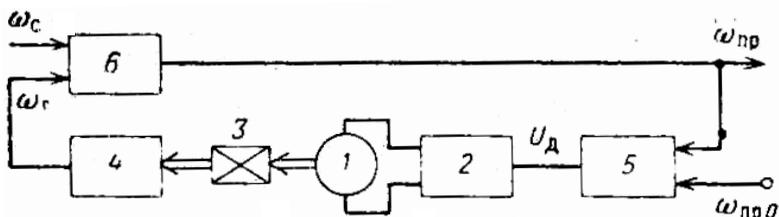


Рис. 5.10. Астатическая система автоматической подстройки частоты

Если пренебречь инерционностью ротора и влиянием индуктивности управляющей обмотки двигателя, то угловую скорость вращения ротора двигателя можно считать пропорциональной напряжению, поданному на управляющую обмотку двигателя.

С выходной осью двигателя, на который подается напряжение с усилителя 2, через редуктор 3 связана переменная емкость или индуктивность, управляющая частотой гетеродина 4. Если промежуточная частота равна заданному значению, то напряжение на выходе дискриминатора 5 равно нулю и ось двигателя неподвижна. При отклонении промежуточной частоты, получаемой на выходе смесителя 6, от заданного значения ось двигателя начнет вращаться, изменяя частоту гетеродина так, чтобы уменьшалась ошибка регулирования – отклонение промежуточной частоты от заданного значения. Если считать, что напряжение трогания ротора двигателя близко к нулю, то двигатель будет менять частоту гетеродина до тех пор, пока ошибка регулирования не станет равной нулю. Следовательно, при известных допущениях можно считать, что в астатической системе АПЧ ошибка в установившемся режиме равна нулю.

В каждом конкретном случае проектирования динамических систем приходится делать выбор между более простыми статическими системами, не содержащими интегрирующих звеньев, но имеющими

ошибку в установившемся состоянии, и более сложными астатическими системами, не имеющими ошибки в установившемся режиме.

Следует заметить, что одна и та же система может быть статической по отношению к возмущающему воздействию и астатической по отношению к управляющему воздействию.

Рассмотренная астатическая система АПЧ имела астатизм первого порядка, т. е. обеспечивала нулевую ошибку при скачкообразном изменении частоты входного сигнала. При этом предполагалось, что в дальнейшем частота входного сигнала сохранит свое новое значение. Если же частота входного сигнала будет линейно изменяться, то в астатической системе АПЧ появится ошибка, пропорциональная скорости изменения частоты входного сигнала. Действительно, если изменение частоты входного сигнала будет пропорционально времени, то при неизменном значении частоты гетеродина промежуточная частота будет также изменяться по линейному закону. Такое изменение промежуточной частоты вызовет появление линейно изменяющегося напряжения на выходе дискриминатора, а значит и на выходе усилителя. При подаче напряжения на двигатель скорость вращения его ротора будет возрастать, что приведет к изменению частоты гетеродина. Когда переходный процесс закончится, скорость изменения частоты гетеродина будет такой же, как и у входного сигнала, а отклонение промежуточной частоты от заданного значения – таким, которое обеспечит необходимую скорость вращения ротора двигателя. Очевидно, что чем выше общий коэффициент усиления системы, тем меньшее рассогласование необходимо для обеспечения требуемой скорости вращения ротора двигателя. Таким образом, система является статической для воздействия, линейно изменяющегося во времени. Если систему усложнить и, в частности, ввести в нее дополнительно еще одно интегрирующее звено, то она будет астатической и для такого управляющего воздействия, т. е. получится система с астатизмом второго порядка. Этот вывод можно распространить на все виды астатических систем и считать, что могут быть системы с астатизмом первого, второго и высших порядков. Практически используются системы с астатизмом первого и второго порядков.

В приведенных описаниях работы систем АПЧ предполагалось, что после окончания переходного процесса системы переходят к новому установившемуся, равновесному состоянию, т. е. что эти системы *устойчивы*. Известно, что в ряде случаев система при

подаче возмущения может перейти в режим колебаний, т. е. она не придет к новому установившемуся состоянию. Такая система называется *неустойчивой*. В подавляющем большинстве случаев неустойчивые системы нельзя использовать, поэтому одной из главных задач анализа систем является выяснение условий их устойчивости, а одной из главных задач синтеза является обеспечение устойчивости систем.

Рассмотрим основные *признаки классификации* систем автоматического управления, положив в основу следующие характеристики:

- *характер изменения задающего воздействия (цель управления);*
- *принцип формирования сигналов;*
- *характер взаимной зависимости между сигналами.*

В зависимости от характера изменения задающего воздействия системы подразделяются:

– на *системы стабилизации*, в которых задающее воздействие постоянно. Эти системы предназначены для поддержания постоянного значения одной или нескольких регулируемых величин при произвольно меняющихся внешних возмущениях. К таким системам можно отнести, например, системы стабилизации частоты, напряжения, температуры и т. п.;

– *системы программного управления*, в которых задающее воздействие изменяется по определенным законам, заданным в виде функции времени или какого-либо параметра, характеризующего работу системы. Примерами таких систем могут служить системы временного автоматического регулирования усиления, системы перестройки частоты по программе и т. п. Системы автоматической стабилизации являются частным случаем систем программного управления при неизменяемой программе;

– *следающие системы*, у которых характер задающего воздействия заранее неизвестен, например радиолокационные системы сопровождения цели по дальности и угловым координатам; в этом случае характер задающего воздействия определяется движением объекта и его положением относительно системы наблюдения.

Следует подчеркнуть, что указанные три вида систем, несмотря на различие в характере задающего воздействия, решают одинаковую **задачу**: обеспечение возможно более точного соответствия между текущим значением задающего воздействия и фактическим значением управляемой величины.

Наиболее перспективны классы систем автоматического управления, которые называются *адаптивными (самоприспосабливающимися)*. В этих системах состояние объекта управления характеризуется некоторым *показателем качества*, который является функцией одного или нескольких параметров объекта управления.

Задачей адаптивной системы является поддержание заданного, как правило экстремального, значения показателя качества, несмотря на воздействие внешних возмущений или изменение характеристик объекта управления.

Понятие адаптации для системы аналогично соответствующему понятию в биологии, означающему приспособление растения или животного к изменившимся внешним условиям. При адаптации в системе может происходить изменение не только управляющего воздействия, но и способа функционирования автоматического управляющего устройства, т. е. его структуры и закона управления.

На рис. 5.11 показана блок-схема адаптивной системы. Кроме объекта управления и автоматического управляющего устройства в адаптивную систему входит устройство автоматической адаптации, определяющее по значениям входной и выходной величин текущее значение показателя качества и вырабатывающее управляющее воздействие, вводимое либо в управляющее устройство (сплошная линия), либо на вход системы вместо задающего воздействия (пунктирная линия).

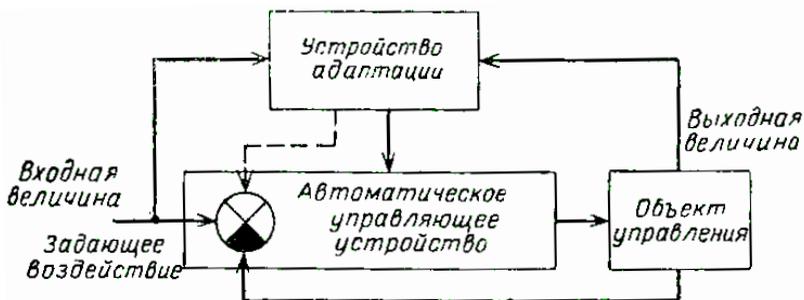


Рис. 5.11. Блок-схема адаптивной системы

В адаптивных системах также используется принцип отклонения, но уже не от некоторого задающего воздействия, а от экстре-

мального значения показателя качества. При этом отклонение может быть определено только в результате анализа в течение некоторого времени реакции системы на возмущение, так как иначе нельзя удостовериться в экстремальности показателя качества. Следовательно, для фиксации экстремального значения показателя качества необходимо, чтобы на систему воздействовало некоторое возмущение, и в результате анализа влияния этого возмущения на показатель качества может быть выявлено отклонение от экстремального значения показателя качества и направление движения к экстремуму. В качестве такого возмущения могут быть использованы специально создаваемые внутри системы пробные возмущения, а также и естественные (тестовые) возмущения, всегда имеющиеся в системе. Системы с пробным возмущением называются *поисковыми*, а использующие естественные возмущения – *беспоисковыми*.

Адаптивные системы делятся на следующие группы:

экстремальные системы, в которых экстремальное значение показателя качества обеспечивается благодаря введению поиска в управляющее воздействие, подаваемое на объект. Устройство адаптации анализирует реакцию объекта управления на поисковые воздействия и вырабатывает управляющий сигнал, который изменяет выходную величину в нужном направлении, т. е. в направлении экстремального значения показателя качества. При достижении экстремальной точки система совершает колебательные движения вокруг нее, при этом среднее значение показателя качества будет близко к экстремальному;

самонастраиваемые системы, у которых цепь автоматической адаптации выполнена в виде замкнутого контура, т. е. представляет собой систему автоматического регулирования или систему автоматического поиска. На основе анализа изменения показателя качества при поиске в этом контуре вырабатывается корректирующее воздействие, изменяющее характеристики автоматического управляющего устройства, но не воздействующее на его структуру;

самоорганизующиеся системы, по своей структуре аналогичные самонастраиваемым, но для обеспечения экстремального показателя качества в них устройство адаптации изменяет не только характеристики управляющего устройства, но и его структуру;

самообучающиеся системы, в которых в течение некоторого промежутка времени происходит накопление информации

об изменении показателя качества под действием возмущений. Анализируя накопленный опыт управления объектом, система автоматически совершенствует свою структуру и способ управления, обеспечивая поддержание экстремального значения показателя качества.

Из приведенного описания разновидностей адаптивных систем видно, что все они для своей работы требуют меньшего объема сведений о характеристиках управляемого процесса, чем обычные системы. Это весьма важное свойство адаптивных систем вытекает из самого принципа адаптации – приспособления, который реализован в таких системах.

В зависимости от принципа формирования сигналов системы делятся на системы непрерывного и прерывного (дискретного) управления. Это разделение определяется применяемым методом передачи сигналов: непрерывным или дискретным.

У непрерывных систем в любой момент времени имеется необходимая информация для управления, следовательно, в таких системах сигналы непрерывны во времени. Кроме того, сигналы непрерывны по уровню, так как они могут принимать бесконечно большое число значений.

В прерывных (дискретных) системах в какой-либо точке системы производится квантование непрерывных сигналов по времени или по уровню или как по уровню, так и по времени. Если производится квантование по времени, то информация содержится в сигнале только для определенных фиксированных моментов времени и отсутствует для промежутков между этими моментами: такой сигнал называется дискретным по времени. Так как при дискретном по времени сигнале информация передается импульсами, системы, в которых применяется такая передача информации, обычно называются *импульсными*.

Если в системе имеется элемент с *релейной характеристикой*, при которой выходная величина в зависимости от значений входной величины может принимать два или три постоянных значения, то такую систему называют *релейной*. В настоящее время широко применяются системы, в которых осуществляется квантование сигнала не только по времени, но и по уровню. Благодаря квантованию по уровню в таких системах амплитуда сигнала может принимать определенное конечное число значений, выражаемых в виде кода. Такие системы называются *цифровыми*.

По виду зависимости между входными и выходными сигналами системы подразделяются на линейные и нелинейные.

В *линейных* системах все элементы описываются линейными дифференциальными или разностными уравнениями, что означает наличие во всех звеньях системы линейной связи между входной и выходной величинами этого звена. Благодаря этому свойству к линейным системам применим принцип суперпозиции.

У *нелинейных* систем есть хотя бы один элемент, в котором имеется нелинейная связь между входными и выходными сигналами, из-за чего при анализе и синтезе этих систем нельзя применять принцип суперпозиции. Релейные системы являются частным случаем нелинейных систем.

Встречаются системы, у которых параметры элементов меняются во времени независимо от входных сигналов. Такие системы называются *параметрическими*. Процессы в этих системах описываются линейными, нелинейными дифференциальными или разностными уравнениями с переменными коэффициентами. В соответствии с видом уравнения параметрические системы могут быть как линейными, так и нелинейными.

Следует заметить, что описанная классификация, особенно в части адаптивных систем, не является окончательной и справедливой на большой промежуток времени, так как теория и техника систем развиваются, что, безусловно, приведет к созданию новых классов систем, не учитываемых приведенной классификацией.

5.9. Алгоритмы оптимального регулирования (управления) приводами

Рассмотрим структурную схему объекта, который совершает механическую работу за счет подвода энергии.

Обозначим $\bar{u} = (u_1, \dots, u_r)^T$ – входные величины (регулирование, управление), $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ – выходные величины, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – переменные (параметры) состояния.

Уравнение состояния (динамики) объекта в общем случае запишем в виде

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}). \quad (5.48)$$

Модель наблюдения имеет вид

$$\bar{y} = \bar{g}(\bar{x}), \quad (5.49)$$

где $\bar{f} = (f_1(\bar{x}, \bar{u}), \dots, f_n(\bar{x}, \bar{u}))^T$, $\bar{g} = (g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x}))^T$ – вектор функции размерности n и m соответственно.

В случае линейной модели объекта и наблюдения уравнения (5.48), (5.49) соответственно имеют вид

$$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + B(t)\bar{u}; \quad (5.50)$$

$$\bar{y} = C(t)\bar{x},$$

где $A(t)$ – матрица размерности $n \times n$;

$B(t)$ – матрица размерности $n \times r$;

$C(t)$ – матрица размерности $m \times n$.

Рассмотрим случай, когда матрицы A , B , C не зависят от t , C – единичная матрица.

В случае, когда \bar{u} зависит от \bar{x} (рис. 5.12, пунктирная линия), система называется *системой с обратной связью*, если нет, то управление осуществляется без учета состояния объекта (программное управление).

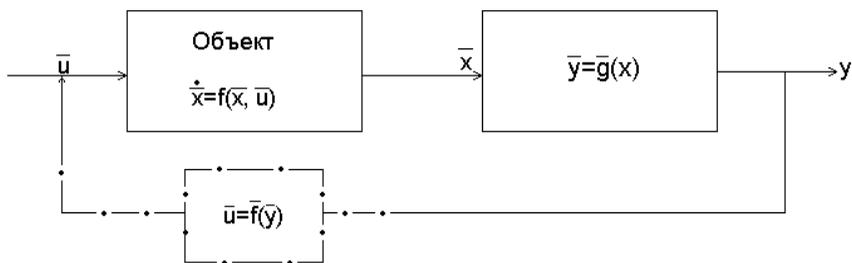


Рис. 5.12. Структурная схема дискретной системы, управляемой микропроцессором

Алгоритм регулирования (управления) выбирается из множества возможных по какому-либо критерию.

Рассмотрим нахождение оптимального линейного управления объектом с обратной связью, описываемое линейным уравнением (5.50). Наиболее широко используются критерии в интегральном виде:

$$I = \int_0^a F(\bar{x}, \bar{u}, t) dt, \quad (5.51)$$

где I – функционал, значение которого зависит от вида $\bar{x}(t)$.

Оптимальное решение находится из условия минимума функционала (5.51). Пусть обратная связь реализуется в виде

$$\bar{u} = D\dot{\bar{x}},$$

где D – матрица $n \times r$, постоянная.

Для простоты положим $r = n$, тогда D – единичная матрица.

Как известно из вариационного исчисления, решение, обеспечивающее минимум (5.51), является решением уравнения Лагранжа–Эйлера

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\bar{x}}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = 0.$$

В случае если \bar{x} и $\dot{\bar{x}}$ связаны между собой соотношением

$$\bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0, \quad (5.52)$$

нахождение оптимального решения приводится к задаче на условный экстремум методом неопределенных множителей Лагранжа.

Требуется найти такое $\bar{u}(t)$, которое обеспечивает минимум I при условии (5.52):

$$I = \int_0^a \left[F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \lambda^T \bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right] dt.$$

Уравнение Лагранжа–Эйлера в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda}^T \bar{s}) - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{\bar{x}}} + \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{x}}} (\bar{\lambda}^T \bar{s}) \right\} = 0;$$

$$\bar{s}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0.$$

Обобщением рассмотренной задачи является задание функции $F(\bar{x}, \bar{u}, t)$ в виде

$$F(\bar{x}, \bar{u}, t) = \frac{1}{2} \int_0^a (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt \quad (5.53)$$

для уравнений динамики (5.50) при $A(t) = \text{const}$, $C(t) = \text{const}$.

Тогда оптимальное управление \bar{u} находится из условия минимума

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt, \quad (5.54)$$

где $F(\bar{x}, \bar{u}, t)$ – квадратичная форма;

Q и R – симметричные матрицы положительных постоянных коэффициентов:

$$\bar{x}^T Q \bar{x} > 0;$$

$$\bar{u}^T R \bar{u} > 0.$$

Если на переменные \bar{x} , \bar{u} наложены ограничения (связи), то, используя метод неизвестных множителей Лагранжа, критерий качества регулирования (5.50) можно записать в виде (5.54):

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) + \bar{\lambda}^T (\dot{\bar{x}} - A \bar{x} - B \bar{u}) \right\} dt.$$

Уравнение Эйлера в переменных \bar{x} , \bar{u} можно записать следующим образом:

$$Q \bar{x} - A \bar{\lambda}^T - \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = 0;$$

$$R \bar{u} - B^T \bar{\lambda} = 0. \quad (5.55)$$

Находя из (5.55) $\bar{u} = R^{-1}B^T\bar{\lambda}$ и подставляя его в ограничение $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$, получим

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + BR^{-1}B^T\bar{\lambda}; \quad (5.56)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = Q\bar{x} - A^T\bar{\lambda}. \quad (5.57)$$

Представляя решение дифференциальных уравнений (5.57) в виде $\bar{\lambda} = S\bar{x}$ (S – матрица произвольных постоянных) и подставляя в (5.56), находим

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + BR^{-1}B^TS\bar{x}; \quad (5.58)$$

$$S\dot{\bar{x}} = Q\bar{x} - A^TS\bar{x}. \quad (5.59)$$

Исключая $\dot{\bar{x}}$ из уравнений (5.58), (5.59), получим систему алгебраических уравнений для нахождения матрицы S :

$$SA + A^TS + SBR^{-1}B^TS = Q. \quad (5.60)$$

Таким образом, вектор \bar{u} представляется в виде

$$\bar{u} = R^{-1}B^T\bar{\lambda} = R^{-1}B^TS\bar{x}.$$

Здесь $R^{-1}B^TS$ представляет собой коэффициент усиления обратной связи. Квадратное уравнение (5.60) является уравнением Риккати.

