УДК 539.374

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

маг. [1] **Шавловская О.Г.,** д. ф.-м. н.[2] **Леоненко Д.В.**

[1] *УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», Гомель*
[2] *УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель*

Введение. Широкое применение в авиа-, ракето-, машино-, приборо- и судостроении многослойных конструкций приводит к необходимости разработки методов их расчета на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами.

При рассмотрении многослойных конструкций с криволинейными слоями можно указать три типа оболочек: тонкие, средней толщины и толстостенные. Для тонких оболочек можно пренебречь изменением метрики при переходе от слоя к слою и не учитывать поперечное деформирование заполнителей [1]. Для оболочек средней толщины необходим учет дискретного характера работы конструкции. В этом случае для несущих слоев принимают гипотезы Киргофа-Лява. Для заполнителей существенными являются деформации поперечных сдвигов и трансверсальная деформация.

В монографии [2] рассмотрено деформирование трехслойных элементов конструкций, не связанных с упругими средами. В статье [3] исследованы колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде при действии локальных нагрузок. Здесь выполнена постановка краевой задачи о статическом деформировании трехслойной оболочки вращения в упругой среде.

1 Постановка задачи. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа-Лява, в жестком сжимаемом заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые.

Обозначим: h_k – толщину k-го слоя: k = 1, 2, 3 – здесь и далее номера внешнего, нижнего слоев и заполнителя; $h_3 = 2c$; H_α, k_α (α = 1, 2) – коэффициенты Ламе и главные кривизны срединной поверхности заполнителя.

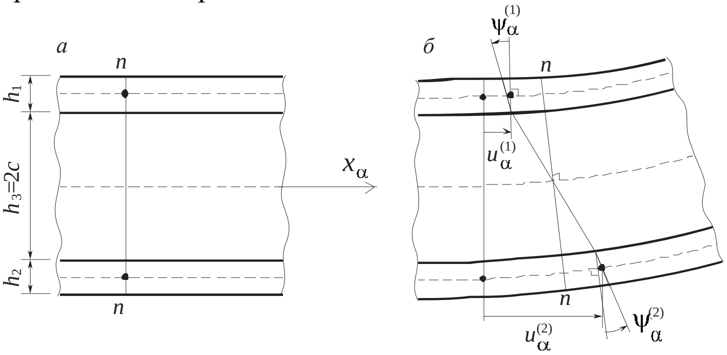

Рисунок 1. – Перемещения в оболочке со сжимаемым заполнителем

Проводя постановку краевой задачи в перемещениях, за независимые переменные принимаем u_α^k, w^k - тангенциальные перемещения и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев в направлении осей x_α, z правой системы координат, отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности заполнителя и к внешней нормали, соответственно (рисунок 1).

Перемещения в несущих слоях принимаем в виде ($c \le z \le c + h_1$, $-c - h_2 \le z \le -c$):

$$u_\alpha^{kz} = u_\alpha^k + (z \mp a_k)\psi_\alpha^k, \qquad a_k = c + 0{,}5h_k.$$

Здесь и далее: греческие индексы принимают значения 1, 2; латинские – 1, 2, 3; нижний знак соответствует индексу k = 2; ψ_α^k – угол поворота нормали в k-ом несущем слое; частное дифференцирование обозначается соответствующим координатным нижним индексом, следующим после запятой.

Перемещения в заполнителе принимаем в виде ($-c \le z \le c$):

$$u_\alpha^{3z} = \sum_{k=1}^{2}(1 \pm z/c)\left(B_{k\alpha}u_\alpha^k \pm D_{k\alpha}w^k{}_{,\alpha}\right), \qquad w^{3z} = 0{,}5\sum_{k=1}^{2}(1 \pm z/c)w^k,$$

где $B_{k\alpha} = \dfrac{1}{2}\left(1 \mp \dfrac{1}{2}h_k c_\alpha^k k_\alpha\right)$, $D_{k\alpha} = \dfrac{h_k c_\alpha^k}{4H_\alpha}$.

