λ_2, чем на λ_1 (рис.1). Зависимость от толщины проявляется при толщине слоя менее 200 нм для длины волны рубинового лазера, для Nd:YAG лазера эта толщина менее 400 нм.

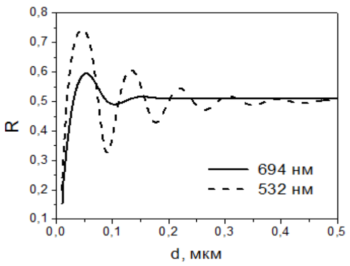

Рисунок 1 – Отражательная способность гетероструктуры $Ge/SiO_2/Si$ в зависимости от толщины плёнки Ge для указанных длин волн при нормальном падении излучения

При нормальном падении излучения отражательная способность не зависит от типа поляризации и $R=R_s=R_p$, при падении излучения под некоторым углом значения R_s выше, чем значения R_p (рис. 2). Увеличение угла падения приводит к уменьшению амплитуды изменения значений отражательной способности с уменьшением толщины слоя Ge.

Из результатов расчёта следует, что при варьировании толщины SiO_2 слоя при фиксированной толщине Ge (270 нм) отражательная способность системы практически не меняется.

Таким образом, в настоящей работе проведено моделирование отражательной способности системы $Ge/SiO_2/Si$ на длинах волн оптического диапазона 694 и 532 нм. Исследована зависимость отражательной способности от толщин слоёв при различных поляризациях излучения и углах падения. В частности, из результатов моделирования установлено, что изменения R с уменьшением толщины Ge слоя более выражены для волны с длиной 532 нм, чем на длине волны 694 нм, что, по всей видимости, связано с более низким показателем поглощения k на λ_1. Варьирование толщины прозрачного слоя SiO_2 (k=0) не влияет на отражательную способность системы.

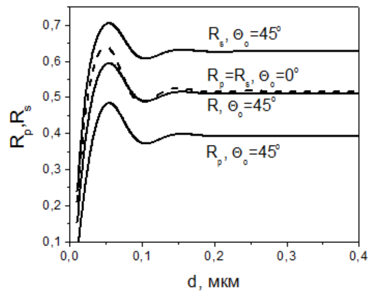

Рисунок 2 – Отражательная способность гетероструктуры $Ge/SiO_2/Si$ на длине волны 0.694 нм в зависимости от толщины слоя Ge при указанных поляризациях и углах падения

Проведенные исследования указывают, что при выборе режимов лазерной обработки систем $Ge/SiO_2/Si$ необходимо учитывать зависимости отражательной способности от толщины германиевого слоя.

Литература

1. The revolution in SiGe: impact on device electronics / D.I. Harame [et al.] // Appl. Surf. Sci., 2004. – V. 224. –P. 9–17.

2. All laser assisted heteroepitaxial growth of $Si_{0.8}Ge_{0.2}$ on Si(100): Pulsed laser deposition and laser induced melting solidification /R.Serna [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 1996. – Vol. 68. – P. 1781–1783.

3. Laser-induced melting and recrystallization of CVD grown polycrystalline Si/SiGe/Ge layers / P.I. Gaiduk [et al.] // Physica B. – 2009. – Vol. 404. – P. 4708–4711.

4. Гацкевич, Е.И. Отражательная способность тонкопленочного германия на кремниевых подложках / Е.И. Гацкевич, М.А. Альхимович // Приборостроение - 2017: материалы 10-й Международной научно-технической конференции, 1-3 ноября 2017 года, Минск, Республика Беларусь / Минск : БНТУ, 2017. – С. 359–360.

5. М.А. Альхимович, Е.И. Гацкевич. Отражательная способность аморфного германия на кварцевых подложках // Новые направления развития приборостроения. Материалы 11-й Международной научно-технической конференции молодых учёных и студентов. 18–20 апреля 2018. Минск, БНТУ, 2018. – С. 334.

6. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 856 с.

УДК 517.518.24

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

Гундина М.А., Абдыев А.Д.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

В данной работе строится набор функций, обладающих определенными свойствами, позволяющими применять условие Липшица соответствующего порядка.