Рассмотрим случай, когда динамика системы описывается разностными уравнениями в дискретные моменты времени:

$$\bar{x}(k+1) = \Phi(T)\bar{x}(k) + H(T)\bar{u}(k);$$

$$\Phi(T) = e^{AT};$$

$$H(T) = \int_0^T e^{A\tau} d\tau;$$

$$\bar{y}(k) = C\bar{x}(k).$$

Цифровое управление с помощью микропроцессора осуществляется на базе измерений и регулирующих воздействий в дискретные моменты времени $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$, причем при $kT \leq t \leq (k+1)T$ считается, что $u(t) = u(k) = \text{const}$. Структурная схема дискретной системы, управляемой микропроцессором, изображена на рис. 5.12.

Для линейной системы имеем

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} 1T \\ 01 \end{pmatrix}, \quad H(T) = \begin{pmatrix} T2/2 \\ T \end{pmatrix}.$$

Критерий качества регулирования (5.53) в дискретном виде имеет вид

$$I = \sum_{k=0}^n \bar{x}^T(k) Q \bar{x}(k) + \bar{u}^T(k) R \bar{u}(k).$$

5.10. Использование z -преобразования для анализа дискретных систем

Для анализа дискретных систем также может применяться преобразование Лапласа.

Если поведение системы достаточно полно описывается значениями выходной функции только в дискретные моменты времени, то более удобным математическим аппаратом для анализа может служить z -преобразование.

Непрерывная функция времени $x(t)$ с помощью преобразования представляется изображением по Лапласу:

$$F(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (5.61)$$

Если взять конечный интервал времени $\Delta t = T$ и представить текущее время в виде $t = nT$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, то интеграл в последнем выражении можно заменить суммой:

$$F(p) = T \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (5.62)$$

Предел этого выражения при $T \rightarrow 0$ даст преобразование Лапласа непрерывной величины $x(t)$ согласно (5.61). Введем обозначение

$$e^{pT} = z. \quad (5.63)$$

Тогда формулу (5.62) можно представить в следующем виде:

$$F(p) = T \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}.$$

Второй сомножитель в правой части носит название *z-преобразования* дискретной функции времени:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}. \quad (5.64)$$

Иногда применяется символическая запись

$$F(z) = Z[x(nT)].$$

Выражение (5.64) является, по существу, деленным на T преобразованием Лапласа дискретной функции времени при использовании подстановки (5.63).

В качестве примера найдем z -преобразование для единичной ступенчатой функции $1(t)$. Суммируя геометрическую прогрессию в соответствии с (5.64), получаем

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \frac{z}{z-1}.$$

Предел, к которому стремится сумма бесконечного числа слагаемых в последнем выражении, записан на основании формулы для суммы членов геометрической прогрессии.

Аналогичным путем можно найти z -преобразование для других функций времени. Составлены подробные таблицы z -преобразований, не уступающие по полноте таблицам для преобразований Лапласа.

В качестве иллюстрации в табл. 5.1 приведены z -преобразования для некоторых функций времени при условии, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Таблица 5.1

 z -преобразования функций времени

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Обыкновенное преобразование $F(z)$	Модифицированное преобразование $F(z, \varepsilon)$
1	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{\varepsilon Tz}{z-1}$
3	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2z}{(z-1)^3} + \frac{(1+2\varepsilon)T^2z}{2(z-1)^2} + \frac{(\varepsilon T)^2z}{2(z-1)}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$	$\frac{zd^\varepsilon}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$
5	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, d = e^{-\alpha T}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^\varepsilon}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$
6	$\sin \beta t$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}, \delta = 1 - \varepsilon$
7	$\cos \beta t$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos \varepsilon \beta T - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}, \delta = 1 - \varepsilon$
8	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2},$ $d = e^{-\alpha T}$	$zd^\varepsilon \left(\frac{z \sin \varepsilon \beta T + d \sin \delta \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2} \right),$ $d = e^{-\alpha T}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{z^2 - zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2},$ $d = e^{-\alpha T}$	$zd^\varepsilon \left(\frac{z \cos \varepsilon \beta T - d \cos \delta \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2} \right),$ $d = e^{-\alpha T}$

Обратный переход от z -преобразования к функции времени может быть осуществлен по формуле обращения

$$x(nT) = \frac{1}{i2\pi} \oint F(z) z^{n-1} dz,$$

причем интегрирование ведется по окружности:

$$|z| = e^{cT},$$

где c – абсцисса абсолютной сходимости.

5.11. Пример решения задачи

Передаточная функция непрерывной части системы регулирования с ЦВМ имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p^2},$$

где $K = 100 \text{ с}^{-2}$ – общий коэффициент усиления разомкнутой цепи регулирования;

τ – постоянная времени корректирующего устройства.

Определить допустимое значение периода дискретности компьютера и требуемое значение постоянной времени корректирующего устройства, чтобы показатель колебательности не превышал значения $M = 1,3$, если запаздывание в компьютере равно нулю, а влиянием квантования по уровню можно пренебречь.

Р е ш е н и е

Определим передаточную функцию разомкнутой системы совместно с компьютером:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^3} + \frac{K\tau}{p^2} \right\}. \quad (5.65)$$

В соответствии с табл. 5.1

$$Z \left\{ \frac{K}{p^3} + \frac{K\tau}{p^2} \right\} = \frac{KT_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} + \frac{KT_0 \tau z}{(z-1)^2}.$$

Далее из (5.65) находим

$$W(z) = \frac{KT_0^2(z+1)}{2(z-1)^2} + \frac{KT_0\tau}{z-1}.$$

Перейдем к ω -преобразованию, используя подстановку

$$z = \frac{1+\omega}{1-\omega}.$$

В результате получаем

$$W(\omega) = \frac{KT_0^2}{4} \frac{\left(1 + 2\frac{\tau}{T_0}\omega\right)(1-\omega)}{\omega^2}. \quad (5.66)$$

Теперь получим частотную передаточную функцию посредством подстановки

$$\omega = j\frac{T_0}{2}\lambda, \quad (5.67)$$

где λ представляет собой абсолютную псевдочастоту.

Используя подстановку (5.67), из (5.66) имеем

$$W(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda\tau)\left(1-j\lambda\frac{T_0}{2}\right)}{(j\lambda)^2}.$$

Модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы

$$|W(j\lambda)| = \frac{K\sqrt{1+\tau^2\lambda^2}\sqrt{1+j\lambda\frac{T_0}{4}\lambda^2}}{\lambda^2}, \quad (5.68)$$

а фаза

$$\psi(\lambda) = -180^\circ + \arctg\tau\lambda - \arctg\frac{T_0\lambda}{2}. \quad (5.69)$$

По выражению (5.68) на рис. 5.13 построены ЛАХ.

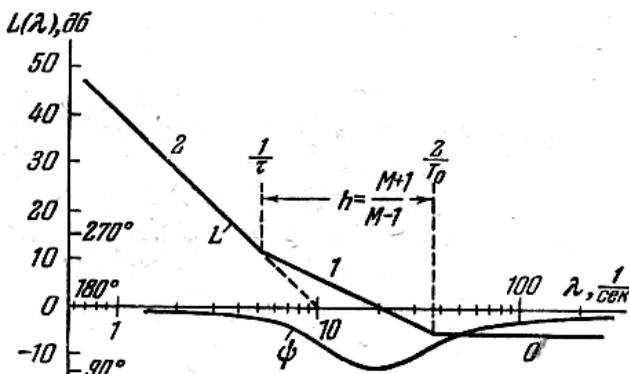


Рис. 5.13. Зависимость ЛАХ – L от λ и ЛФХ – ψ от λ

По виду фазовой характеристики (5.69) этот случай сводится к ЛАХ типа 2 – 1 – 2. В результате получаем следующие формулы для расчета:

базовая псевдочастота ЛАХ

$$\lambda_0 = \sqrt{K} = 10 \text{ с}^{-1},$$

требуемое значение постоянной времени корректирующего устройства

$$\tau = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1,3}{1,3-1}} = 0,21 \text{ с};$$

требуемая протяжность участка ЛАХ с наклоном 20 дб/дек

$$h = \frac{M+1}{M-1} = \frac{1,3+1}{1,3-1} = 7,7;$$

допустимое значение периода дискретности

$$\frac{T_0}{2} \leq \frac{\tau}{h} = \frac{0,21}{7,7} \text{ с},$$

откуда $T_0 \leq 0,054 \text{ с}$.

ЛАХ – линейно-амплитудная характеристика.

ЛФХ – линейно-фазовая характеристика.

6. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ В МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМАХ

Теорию конечных автоматов можно рассматривать как часть общей математической теории систем. Она изучает абстрактные математические модели и их общие свойства. С другой стороны, на конечные автоматы можно смотреть как на идеализированные модели многих реальных устройств и явлений. Идеи и методы, развитые в теории конечных автоматов, полезны в самых различных областях науки и техники, в том числе в мехатронике.

Конечный автомат имеет *конечное* число *входов* и *выходов*. В момент времени t на каждый вход конечного автомата поступают сигналы, а на его выходах появляются сигналы, являющиеся его реакцией на эти входные сигналы. Смена сигналов происходит в дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots , и они отождествляются с целыми неотрицательными числами. Переменная времени t принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Этот класс моделей не рассматривает физическую природу сигналов. Он предполагает, что в момент времени t на каждый вход конечного автомата поступает только один сигнал и на выходе вырабатывается тоже только один сигнал. Число входных и выходных сигналов конечно. Будем обозначать входы конечного автомата переменными x_1, x_2, \dots, x_n , а его выходы y_1, y_2, \dots, y_m .

На рис. 6.1 схематически изображен конечный автомат M .

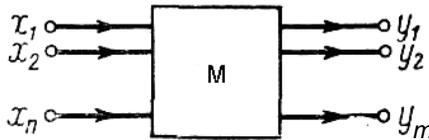


Рис. 6.1. Конечный автомат

Входные сигналы входа x_i заданы буквами входного алфавита $X_i (i = 1, \dots, n)$. Выходные сигналы выхода y_j заданы буквами выходного алфавита $Y_j (j = 1, \dots, m)$. Из требования конечности множеств входных и выходных сигналов вытекает, что алфавиты $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ конечны. Если конечный автомат M имеет n входов x_1, \dots, x_n , на которые подаются входные сигналы из алфави-

тов X_1, \dots, X_n , то без потери общности его можно рассматривать как имеющий один вход x , на который поступают сигналы алфавита $X_1 \times \dots \times X_n$. Аналогично обстоит дело с выходом.

В зависимости от потребностей можно рассматривать конечный автомат, имеющий как один, так и несколько входов или выходов.

6.1. Функционирование конечного автомата. Состояния. Переходы

Под функционированием автомата понимают его способность преобразовывать буквы входного алфавита в буквы выходного алфавита. Предположим, что автомат имеет один вход и один выход. Будем считать, что поведение автомата описано, если указана функциональная зависимость выходного сигнала от входного в момент времени t . Однако у автомата выход в момент t определяется не только входом, но и всей предыдущей работой автомата или памятью о предыдущей работе. Это означает, что существуют *внутренние переменные*, от которых зависит выход в момент t . Будем учитывать суммарное влияние этих переменных, вводя понятие некоторой величины — *состояния*, которая по входному сигналу и значению внутренней переменной позволяет однозначно определить выходной сигнал. Основным ограничением, налагаемым на класс рассматриваемых моделей, является конечность числа состояний автомата. Дадим точное математическое определение конечного автомата.

Конечным автоматом M называется совокупность пяти объектов:

1) конечного непустого множества $X = \{a_1, \dots, a_p\}$, называемого *входным алфавитом* автомата M , его элементы называются входными символами-буквами;

2) конечного непустого множества $Y = \{b_1, \dots, b_l\}$, называемого *выходным алфавитом* автомата M ; его элементы называются выходными символами-буквами;

3) конечного непустого множества $Z = \{q_1, \dots, q_s\}$, называемого *множеством состояний* автомата M ; его элементы называются состояниями;

4) *переходной функции состояний f* , отображающей множество всех упорядоченных пар (a_j, q_i) в множество Z ;

5) *выходной функции* g , отображающей множество всех упорядоченных пар (a_j, q_i) в множество Y .

Таким образом, конечный автомат M – пятерка (X, Y, Z, f, g) . В каждый момент t на вход автомата M поступает одна из букв $x(t)$ алфавита X , при этом в тот же самый момент времени t на выходе появляется одна из букв $y(t)$ алфавита Y , а состояние автомата $z(t)$ меняется.

Исходя из 4-го и 5-го пунктов определения конечного автомата, имеем соотношения

$$\begin{aligned} z(t+1) &= f(x(t), z(t)); \\ y(t) &= g(x(t), z(t)), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $z(t)$ и $z(t+1) \in Z$, $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$.

Если дано $z(0)$ – начальное состояние конечного автомата M , то последовательность l входных букв (входное слово длины l) в силу (6.1) однозначно определит последовательность состояний и выходное слово той же самой длины. Конечный автомат M , для которого указано $z(0)$, называется *инициальным автоматом*.

Автоматы $M_1 = (X_1, Y_1, Z_1, f_1, g_1)$ и $M_2 = (X_2, Y_2, Z_2, f_2, g_2)$ называют *изоморфными*, если:

- 1) $X_1 = X_2 = X$;

- 2) можно установить взаимно однозначное соответствие между Z_1 и Z_2 так, что если $q_1 \in Z_1$ соответствует $q_2 \in Z_2$, то $\forall a_i (a_i \in X) f_1(a_i, q_1)$ соответствует $f_2(a_i, q_2)$ и $g_1(a_i, q_1) = g_2(a_i, q_2)$.

Таким образом, автоматы M_1 и M_2 отличаются только метками состояний. В дальнейшем конечные автоматы будем различать с точностью до изоморфизма.

6.2. Классификация конечных автоматов

В зависимости от мощности множеств X, Y, Z и вида функций f и g различаются следующие виды автоматов.

1. **А в т о м а т б е з п а м я т и.** В этом случае множество Z состоит из одного элемента, т. е. автомат есть тройка (X, Y, g) . Рекур-

рентные соотношения (6.1) вырождаются в функциональное соотношение

$$y(t) = g(x(t)).$$

2. **Автономный автомат.** Множество X состоит из одного элемента, т. е. автомат M есть четверка (Y, Z, f, g) . Рекуррентные соотношения (6.1) вырождаются в соотношения

$$z(t+1) = f(z(t));$$

$$y(t) = g(z(t)).$$

3. **Автомат без выхода.** Множество Y состоит из одного элемента, т. е. автомат M есть тройка (X, Z, f) . Рекуррентные соотношения (6.1) вырождаются в соотношение

$$z(t+1) = f(x(t), z(t)).$$

4. **Автомат с задержкой.** Функция g зависит только от состояния $z(t)$; соотношения (6.1) имеют вид

$$z(t+1) = f(x(t), z(t));$$

$$y(t) = g(z(t)).$$

5. **Автомат Мура.** Функция g зависит от состояния $z(t+1)$; соотношения (6.1) имеют вид

$$z(t+1) = f(x(t), z(t));$$

$$y(t) = g(z(t+1)).$$

6.3. Задание конечных автоматов таблицами и графами

Функции перехода f и выхода g , поскольку области определения и изменения их конечны, могут быть заданы таблицами, которые

называются *таблицей переходов* и *таблицей выходов* соответственно. Таблицы переходов и выходов имеют вид табл. 6.1 и 6.2.

Таблица 6.1

Переходы

$z(t) \backslash x(t)$	$z(t+1)$			
	a_1	a_2	...	a_p
q_1				
q_2				
\cdot				
\cdot				
\cdot				
q_s				

Таблица 6.2

Выходы

$z(t) \backslash x(t)$	$y(t)$			
	a_1	a_2	...	a_p
q_1				
q_2				
\cdot				
\cdot				
\cdot				
q_s				

Строки таблиц занумерованы состояниями, а столбцы – входными символами. В табл. 6.1 переходов на пересечении q_i строки и a_j столбца стоит $f(a_j, q_i)$, а в табл. 6.2 выходов на пересечении q_i строки и a_j столбца стоит $g(a_j, q_i)$.

Другим способом задания конечного автомата является задание с помощью ориентированного графа, называемого *графом переходов*. Граф переходов автомата M имеет s вершин, которым приписаны s состояний автомата M . Если $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ – множество входных символов, таких что $f(a_{i_v}, q_i) = q_j$ и $g(a_{i_v}, q_i) = b_{i_v}$ ($v = 1, \dots, r$), то существует ребро, идущее из вершины q_i в вершину q_j , и этому ребру поставлено в соответствие выражение $a_{i_1} / b_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_r} / b_{i_r}$ (если множество $[a_{i_1}, \dots, a_{i_r}]_{i_1}$ пусто, то таких ребер нет). Задание конечного автомата графом является более наглядным. Например, при $s = 6$ граф автомата имеет вид, показанный на рис. 6.2.

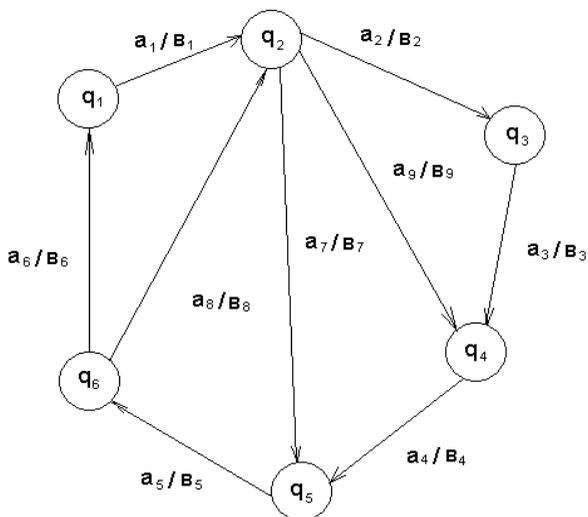


Рис. 6.2. Граф автомата при $s = 6$

6.4. Эквивалентные состояния автомата

Состояние q_i называется *достижимым из состояния q_j* , если существует входное слово, под действием которого автомат, находящийся в состоянии q_j , перейдет в состояние q_i .