Используя соотношения связи малых деформаций и перемещений в криволинейной ортогональной системе координат [4], получим:

$$\varepsilon^{kz}_{\alpha\alpha} = (1+k_\alpha z)^{-1}\left(H_\alpha^{-1}u^{kz}_\alpha,_\alpha + H_1^{-1}H_2^{-1}H_\alpha,_\gamma\, u^{kz}_\gamma + k_\alpha w^{kz}\right),$$
$$\varepsilon^{kz}_{12} = 0{,}5\left(1+k_1 z\right)^{-1}\left(H_1^{-1}u_2^{kz},_1 - H_1^{-1}H_2^{-1}H_1,_2\, u_1^{kz}\right) + 0{,}5\left(1+k_{21} z\right)^{-1}\left(H_2^{-1}u_2^{kz},_1 - H_1^{-1}H_2^{-1}H_2,_1\, u_2^{kz}\right),$$
$$\varepsilon^{3z}_{\alpha3} = 0{,}5\left(u^{3z}_\alpha,_\alpha - (1+k_\alpha z)^{-1}k_\alpha u^{3z}_\alpha + H_\alpha^{-1}(1+k_\alpha z)^{-1}w^{3z},_\alpha\right),$$
$$\varepsilon^{3z}_{\alpha3} = w^{3z},_\alpha; \quad (\gamma \neq \alpha,\ k = 1,2,3;\ \alpha,\gamma = 1,2.) \qquad (1)$$

Реакцию упругой среды обозначим q^k_{3r} и предполагаем, что она описывается моделью Винклера:

$$q^k_{3r} = \kappa_k w^k,$$

где κ_k – коэффициент жесткости упругой среды со стороны k-го несущего слоя.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия следуют из вариационного принципа Лагранжа:

$$-\delta W + \delta A = 0, \qquad (2)$$

где δW – вариация потенциальной энергии деформации, $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация работы внешних сил δA_1 и контурных усилий δA_2.

С учетом поперечных сдвигов и обжатия заполнителя вариация внутренней потенциальной энергии будет (по повторяющимся греческим индексам производится суммирование):

$$\delta W = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma^k_{\alpha\beta}\delta\varepsilon^{kz}_{\alpha\beta}\left(1+k_1 z\right)\left(1+k_2 z\right)dz + \int_{h_3}\left(2\sigma^3_{\alpha3}\delta\varepsilon^{3z}_{\alpha3} + \sigma^3_{33}\delta\varepsilon^{3z}_{33}\right)\left(1+k_1 z\right)\left(1+k_2 z\right)dz\right]H_1H_2dx_1dx_2, \quad (3)$$

где l_α – линейный размер оболочки в направлении координатной оси x_α.

При определении вариации работы внешних сил считаем, что к наружным поверхностям несущих слоев (k = 1, 2) приложены произвольные распределенные нагрузки q^k_α, q^k_3. По границам (торцам оболочки) – усилия и моменты: $N^k_{\alpha\beta0}$, $Q^k_{\alpha0}$, $M^k_{\alpha\alpha0}$. Тогда

$$\delta A_1 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\sum_{k=1}^{2}\left[\left(q^k_\alpha + q^k_{3r}\right)\left(\delta u^k_\alpha + \frac{(-1)^{k+1}h_k}{2}\delta\psi^k_\alpha\right)\left(1+(-1)^{k+1}k_1\left(c+h_k\right)\right)\left(1+(-1)^{k+1}k_2\left(c+h_k\right)\right)\right]H_1H_2dx_1dx_2.$$
$$(4)$$

Вариация работы внутренних обобщенных усилий и моментов

$$\delta A_2 = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{l_\gamma}\left(N^k_{\alpha\beta0}\delta u^k_\beta + Q^k_{\alpha0}\delta w^k + M^k_{\alpha\alpha0}\delta w,^k_\alpha\right)dx_\gamma, \qquad (5)$$

где $N^k_{\alpha\beta0}$, $Q^k_{\alpha0}$, $M^k_{\alpha\alpha0}$ – заданные на контурной линии $x = x_\gamma$ (длины l_γ) обобщенные усилия и моменты.

