

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

д. ф.-м. н. Вихренко В.С., Ласовский Р.Н., студ. Тишевич А.Ю.

Белорусский государственный технологический университет, Минск

Во многих случаях при расчете механизмов и машин используются модели абсолютно твердых тел и, в частности, недеформируемых стержней [1–3]. Однако при наличии значительных продольных усилий в стержнях возникает необходимость учета их продольных деформаций [4]. В общей постановке задача движения упругого стержня сводится к уравнениям в частных производных [5, 6], решение которых сопряжено со значительными математическими трудностями. В ряде случаев интерес представляет изменение длины стержней [7], и для упрощения задачи можно использовать различные приближенные модели стержней, в частности, в духе метода Релея модель с постоянной по длине стержня относительной деформацией.

Поскольку относительная деформация определяется действующей в сечении продольной силой, предположение о ее постоянстве является достаточно грубым приближением, но можно надеяться, что при медленно изменяющихся внешних воздействиях, не носящих ударный характер, эта модель будет давать приемлемые по точности результаты. Преимущества модели по сравнению с формулировкой задачи в терминах дифференциальных уравнений в частных производных состоит в ее простоте, позволяющей описать продольные упругие деформации в рамках одной степени свободы.

Рассмотрим вращательное, плоскопараллельное и сферическое движения продольно упругого стержня исходной длины l_0 и массы m , имеющего малые поперечные размеры. Удлинение стержня предполагается однородным, характеризуемым постоянной по длине стержня относительной деформацией ε , являющейся функцией времени.

Для составления уравнений Лагранжа второго рода определим кинетическую энергию стержня для упомянутых выше движений.

При вращении относительно неподвижной оси (рис. 1) рассмотрим элементарный участок стержня длиной dx и массой dm .



Рисунок 1. – Кинематика стержня, участвующего во вращательном (а) и сферическом (б) движении

Кинетическая энергия этого участка определяется выражением;

$$dK = \frac{dm \cdot v^2}{2}, \quad (1)$$

где v – абсолютная линейная скорость выделенного участка стержня.

В силу того, что стержень может продольно деформироваться, выделенный участок участвует в сложном движении. Связав подвижную систему отсчета со стержнем и представив координату x выделенного участка через координату x_0 недеформированного стержня и зависящую от времени относительную деформацию ε

$$x = x_0(1 + \varepsilon), \quad (2)$$

выражение (1) представим в виде:

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot (\dot{\psi}^2 x_0^2 (1 + \varepsilon)^2 + \dot{\varepsilon}^2 x_0^2). \quad (3)$$

Кинетическая энергия всего стержня определяется интегрированием записанного выражения:

$$K = \frac{1}{2} I_{0A} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{0A} \dot{\varepsilon}^2 \quad (4)$$

где I_{0A} – осевой момент инерции недеформированного стержня относительно оси вращения.

В это выражение входят две независимые переменные ψ и ε , которые примем в качестве обобщенных координат при составлении уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \ddot{\psi} + 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi} \dot{\varepsilon} &= Q_{\psi}, \\ I_{0A} \ddot{\varepsilon} - (1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi}^2 &= Q_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично можно получить выражение для кинетической энергии стержня при его плоскопараллельном движении:

$$K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{0C} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{0C} \dot{\varepsilon}^2. \quad (6)$$

Основными отличиями этого уравнения от уравнения (4) является дополнительное слагаемое, учитывающее кинетическую энергию поступательного движения стержня вместе с его центром масс, и то, что в последние два слагаемые входит осевой момент инерции недеформированного стержня относительно оси, проходящей через его центр масс.

При плоскопараллельном движении стержня для получения уравнения движения его центра масс удобно воспользоваться теоремой о движении центра масс, а эволюция вращательной и деформационной обобщенных координат может быть описана уравнениями (5) с переопределенным моментом инерции.