Если автомат M имеет s состояний и состояние q_i достижимо из q_j , тогда состояние q_i достижимо из q_j входным словом длины $s - 1$ или меньше.

Действительно, если состояние q_i достижимо из состояния q_j , то в графе переходов автомата M существует путь, ведущий из вершины q_j в вершину q_i . Опуская в нем все циклы, получаем путь из q_j в q_i , который проходит через любое состояние не более чем один раз. Так как число состояний в автомате s , то ребер в пути не больше чем $s - 1$.

Состояние q_1 автомата

$$M_1 = (X, Y, Z_1, f_1, g_1)$$

называется k -эквивалентным состоянию q_2 автомата

$$M_2 = (X, Y, Z_2, f_2, g_2),$$

если при действии всякого входного слова длины k или меньше на автомат M в состоянии q_1 и на автомат M_2 в состоянии q_2 получают одинаковые выходные слова. В этом случае пишут

$$q_{1k} \approx q_{2k}.$$

В противном случае состояния называют k -различимыми.

Предположим, что $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ (этого всегда можно добиться переименованием элементов множеств Z_1 или Z_2).

Тогда множество состояний $Z = Z_1 \cup Z_2$ можно разбить на классы k -эквивалентных состояний так, что два состояния принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они k -эквивалентны. Будем обозначать такое разбиение через π_k .

Состояния q_1 и q_2 называются *эквивалентными*, если они k -эквивалентны для любого конечного k . В этом случае пишут $q_1^k \approx q_2$. В противном случае их называют различимыми.

Множество состояний Z можно разбить на классы так, что два состояния принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Это разбиение представляет собой отношение эквивалентности в Z . Обозначим его через π .

Свойства разбиения π_k

1. Разбиение π_k единственно.

Доказательство этого свойства очевидно.

2. Если $\pi_k \neq \pi$, то число классов в π_{k+1} больше, чем в π_k .

Число классов в любом разбиении не может превзойти числа состояний, поэтому получаем следующее свойство π_k .

3. Если Z содержит s состояний, то $\pi_{s-1} = \pi$.

В силу сказанного выше π можно найти следующей процедурой. Строим π_1 . В один класс попадают два состояния, если они 1-эквивалентны или если в таблице выходов им соответствуют одинаковые строки. Теперь укажем, как по разбиению π_k построить π_{k+1} . Если состояния q_1 и q_2 принадлежат разным классам π_k или

если состояния q_1 и q_2 принадлежат одному классу π_k , но существует входная буква a_i такая, что состояния $f_1(a_i, q_1)$ и $f_2(a_i, q_2)$ принадлежат разным классам π_k , то состояния q_1 и q_2 принадлежат разным классам π_{k+1} . Полученное разбиение π_{k+1} является разбиением π , если либо $\pi_k = \pi_{k+1}$, либо $k + 1 = s - 1$.

6.5. Минимальная форма автомата

Автоматы M_1 и M_2 называются *эквивалентными* ($M_1 \approx M_2$), если каждому состоянию q_i автомата M_1 найдется по крайней мере одно состояние q_j автомата M_2 такое, что $q_i \approx q_j$, и наоборот. В противном случае автоматы M_1 и M_2 различимы.

Рассмотрим автомат

$$M = (X, Y, Z, f, g).$$

Пусть разбиение π множества Z состоит из классов $\sum_1, \sum_2, \dots, \sum_l$ и q_i – произвольный элемент из \sum_i .

Определим автомат

$$\tilde{M} = (X, Y, \tilde{Z}, \tilde{f}, \tilde{g})$$

следующим образом.

Множество состояний \tilde{Z} состоит из l состояний $\tilde{\sum}_1, \dots, \tilde{\sum}_l$ и функции \tilde{f} и \tilde{g} таковы, что

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a_j, \tilde{\sum}_i) &= \tilde{\sum}_k, \text{ если } f(a_j, q_i) \in \sum_k; \\ \tilde{g}(a_j, \tilde{\sum}_i) &= b_k, \text{ если } f(a_j, q_i) = b_k. \end{aligned}$$

Из определения эквивалентных состояний следует, что построение автомата M не зависит от выбора состояния q_i из класса \sum_i . Поэтому автомат \tilde{M} – единственный с точностью до изоморфизма для автомата M .

Автомат \tilde{M} обладает следующими свойствами:

- 1) никакие два состояния автомата \tilde{M} не эквивалентны;
- 2) $\tilde{M} \approx M$;
- 3) не существует автомата M' такого, что $M' \approx M$ и содержит меньше состояний, чем автомат \tilde{M} .

Автомат \tilde{M} называется *минимальной формой* автомата M .

6.6. Сенсорные автоматы

Понятие испытания и классификация. Процесс применения входных слов к автоматам, наблюдения соответствующих выходных слов и получения заключений относительно внутренней структуры автомата называется *испытанием*.

Испытание может быть *безусловным*, когда входное слово определяют заранее, или *условным* порядка k , когда входное слово состоит из k слов и каждое слово (исключая первое) определяют на основе предыдущих наблюдений. Испытание может быть *простым*, когда используют только один автомат, или *кратным* кратности l , когда используют l тождественных автоматов с одним и тем же начальным состоянием. Длина испытания равна числу букв во входном слове. Испытание реализуется, если его длина конечна. Длину, порядок и кратность испытания можно рассматривать как грубую меру их стоимости и использовать как критерии для сравнения различных экспериментов.

В дальнейшем допустимым множеством A автомата M будем называть множество состояний, про которые известно, что они могут быть начальными состояниями автомата M .

6.6.1. Диагностические испытания

Сформулируем диагностическую задачу. Даны автомат M своей минимальной формой и множество допустимых состояний $A = \{q_1, \dots, q_m\}$. Требуется найти начальное состояние автомата M . Решить эту задачу – значит выполнить такое испытание, чтобы об истинном начальном состоянии можно было сделать вывод по на-

блюдению входного и выходного слов. Испытание, которое решает задачу, называется *диагностическим испытанием*.

Диагностическая задача, очевидно, всегда решается для допустимого множества, состоящего из одного элемента.

Диагностическая задача для автомата с s состояниями и допустимым множеством из двух состояний всегда решается простым безусловным испытанием длины, меньшей или равной $s - 1$.

Действительно, так как автомат M дан минимальной формой, то любые два его состояния различимы. Входное слово, различающее состояния, принадлежащие допустимому множеству, будет решать диагностическую задачу. Длина такого слова не больше чем $s - 1$.

Входное слово, решающее диагностическую задачу, называется *диагностической последовательностью*. Диагностическая последовательность минимальной длины называется *минимальной диагностической последовательностью*. Найти минимальную диагностическую последовательность $\varepsilon(q_i, q_j)$ для автомата M допустимого множества $A = \{q_i, q_j\}$ можно следующей процедурой.

Пусть число l таково, что состояния q_i, q_j находятся в разных классах π_l и в одном классе π_{l-1} . Тогда существует входная буква a_{v_1} такая, что состояния q_{i_1} и q_{j_1} , получаемые из состояний q_i и q_j подачей буквы a_{v_1} , являются $(l - 1)$ -различимыми и $(l - 2)$ -эквивалентными. По состояниям q_{i_1} и q_{j_1} можно найти входную букву a_{v_2} и состояния q_{i_2} и q_{j_2} , которые будут $(l-2)$ -различимы и $(l - 3)$ -эквивалентны. Продолжив этот процесс, получим входное слово a_{v_1}, \dots, a_{v_l} . Оно и есть искомая минимальная диагностическая последовательность.

Рассмотрим диагностическое испытание в случае, когда допустимое множество A содержит m элементов ($m > 2$). При построении простого безусловного испытания для автомата M с допустимым множеством $A = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_m}\}$ надо найти входное слово, при подаче которого на вход автомата M для каждого из m состояний множества A на выходе получаются разные слова. Возьмем входное слово $\tilde{\alpha}$. Пусть $A^{(v)}$ – множество состояний, которое получается из состояний

A при подаче ν букв слова $\tilde{\alpha}$. Различных множеств $A^{(\nu)}(|Z|=s)$ может быть не больше чем $\sum_{i=1}^m C_s^i$. Следовательно, после подачи слова длины $\sum_{i=1}^m C_s^i$ множество A перейдет в множество $A_m^{(\nu)}$, которое появлялось раньше. Таким образом, если первые $\sum_{i=1}^m C_s^i$ букв слова $\tilde{\alpha}$ не составляют диагностическую последовательность, то слово $\tilde{\alpha}$ не будет ею. Диагностическую последовательность можно найти перебором всех входных слов длины $\sum_{i=1}^m C_s^i$; их не более чем $p^{\sum_{i=1}^m C_s^i}$, где p – число букв в алфавите X .

Процесс нахождения диагностической последовательности можно упорядочить. Для этого надо построить дерево диагностического эксперимента. Рассмотрим дерево с корнем, обладающее свойствами:

- 1) оно ориентированное;
- 2) из каждой вершины исходит p ребер, если $|X|=p$;
- 3) в каждую вершину, исключая корень, входит одно ребро;
- 4) каждому исходному ребру приписана буква входного алфавита, разным исходящим ребрам одной вершины – разные буквы входного алфавита;
- 5) корню дерева приписано допустимое множество A ;
- 6) остальным вершинам приписаны множества $A^{(\nu)}$, которые получаются из A подачей входного слова длины ν , приписанного пути, ведущему из корня в эту вершину;
- 7) множество $A^{(\nu)}$ есть объединение множеств $A_1^{(\nu)}, \dots, A_{l_\nu}^{(\nu)}$, где множество $A_j^{(\nu)} (j=1, \dots, l_\nu)$ получается из тех состояний множества A , которые неразличимы подачей входного слова.

Полученное дерево является бесконечным; из него, обрезая ветви дерева, можно получить дерево диагностического испытания. Будем обрезать ветвь дерева в тех случаях, если:

- 1) множество встречалось ранее;
- 2) $A_j^{(v)}$ содержит два одинаковых элемента;
- 3) все $A_j^{(v)}$ ($j = 1, \dots, l_v$) состоят из одного элемента.

В результате мы получим дерево диагностического испытания. Диагностической последовательностью будут являться входные слова, приписанные ветвям дерева, обрезанным в силу условия 3).

Диагностическая задача не всегда решается простым безусловным экспериментом. Например, для автомата M , заданного графом переходов (рис. 6.3), и множества допустимых состояний $A = \{1, 2, 3, 4\}$ диагностическую задачу нельзя решить простым безусловным испытанием. Ясно, что диагностическая последовательность должна начинаться с буквы β , второй буквой не может быть ни буква α , в этом случае состояния 1 и 2 неразличимы, ни буква β , в этом случае состояния 3 и 4 неразличимы. Однако диагностическая задача для этого множества допустимых состояний может быть решена простым условным испытанием. Надо сначала подать слово β и затем в зависимости от выходного слова подать либо слово α , либо слово β .

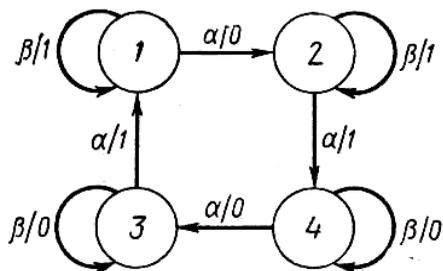


Рис. 6.3. Граф переходов автомата M

Например, диагностическая задача для множества допустимых состояний $\{5, 6, 7, 8\}$ не решается простым экспериментом.

Однако диагностическая задача всегда решается кратным испытанием, рис. 6.4.

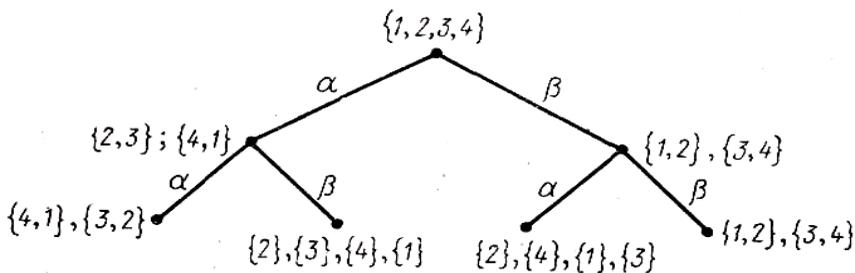


Рис. 6.4. Решение диагностической задачи кратным испытанием

Действительно, во множестве A допустимых начальных состояний любые два состояния различимы. На первую копию автомата подадим входное слово $\tilde{\alpha}$, различающее некоторые два состояния множества A . Множество A можно представить как объединение множеств A_1, \dots, A_l ($A_i \cap A_j = \emptyset$), где A_i состоит из состояний, не различимых словом $\tilde{\alpha}$. В каждом множестве A_i любые два состояния различимы, рис. 6.5.

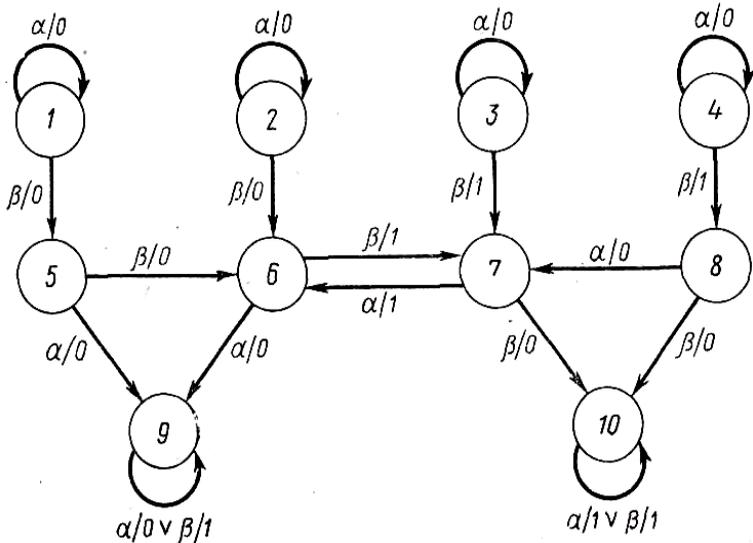


Рис. 6.5. Различимые состояния множества A

На следующую копию автомата подадим входное слово $\tilde{\beta}$, различающее некоторые два состояния множества A_i . Этот процесс надо продолжать до тех пор, пока не удастся различить все состояния множества A . Очевидно, что эта процедура конечна в силу конечности множества A .

6.6.2. Установочные испытания

Сформулируем установочную задачу. Даны конечный автомат M своей минимальной формой и допустимое множество $A = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_m}\}$. Требуется перевести автомат M в известное состояние (провести такой эксперимент, что о состоянии, достигнутом в конце эксперимента, можно судить наблюдая входное и выходное слово). Испытание, которое решает эту задачу, называется *установочным испытанием* для автомата M и допустимого множества A .

Установочная задача всегда решается простым безусловным испытанием.

Действительно, построим серию множеств A_1, \dots, A_l , где каждое множество $A_j = A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_{r_j}}$, а A_{j_k} – подмножество состояний автомата M , может быть с повторяющимися элементами. Множество A_1 совпадает с допустимым множеством $A = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_m}\}$. Если каждое множество A_{j_k} ($k = 1, \dots, r_j$) состоит из одного, может быть, повторяющегося, элемента множества Z , то множество A_j совпадает с A_l , т. е. с последним множеством в серии. Если множество A_j не совпадает с множеством A_l , то из него можно получить множество A_{j+1} следующим образом. Пусть множество A_{j_k} – произвольное из A_j , которое содержит по крайней мере два различных состояния q и q' . Они различимы входным словом $\varepsilon_j(q, q') = \varepsilon_j$. Пусть $A'_{j_1}, \dots, A'_{j_{r_j}}$ означают множества состояний, в которые входное слово ε_j переводит множества $A_{j_1}, \dots, A_{j_{r_j}}$. По слову ε_j определим разбиение множества A_{j_k} . Два состояния множества A_{j_k} принадлежат одному классу, если они не различимы словом ε_j . По разбиению множества A_{j_k} определим

разбиение множества A'_{j_k} . Если два состояния множества A_{j_k} принадлежат разным классам, то состояния, в которые они переходят при подаче слова ε_j , тоже принадлежат разным классам A'_{j_k} . Множество A_{j+1} получается как множество всех классов, получающихся из разбиения всех A'_{j_k} . Множество A_{j_k} разбивается по крайней мере на два класса, поэтому число множеств в A_{j+1} всегда превосходит их число в A_j . После самого большого количества m применений описанной процедуры получается множество A_l , где каждое A_{l_k} есть множество, содержащее, может быть, только один повторяющийся элемент. Входное слово $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l$ переводит множество A в множество A_l и по построению обладает тем свойством, что каждое состояние из A_l достигается с его помощью из A с разными выходными словами.

6.7. Синтез конечных автоматов

Языки, применяемые для описания конечных автоматов, можно разбить на две группы: языки, в которых используется переменная, определяющая внутреннее состояние, и языки, оперирующие только с понятиями «вход-выход». К первой группе относятся описания автомата с помощью таблиц и графов. Ко второй группе относятся разные варианты языка регулярных формул, предикатный язык и т. п. Последние являются более удобными для разговора между заказчиком и исполнителем. Поэтому желательно уметь переходить от описания автоматов с помощью языков второй группы к описанию автоматов на языках первой. Такой переход называют *абстрактным синтезом* конечного автомата.

6.7.1. Регулярные выражения

Пусть дан алфавит $X = \{a_1, \dots, a_p\}$, символы $\Lambda, \emptyset, +, \bullet, *$ и скобки. *Регулярным выражением* являются:

- 1) всякая буква алфавита X и символы Λ, \emptyset ;
- 2) выражения $(E_1 \cdot E_2), (E_1 + E_2), E_1 *$, если E_1 и E_2 – регулярные выражения.

Других регулярных выражений не существует.

