

С точки зрения практического приложения полученных результатов больший интерес представляет решение обратной задачи. В этом случае по измеренным значениям ψ и Δ можно вычислить толщину слоя или его оптические параметры (коэффициенты отражения и преломления). Одновременное определение двух параметров возможно, поскольку уравнение (2) является комплекснозначным и, фактически, содержит два уравнения. Решение обратной задачи даже в случае такой простой геометрии, как указано на рис. 1, настолько громоздко, что его можно осуществить только численными методами.

Зачастую при решении обратной задачи весьма важным является проблема единственности решения. Если число параметров задачи, которые необходимо найти, больше двух, то в таком случае можно получить дополнительно независимые уравнения. Для этого следует измерить ψ и Δ при других длинах волн падающего света. Число

измерений на разных длинах волн должно быть не меньше числа слоев в модели среды. Если же количество экспериментальных данных будет больше, то, исходя из общей теории решения обратных задач, можно сказать, что дополнительную информацию можно будет использовать для получения более точного однозначного решения.

Литература

1. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
2. Калитеевский, Н.И. Волновая оптика / Н.И. Калитеевский. – М.: Высшая школа, 1995. – 463 с.
3. Швец, В.А. Эллипсометрия / В.А. Швец, Е.В. Спесивцев. – Новосибирск: Изд. НГУ, 2013. – 87 с.
4. Ржанов, А.В. Основы эллипсометрии / А.В. Ржанов, К.К. Свиташев, А.И. Семенов, В.К. Соколов. – Новосибирск: Наука, 1979. – 422 с.
5. Аззам, Р. Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара. – М.: Мир, 1981. – 583 с.

УДК 530.182

РАСЧЕТ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ РЕШЕНИЯ ТИПА WOBBLING KINK В ТЕОРИИ ϕ^4

Князев М.А.¹, Точило П.М.¹, Князев Д.М.²

¹Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

²ИООО «ЭПАМ СИСТЕМЗ»

Минск, Республика Беларусь

Решение в типа wobbling kink было впервые использовано в скалярных моделях теории поля для построения такого топологически нетривиального решения, которое удовлетворяло бы граничным условиям для обычного кинка, но при этом дополнительно позволяло бы ввести внутреннюю степень свободы [1]. Использование такой степени свободы позволяет расширить круг описываемых свойств модели. Так, например, если использовать кинк в качестве модели доменной стенки [2], то решение типа wobbling kink позволяет описывать не только движение доменной стенки как целого, но и динамику её структуры. Такой подход обусловил значительный интерес к решениям указанного типа в теории ϕ^4 [3-6]. Современное состояние исследований и обзор вопроса приведены в работе [7].

В работе [1] показано, что для уравнения движения теории ϕ^4 вида

$$\frac{1}{2}\phi_{tt} - \frac{1}{2}\phi_{xx} = \phi - \phi^3, \quad (1)$$

где $\phi_t = \partial\phi/\partial t$ и т.п., можно построить решение вида wobbling kink, используя представление

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x, t), \quad (2)$$

где ε – положительный параметр порядка, $\varepsilon \ll 1$,

$\phi_0(x) = \tanh(x)$ – решение уравнения (1) в виде статического кинка.

Данное представление позволяет получить только асимптотическое выражение для wobbling kink. Это означает, что, начиная с некоторого номера n , гармонические составляющие $\phi_n(x, t)$ соотношения (2) перестают быть равномерно ограниченными по переменным x или t (а возможна ситуация, когда и по обсем) и решение в целом расходится.

С целью упрощения вычислений было принято такое представление, в котором гармоники $\phi_n(x, t)$ по определению всегда являются равномерно ограниченными по временной переменной t . Для этого временная зависимость каждой -ой гармоники описывается с использованием функций синуса или косинуса. При этом частота колебаний устанавливается фиксированной и определяется параметрами модели. Вообще говоря, для нелинейных задач это приближение не является достаточным.

При указанных выше допущениях были получены явные выражения для гармонических составляющих $\phi_1(x, t)$ и $\phi_2(x, t)$ ряда (2). Обе функции оказались равномерно ограниченными по пространственной переменной. Специфической особенностью построения этих выражений было применение, так называемого «треугольного представления» [8]. В рамках такого подхода нет

необходимости решать неоднородные уравнения в частных производных, поскольку для каждого уравнения удастся построить комплекснозначную функцию Грина, действительная и мнимая части которой дают два линейно независимых частных решения неоднородного уравнения.