Говорят, что функция $f:[a,b]\to R$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, если существует такое положительное число c, что выполняется следующее условие [1]:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le c\left|x_1-x_2\right|^{\alpha},\ \forall x_1,x_2\in[a,b].$$

Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, то существует число из этого интервала $c \in (a,b)$ такое, что выполняется соотношение:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Построим решение класса задач, основанных на применении условия Липшица.

Рассмотрим особенности применения условия Липшица на примере решения некоторых задач.

Задача 1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, т.е. выполняется условие

$$|f(x'') - f(x')| \le K|x'' - x'|^{\alpha}.$$

Показать, что при выполнении условия $\alpha > 1$ функция $f(x)$ будет постоянной.

Решение задачи 1: Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на некотором отрезке $[A, B]$.

Рассмотрим первый случай, когда концы отрезка удовлетворяют следующим условиям:

$$-\infty < A < B < +\infty.$$

Выберем произвольный частичный интервал $[a,b] \subseteq [A, B]$.

Тогда $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица при $\alpha > 1$ на $[a,b]$, т.е. для любых $x', x'' \in [a,b]$:

$$|f(x'') - f(x')| \le K|x'' - x'|^{\alpha}.$$

Пусть число отрезков разбиения равно $n \in N$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на конечное число равных интервалов с концами в точках:

$$a = x_0, x_1 = a + \frac{h}{n}, ..., x_j = a + \frac{h \cdot j}{n}, ..., x_n = b,$$

где длина всего отрезка $h = b - a$.

Докажем, что $f(a) = f(b)$, т.е. постоянство функции $f(x)$:

$$|f(b) - f(a)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le K \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}|^{\alpha} =$$
$$= K \frac{h^{\alpha}}{n^{\alpha-1}},$$

если перейдём к пределу при $n \to \infty$, получим, что правая часть стремиться к нулю (при $\alpha > 1$). А значит выполняется:

$$\forall a, b \in [A, B]: f(a) = f(b),$$

а из этого следует, что функция $f(x) \equiv const$.

Рассмотрим второй случай: более общий случай, когда $B = \infty$ (или $A = \infty$). Для определенности пусть отрезок имеет вид $[a, \infty)$. На нем также будет выполняться выше доказанное, т. к. этот отрезок можно представить в виде объединения отрезков следующим образом:

$$[a, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k].$$

Зафиксируем на произвольном отрезке $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ точку c. На отрезке $[a, c]$ функция является постоянной $f(x) \equiv c_1$, где $c_1 = \text{const}$, выполняется первый случай, который рассмотрен выше, на отрезке $[c, b]$ функция также является постоянной $f(x) \equiv c_2$, где $c_2 = \text{const}$, а по определению функции, как взаимно однозначного соответствия, в каждой точке принимает одно значение, значит в точке c константы совпадают. Если утверждение выполняется для $[a, \infty]$ и $[-\infty, b]$, значит выполняется и для всей числовой оси, т.к. для нее можно обобщить результаты, полученные для второго случая.

Задача 2. Построить пример функции ограниченной вариации, которая не удовлетворяет условию Липшица.

Решение задачи 2: Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x}, & 0 < x \le \dfrac{1}{2}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция является возрастающей на области определения, а значит монотонной, следовательно, функцией ограниченной вариации.

Докажем, что функция не удовлетворяет условию Липшица ни при каком значении $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Покажем, что для любого $A > 0$ существуют такие числа $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, для которых выполняется условие:

$$|f(x_2) - f(x_1)| > A|x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

Рассмотрим $x_1 = 0$.

Найдем предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|^{\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{Ln\, x}}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^{-\alpha}}{Ln\, x} = \lim_{x \to 0} \alpha x^{-\alpha} = \infty.$$

Это означает, что для любого положительного числа A можно подобрать такое x_2, что выполняется неравенство:

$$\frac{|f(x_2) - f(0)|}{|x_2 - 0|^{\alpha}} > A,$$

откуда следует, что выполняется условие:

$$|f(x_2) - f(0)| > A|x_2 - 0|^{\alpha}.$$

Из этого следует, что функция не удовлетворяет условию Липшица ни при каком значении $\alpha > 0$.