Регулярные выражения применяют для описания множеств слов в алфавите X , при этом символы Λ , \emptyset , $+$, \bullet и $*$ интерпретируют следующим образом:

- 1) символ Λ – пустое слово (слово нулевой длины);
- 2) символ \emptyset – пустое множество слов;
- 3) множество $(E_1 + E_2)$ – теоретико-множественное объединение множеств слов E_1 и E_2 ;
- 4) множество $(E_1 \cdot E_2)$ есть множество всех слов вида $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, где $\tilde{\alpha}$ – слово из E_1 и $\tilde{\beta}$ – слово из E_2 . Символ \bullet называют *умножением*;
- 5) множество (E_1^*) есть множество

$$\Lambda + E_1 + (E_1 \cdot E_1) + ((E_1 \cdot E_1) \cdot E_1) + \dots$$

Символ $*$ называют *итерацией*.

Например, выражение $(a_1 \cdot a_2 + a_3) \cdot a_3$ следует понимать как совокупность слов $a_1 a_2 a_3$ и $a_3 a_3$, а выражение $(a_1 + a_2)^*$ – как совокупность всех слов, состоящих из букв a_1 и a_2 , т. е. $\Lambda, a_1, a_2, a_1 a_1, a_1 a_2, a_2 a_1, a_2 a_2, a_1 a_1 a_1, a_1 \dots$

Некоторые свойства операций

- 1) $E_1 + E_2 = E_2 + E_1$;
- 2) $E_1 + (E_2 + E_3) = (E_1 + E_2) + E_3$;
- 3) $E_1 \cdot (E_2 \cdot E_3) = (E_1 \cdot E_2) \cdot E_3$;
- 4) $E_1 \cdot (E_2 + E_3) = (E_1 \cdot E_2) + (E_1 \cdot E_3)$;
- 5) $(E_1 + E_2) \cdot E_3 = (E_1 \cdot E_3) + (E_2 \cdot E_3)$;
- 4) $E_1 + \emptyset = \emptyset + E_1 = E_1$;
- 5) $E_1 \cdot \emptyset = \emptyset \cdot E_1 = \emptyset$;
- 8) $E_1 \cdot \Lambda = \Lambda \cdot E_1 = E_1$;
- 9) $E_1 + E_1 = E_1$;
- 10) $E_1^* = \Lambda + E_1 \cdot (E_1^*)$;
- 11) $E_1 \cdot (E_1^*) = (E_1^*) \cdot E_1$;

$$12) (E_1^*) \cdot (E_1^*) = E_1^*;$$

$$13) (E_1 + E_2)^* = ((E_1^*) + (E_2^*))^*;$$

$$14) \Lambda^* = \Lambda;$$

$$15) \emptyset^* = \Lambda.$$

6.7.2. События. Регулярные события

Множество входных слов называется *событием*. Событие представимо в инициальном автомате M выходной буквой b_i , если выходные слова, которые получаются при подаче на автомат M события, кончатся символом b_i . Событие представимо в инициальном автомате M множеством выходных букв $Y' \subseteq Y$, если событие есть объединение событий, представимых всеми элементами множества Y' .

Рассмотрим конечный автомат M в начальном состоянии q_1 . Поведение этого автомата полностью можно задать совокупностью событий E_{b_1}, \dots, E_{b_t} , где E_{b_i} – множество всех входных слов, которые переходят в выходные слова, кончающиеся на букву b_i, \dots, b_t , – выходной алфавит. Так, если дано входное слово a_{i_1}, \dots, a_{i_l} , то можно определить, в какое выходное слово оно перейдет, если известны события E_{b_1}, \dots, E_{b_t} для автомата M .

С. К. Клини показал, что всякое событие, представимое в автомате, может быть записано в виде регулярного выражения и, наоборот, – всякое событие, представимое в виде регулярного выражения, представимо в автомате. Докажем эту теорему для некоторого частного случая, а именно, будем полагать, что $X = Y = \{0, 1\}$ и автомат задан уравнениями

$$\begin{aligned} y(t) &= g(z(t+1)); \\ z(t+1) &= f(x(t), z(t)). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Теорема Клини (прямая теорема). *Всякое событие, представимое в автомате, регулярно и может быть записано в виде регулярного выражения.*

Доказательство. Пусть дан автомат M с $Z = \{q_1, \dots, q_s\}$, где $q_1 = z(0)$ – начальное состояние автомата.

В случае когда автомат M задан системой (6.2) и $X = Y = \{0, 1\}$, считают, что событие представимо в автомате, если слова из этого события переводят начальное состояние q_1 в состояние, которое дает на выходе букву 1.

Докажем индукцией по p , что множество e_{ip}^j всех входных слов, переводящих состояние q_i в состояние q_j без прохождения через состояния q_k , с номерами k , большими номера p , регулярно. Множество e_{ij}^0 всех входных слов, переводящих состояние q_i в q_j непосредственно без прохождения других состояний, есть $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0+1\}$, Λ или \emptyset .

Пусть e_{ij}^{p-1} – регулярное событие, покажем, что e_{ij}^p – регулярное событие. Событие e_{ij}^p можно представить в виде

$$e_{ij}^{p-1} + e_{ip}^{p+1} \cdot (e_{pp}^{p-1})^* \cdot e_{pj}^{p-1}.$$

Выписанное выражение является регулярным, так как построено из регулярных событий e_{ij}^{p-1} , e_{ip}^{p+1} , $(e_{pp}^{p-1})^*$ и e_{pj}^{p-1} с помощью операций $+$, \cdot , $*$.

Теперь рассмотрим автомат M с начальным состоянием q_1 . Пусть q_{l_1}, \dots, q_{l_k} – состояния, которые ассоциируются с выходом 1, тогда событие, реализуемое автоматом, имеет вид

$$e_{1l_1}^s + \dots + e_{1l_k}^s.$$

Таким образом, показано, что событие, реализуемое в автомате, является регулярным.

Покажем, что имеет место и *обратное утверждение*. Для этого введем вспомогательные понятия и их свойства.

Производная события. Свойства производной

Если дано событие E , то под *производной* этого события по входному слову \tilde{a} понимается множество

$$\partial_{\tilde{a}} E = |\tilde{\beta} / \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \in E|.$$

Можно дать другое определение производной для случая, когда событие представимо в виде регулярного выражения. Это определение будет иметь индуктивный характер в силу аналогичного характера определения регулярного выражения.

Даны алфавит $X = \{a_1, \dots, a_p\}$, событие E и слово $\tilde{\alpha}$. Производная от события E по слову $\tilde{\alpha}$ определяется следующим образом:

- 1) если $E = a_i$ и $\tilde{\alpha} = a_i$, то $\partial_{a_i} E = \Lambda$;
- 2) если $E = a_i$ и $\tilde{\alpha} = a_j$ ($i \neq j$), то $\partial_{a_j} E = \emptyset$;
- 3) если $E = \emptyset$ и $\tilde{\alpha} = a_i$, то $\partial_{a_i} E = \emptyset$;
- 4) если $E = \Lambda$ и $\tilde{\alpha} = a_i$, то $\partial_{a_i} E = \emptyset$;
- 5) если $E = E_1 + E_2$ и $\tilde{\alpha} = a_i$, то $\partial_{a_i} E = \partial_{a_i} E_1 + \partial_{a_i} E_2$,
- 6) если $E = E_1 \cdot E_2$ и $\tilde{\alpha} = a_i$, то

$$\partial_{a_i} E = \begin{cases} (\partial_{a_i} E_1) \cdot E_2, & \text{если } \Lambda E \notin E_1, \\ (\partial_{a_i} E_1) \cdot E_2 + \partial_{a_i} E_2, & \text{если } \Lambda \in E_1; \end{cases}$$

- 7) если $E = E_1^*$ и $\tilde{\alpha} = a_i$, то $\partial_{a_i} E = (\partial_{a_i}) \cdot E_1^*$;
- 8) если E – произвольное событие и $\tilde{\alpha} = \Lambda$, $\partial_{\Lambda} E = E$;
- 9) если E – произвольное событие и $\tilde{\alpha} = a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}} a_{i_k}$, то

$$\partial_{\tilde{\alpha}} E = \partial_{a_{i_k}} (a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}} E).$$

Любое регулярное выражение E имеет конечное число t различных производных, каждая из которых равна некоторой производной регулярного выражения E по слову длины, меньшей или равной $t - 1$.

Теорема Клини (обратная теорема). *Всякое регулярное событие представимо в конечном автомате.*

Доказательство. Пусть дано регулярное событие E . Построим конечный автомат M_E , который будет представлять событие E . Если событие E имеет s различных производных, то у автомата M_E будет s состояний. Состояние, соответствующее производной $\partial_{\tilde{\alpha}} E$, обозначим через $q_{\partial_{\tilde{\alpha}} E}$. Если на вход автомата M_E в состоянии $q_{\partial_{\tilde{\alpha}} E}$ подадут 0, то он перейдет в состояние $q_{\partial_0 \partial_{\tilde{\alpha}} E}$, а если 1, то – в состояние $q_{\partial_1 \partial_{\tilde{\alpha}} E}$. Если производная содержит слово Λ , то состояние

$q_{\partial_{\tilde{\alpha}}E}$ определяет выход 1, все остальные состояния – выход 0. Начальным состоянием автомата M_E является состояние $q_{\partial_{\Lambda}E}$. По построению входные слова, которые переводят автомат M_E из состояния $q_{\partial_{\Lambda}E}$ в состояние $\partial_{\partial_{\tilde{\alpha}}E}$, начинаются со слова $\tilde{\alpha}$. С другой стороны, слово α принадлежит событию E тогда и только тогда, когда слово Λ принадлежит $\partial_{\tilde{\alpha}}E$. Следовательно, множество всех входных слов, переводящих автомат M_E из состояния $q_{\partial_{\Lambda}E}$ в состояния, дающие выход 1, есть событие E .

6.8. Структурный синтез конечных автоматов

6.8.1. Операции над автоматами

До сих пор автомат рассматривался с функциональной точки зрения, т. е. как нечто неделимое, выполняющее функцию. Теперь будем предполагать, что он состоит из элементов — «элементарных» автоматов, соединенных между собой, т. е. будем рассматривать структурную модель автомата. Рассмотрим связь между функциональной и структурной моделями автоматов, а именно, нахождением структурной модели по функциональной модели, и наоборот. Первая задача называется задачей *структурного синтеза*, вторая — *структурного анализа*.

Задача структурного синтеза. Даны инициальный конечный автомат (его таблица, система уравнений, граф), базис синтеза — список «элементарных» автоматов и правила соединения элементарных автоматов. Найти структурную схему автомата, заданного функциональной моделью. Последнее означает соединить «элементарные» автоматы по указанным правилам так, чтобы функциональная модель полученного автомата совпадала с функциональной моделью заданного автомата. Под «элементарными» автоматами понимают любые автоматы, которые в задаче синтеза рассматриваются как неделимые блоки, из которых строится структурная модель.

Остановимся на способах соединения элементарных автоматов. В этом параграфе будем полагать, что каждый автомат может иметь произвольное конечное число входов и выходов. Соединение автоматов есть отождествление входов и выходов (или входных и вы-

Графическое изображение этой операции представлено на рис. 6.8.

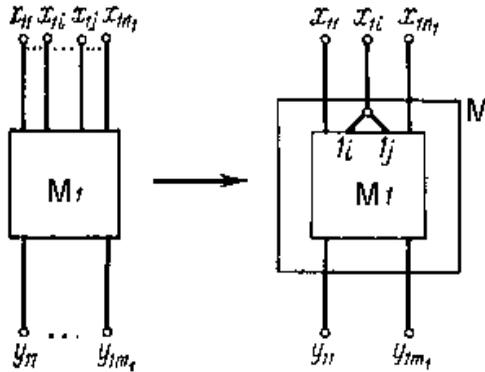


Рис. 6.8. Операция отождествления ходов

Операция обратной связи. Пусть дан автомат M_1 , заданный системой уравнений (6.6), и функция g_{1j} существенно не зависит от входной переменной x_{1j} . Тогда автомат M , полученный отождествлением y_{1j} выхода с x_{1j} входом автомата M_1 , есть автомат, полученный операцией обратной связи. Он задается системой

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11}(t) = g_{11}(x_{11}(t), \dots, x_{1(i-1)}(t), y_{1j}(t), \dots, x_{1(i+1)}(t), \dots, x_{1m_1}(t), z_1(t)); \\ \dots \dots \dots \\ y_{11}(t) = g_{11}(x_{11}(t), \dots, x_{1(i-1)}(t), x_{1(i+1)}(t), \dots, x_{1m_1}(t), z_1(t)); \\ \dots \dots \dots \\ y_{1m_1}(t) = g_{1m_1}(x_{11}(t), \dots, x_{1(i-1)}(t), y_{1j}(t), x_{1(i+1)}(t), \dots, x_{1m_1}(t), z_1(t)); \\ z_1(t+1) = f_1(x_{11}(t), \dots, x_{1(i-1)}(t), y_{1j}(t), x_{1(i+1)}(t), \dots, x_{1m_1}(t), z_1(t)); \end{array} \right. \quad (6.11)$$

$$z_1(0) = q_{11}.$$

Графическое изображение этой операции представлено на рис. 6.9.

вых функций; найти представление функций g_1, \dots, g_m через функции полной системы.

Естественно попытаться найти какой-либо универсальный метод синтеза, которым можно было бы пользоваться при любом базисе. Одним из таких методов является *метод перебора логических схем*, составленных сначала из одного элемента базиса, затем из двух, трех и т. д. При этом реализуемость функций g_1, \dots, g_m проверяется перебираемыми схемами. Очевидно, что в конце концов решение будет получено и можно говорить о принципиальной возможности решения задачи синтеза. Однако эффективность этого метода настолько низкая, что нет смысла в его практическом применении. Поэтому задачу синтеза рассматривают для конкретного базиса. Предпочтение отдается следующим полным базисам: *конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, штрих Шеффера, стрелка Пирса*.

Рассмотрим реализацию автоматов без памяти в базисе конъюнкция, дизъюнкция, отрицание. Известно, что каждую булеву функцию можно представить в виде дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной формы. Эти формы можно рассматривать как соответствующую суперпозицию элементарных автоматов с функциями выхода: конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием.

Ясно, что задача синтеза, как правило, решается неоднозначно, поэтому естественно ввести понятие сложности схемы ΣM , реализующей автомат M , – величины $L(\Sigma M)$, являющейся функционалом, и требовать такого решения задачи синтеза, при котором функционал оптимален.

Функционал может быть определен как число вхождений символов переменных в функцию выхода автомата без памяти. В других случаях он может характеризовать надежность схемы или время работы и т. п. Поэтому задачу синтеза можно уточнить так: для любой системы булевых функций g_1, \dots, g_m найти схему Σ , реализующую ее, для которой сложность $L(\Sigma)$ экстремальна.

Другой подход к задаче синтеза состоит в отказе от поиска экстремальной схемы для каждой функции и перехода к поиску алгоритмов синтеза экстремальных в некотором классе функций.

Остановимся на этом подходе. В качестве класса функций будем рассматривать булевы функции, зависящие от n переменных. Определим функцию $L(n)$:

$$L(n) = \max$$

по всем функциям
от n переменных

$$\min = L(\sum f)$$

по всем схемам, реализующим
функцию $f(x_1, \dots, x_n)$

Здесь $L(\sum f)$ – сложность схемы $\sum f$, реализующей функцию f .
Функционал $L(n)$ называется *функцией Шеннона*. Очевидно, что
любую функцию от n переменных можно реализовать схемой слож-
ности не большей чем $L(n)$.

Рассмотрим случай, когда в качестве базиса используются авто-
маты, реализующие конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. В этом
случае $L(\sum f)$ определим как

$$L(\sum f) = n_1 L_{\wedge} + n_2 L_{\vee} + n_3 L_{-},$$

где n_1 – число элементов конъюнкции;

n_2 – число элементов дизъюнкции;

n_3 – число элементов отрицания;

$L_{\wedge}, L_{\vee}, L_{-}$ – сложности элементов конъюнкции, дизъюнкции и от-
рицания. Тогда можно указать метод синтеза, при котором

$$L(n) \leq \frac{2^n}{n} [1 + 0(1)] L_{\vee}.$$

Этот метод является наилучшим, так как можно показать, что

$$L(n) \sim \frac{2^n}{n} L_{\vee}.$$

6.8.3. Структурный синтез автоматов с памятью

Так же, как в случае автоматов без памяти, будем рассматривать
автоматы, входной и выходной алфавиты которых состоят из сим-
волов 0 и 1. Тогда функция выхода такого автомата будет булевой.
Чтобы в системе уравнений полностью перейти к булевым функци-
ям, закодируем состояния автомата q_1, \dots, q_s последовательностями
из 0 и 1 длины

$$l = [\log 2s].$$

Ясно, что при разных способах кодирования состояний получаются разные варианты функций выхода и перехода. Поэтому можно говорить о задаче экстремального кодирования, ибо сложность схемы зависит от вида функций входа и перехода. Если задача кодирования решена, то можно решить задачу синтеза автомата с памятью, сводя ее к решению задачи синтеза автомата без памяти. В качестве исходного базиса рассмотрим базис, состоящий из трех автоматов без памяти, у которых функции выхода есть соответственно конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, и автомата M_3 с системой

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t); \\ z(t+1) &= x(t); \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Такой базис удовлетворяет условию полноты. Последнее следует из возможности представить любой автомат с закодированными состояниями в виде схемы, данной на рис. 6.11.

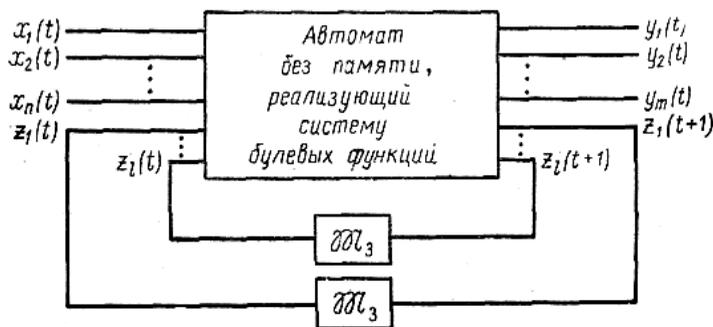


Рис. 6.11. Схема автомата с закодированными состояниями

Такое представление конечного автомата позволяет свести задачу его синтеза к задаче синтеза автомата без памяти.

6.9. Примеры решения задач

Задача 6.1

Дан последовательный двоичный сумматор с двумя входами, т. е. устройство, на входы которого поступают две последовательности

двоичных цифр, причем каждая последовательность представляет собой число в двоичной записи. Последовательность на выходе есть сумма двух чисел, подаваемых на входы. Показать, что это устройство можно рассматривать как конечный автомат.