2 Решение задачи. Подставив в вариационное уравнение (2) соотношения (3)–(5) и выделяя независимые вариации перемещений путем интегрирования по частям, получим в итоге следующее выражение:

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(\sum_{\alpha,k=1}^{2} L_\alpha^k \delta u_\alpha^k + \sum_{k=1}^{2} L_3^k \delta w^k\right) dx_1 dx_2 = 0. \qquad (6)$$

Приравняв коэффициенты при независимых вариациях нулю в (6), получим шесть уравнений равновесия трехслойной осесимметричной оболочки (k = 1, 2; i = 1, 2, 3), в усилиях

$$L_i^k = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
L_\alpha^k = & -(H_\gamma T_{\alpha\alpha}^k)_{,\alpha} + H_\gamma k_\alpha c_\alpha^k{}_{,\alpha} M_{\alpha\alpha}^k - \left(H_\gamma k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k\right)_{,\alpha} + H_\gamma k_{\alpha,\alpha} c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k - \\
& - H_{\alpha,\gamma} T_{\alpha\gamma}^k - H_{\alpha,\gamma} k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\gamma}^k - \left(H_\alpha T_{\alpha\gamma}^k\right)_{,\gamma} + H_\alpha k_\alpha c_\alpha^k{}_{,\gamma} M_{\gamma\alpha}^k - \left(H_\alpha k_\alpha c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k\right)_{,\gamma} + \\
& + H_\alpha k_{\alpha,\gamma} c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k - H_{\gamma,\alpha} T_{\gamma\gamma}^k + H_{\gamma,\alpha} k_\alpha c_\alpha^k M_{\gamma\gamma}^k + H_\gamma B_{k\alpha,\alpha} M_{\alpha\alpha}^{3\pm} - \left(H_\gamma B_{k\alpha} M_{\alpha\alpha}^{3\pm}\right)_{,\alpha} - \\
& - H_{\alpha,\gamma} B_{k\alpha} M_{\alpha\gamma}^{3\pm} + H_\alpha B_{k\alpha,\gamma} M_{\gamma\alpha}^{3\pm} - \left(H_\alpha B_{k\alpha} M_{\gamma\alpha}^{3\pm}\right)_{,\gamma} + H_{\gamma,\alpha} B_{k\alpha} M_{\gamma\gamma}^{3\pm} \pm \\
& \pm c^{-1} H_\alpha H_\gamma B_{k\alpha} T_{\alpha3}^3 - H_\alpha H_\gamma k_\alpha B_{k\alpha} M_{\alpha3}^{3\pm} - \left(1 \pm 0{,}5 h_k c_\alpha^k k_\alpha\right) H_\alpha H_\gamma m_\alpha^k m_\gamma^k q_\alpha^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3^k = & \left(H_1^{-1} H_2 c_1^k{}_{,1} M_{11}^k\right)_{,1} - \left(H_1^{-1} H_2 c_1^k M_{11}^k\right)_{,11} - \left(H_1^{-2} H_{1,1} H_2 c_1^k M_{11}^k\right)_{,1} + \\
& + \left(H_{1,2} H_2^{-1} c_2^k M_{11}^k\right)_{,2} + H_1 H_2 k_1 T_{11}^k + \left(c_2^k{}_{,1} M_{12}^k\right)_{,2} - \left(H_2^{-1} H_{2,1} H_2 c_2^k M_{12}^k\right)_{,2} - \\
& + \left(c_2^k M_{12}^k\right)_{,12} - \left(H_1^{-1}{}_{,2} H_{1,2} c_1^k M_{12}^k\right)_{,1} + \left(c_1^k{}_{,2} M_{21}^k\right)_{,1} - \left(H_1^{-1} H_{1,2} c_1^k M_{21}^k\right)_{,1} - \\
& + \left(c_1^k M_{21}^k\right)_{,12} - \left(H_2^{-1} H_{2,1} c_2^k M_{21}^k\right)_{,2} + \left(H_1 H_2^{-1} c_2^k{}_{,2} M_{22}^k\right)_{,2} - \left(c_2^k H_1 H_2^{-1} M_{22}^k\right)_{,22} - \\
& - \left(H_1 H_2^{-2} H_{2,2} c_2^k M_{22}^k\right)_{,2} + \left(H_1^{-1} H_{2,1} c_1^k{}_{,2} M_{22}^k\right)_{,1} + H_1 H_2 k_2 T_{22}^k \mp \left(H_2 D_{k1,1} M_{11}^{3\pm}\right)_{,1} \pm \\
& \pm \left(H_2 D_{k1} M_{11}^{3\pm}\right)_{,11} \mp \left(H_{1,2} D_{k2} M_{11}^{3\pm}\right)_{,2} + \frac{1}{2} H_1 H_2 k_1 M_{11}^{3\pm} \mp \left(H_2 D_{k2,1} M_{12}^{3\pm}\right)_{,2} \pm \\
& \pm \left(H_2 D_{k2} M_{12}^{3\pm}\right)_{,12} \mp \left(H_{1,2} D_{k1} M_{12}^{3\pm}\right)_{,1} \mp \left(H_1 D_{k1,2} M_{21}^{3\pm}\right)_{,1} \pm \left(H_1 D_{k1} M_{21}^{3\pm}\right) \pm \\
& \pm \left(H_{2,1} D_{k2} M_{21}^{3\pm}\right)_{,2} \mp \left(H_1 D_{k2,2} M_{22}^{3\pm}\right)_{,2} \pm \left(H_1 D_{k2} M_{22}^{3\pm}\right)_{,22} \mp \left(H_{2,1} D_{k1} M_{22}^{3\pm}\right)_{,1} + \\
& + \frac{1}{2} H_1 H_2 k_2 M_{22}^{3\pm} - c^{-1}\left(H_1 H_2 D_{k1} T_{13}^3\right)_{,1} \pm \left(H_1 H_2 k_1 D_{k1} M_{13}^{3\pm}\right)_{,1} - 0{,}5\left(H_2 M_{13}^{3\pm}\right)_{,1} - \\
& - c^{-1}\left(H_1 H_2 D_{k2} T_{23}^3\right)_{,2} \pm \left(H_1 H_2 k_2 D_{k2} M_{23}^{3\pm}\right)_{,2} - 0{,}5\left(H_1 M_{23}^{3\pm}\right)_{,2} \pm 0{,}5 c^{-1} H_1 H_2 T_{33}^3 - \\
& - H_1 H_2 m_1^k m_2^k (q_3^k + q_{3r}^k) \mp 0{,}5 h_k (q_1^k c_1^k m_1^k m_2^k H_2)_{,1} \mp 0{,}5 h_k (q_2^k c_2^k m_1^k m_2^k H_1)_{,2}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