При сферическом движении стержня (рис. 1) переносная скорость состоит из двух слагаемых

$$v_{e1} = \dot{\psi} x \text{ и } v_{e2} = \dot{\phi} x \cos \psi. \quad (7)$$

В этом случае для кинетической энергии получим выражение

$$K = \frac{1}{2} I_{0A} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} I_{0A} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{0A} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi, \quad (8)$$

и уравнения Лагранжа второго рода принимают вид:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \ddot{\psi} + 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi} \dot{\varepsilon} + (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \cos \psi \sin \psi \dot{\phi}^2 &= Q_{\psi}, \\ (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \cos^2 \psi \ddot{\phi} + 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \cos^2 \psi \dot{\phi} \dot{\varepsilon} - 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \cos \psi \sin \psi \dot{\phi} \dot{\psi} &= Q_{\phi}, \\ I_{0A} \ddot{\varepsilon} - (1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi}^2 - (1 + \varepsilon) I_{0A} \cos^2 \psi \dot{\phi}^2 &= Q_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо отметить, что вычисление обобщенных сил, входящих в уравнения (5) и (9) удобнее всего производить путем разделения их на потенциальную и непотенциальную составляющие. Кроме того, несмотря на нелинейность отмеченных уравнений, их численное решение с помощью компьютера не вызывает особых затруднений.

Рассмотрим движение стержня в поле сил тяжести. Для определения обобщенных сил Q_{ε} и Q_{ϕ} необходимо вычислить потенциальную энергию стержня с учетом энергии упругой деформации. Длину элементарного участка dx представим в следующем виде:

$$dx = dx_0 (1 + \varepsilon) = dx_0 \left(1 + \frac{F}{A(x_0)E} \right) \quad (10)$$

где F – сила, растягивающая стержень (в рамках принятых приближений вычислим приведенный коэффициент жесткости, соответствующий изменению длины стержня); $A(x)$ – площадь поперечного сечения стержня в сечении x ; E – модуль упругости первого рода.

Для определения удлинения стержня проинтегрируем выражение (10)

$$\Delta l = \int_0^l \left(1 + \frac{F}{A(x_0)E}\right) dx_0 - l_0 = \frac{F}{E} \int_0^{l_0} \frac{dx}{A(x)} \quad (11)$$

Тогда выражение для приведенного коэффициента жесткости стержня будет иметь вид

$$c = \frac{F}{\Delta l} = E \int_0^{l_0} \frac{dx}{A(x)} \quad (12)$$

В качестве примера рассмотрим стержень в форме усеченного конуса. В этом случае площадь поперечного сечения определяется выражением:

$$A(x) = \pi r(x)^2, \quad r(x) = r + \alpha x, \quad \alpha = (R - r) / l_0 \quad (13)$$

где r и R – радиусы концов стержня; α – константа.

При учете (13) выражение (12) принимает вид:

$$c = \frac{\pi r(r + \alpha l_0)}{l_0} E. \quad (14)$$

Учитывая также потенциальную энергию в поле сил тяжести, для обобщенных сил получим выражения

$$Q_\varepsilon = -\frac{\partial \dot{I}}{\partial \varepsilon} = -c l_0^2 \varepsilon - \frac{1}{2} m g l_0 \sin \psi,$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial \dot{I}}{\partial \psi} = -\frac{1}{2} (1 + \varepsilon) l_0 m g \cos \psi. \quad (15)$$

Считая поперечные размеры стержня малыми, для осевого момента инерции получим

$$I_{OA} = \frac{m l_0^2}{10} \frac{6R^2 + 3Rr + r^2}{R^2 + Rr + r^2} \quad (16)$$

На рисунке 2 показаны зависимости от времени угловой скорости ω и относительной деформации ε резинового ($E = 10^7$ МПа, $\rho = 1200$ кг/м³) стержня с радиусами $r = 2$ см, $R = 3$ см, и длиной $l_0 = 1$ м, вращающегося относительно горизонтальной оси, при начальной угловой скорости $\omega_0 = 15$ рад/с, полученные численным интегрированием уравнений (5). Контроль правильности решения производился подсчетом механической энергии стержня, которая оставалась постоянной во времени.