Р е ш е н и е

В момент времени t на входы устройства, их два, поступают сигналы, соответствующие символам 0 или 1, следовательно, множество $X = \{00, 01, 10, 11\}$ является входным алфавитом. На выходе устройства появляется сигнал, соответствующий 0 или 1, поэтому множество $Y = \{0, 1\}$ – его выходной алфавит. Выходной сигнал определяется входным сигналом и переносом, поэтому множество $Z = \{q_0 - \text{нет переноса}, q_1 - \text{есть перенос}\}$ – множество состояний и функции выхода $g(x(t), z(t))$ и перехода $f(x(t), z(t))$ определяются следующим образом:

$$f(00, q_0) = q_0; f(01, q_0) = q_0; f(10, q_0) = q_0; f(11, q_0) = q_1;$$

$$f(00, q_1) = q_0; f(01, q_1) = q_1; f(10, q_1) = q_1; f(11, q_1) = q_1;$$

$$g(00, q_0) = 0; g(01, q_0) = 1; g(10, q_0) = 1; g(11, q_0) = 0;$$

$$g(00, q_1) = 0; g(01, q_1) = 0; g(10, q_1) = 0; g(11, q_1) = 1.$$

З а д а ч а 6.2

Построить таблицы переходов и выходов для последовательного двоичного сумматора, рассмотренного в задаче 6.1. Таблицы переходов и выходов имеют вид

$x(t) \backslash z(t)$	$z(t+1)$			
	00	01	10	11
q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_1	q_1	q_1

$x(t) \backslash z(t)$	$y(t)$			
	00	01	10	11
q_0	0	1	1	0
q_1	1	0	0	1

Решение

Табличное задание конечных автоматов удобно использовать при мощностных оценках. Если фиксировать алфавиты X , Y и множество Z , то таблица переходов может быть заполнена s^{ps} способами, а таблица выходов – t^{ps} . Следовательно, общее число автоматов с заданными алфавитами будет равно $(st)^{ps}$.

Задача 6.3

Построить граф перехода для последовательного двоичного сумматора, рассмотренного в задаче 6.1.

Решение

Из описанного построения графа переходов следует, что граф последовательного двоичного сумматора имеет вид, представленный на рис. 6.12.

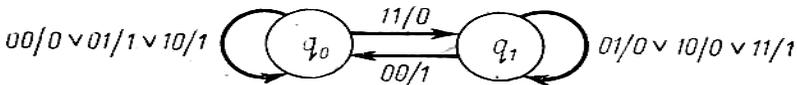


Рис. 6.12. Граф последовательного двоичного сумматора

Задача 6.4

Дан автомат M с входным алфавитом $X = \{\alpha, \beta\}$, выходным алфавитом $Y = \{0, 1\}$ и множеством состояний $Z = \{1, 2, 3, 4\}$, его граф перехода дан на рис. 6.13. Показать, что его состояния 1 и 2 являются 1-эквивалентными и 2-различимыми.

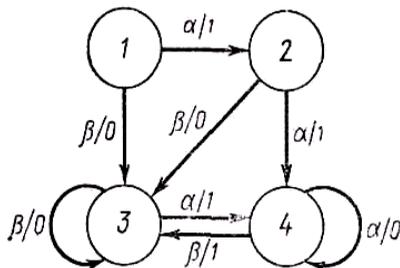


Рис. 6.13. К задаче 6.4

Решение

Действительно, если на автомат M , находящийся в состоянии 1 или в состоянии 2, подать любое слово длины 1, то получим одни и те же выходные слова. Но если подать слово $\alpha\alpha$ длины 2, то получим разные выходные слова 11 и 10.

Задача 6.5

Показать, что состояния 2 и 3 автомата M , данного в задаче 6.4, эквивалентны.

Решение

По графу переходов автомата M (см. рис. 6.13) видно, что слово α переводит состояния 2 и 3 в одно и то же состояние 4, при этом на выходе появляется буква 1; слово β – в состояние 3, при этом на выходе появляется 0. Так как после подачи слов длины 1 состояния 2 и 3 переходят в одно и то же состояние, то любое слово длиной больше 1 не сможет различить состояния 2 и 3 автомата M . Следовательно, состояния 2 и 3 эквивалентны.

Задача 6.6

Построить π разбиение состояний автомата M , заданного таблицей.

$x(t) \backslash z(t)$	$z(t+1)$		$y(t)$	
	α	β	α	β
1	1	4	1	1
2	1	3	0	0
3	7	7	0	0
4	4	1	1	1
5	4	6	0	0
6	7	3	0	0
7	7	7	1	1

Решение

Процесс построения π начнем с построения π_1 . Разбиение π_1 состоит из двух классов:

$$\Sigma_{11} = \{1, 4, 7\} \text{ и } \Sigma_{12} = \{2, 3, 5, 6\}.$$

Это видно из таблицы выходов автомата M .

Разбиение π_{i+1} ($i = 1, 2, 3, 4$) строим по разбиению π_i и таблице перехода автомата:

$$\begin{aligned} \pi_2 \Sigma_{21} &= \{1, 4, 7\}; \Sigma_{22} = \{2, 5, 6\}; \Sigma_{23} = \{3\}, \\ \pi_3 \Sigma_{31} &= \{1, 4, 7\}; \Sigma_{32} = \{2, 6\}; \Sigma_{33} = \{3\}, \Sigma_{34} = \{5\}, \\ \pi_4 &= \pi_3. \end{aligned}$$

Следовательно $\pi = \pi_3$.

Задача 6.7

Показать, что автоматы M_1 и M_2 , данные на рис. 6.14 и 6.15, эквивалентны.

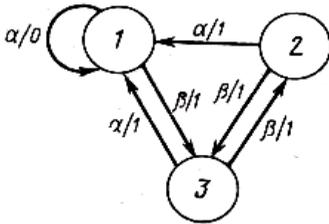


Рис. 6.14. Автомат M_1

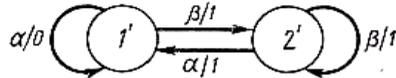


Рис. 6.15. Автомат M_2

Решение

Легко видеть, что состояние 1 эквивалентно состоянию $1'$, состояние 2 – состоянию $2'$ и состояние 3 – состоянию $2'$. Следовательно, автоматы M_1 и M_2 эквивалентны.

Чтобы установить, являются ли автоматы M_1 и M_2 эквивалентными, надо построить разбиение π множества $Z = Z_1 \cup Z_2 (Z_1 \cap Z_2 = \emptyset)$. Если каждый класс разбиения содержит элементы из множеств Z_1 и Z_2 , тогда $M_1 \approx M_2$, в противном случае автоматы различимы.

Задача 6.8

Найти минимальную форму для автомата, рассмотренного в задаче 6.5.

Ответ. Из построенного в задаче 6.6 разбиения π следует, что минимальная форма имеет граф переходов, представленный на рис. 6.16.

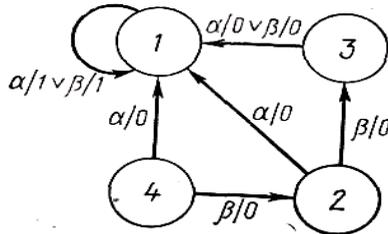


Рис. 6.16. Граф переходов

Задача 6.9

Построить минимальную диагностическую последовательность для автомата M , заданного таблицей, и допустимого множества $A = \{1, 2\}$.

$x(t) \backslash z(t)$	$z(t+1)$		$y(t)$	
	α	β	α	β
1	4	4	1	0
2	5	5	1	0
3	1	1	1	0
4	4	4	1	1
5	5	5	1	1

Решение

Построим π_l разбиения:

$$\pi_1: \Sigma_{11} = \{1, 2, 3\}; \Sigma_{12} = \{4, 5\},$$

$$\pi_2: \Sigma_{21} = \{1, 2\}; \Sigma_{22} = \{3\}; \Sigma_{23} = \{4, 5\},$$

$$\pi_3: \Sigma_{31} = \{1, 2\}; \Sigma_{32} = \{3\}; \Sigma_{33} = \{4\}; \Sigma_{34} = \{5\},$$

$$\pi_4: \Sigma_{41} = \{1\}; \Sigma_{42} = \{2\}; \Sigma_{43} = \{3\}; \Sigma_{44} = \{4\}; \Sigma_{45} = \{5\}.$$

При $l = 4$ состояния 1 и 2 попадают в разные классы π_4 и находятся в одном классе π_3 . При подаче буквы α они переходят в состояния 4 и 5, которые находятся в разных классах π_3 , но в одном классе π_2 . Эти два состояния при подаче символа β переходят в состояния 3 и 2, которые находятся в одном классе π_1 и в разных π_2 . Наконец, при подаче буквы $\alpha(\beta)$ они переходят в состояния 1, 5 (5, 1), которые находятся в разных классах π_1 , т. е. различимы подачей буквы β . Диагностическая последовательность будет $\alpha\beta\alpha\beta$ или $\alpha\beta\beta\beta$.

Задача 6.10

Построить диагностический эксперимент для автомата M , заданного графом переходов (рис. 6.17), и допустимого множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

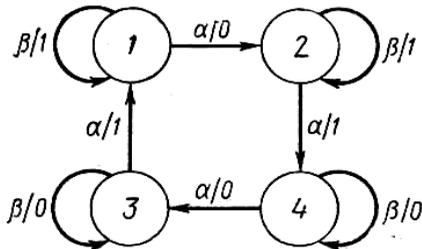


Рис. 6.17. Граф переходов

Решение

По дереву диагностического эксперимента, представленному на рис. 6.18, видно, что в качестве диагностической последовательности можно взять либо слово $\alpha\beta$, либо слово $\beta\alpha$.

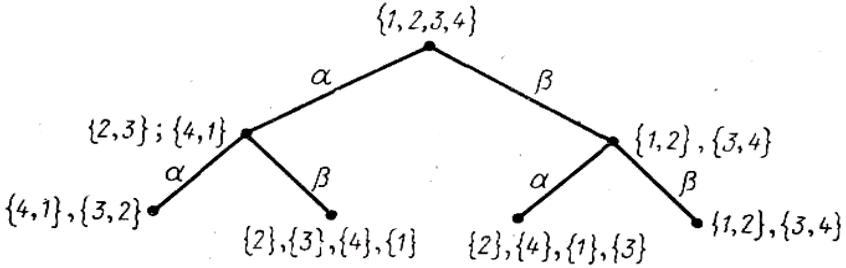


Рис. 6.18. Дерево диагностического эксперимента

Задача 6.11

Построить установочное испытание для автомата M (рис. 6.19) и допустимого множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

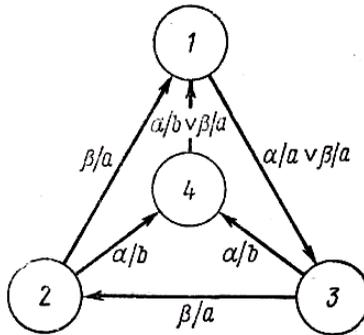


Рис. 6.19. Схема автомата M к задаче 6.11

Решение

Состояния 1 и 2 различимы входным словом α . Подадим это слово на автомат M . Получим, что если автомат M был:

1) в состоянии 1, он перейдет в состояние 3 и на выходе его появится слово α ;

2) в состоянии 2 или 3 – перейдет в состояние 4 и его выходе появится слово β ;

3) в состоянии 4, то он перейдет в состояние 1 и на его выходе будет слово β .

Теперь осталось различить состояния 1 и 4, они различаются входным словом α . Установочной последовательностью будет входное слово $\alpha\alpha$.

Задача 6.12

Показать, что множество всех последовательностей из 0 и 1, которые содержат две последовательные единицы, может быть представлено регулярным выражением.

Ответ. Регулярное выражение $(0 + 1)^* 11 (0 + 1)^*$ представляет все последовательности, содержащие две последовательные единицы.

Задача 6.13

Найти производную события $(0 + 1)^* 0 + 0$ по слову 01.

Решение

Из определения производной имеем

$$\partial_{01}((0+1)^* \cdot 0 + 0) = \partial_1 \partial_0((0+1)^* \cdot 0 + 0);$$

$$(\partial_0 0 + \partial_0 1)(0+1)^* \cdot 0 + \Lambda = (\Lambda + \emptyset)(0+1)^* \cdot 0 + \Lambda =$$

$$= (0+1)^* \cdot 0 + \Lambda;$$

$$\partial_1((0+1)^* \cdot 0 + \Lambda) = \partial_1((0+1)^* \cdot 0) + \partial_1 \Lambda =$$

$$= (\partial_1(0+1))(0+1)^* \cdot 0 + \emptyset = (\partial_1 0 + \partial_1 1)(0+1)^* \cdot 0 = (0+1)^* \cdot 0.$$

Задача 6.14

Построить автомат, реализующий событие $1 + 0^*$.

Решение

Найдем производные события $1 + 0^*$:

$$\partial_{\Lambda}(1 + 0^*) = 1 + 0^*; \partial_0(1 + 0^*) = \emptyset; \partial_1(1 + 0^*) = \Lambda;$$

$$\partial_{00}(1 + 0^*) = 0^*, \partial_{01}(1 + 0^*) = \emptyset, \partial_{10}(1 + 0^*) = \emptyset;$$

$$\partial_{11}(1 + 0^*) = \emptyset;$$

$$\partial_{000}(1 + 0^*) = 0^*, \partial_{001}(1 + 0^*) = \emptyset, \partial_{010}(1 + 0^*) = \emptyset;$$

$$\partial_{100}(1 + 0^*) = \emptyset;$$

$$\partial_{011}(1 + 0^*) = \emptyset, \partial_{101}(1 + 0^*) = \emptyset, \partial_{110}(1 + 0^*) = \emptyset;$$

$$\partial_{111}(1 + 0^*) = \emptyset.$$

Автомат, реализующий событие $1 + 0^*$, представлен на рис. 6.20.

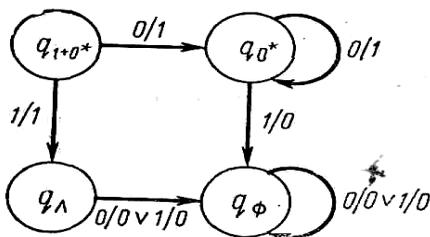


Рис. 6.20. Автомат, реализующий событие $1 + 0^*$

Задача 6.15

Пусть дан конечный автомат M , его функции выхода представлены в таблице. Построить схему, его реализующую.

Выпишем функции выходов y_1 и y_2 автомата M . Они имеют вид $y_1 = x \vee x_2$ и $y_2 = (x \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$. Эти формулы реализуют суперпозицию автоматов базиса, в результате которой получается схема с функциями выхода y_1 и y_2 . Таблица имеет вид

x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	11	11

Схема представлена на рис. 6.21.

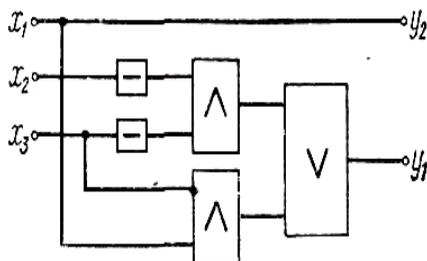


Рис. 6.21. Схема автомата к задаче 6.15

Используя методы, изложенные ранее, упростить схему, уменьшив число элементарных автоматов.

Задача 6.16

Дан конечный автомат M , функции выхода представлены в таблице. Построить схему, его реализующую.

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Решение

Минимальные функции y_1 и y_2 будут $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3$ и x_1 соответственно. Схема, реализующая автомат M , представлена на рис. 6.22.

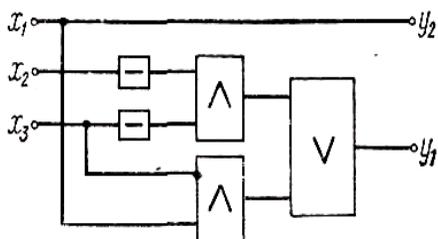


Рис. 6.22. Схема, реализующая автомат M

Задача 6.17

Построить схему автомата, данного в задаче 6.16.

Решение

У автомата всего два состояния, поэтому их кодирование возможно одним из способов: либо 0 – код состояния q_0 , а 1 – код состояния q_1 , либо наоборот. Если использовать описанный принцип реализации автомата без памяти и добавить обратные связи через автомат M_3 , то получится схема, представленная на рис. 6.23.

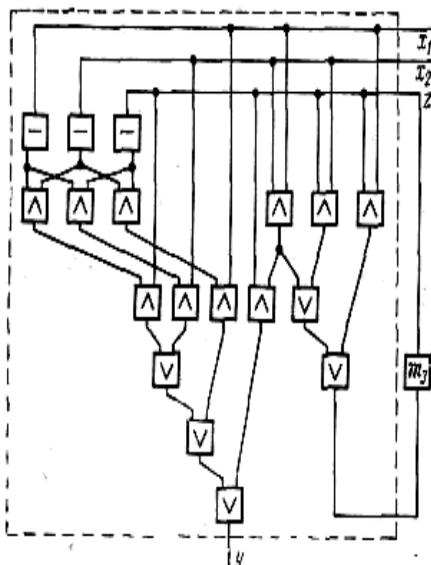


Рис. 6.23. Схема к задаче 6.17

7. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

Путем соответствующего объединения чувствительных элементов, исполнительных органов, регуляторов и процессоров можно создать мехатронную систему, обладающую заданными функциями. К одной из особенностей мехатроники можно отнести то, что в ней посредством исполнительных органов осуществляется взаимодействие с внешней средой. При этом односторонним оказывается такой подход, при котором усилия сосредоточиваются на проведении функционального проектирования без логических противоречий. Рассматривая устройство как единое целое, необходимо обращать особое внимание на надежность устройств, подверженных воздействиям окружающей среды, а также на его эксплуатационные характеристики.

Следует иметь в виду, что при проектировании мехатронных изделий с устойчивой системой управления применяется встраивание в изделие систем локального управления, т. е. *децентрализация* вычислительных средств. Вследствие этого проблемы повышения надежности систем управления необходимо решать с точки зрения применяемого программного и аппаратного обеспечения, что является важным фактором, стимулирующим децентрализацию.