Задача 3. Верно ли, что если дифференцируемая функция, заданная на компакте, и производная которой ограничена, удовлетворяет условию Липшица порядка 1, то и модуль функции также удовлетворяет условию Липшица порядка 1.

Решение задачи 3: Поскольку функция дифференцируема, и производная ее ограничена, то выполняется:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|f'(c)\right|\left|x_2-x_1\right|\le \sup\left|f'(x)\right|\left|x_2-x_1\right|.$$

Рассмотрим первый случай, когда функции $f(x_1), f(x_2)$ одного знака. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\left\|f(x_1)\right|-\left|f(x_2)\right\| = \left|f'(c)\right|\left|x_2-x_1\right| \le K\left|x_2-x_1\right|.$$

Следовательно, условие Липшица выполняется.

Рассмотрим второй случай, когда $f(x_1), f(x_2)$ разных знаков, тогда можно взять из интервала (x_1, x_2) такую точку x_3, что значение функции будет равно нулю. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\left\|f(x_1)\right|-\left|f(x_2)\right\| =$$

$$\left|f(x_1)-f(x_3)\right|+\left|f(x_1)-f(x_3)\right|=\left|f'(c)\right|\cdot$$

$$(\left|x_1-x_3\right|+\left|x_2-x_3\right|)\le \sup\left|f'(x)\right|\left|x_2-x_1\right|.$$

Задача 4. Существует ли функция, для которой производная неограниченна хотя бы в одной точке, но она удовлетворяет условию Липшица порядка 1 .

Решение задачи 4: Рассмотрим функцию $f(x)$, график которой представлен на рисунке 1.

Такая функция в точках $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ldots$ принимает значение 0. А в серединах образованных интервалов принимает значение $\frac{1}{n}, n\in N$.

Производная данной функции в точках $\frac{1}{2}, \frac{5}{4},\ldots$ неограниченна, но условия Липшица выполняются. Достаточно доказать это на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$. На этом отрезке можем задать функцию аналитически так: $f(x)=2x$. А для этой функции условие Липшица порядка 1 выполняется.

Кроме того, данная функция имеет бесконечную вариацию:

$$Var=\left|f(\tfrac{1}{2})-f(0)\right|+\left|f(1)-f(\tfrac{1}{2})\right|+\ldots= .$$

$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\to\infty$$

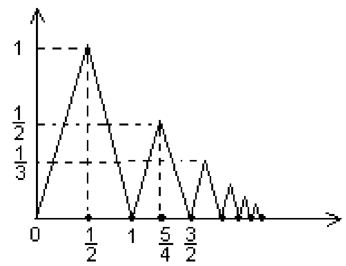

Рисунок 1 – График функции *f*(*x*)

Литература

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2003. – С. 108–111.

УДК 517.518.24

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТИ ДВУХ НЕУБЫВАЮЩИХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Гундина М.А., Абдыев А.Д.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Вопросу использования функции ограниченной вариации посвящено множество отечественных и зарубежных статей, монографий и учебно-методических пособий. В монографии [1] описываются основы теории метрических пространств, теория интегрирования дифференциальных форм на поверхностях, теория интеграла и особенности применения функции ограниченной вариации. Описана связь между множеством таких функций и монотонными функциями. В работе приведены основные принципы интегрирования для них, сформулированы теоремы о среднем значении с использованием понятия функции ограниченной вариации. В работе [2] в разделе функционального анализа выделяется отдельный подраздел, посвященный интегралу Стилтьеса, применению функции скачков, функции ограниченной вариа ции и интегрирующей функции ограниченной вариации для решения теоретических и прикладных задач. В [2] строго и системно изложена теория, связанная с введением понятия функции ограниченной вариации, приведены подробные пояснения и многочисленные примеры. Рассматривается взаимосвязь ограниченных функций и рассматриваемым классом функций. Формулируются свойства непрерывных функций, интегрируемых по