где q_α^k, q_3^k – компоненты поверхностных нагрузок, $k = 1, 2; \alpha \neq \gamma$.

Полученная система уравнений с точностью до обозначений при $\kappa_k = 0$ совпадает с уравнениями равновесия трехслойной оболочки, не связанными с упругой средой [2].

Обобщенные внутренние усилия и моменты в выражениях (7) введены следующими соотношениями ($k \neq 3$; i = 1, 2, 3; $\gamma \neq \alpha$):

$$T_{\alpha\beta}^k = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (1 + k_\gamma z) dz, \quad M_{\alpha\beta}^k = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (z \mp a_k)(1 + k_\gamma z) dz,$$

$$T_{i3}^{(3)} = \int_{h_k} \sigma_{i3}^{(3)} (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz; \quad M_{\alpha i}^{(3)} = \int_{h_k} \sigma_{\alpha i}^{(3)} (1 \pm z / c)(1 + k_\gamma z) dz.$$

Закрепление кромок несущих слоев осуществляется мембраной, установленной на срезах торцов, абсолютно жесткой на растяжение и сдвиг, но свободно деформирующейся из своей плоскости.

Силовые граничные условия формулируются из требования выполнения в каждой точке координатной линии равенства заданных обобщенных усилий и моментов внутренним силовым факторам, входящим в выражения контурного интеграла вдоль той же линии. На каждом торце формулируется по восемь граничных условий. Например, вдоль линии $x = x_\alpha$:

$$L_{\alpha\beta N}^{k} \equiv H_{\gamma}(T_{\alpha\beta}^{k} + k_{\beta}c_{\beta}^{k}M_{\alpha\beta}^{k} + B_{k\beta}M_{\alpha\beta}^{3\pm}) = N_{\alpha\beta 0}^{k},$$