Проектирование и производство систем, основанных на концепции централизации и противоположной концепции децентрализации, основано на «масштабном факторе», согласно которому стоимость одного изделия уменьшается при росте объемов его производства.

Это обусловлено тем, что в партии изделий с централизованной системой управления можно исключить некоторые элементы дублирования и, следовательно, снизить затраты на производство системы в целом. Эта зависимость описывается экспериментальной кривой Сильверстоуна (рис. 7.1), полученной на основе статистических данных аппаратного конфигурационного управления.

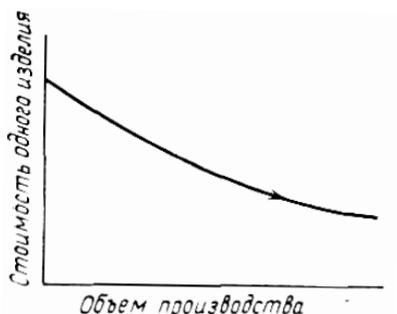


Рис. 7.1. Кривая Сильверстоуна

7.1. Концепция аппарата конфигурируемого управления мехатронными системами

Машина, спроектированная на основе использования концепции *аппарата конфигурируемого управления* (АКУ), может реализовать свои функции только благодаря существованию системы управления. Обычные машины, как правило, обладают самоустойчивостью. В случае же АКУ существует механическая неустойчивость, которая часто оказывается необходимой для обеспечения соответствующих динамических характеристик. Устойчивость достигается благодаря наличию контуров управления. В настоящее время концепцию АКУ широко используют в самолетостроении, например в истребителях Су, F16.

Для реализации концепции АКУ неизбежным, несомненно, является существование информационной системы и системы управления. В этом смысле концепцию АКУ можно отнести к основным руководящим принципам мехатроники и считать, что она относится к понятиям самого высокого ранга. Системы управления машинами и аппаратами первых поколений обычно обладали централизованной структурой, в которой компьютер выполнял функции управления, а к нему звездообразно подсоединялись многочисленные датчики и исполнительные механизмы, и их проектирование осуществлялось на базе спроектированной машины. Однако если иметь в виду концепцию АКУ, то в большинстве случаев необходимость рассматривать систему управления как подсистему, добавленную к готовой машине, будет отсутствовать.

По мере интеграции механики и электроники информационные подсистемы перестали играть вспомогательную роль и стали равноправными наряду с механическими подсистемами. При этом в некоторых случаях они стали играть более значительную роль. Информационным системам, интегрированным с механическими системами, часто приходится работать в очень жестких условиях, которые не идут в сравнение с условиями, существовавшими ранее. Если в вычислительных центрах обычные компьютеры работают в специально контролируемой среде, то информационные системы мехатроники очень часто не могут быть обеспечены такой средой. Например, промышленным роботам приходится работать в заводских условиях непосредственно в цехах. Компьютеры и другая электроника, устанавливаемая в автомобилях, самолетах, реакторах и т. д., по существу подвергаются воздействиям таких же жестких условий внешней среды, как и сами механические системы автомобиля, самолета и др.

7.2. Отказы в мехатронных системах

Мехатронное изделие состоит из *аппаратного* обеспечения, которое представляет собой совокупность механических, электрических, электронных компонентов и *программного* обеспечения, предназначенного для управления аппаратными средствами. Существуют два основных подхода повышения уровня надежности рассматриваемых изделий. Один из подходов заключается в снижении уровня отказов компонентов, входящих в состав системы. При другом подходе допускается появление отказа, но обеспечиваются такие условия, при которых отказ не является фатальным.

При реализации первого подхода одним из типичных решений является замена функций, выполняемых механическими элементами, функциями, осуществляемыми средствами электроники. Следует иметь в виду, что какие бы усилия не прикладывались, при использовании механических элементов не удастся избавиться от тех нежелательных явлений, которые возникают в результате трения, обусловленного их движением. По сравнению с механическими компонентами электронные обладают более высокой надежностью. У механических элементов механизмы отказов довольно сложные, а у электронных – просты. При расчете отказов электронных ком-

понентов можно довольно легко воспользоваться соответствующими теоретическими методами. При создании технических устройств это обстоятельство принимают во внимание. Другим важным фактором помимо электронизации является широкое использование программного обеспечения, поскольку в принципе программное обеспечение не портится. Однако при разработке программного обеспечения необходимо быть внимательным к ошибкам, которые могут возникнуть при проектировании.

В настоящее время при проектировании мехатронных устройств важной тенденцией является электронизация механических деталей и повышение надежности программных средств.

По мере интеллектуализации машин более важными становятся проблемы ошибок программного обеспечения. При этом все больше усилий необходимо затрачивать на разработку надежного программного обеспечения.

Использование электронных компонентов позволяет устранить нелогичное поведение. Однако при проектировании следует иметь в виду, что такие компоненты являются довольно чувствительными к воздействиям факторов внешней среды (высокой температуры, электромагнитного и радиационного излучений, колебаний и т. д.). Это сдерживает широкую электронизацию устройств, предназначенных для работы в жестких условиях. Например, радиоактивное излучение может нарушить работу электронного компонента в результате того, что на том участке, который подвергался радиоактивному облучению, мгновенно происходит образование электрического заряда, который скапливается в местах соединения с полупроводником. Следует отметить, что электрический заряд легко скапливается в тех местах, где возникают деформации. Поэтому, например при разработке компонентов, стойких к воздействию радиоактивного излучения, следует обращать внимание на то, чтобы в деталях машин не было остаточных деформаций.

Второй подход заключается в повышении нечувствительности к отказам (допустимых пределов отказов). При реализации такого подхода необходимо обнаружить возникшие отказы и организовать работу таким образом, чтобы даже в случае появления отказа функционирование продолжалось так, как будто бы отказа и не было. Первая часть подхода носит наименование *способности обнаруже-*

ния отказов, а вторая – способности маскирования отказов. В сложных системах такой подход оказывается очень эффективным.

Вполне естественно, что распределение системы эффективно с точки зрения маскировки отказов. В большинстве случаев возможна такая организация, при которой даже в случае полного выхода из строя некоторой части системы остальная ее часть может продолжать функционировать без отказавшей части. При рассмотрении *надежности* такое качество системы называют *живучестью*.

7.2.1. Диагностика отказов

К технике диагностики отказов относятся операции, необходимые для обследования состояния машины, выявления аномалий, если они возникли, и принятия соответствующих мер. Диагностика отказов имеет несколько уровней, в частности уровень, на котором проверяют наличие или отсутствие отказа, а также уровень, на котором устанавливают то место, где произошел отказ.

При определении отказов можно воспользоваться изменениями параметров состояния машины. Такими параметрами могут быть уровень вибраций, давление, частота вращения и т. д. Следует иметь в виду, что параметры состояния представляют собой величины, изменения которых носят случайный характер. Очень часто в нормальном и аномальном случаях распределения накладываются друг на друга.

Поскольку в этом случае мы имеем дело со случайными событиями, необходимо принимать во внимание вероятность ошибки. Во-первых, существует вероятность того, что аномальный случай будет принят за нормальный, т. е. вероятность недосмотра. Во-вторых, существует вероятность того, что аномальный случай примут за нормальный по причине неверной информации (дезинформации). Обе вероятности могут противоречить друг другу. При нахождении компромиссного решения обычно руководствуются тем, что было ранее. Если вероятность недосмотра невелика, то возрастет вероятность неверной информации (дезинформации). При этом необходимо провести техническое обслуживание, в котором нет непосредственной необходимости. Когда дезинформация невелика, возрастает вероятность недосмотра и у машины может произойти грубый отказ.

7.2.2. Надежность структур, составленных из элементов

Интенсивность отказов деталей. Интенсивность отказов представляет собой величину, которой традиционно пользуются при количественном рассмотрении отказов. Пусть у некоторой машины существует вероятность отказа $F(t)$ в течение времени $0 < \tau < t$. Функция $F(t)$ носит название *кумулятивной (совокупной) интенсивности отказов*. Понятно, что $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$.

Вероятность $R(t)$ безотказной работы можно представить следующим образом:

$$R(t) = 1 - F(t).$$

Эта величина называется *функцией надежности*. Если положить, что плотность вероятности $f(t) = dF/dt$, то будем иметь дело с плотностью распределения вероятностей, которое называется *распределением интенсивностей отказов*. Другим важным параметром является математическое ожидание случайной величины t , которое записывается в виде

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t f(t) dt = [-tR(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt.$$

Этот показатель носит название *наработки до отказа* или *средней наработки на отказ*. Первый термин используется в применении к изделиям, которые нельзя ремонтировать, а второй – в применении к ремонтпригодным изделиям.

Предположим, что $\lambda(t)$ – вероятность мгновенного отказа у существующей системы в момент времени t . Тогда можно записать следующую зависимость:

$$f(t) = \lambda(t)R(t).$$

Если провести преобразование и воспользоваться только функцией $R(t)$, то получаем

$$\lambda(t) = -\frac{d(\ln R(t))}{dt}.$$

Обычно зависимость вероятности возникновения отказов от времени имеет вид, представленный на рис. 7.2. Такую графическую зависимость называют *корытообразной кривой*.

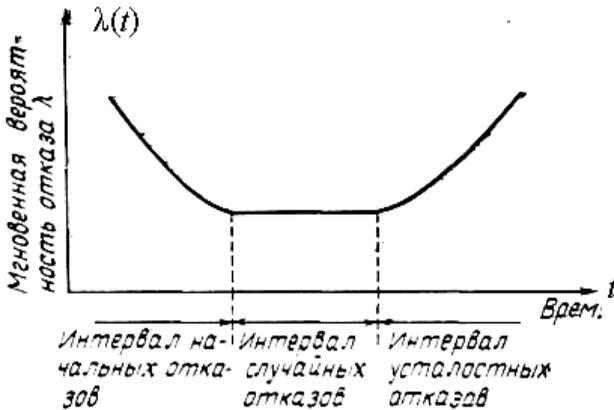


Рис. 7.2. Кривая интенсивности отказов

Традиционно на этой кривой выделяют три участка: участок, на котором происходит уменьшение интенсивности отказов, участок, где интенсивность отказов является постоянной, и участок возрастания интенсивности отказов. Первый участок соответствует интервалу времени, на котором отказы могут возникать из-за того, что не удалось в достаточной степени устранить недоработки, имевшие место при проектировании технических и программных средств. Такой интервал времени называют *интервалом начальных отказов*. За счет принятия соответствующих мер на этапе проектирования можно добиться снижения интенсивности появления отказов на начальном интервале. Однако даже если удастся полностью устранить начальные отказы, то это не означает, что интенсивность отказов становится равной нулю.

Второй участок рассматриваемой кривой, на котором интенсивность отказов постоянна, можно назвать *интервалом случайных отказов*. Возникновение таких отказов носит совершенно случайный характер. При рассмотрении таких отказов можно довольно просто воспользоваться вероятностными методами и довольно легко осуществить моделирование. Когда $\lambda(t) = \lambda$ ($\lambda = \text{const}$), то рас-

пределение интенсивности отказов можно представить экспоненциальным законом

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t).$$

Надежность можно представить в виде

$$R(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t).$$

Самый последний участок на кривой интенсивности отказов носит название *интервала усталостных отказов*. На этом участке интенсивность отказов возрастает по мере старения системы.

Повышение надежности путем параллельного соединения компонентов. Когда интенсивность отказов отдельных компонентов уменьшить не удастся, рассматривают совокупную интенсивность отказов за счет резервирования путем использования избыточного количества компонентов. В системах, работающих в реальном масштабе времени (например, мехатронных устройствах), необходимо использовать *резервирование*.

Положим, что система состоит из n компонентов, каждый из которых обладает надежностью r_i ($i = 1, \dots, n$). Если при выходе какой-либо компоненты нарушается функционирование всей системы, то можно считать, что она имеет последовательную структуру, представленную на рис. 7.3, а. Надежность такой системы можно определить произведением

$$R = \prod r_i.$$

Наиболее простым способом, позволяющим повысить надежность системы, является параллельное соединение компонентов. Остановимся на рассмотрении случая, при котором детали представляют собой реле. Наиболее простым преобразованием приведенной выше системы является такое, при котором получаем m параллельных подсистем, как показано на рис. 7.3, б.

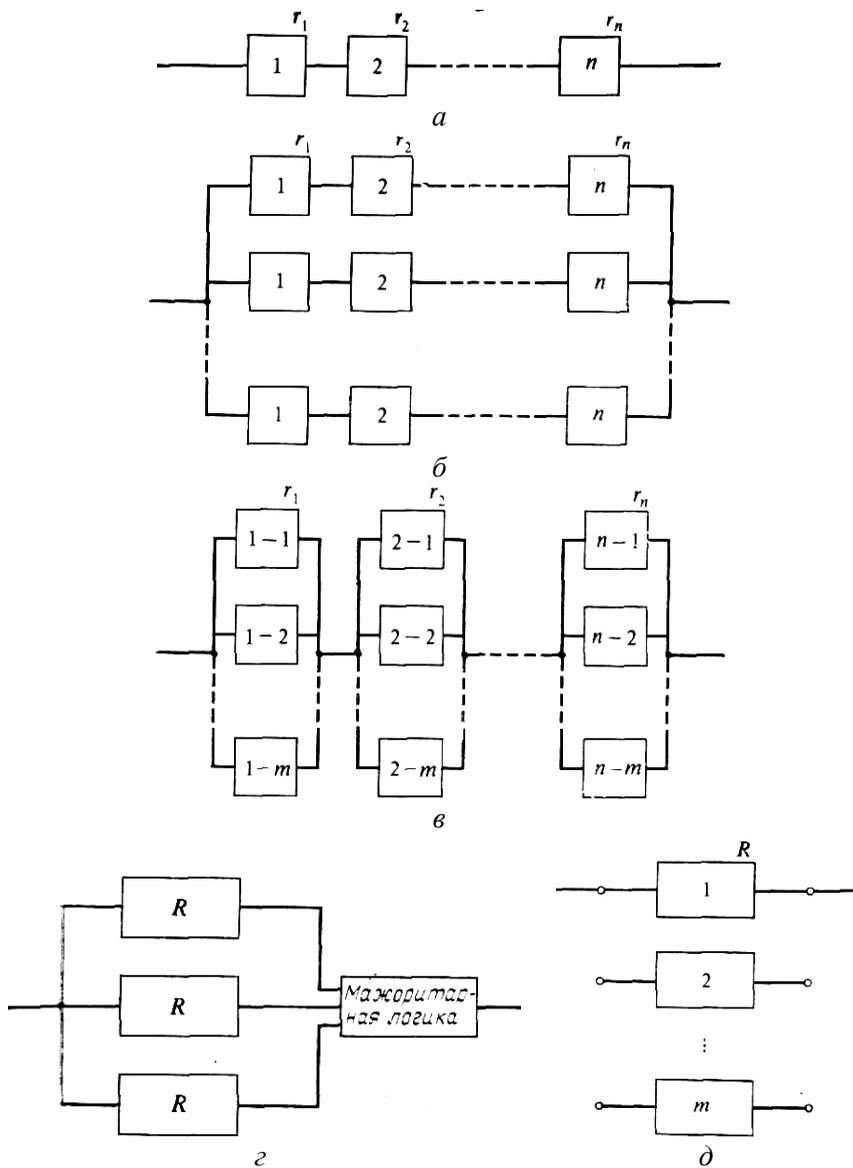


Рис. 7.3. Повышение надежности систем:
 а – система последовательного типа; б – параллельно-последовательная система (резервирование путем параллелизации); в – последовательно-параллельная система; г – мажоритарная система 2/3; д – система с ненагруженным резервом

В таком случае надежность системы R' можно записать следующим образом:

$$R' = 1 - (1 - R)^m.$$

Естественно, что $R' > R$. Если предположить, что появление отказов носит случайный характер, а интенсивности отказов у всех деталей равны, то можно считать, что

$$r_i = r = \exp(-\lambda t).$$

Для системы с параллельным соединением

$$R'' = r^n;$$

$$\langle t \rangle'' = 1 / n\lambda.$$

Для системы с последовательным соединением

$$R' = 1 - (1 - r^n)^m;$$

$$\langle t \rangle = (1 + 1/2 + \dots + 1/m) / n\lambda.$$

Понятно, что имеем $R'' < R'$, $\langle t \rangle'' < \langle t \rangle'$.

Можно расположить детали так, как показано на рис. 7.6, в. Остановимся на рассмотрении такого способа соединения, при котором блоки расположенных параллельно деталей связаны последовательно. Для этого случая надежность R'' можно представить следующим образом:

$$R'' = \prod 1 - (1 - r_i)^m.$$

Положим, что величина λ невелика, а $1 - r$ представляет собой малую величину Δ . Тогда для R' и R'' можно записать

$$R' \sim 1 - (n\Delta)^m;$$

$$R'' \sim 1 - n\Delta^m.$$

Необходимо обратить внимание на то, что $R'' > R'$. Этот эффект особенно значительно проявляется при больших значениях n .

Изложенные выше соображения можно назвать *параллелизацией системы*. Если воспользоваться резервированием, при котором количество деталей увеличивается в m раз, то вполне понятно, что предпочтительным оказывается способ расположения, приведенный на рис. 7.3, в. Однако следует иметь в виду, что в действительности анализ надежности не всегда оказывается таким простым, как изложено выше. Факты свидетельствуют о том, что в таких сложных машинах, как мехатронные устройства, важным является подход, при котором необходимо решить проблемы отказов по возможности на локальном уровне.

Мажоритарные системы. Часто возникают опасения, что какой-либо компонент, возможно, отказал. В таких случаях часто используют *мажоритарные системы*. На рис. 7.3, г показаны расположенные параллельно три системы, имеющие надежности R . Поскольку в двух системах одновременно вряд ли могут возникнуть отказы, создаются такие условия, что система (в целом) не отказывает. При этом надежность можно оценить следующим образом:

$$R^* = 3R^2 - 2R^3.$$

Когда R приближается к единице, $R^* > R$. При этом можно ожидать, что происходит повышение надежности. Например, если $R = 0,9$, то $R^* = 0,972$. В частности, если допустить существование случайного отказа, то при

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

можно считать, что

$$R^*(t) = (3 - 2\exp(-\lambda t)\exp(-2\lambda t)).$$

Средняя наработка на отказ будет составлять

$$\langle t \rangle = 5 / 6\lambda.$$

Принцип мажоритарности не влияет на увеличение средней наработки на отказ.