Как и следовало ожидать, деформационная степень свободы стержня имеет колебательный характер. Кроме того, изменение длины стержня приводит к изменению его момента инерции, что влечет за собой изменение в противофазе угловой скорости, что видно из рисунка. Большой период изменения угловой скорости около 0,4 с обусловлен действием силы тяжести, которая также влияет на продольные деформации стержня.

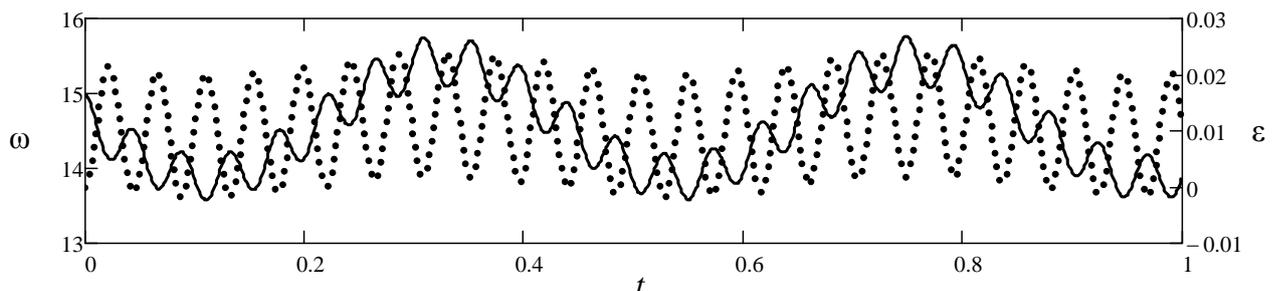


Рисунок 2. – Угловая скорость (сплошная линия) и относительная деформация (точки) при $\omega_0 = 15 \text{ c}^{-1}$

Некоторое представление о точности рассмотренной модели стержня можно получить, рассматривая колебания однородного стержня, закрепленного одним концом, после его однородного начального удлинения. Из уравнений (5) и (15) при $\psi=0$ следует, что в рассмотренной модели частота колебаний равна $\sqrt{3E/\rho l^2}$, тогда как точное решение задачи [6] приводит к значению $\sqrt{\pi^2 E/4\rho l^2}$, которое в $\sqrt{12/\pi^2} \cong 1,1$ раза меньше, то есть погрешность вычисления частоты колебаний составляет около 10%. Естественно, детальная картина колебаний будет существенно отличаться, так как точное решение не описывается гармонической функцией.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена простая модель упругого продольно деформируемого стержня в предположении, что продольная деформация постоянна вдоль его оси. Получены уравнения Лагранжа второго рода для различных видов движения стержня. Численно исследовано вращательное движение стержня в виде усеченного конуса. Показано, что продольные деформации и, как следствие, угловая скорость стержня, носят колебательный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Лань, 2009. – 736 с.
2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М.: Лань, 2001. – 768 с.
3. Левитская, О. Н. Курс теории механизмов и машин / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – М.: Высш. шк., 1985. —279 с.
4. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – М.: ГИТТЛ, 1959. – 568 с.
6. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
7. Борисов, А. В. Динамика эндо- и экзоскелета / А. В. Борисов. – Смоленск: Смоленская городская типография, 2012. – 296 с.

SUMMARY

The simple model of a longitudinally elastically deformable thin rod is considered in approximation that the relative longitudinal deformation is constant along the rod axes. The second order Lagrange equations for different types of motion of the deformable rod are obtained. Rotational movement of the truncated cone rod is investigated. It is shown that the longitudinal deformation and as a consequence the angular velocity of the rod are antiphase oscillatory.

Поступила в редакцию 09.10.2013