$$\begin{gathered}
L_{\alpha Q}^{k} \equiv -H_{\alpha}^{-1}H_{\gamma}c_{\alpha}^{k},_{\alpha} M_{\alpha\alpha}^{k} + (H_{\alpha}^{-1}H_{\gamma}c_{\alpha}^{k}M_{\alpha\alpha}^{k}),_{\alpha} + H_{\alpha}^{-2}H_{\alpha},_{\alpha} H_{\gamma}c_{\alpha}^{k}M_{\alpha\alpha}^{k} + \\
+ H_{\alpha}^{-1}H_{\alpha},_{\gamma} c_{\alpha}^{k}M_{12}^{k} - c_{\alpha}^{k},_{\gamma} M_{\gamma\alpha}^{k} + H_{\alpha}^{-1}H_{\alpha},_{\gamma} c_{\alpha}^{k}M_{21}^{k} + (c_{2}^{k}M_{12}^{k}),_{\gamma} + (c_{1}^{k}M_{21}^{k}),_{\gamma} - \\
+ H_{\alpha}^{-1}H_{\gamma},_{\alpha} c_{\alpha}^{k}M_{\gamma\gamma}^{k} \pm H_{2}D_{k\alpha},_{1} M_{1\alpha}^{k} \mp (H_{\gamma}D_{k1}M_{\alpha 1}^{3\pm}),_{1} \mp H_{\alpha},_{\gamma} D_{k\alpha}M_{\alpha\gamma}^{3\pm} \mp \\
\mp (H_{2}D_{k2}M_{12}^{3\pm}),_{\gamma} \pm H_{1}D_{k\alpha},_{2} M_{2\alpha}^{3\pm} \mp (H_{1}D_{k\alpha}M_{2\alpha}^{3\pm}),_{2} \pm H_{\gamma},_{\alpha} D_{k\alpha}M_{\gamma\gamma}^{3\pm} + \\
+ c^{-1}H_{1}H_{2}D_{k\alpha}T_{\alpha 3}^{3} \mp H_{1}H_{2}k_{\alpha}D_{k\alpha}M_{\alpha 3}^{3\pm} + 0{,}5H_{\gamma}M_{\alpha 3}^{3\pm} = Q_{\alpha 0}^{k},
\end{gathered}$$

$$L_{\alpha M}^{k} \equiv -H_{\alpha}^{-1}H_{\gamma}c_{\alpha}^{k}M_{\alpha\alpha}^{k} \pm H_{\gamma}D_{k\alpha}M_{\alpha\alpha}^{3\pm} = M_{\alpha\alpha 0}^{k}, \tag{8}$$

где $\beta, k = 1, 2;\ \alpha, \gamma = 1, 2; \gamma \neq \alpha$; $N_{\alpha\beta 0}^{k}$, $Q_{\alpha 0}^{k}$, $M_{\alpha\alpha 0}^{k}$ – заданные на контурной линии $x = x_{\gamma}$ (длины l_{γ}) обобщенные усилия и моменты.

Вывод. Таким образом, на основе вариационного принципа Лагранжа поставлена краевая задача (7), (8) об изгибе трехслойной оболочки вращения в упругой среде.

РЕЗЮМЕ

Сделана постановка краевой задачи о деформировании трехслойной оболочки в упругой среде. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа–Лява. В толстом заполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Упругая среда описывается моделью Винклера. С помощью вариационного принципа Лагранжа получены уравнения равновесия трехслойной оболочки вращения в упругой среде и сформулированы условия на границах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В. В., Механика многослойных конструкций / Ю. Н. Новичков, В. В. Болотин. − М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 343 с.
3. Леоненко, Д. В. Локальные нагружения трехслойных круговых цилиндрических оболочек с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 28.– Мн.: 2013. – С. 109–113.
4. Амензаде, Ю.А. Теория упругости / Ю. А. Амензаде. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.

SUMMARY

A formulation of the boundary value problem about the deformation of a three-layer shell in the elastic medium was made. For isotropic base layers the Kirchhoff-Love hypotheses were accepted. In the thick fill the work of the in-plane shear and thickness reduction are taken into account, the variation of shifts is accepted as a linear along the transverse coordinate. On the interfaces the conditions of shifts' continuity are used. Elastic medium is described by the Winkler's model. Using the variational Lagrange principle we got equations of the equilibrium of a three-layer shell of rotation in the elastic medium and formulated interface conditions.

Поступила в редакцию 19.09.2013