В полученных выражениях частоты колебаний для обоих членов ряда были постоянными. Такой подход может привести к неограниченному росту гармоник более высоких порядков, поскольку известно, что частота колебаний нелинейного осциллятора зависит от его амплитуды. Если такая ситуация будет иметь место, то одним из способов её разрешения может быть переопределение частоты колебаний и представление её в виде ряда по той же константе ε , которая была использована в представлении (2):

$$\omega = \sqrt{3}(1 + \varepsilon^2 \omega_1 + \dots). \quad (3)$$

Если подходящим выбором константы ω_1 удастся компенсировать неограниченно растущие слагаемые, то, например, третья гармоника окажется равномерно ограниченной. Для соответствующей компенсации неограниченно растущих слагаемых в гармониках более высоких порядков необходимо учесть последующие члены в разложении (3). В нелинейной теории дисперсии такой подход связан с эффектом Стокса [9].

С целью проверки указанного положения в работе [10] был проведен расчет третьей гармоники разложения (2) для частного случая больших значений переменной x . Такой выбор области значений пространственной переменной был обусловлен сложным интегральным представлением явного выражения для $\phi_2(x, t)$, построенного в работе [1]. Была получена асимптотическая оценка соответствующего интеграла по методу стационарной фазы [11]. Это позволило в свою очередь оценить вклады функций Бесселя и в результате записать неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных для третьей гармоники в форме, позволяющей построить его общее решение в явной форме.

В результате проведенных вычислений было получено, что в рассмотренном приближении третья гармоника представления (2) неограниченно возрастает по пространственной переменной x , т. е. разложение по волнам с фиксированными частотами становится неприемлимым.

В настоящей работе вопрос о поведении третьей гармоники в представлении (2) для модели, описываемой уравнением (1), рассмотрен с других позиций. Если вычисление слагаемого $\phi_1(x, t)$ и в работе [1] и в наших расчетах проводилось достаточно просто с использованием метода разделения переменных, то для вычисления слагаемого $\phi_2(x, t)$ мы не использовали «треугольное представление». Все вычисления были проведены

непосредственно с использованием метода вариации произвольных постоянных. Никаких ограничений на область изменения пространственной переменной x , кроме тех, которые предусмотрены моделью, теперь уже не вводилось. Задача решалась в самом общем виде. Хотя результат при этом был получен в достаточно громоздкой форме, но он имел следующие преимущества: во-первых, все слагаемые, описывающие функцию $\phi_2(x, t)$ были выражены через элементарные функции, а во-вторых, полученное выражение для $\phi_2(x, t)$ не содержало интегральных представлений. Как и в работе [1], данное выражение было равномерно ограниченным по пространственной переменной.

Теперь с использованием уже полученного ранее выражения для $\phi_1(x, t)$ и нового выражения для функции $\phi_2(x, t)$ и при помощи метода вариации произвольных постоянных было решено уравнение, описывающее функцию $\phi_3(x, t)$ (точнее её пространственную часть, так как временная зависимость выражалась через гармонические функции). Из полученных результатов следует, что и в общем случае во всем диапазоне допустимых значений пространственной переменной функция $\phi_3(x, t)$ не является равномерно ограниченной по пространственной переменной x . В выражении для $\phi_3(x, t)$ присутствует функция, которая характеризуется неограниченным ростом при $x \rightarrow \infty$.

Таким образом, приближение, которое иногда называют приближением стоячих волн, поскольку решение строится путем сложения гармоник с фиксированными значениями частот при заданных значениях на концах интервала (пусть даже и бесконечного), и которое описывается соотношением (2), является асимптотическим и в модели ϕ^4 имеет достаточно ограниченную область применения.

Чтобы расширить область применимости этого приближения и получить более точное выражение для решения типа wobbling kink путем учета дополнительных слагаемых в формуле (2), потребуется выполнить описанную выше процедуру переопределения частоты колебаний, то есть фактически явно учесть зависимость частоты от амплитуды колебаний.