Система с ненагруженным резервом. В параллельной системе обычно функционируют две и более подсистемы. Есть вероятность возникновения мнения о том, что происходит бесполезное расходование ресурса резерва. Можно организовать работу так, что в обычных условиях избыточная система не будет находиться в рабочем состоянии. Когда же произойдет отказ, можно выполнить замену отказавшей детали. В рассматриваемом случае в момент замены надежность новой подсистемы должна быть очень высокой. Поэтому можно повысить надежность всей системы в целом. Организованная таким образом система носит название *системы с ненагруженным резервом*. На рис. 7.3, д показана система с m -кратным ненагруженным резервом. Если предположить, что в такой системе произошел случайный отказ, и не принимать во внимание возможный отказ переключателя, то можно записать

$$R^*(t) = \exp(-\lambda t) \sum_k (\lambda t)^k / k!.$$

Если считать, что $m = 2$ (двойная система), то можно установить, что

$$R^*(t) = (1 - \lambda t) \exp(-\lambda t);$$

$$\langle t \rangle^* = 2/\lambda.$$

Если исключить из рассмотрения время, требуемое на переключение, то можно считать, что по отношению к случайным отказам система с ненагруженным резервом очень эффективна. Однако следует иметь в виду, что такая система не всегда оказывается хорошей в тех случаях, когда не допускается остановка системы даже на мгновение. Если иметь дело с элементами систем, то в большинстве случаев возникает вопрос: не происходит ли фактическое снижение надежности в процессе ожидания? Однако на практике ситуация оказывается не столь опасной, как это может показаться с точки зрения теории.

Пример

Высоконадежная система

Кратко остановимся на конкретном рассмотрении возможности разработки высоконадежной системы на основе использования изложенных выше соображений.

На рис. 7.4 приведена структура надежного компьютера, разработанная в Стэнфордской лаборатории. Рассматриваемая система сокращенно называется системой с отказоустойчивым программным обеспечением (SIFT – Software Implemented Fault Tolerant). В системе используется восемь компьютеров, которые предназначены для выполнения одной и той же программы. После выполнения каждой программы осуществляется посылка результатов счета и их согласование. В конце концов с помощью соответствующих программных средств реализуется принцип мажоритарности и маскируются ошибки, обусловленные отказами. Синхронизация программ осуществляется с помощью таймера. Для отказавшей части системы можно предусмотреть соответствующие резервные аппаратные средства и обеспечить необходимую перестройку всей системы.

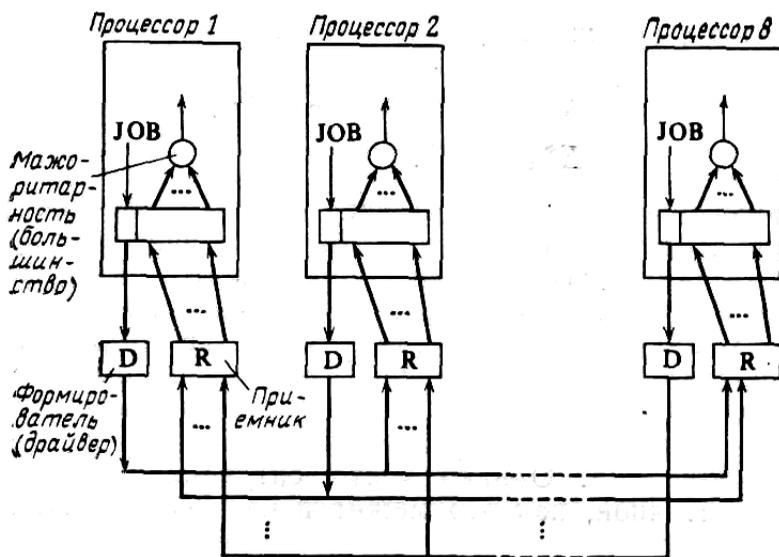


Рис. 7.4. Пример повышения надежности системы за счет использования отказоустойчивого программного обеспечения

На рис. 7.5 представлен разработанный Драперовской лабораторией отказоустойчивый мультипроцессор (FTMP – Fault Tolerant Multi Processor). По сравнению с предыдущей в рассматриваемой системе удастся обеспечить более высокую надежность на уровне аппаратных средств. В этой системе обработка и обмен информацией

между процессорами и устройствами памяти организуется в битовых единицах. При этом используется мажоритарность. Процессоры, устройства памяти и шины являются системами с тройным резервированием, которые соответственно носят наименования «процессорная триада», «шинная триада» и «триада устройств памяти».

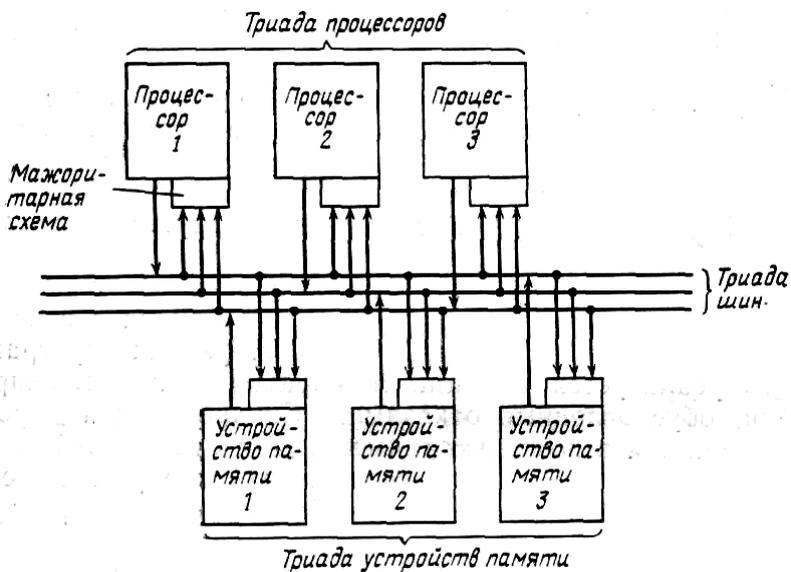


Рис. 7.5. Пример повышения надежности системы за счет использования отказоустойчивого аппаратного обеспечения

7.3. Надежность программных средств

Современные мехатронные системы содержат микро- и макро-процессоры, поэтому для систем контроллеров и компьютеров необходимо иметь программное обеспечение соответствующего формата. По мере мехатронизации растет потребность в различных программных средствах, создается все больше машин, «конфигурируемых управлением».

Разработке программного обеспечения уделяется такое же внимание, как и проектированию самой машины. При этом необходимо обратить внимание на принятие соответствующих мер, направленных на искоренение ошибок, которые могут возникнуть в программном обеспечении. Необходимо подчеркнуть, что в мехатронике

создание программного обеспечения является таким же важным делом, как проектирование самой машины и ее компонентов.

Существуют *два подхода*, позволяющих повысить надежность программного обеспечения. Один из подходов направлен на то, чтобы на этапе программирования не допустить появления ошибок. Если с самого начала программа составлена без ошибок, то в дальнейшем проблемы возникать не будут.

Впервые эти соображения изложил Дейкстра в 1969 г. на технической конференции НАТО по программному обеспечению. Оно базируется на следующем убеждении. Проверка программы может свидетельствовать о том, что в ней не существует ошибок. Однако это не может служить доказательством того, что ошибок фактически нет. С помощью структурной лингвистики можно конкретизировать это положение. Для этого необходимо соответствующим образом организовать прохождение программы, а также разработать целесообразную структуру переменных. При этом удается в более простой форме выразить то, что должно быть запрограммировано. К настоящему времени издано много книг, в которых рассматриваются проблемы *структуризации программирования*.

Однако накопленный опыт не свидетельствует о том, что в программах совершенно отсутствуют ошибки, даже если исходить из того, что они написаны на языке *структурного и объектно-ориентированного программирования*. В таком случае если на этапе составления программы не удастся полностью исключить ошибки, то необходимо использовать проверки. В этом состоит суть второго подхода.

Проверка программы (программный тест) представляет собой понятие, которое существенно отличается от понятия *отладки*. *Задача теста* состоит в том, чтобы устранить ошибки (неполадки), содержащиеся внутри программы. При *отладке* с программой непосредственно работает тот, кто ее разрабатывал. *Тестирование* же является процессом, который объективно и систематически выполняется другими сотрудниками. При этом обнаруженные на месте ошибки не исправляются, а возвращаются обратно в программу.

Рассмотрим некоторые свойства, которыми должен обладать хороший тест. *Первым* таким свойством является детективность. Вполне естественно, что тестирование должно правильно обнаруживать ошибки, которые могут существовать в программе. *Вторым свойством* является покрывающая способность, характеризующаяся количеством воз-

можных входных условий программы, которые можно проверить тестированием (с их помощью меняется управление программой). Оно свидетельствует о том, сколь хорошей является детектирующая способность, поскольку невозможно выявить все ошибки при выполнении тестирования только для некоторой части входных условий.

Третьим свойством является воспроизводимость (повторяемость), которая характеризует, в какой степени можно свободно задавать входные условия программы. Ошибки, обнаруженные в процессе тестирования, определяются в программе и исправляются. Для скорректированной программы это требует вторичного выполнения процесса тестирования. При этом необходимо провести соответствующие проверки для входных условий, при которых были обнаружены ошибки.

Четвертым свойством является модульность. С точки зрения покрывающей способности и воспроизводимости одноразовое тестирование всей программы неэффективно. Поэтому программу разбивают на несколько модулей и отдельно проводят тестирование каждого модуля. Такой подход оказывается эффективным. Понятно, что проведение тестирования на модульных единицах требует обеспечения входной среды, необходимой для работы. Чтобы можно было осуществить функционирование модульной единицы, аналогичное функционированию по всей рассматриваемой системе, необходимо проводить соответствующее моделирование. При тестировании модулей низшего уровня необходимо выполнить замену управляющей программы верхнего уровня, т. е. необходим драйвер (формирователь). При выполнении тестов для модулей верхнего уровня следует использовать соответствующие макеты подпрограмм, которые приводятся в действие этими модулями. К хорошему тестированию модулей можно отнести такое тестирование, при котором точно воссоздаются окружающие условия, соответствующие реализации системы в целом. Естественно, что во всей системе, образованной из отдельных протестированных модулей, необходимо полностью устранить возможные ошибки.

Тестирование программ можно грубо разделить на *статическое* и *динамическое*. *Первое* представляет собой тестирование, при котором объектом являются только исходные коды программы. При этом программа фактически не выполняется. *Второе* связано с фактическим выполнением программы при каких-либо систематически

заданных условиях, при которых осуществляется проверка выполнения желаемых функций.

Статическое тестирование обычно проводится в несколько этапов. На *первом этапе* осуществляется проверка формата исходного кода, которую можно назвать *инспекцией кода*. У программы, прошедшей такую проверку, совершенствуется формат, и она становится легко читаемой. Можно считать, что по крайней мере по внешнему виду ее качество становится более совершенным.

На *втором этапе* разрешаются те противоречия, которые могут содержаться в структуре данных. Этот этап совместно с третьим этапом можно назвать *статическим анализом*. Он проводится с помощью программы, у которой значительно выражены функции грамматических проверок, содержащиеся в компиляторе. Например, проводится поиск неопределенных переменных, к которым ни разу не обращались. Объектом проверки может также служить возможность проведения операций над переменными различных типов.

На *третьем этапе* выполняется тестирование, связанное с потоком управления, которое может включать проверки на бесконечные циклы, т. е. проверки на так называемые мертвые коды (участки программы, не выполняемые при любых входных условиях) и т. д. Указанные выше этапы можно отнести к проверкам программы с синтаксической стороны. Осуществление таких проверок можно автоматизировать.

К *четвертому этапу* относятся тесты, входящие в содержание программы. Следует обратить внимание на то, что автоматизация тестирования является довольно сложной процедурой, поэтому в настоящее время для тестирования необходимо использовать тактику «лавины».

Может сложиться впечатление, что статическое тестирование является неэффективным. Однако по сравнению с динамическим такое тестирование является полезным в отношении воспроизводимости и покрывающей способности. Перед динамическим тестированием очень важно достаточно полно провести статическое тестирование. Многие специалисты считают, что статическое тестирование является наиболее эффективным при проведении проверок системных программ операционных систем, управляющих выполнением нескольких программ в реальном масштабе времени. Программные средства мехатроники во многих случаях используются в неавтономном

режиме функционирования оборудования. При этом у мехатронных устройств необходимо также учитывать тенденцию к увеличению числа датчиков. Поэтому, в сущности, развитие происходит в таком направлении, в котором полное динамическое тестирование оказывается невозможным, и можно считать, что возрастает важность статического тестирования как средства, позволяющего теоретически гарантировать надежность программного обеспечения мехатронных устройств. Впрочем, среди статических тестов проверки, выполненные до третьего этапа, в некоторых случаях могут приводить к таким выводам, согласно которым на основании имеющихся фактов утверждается, что среди ошибок, выявленных с помощью статического тестирования, лишь 10 % можно отнести к фактическим ошибкам. Однако следует учитывать, что статическое тестирование представляет собой единственный метод, с помощью которого можно логически доказать (подтвердить) правильность программы. Можно надеяться, что в дальнейшем роль такого тестирования не уменьшится, а, наоборот, возрастет (рис. 7.6).

После завершения статического тестирования проводится *динамическое тестирование*. При нем возникает *проблема охвата*, выбора входных воздействий для проведения испытаний, при которых обеспечивается работа программы в реальных условиях. Часто входные данные выбираются произвольно, что может в конечном счете приводить к определенным упущениям. В рассматриваемом случае имеет место следующий вопрос. Какое сочетание выбрать среди многочисленных сочетаний входных параметров, чтобы эффективно провести тестирование программы? Согласно рис. 7.6, *а* выполнение программы представляет собой не что иное, как установление соответствия между точкой P , принадлежащей пространству входных параметров, и точкой Q , принадлежащей пространству выходных параметров. Предположим, что некоторая программа четыре раза подвергается динамическому тестированию. При таком выборе входных параметров, как показано на рис. 7.6, *б*, можно было провести лишь одно тестирование. Целесообразно руководствоваться случаем, представленным на рис. 7.6, *в*. В нем часто используется *степень охвата*, которая представляет собой показатель покрывающей способности, характеризующий, насколько исчерпывающе проводятся проверки программы с помощью динамического тестирования. Можно считать, что при динамических испытаниях сте-

пень охвата показывает, какая часть всей программы оказалась задействованной. Для существующих в настоящее время мехатронных устройств очень часто этот этап реализуется при проведении натурных испытаний. Однако по мере возрастания удельного веса программных средств необходимо будет пользоваться систематическими методами, подобными рассмотренному ниже.

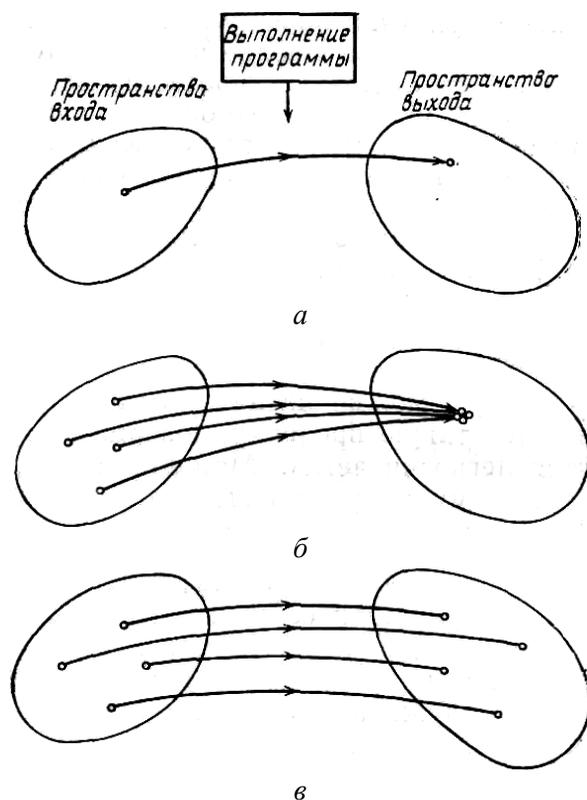


Рис. 7.6. Выполнение программы и выбор тестовых данных:
 а – выполнение программы; б – тестовые данные выбраны плохо;
 в – тестовые данные выбраны хорошо

Допустим, что мы имеем дело с программой, представленной на рис. 7.7, на котором кружками обозначены операторы (высказывания), а стрелками – потоки управления.

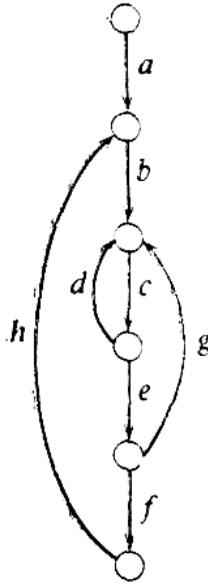


Рис. 7.7. Программа и степень охвата $C0$

Наиболее простым показателем покрывающей способности является такой, который измеряет число выполненных операторов в процентах к общему числу операторов. Такой показатель носит название *степень охвата $C0$* .

Например, в том случае, когда совершен проход $abcef$, степень охвата $C0$ будет составлять 100%. В этом случае такие проходы, как d, g, h , во внимание не принимаются. Можно характеризовать степень охвата по доле пройденных проходов, что можно назвать *степенью охвата $C1$* (рис. 7.8). Обычно в настоящее время, когда говорят о степени охвата, очень часто имеют в виду степень охвата $C1$.

Такой степенью охвата очень часто пользуются как показателем покрывающей способности. Однако в большинстве случаев управление программой может зависеть от количества выполненных циклов. Поэтому не всегда этого

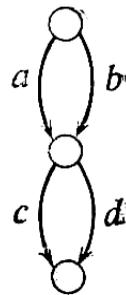


Рис. 7.8. Пример, показывающий, что недостаточно использования одной лишь степени охвата $C1$

оказывается достаточно. Здесь можно привести еще такой пример. Как показано на рис. 7.7, при тестировании проходов *ac* и *bd* степень охвата *S1* становится равной 100 %. Однако в сущности необходимо провести также тестирование проходов *ac*, *ad*, *be* и *bd*. Таким образом, степень охвата *S1* нельзя считать совершенным показателем.

При динамическом тестировании следует обращать должное внимание на выбор входных данных. Тесты, при которых входные данные полностью выбираются только из внешней спецификации (описания названия программного изделия), называют *функциональными тестами*. Помимо этого существуют еще и *структурные тесты*, при проведении которых приходится вмешиваться также в блок-схему программы.

При проведении функциональных тестов тестовые данные составляются только по внешней спецификации программы. Область входных переменных программы (пространство входных параметров) разбивается на несколько классов. Для тестирования используются характерные точки, представляющие классы. В данном случае используется *метод эквивалентного разбиения (МКР)*, являющийся типичным для функционального тестирования. При существовании значительных различий в классах программы также должны отличаться. Поэтому при определении классов следует выполнять действия, которые бы учитывали различия программ. Помимо МКР также находит применение *метод анализа граничных значений (МАГЗ)*, при котором выбор характерных точек оказывается более ограниченным. Характерные точки выбираются на границах эквивалентных областей или в непосредственной близости от этих границ. Обнаружение граничных ошибок можно выполнить более эффективно (рис. 7.9). В обоих случаях при составлении эквивалентных классов необходимо пользоваться эвристическими методами. При этом степень охвата всей программы не обязательно будет высокой.

После завершения функционального тестирования степень охвата *S1* обычно составляет примерно 40–50 %. Если даже воспользоваться таким сильным средством, как первично-следственные графики, значение этой величины оказывается равной не более 70 %. Поэтому необходимо обнаружить еще не реализованные проходы, определить наборы входных параметров, обеспечивающих прохождение через эти проходы и, таким образом, повышение степени охвата. Данные действия относятся к *структурному контролю*. Сле-

дует обратить внимание на то, что при проведении такого контроля автоматически воссоздать соответствующие данные тестирования по проходам не всегда достаточно легко.

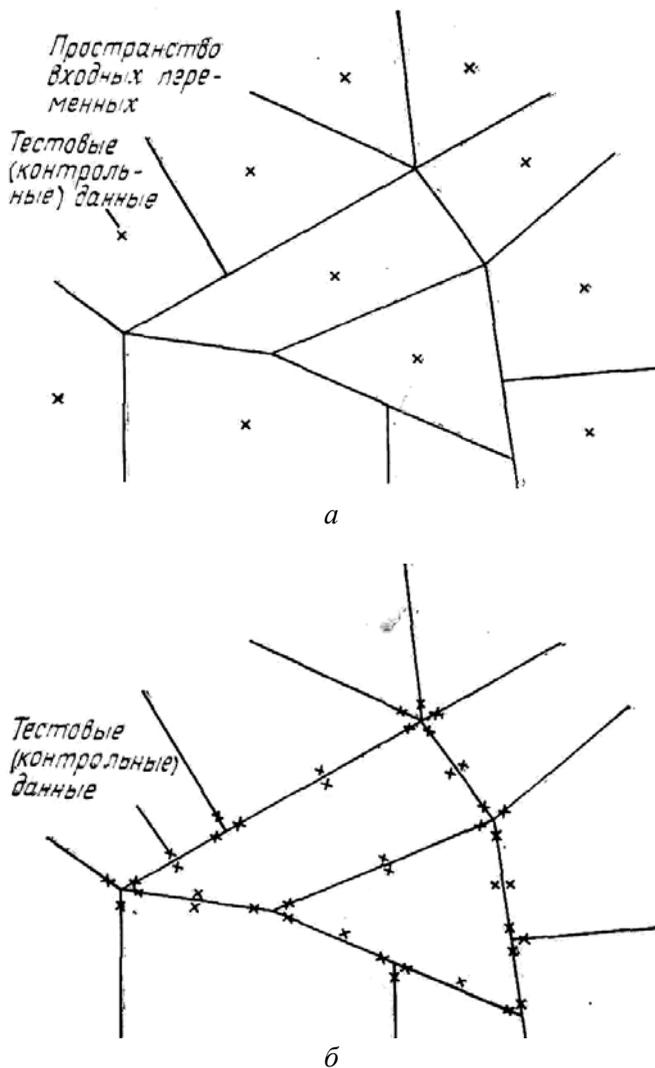


Рис. 7.9. Выбор характерных точек тестовых данных (области соответствуют различным проходам)

Одним из подходов в этом направлении может служить так называемая *знаковая реализация*, при использовании которой реализация программы фактически не является цифровой. При использовании установленных проходов условия прохождения через них последовательно заменяются знаками. Обычно знаковая реализация осуществляется в направлении назад (рис. 7.10).

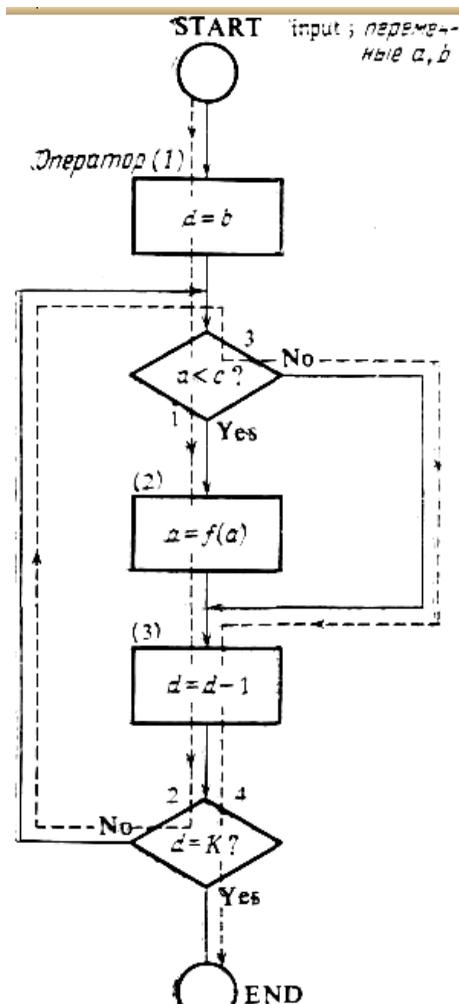


Рис. 7.10. Знаковая реализация

Таблица к рис. 7.10

Выполняемые операторы и ветви	Ветвь <u>4</u>	Ветвь <u>3</u>	Ветвь <u>2</u>	Ветвь <u>1</u>
4	$d = K$			
(3)	$d - 1 = K$			
3	$d - 1 = K$	$a \geq c$		
2	$d - 1 = K$	$a \geq c$	$d \neq K$	
(3)	$d - 2 = K$	$f(a) \geq c$	$d - 1 \neq K$	
(2)	$d - 2 = K$	$f(a) \geq c$	$d - 1 \neq K$	
1	$d - 2 = K$	$f(a) \geq c$	$d - 1 \neq K$	$a < c$
(1)	$d - 2 = K$	$f(a) \geq c$	$b - 1 \neq K$	$a < c$
↓ END				

Надежность программных средств находится в обратной зависимости от стоимости. Чтобы исключить все проходы, потребуется бесконечное время. При этом затраты также возрастут до бесконечности. На рис. 7.11 представлена зависимость накопленного числа выявленных ошибок от времени, затраченного на тестирование.

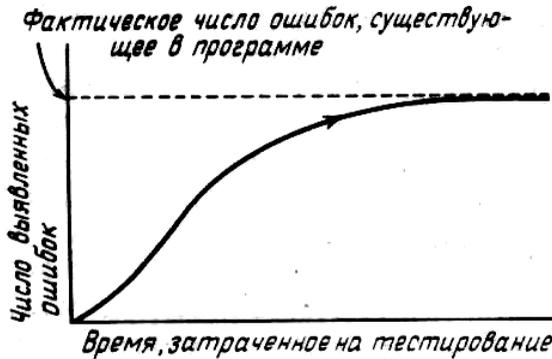


Рис. 7.11. Зависимость надежности программного обеспечения от продолжительности тестирования

Из этой зависимости видно, что с возрастанием числа выявленных ошибок резко затрудняется обнаружение новых. Чтобы полно-

стью исключить ошибки, вероятно, потребуется время, близкое к бесконечности. Следовательно, целесообразно останавливаться на некоторой ограниченной надежности. Во-первых, широко используемый показатель надежности программного обеспечения представляет собой упомянутую выше степень охвата, в частности степень охвата С1. С его помощью можно провести некоторую оценку того, насколько серьезно прошло проверку программное средство. Во-вторых, можно попытаться подогнать кумулятивную кривую обнаруженных ошибок к результатам имеющегося опыта и оценить окончательное число ошибок. В-третьих, можно воспользоваться экспериментальным методом, который носит наименование *мутационного анализа*. Например, в программу искусственно вводится J ошибок. При этом по результатам тестирования можно установить, что количество ошибок равно j . Если количество ошибок, найденных в самой исходной программе, равно i , то общее число существующих в программе ошибок можно оценить следующим образом: $I = Ji/j$. С помощью такого подхода можно провести проверку совершенства данных тестирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мехатроника / Т. Исии [и др.]. – М. : Мир, 1988. – 314 с.
2. Ослэндер, Д. М. Управляющие программы для механических систем / Д. М. Ослэндер, Дж. Р. Риджли, Дж. Д. Рикгенберг. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 413 с.
3. Подураев, Ю. В. Мехатроника : основы, методы, применение / Ю. В. Подураев. – М. : Машиностроение, 2007. – 255 с.
4. Попов, Е. П. Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич. – М. : Наука, 1978.
5. Воробьев, Е. И. Механика промышленных роботов : в 3 т. / Е. И. Воробьев, О. Д. Егоров, А. С. Попов. – М. : Высшая школа, 1988. – Т. 1. – 365 с.
6. Коларов, Д. Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бокчева. – М. : Мир, 302 с.
7. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физмалит, 2009. – 898 с.
8. Ивлев, Д. Д. Теория пластичности / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – Владивосток : Дальнаука, 2008. – 528 с.
9. Гиттис, Э. М. Техническая кибернетика / Г. А. Данилевич, В. И. Самойленко. – М. : Советское радио, 1969. – 485 с.
10. Сборник задач по теории автоматического регулирования / под ред. В. А. Бесекерского. – М. : Наука, 1969. – 588 с.
11. Лещенко, В. А. Гидравлические следящие приводы станков с программным управлением / В. А. Лещенко. – М. : Машиностроение, 1975. – 288 с.
12. Татур, Т. А. Основы теории электрических цепей / Т. А. Татур. – М. : Высшая школа, 1980. – 271 с.
13. Капустин, Н. М. Автоматизация конструкторского и технологического проектирования : в 6 т. / Н. М. Капустин, Г. Н. Васильев. – Минск : Вышэйшая школа, 1988. – 191 с.
14. Чигарев, А. В. Курс теоретической механики / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : Новое знание, 2010. – 245 с.
15. Основы кибернетики / Ю. И. Дегтярев [и др.]. – М. : Высшая школа, 1976. – 408 с.
16. Задачник по теории автоматического управления / Н. И. Андреев [и др.]. – М. : Энергия, 1971. – 496 с.

17. Хоровиц, П. Искусство схемотехники : в 2 т. / П. Хоровиц, У. Хилл. – М. : Мир, 1986. – Т. 1. – 598 с.; Т. 2. – 590 с.
18. Титце, У. Полупроводниковая схемотехника / У. Титце, К. Шенк. – М. : Мир, 1982. – 512 с.
19. Кунву, Ли. Основы в САПР, CAD/CAM/CAE / Ли Кунву. – СПб. : Питер, 2004. – 559 с.
20. Чигарев, А. В. ANSYS для инженеров / А. В. Чигарев, А. С. Кравчук, А. Ф. Смалюк. – Минск : Машиностроение, 2006. – 427 с.
21. Zimmermann, K. Mechanics of Terrestrial Locomotion, Springer / K. Zimmermann, I. Zeidis, C. Behn. – Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 289 p.
22. Turowski, Janusz. Podstawy mechatroniki / Janusz Turowski. – Łódź : Wydawnictwo wyższej ztkoly Humanistyczno-Ekonomicznej w Lodzi, 2008. – 255 s.
23. Acal, M. Mechatronics. The Basis of New Industrial Development / M. Acal, J. Macra, E. Penney. – Computational mechanics. Southampton UK : Inc. Aghunst Lodge, 1994.
24. Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warszawa : PWN, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	3
1. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СЛОЖНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ.	7
1.1. Математическое моделирование сложных динамических систем.	8
1.2. Надежность технических систем.	15
1.3. Безопасность системы и методы ее повышения.	20
1.4. Наблюдаемость.	25
1.4.1. Идентифицируемость.	27
1.4.2. Управляемость.	28
1.5. Устойчивость равновесия и движения систем.	31
1.5.1. Понятия устойчивости в пространстве состояний.	32
1.5.2. Устойчивость линейных стационарных систем.	39
1.6. Метод цепей и переходных функций в динамических системах.	39
1.7. Примеры решения задач.	46
2. МЕХАНИКА РАБОЧИХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОДСИСТЕМ.	54
2.1. Координатные системы и кинематические цепи.	54
2.1.1. Однородные координаты точки.	54
2.1.2. Кинематические пары.	59
2.2. Представление силовых величин в кинематических цепях.	63
2.2.1. Представление активных сил.	63
2.2.2. Представление сил тяжести.	67
2.2.3. Представление активных сил в кинематических парах.	67
2.3. Силы инерции в кинематических звеньях мехатронной системы.	70
2.4. Аналитическое представление «роторов» двигателей.	71
2.5. Принцип Гаусса для механических систем с кинематическими парами пятого класса.	76
2.6. Упругое (обратимое) деформирование сплошных твердых тел.	80

2.7. Пластическое (необратимое) деформирование твердых тел.	83
2.8. Предельное состояние материала конструкции при квазихрупком разрушении.	93
2.9. Усталостное разрушение.	98
2.10. Моделирование физико-механических свойств материалов методом механических цепей и диаграмм.	100
2.10.1. Модель линейно-упругого тела.	100
2.10.2. Модель нелинейно-упругого тела.	102
2.10.3. Модели пластических тел.	103
2.10.4. Модели линейно-вязкоупругих тел.	111
2.10.5. Модели упруговязкопластических тел.	116
2.11. Примеры решения задач.	120
3. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНО-УСИЛИТЕЛЬНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ.	139
3.1. Гидравлические и пневматические приводы.	139
3.1.1. Гидроцилиндры. Модуль объемной упругости реальной жидкости.	141
3.1.2. Статическая и динамическая жесткости цилиндра.	146
3.1.3. Передаточная функция гидроцилиндра.	148
3.2. Электроприводы постоянного и переменного тока.	149
3.3. Математическая модель типового электрогидравлического преобразователя.	152
3.4. Анализ и синтез электрических цепей в мехатронных системах.	159
3.4.1. Электрические схемы постоянного тока.	164
3.4.2. Электрические схемы переменного (гармонического) тока.	166
3.4.3. Комплексный метод расчета линейных электрических схем.	168
3.5. Примеры решения задач.	172
4. ЭЛЕМЕНТЫ СЕНСОТРОНИКИ И СХЕМОТЕХНИКИ – ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ, УСИЛИТЕЛЬНЫЕ, ДЕТЕКТОРНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ЗВЕНЬЯ.	189
4.1. Моделирование непрерывных и дискретных информационных систем.	190

4.2. Дифференциальные уравнения для нелинейной системы.	196
4.3. Уравнения дискретной системы (система разностных уравнений).	203
4.4. Сенсорные алгоритмы оценивания состояния системы.	206
4.5. Формирующие фильтры непрерывных сигналов в информационных системах.	210
4.6. Сенсорные, усилительные и детекторные электронные звенья.	217
4.7. Усилительные устройства.	221
4.8. Детекторы (различители).	223
4.9. Электронные цепи.	225
4.9.1. Двоичные устройства на аналоговых элементах.	227
4.9.2. Цифровые стандартные блоки.	245
4.9.3. Аналого-цифровые стандартные блоки.	247
4.10. Запоминающие элементы.	249
4.11. Счетчики.	256
4.12. Сдвиговые регистры.	259
4.13. Кодирование и стандартные СИС-блоки.	261
4.14. Примеры решения задач.	263
5. УПРАВЛЯЮЩИЕ ПОДСИСТЕМЫ – СИНТЕЗ КИБЕРНЕТИКИ И ИНФОРМАТИКИ.	271
5.1. Аналоговое и цифровое управление.	271
5.2. Модель и алгоритм управления звеньями манипулятора.	272
5.3. Проектирование регулятора.	277
5.4. Оптимальное линейное управление с обратной связью.	281
5.5. Релейное управление.	285
5.6. Деинтерференцизация.	288
5.7. Компьютерное управление непрерывной системой.	291
5.8. Классификация систем управления мехатронными системами.	296
5.9. Алгоритмы оптимального регулирования (управления) приводами.	307
5.10. Использование z -преобразования для анализа дискретных систем.	312

5.11. Пример решения задачи.	315
6. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ В МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМАХ.	318
6.1. Поведение конечного автомата. Состояния. Переходы.	319
6.2. Классификация конечных автоматов.	320
6.3. Задание конечных автоматов таблицами и графами.	321
6.4. Эквивалентные состояния автомата.	323
6.5. Минимальная форма автомата.	325
6.6. Сенсорные автоматы.	326
6.6.1. Диагностические испытания.	326
6.6.2. Установочные испытания.	331
6.7. Синтез конечных автоматов.	332
6.7.1. Регулярные выражения.	332
6.7.2. События. Регулярные события.	334
6.8. Структурный синтез конечных автоматов.	337
6.8.1. Операции над автоматами.	337
6.8.2. Структурный синтез автоматов без памяти.	343
6.8.3. Структурный синтез автоматов с памятью.	345
6.9. Примеры решения задач.	346
7. ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ.	358
7.1. Концепция аппарата конфигурируемого управления мехатронными системами.	359
7.2. Отказы в мехатронных системах.	360
7.2.1. Диагностика отказов.	362
7.2.2. Надежность структур, составленных из элементов.	363
7.3. Надежность программных средств.	371
ЛИТЕРАТУРА.	383

Учебное издание

ЧИГАРЕВ Анатолий Власович
ЦИММЕРМАНН Клаус
ЧИГАРЕВ Виталий Анатольевич

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАТРОНИКУ

Учебное пособие

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 27.05.2013. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 22,55. Уч.-изд. л. 17,64. Тираж 200. Заказ 845.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.