Литература

1. Segur, H. Wobbling kinks in ϕ^4 and sine-Gordon theory / H. Segur // Journal of Math. Phys. – 1983. – V. 24, № 6. – P. 1439–1443.
2. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
3. Кашеев, В.Н. Некоторые вопросы теории колеблющихся кинков / В.Н. Кашеев // Известия АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук. – 1987. – № 2. – С. 9–16.
4. Князев, М.А. Об асимптотическом разложении для колеблющегося кинка / М.А. Князев // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. – 1990. – № 3. – С. 118.

5. Barashenkov, I.V. Wobbling kink in φ^4 theory / I.V. Barashenkov, O.F. Oxtoby // Phys. Rev. E – 2009. – V. 80. – P. 026608.
 6. Oxtoby, O.F. Resonantly driven wobbling kinks / O.F. Oxtoby, I.V. Barashenkov // Phys. Rev. E – 2009. – V. 80. – P. 026609.
 7. Barashenkov, I. The continuing story of the wobbling kink / I. Barashenkov // arXiv: 1808.01758.

8. Gel'fand, I.M., Levitan, B.M. // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – 1955. – № 2. – P. 259.
 9. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 623 с.
 10. Князев, М.А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М.А. Князев. – Мн.: Тэхналогія, 2003. – 115 с.
 11. Федорюк, М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

УДК 537.29

АНАЛИЗ СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ Бокуть Л.В., Кадуков А.А.

Белорусский национальный технический университет
 Минск, Республика Беларусь

Известно, что все вещества являются смесью положительных протонов и отрицательных электронов. Мы говорим об отталкивании, когда рассматриваем взаимодействие одноименных частиц, например электрон-электрон, и о притяжении при взаимодействии разноименных – протон-электрон. Причём эти взаимодействия в некоторых случаях характеризуются большими по величине силами. Однако баланс между частицами настолько совершенен, что мы не ощущаем действия электрической силы.

Оценим величину электростатических сил, решив следующую задачу. Поместим две монеты по 1 копейке на противоположных концах доски, длина которой равна 10 м. Рассчитаем силы электростатического взаимодействия этих двух монет при условии, что заряды их ядер и электронов компенсируют себя лишь с точностью до 1 %.

Графически задачу можно представить следующим образом:

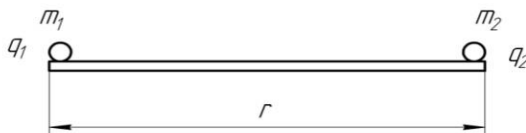


Рисунок 1 – Графическое представление задачи

Для расчета используем известную формулу электростатики, позволяющую количественно определить электростатическое взаимодействие покоящихся зарядов с высокой точностью, а именно, закон Кулона:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1)$$

где q_1, q_2 – точечные заряды, r – расстояние между ними, k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Из формулы видно, что электростатическая сила уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния.

Коэффициент k в СИ записывается следующим образом: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, где ϵ_0 – электрическая постоянная, численно равная

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{(\text{Н} \cdot \text{м}^2)} \quad \text{или} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Закон Кулона перестает выполняться точно, если заряды движутся, так как электрические силы зависят сложным образом от движения зарядов. В случае, когда зарядов больше двух, сила, действующая на заряд, есть векторная сумма кулоновских сил, действующих со стороны всех прочих зарядов.

Для решения поставленной задачи используем формулу:

$$F = N^2 \cdot Z^2 \cdot k \cdot 10^{-4} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2)$$

где N – число атомов, Z – заряд ядра атома.

Введение новых величин в формулу (1) обусловлено следующими факторами:

- множитель 10^{-4} связан с начальными условиями, согласно которым 1% заряда обоих тел, по каким либо причинам, не скомпенсирован;
 - заряд ядра атома Z , который можно определить, как порядковый номер в таблице Менделеева элемента, из которого изготовлена монета, для расчета силы между 2 атомами меди;
 - N – число атомов, содержащихся в монете.
- Для определения числа атомов N использовалось известное в химии соотношение:

$$\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}, \quad \text{отсюда} \quad N = \frac{m \cdot N_A}{M}, \quad (3)$$

где m – масса рассматриваемого объекта; M – молекулярная масса материала объекта; N_A – постоянная Авогадро.

Значения постоянных зададим с необходимой точностью:

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} = 8,987551787 \cdot 10^9 \frac{\text{М}^3 \cdot \text{КГ}}{\text{А}^2 \cdot \text{С}^4}, \quad \pi = 3,141592654,$$