Из этого следует, что функция не удовлетворяет условию Липшица ни при каком значении $\alpha > 0$.

Задача 3. Верно ли, что если дифференцируемая функция, заданная на компакте, и производная которой ограничена, удовлетворяет условию Липшица порядка 1, то и модуль функции также удовлетворяет условию Липшица порядка 1.

Решение задачи 3: Поскольку функция дифференцируема, и производная ее ограничена, то выполняется:

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| = \left| f'(c) \right| \left| x_2 - x_1 \right| \le \sup \left| f'(x) \right| \left| x_2 - x_1 \right|.$$

Рассмотрим первый случай, когда функции $f(x_1), f(x_2)$ одного знака. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\left\| f(x_1) \right| - \left| f(x_2) \right\| = \left| f'(c) \right| \left| x_2 - x_1 \right| \le K \left| x_2 - x_1 \right|.$$

Следовательно, условие Липшица выполняется.

Рассмотрим второй случай, когда $f(x_1), f(x_2)$ разных знаков, тогда можно взять из интервала (x_1, x_2) такую точку x_3, что значение функции будет равно нулю. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\left\| f(x_1) \right| - \left| f(x_2) \right\| =$$

$$\left| f(x_1) - f(x_3) \right| + \left| f(x_1) - f(x_3) \right| = \left| f'(c) \right| \cdot$$

$$(\left| x_1 - x_3 \right| + \left| x_2 - x_3 \right|) \le \sup \left| f'(x) \right| \left| x_2 - x_1 \right|.$$

Задача 4. Существует ли функция, для которой производная неограниченна хотя бы в одной точке, но она удовлетворяет условию Липшица порядка 1 .

Решение задачи 4: Рассмотрим функцию $f(x)$, график которой представлен на рисунке 1.

Такая функция в точках $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots$ принимает значение 0. А в серединах образованных интервалов принимает значение $\frac{1}{n}, n \in N$.

Производная данной функции в точках $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$ неограниченна, но условия Липшица выполняются. Достаточно доказать это на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$. На этом отрезке можем задать функцию аналитически так: $f(x) = 2x$. А для этой функции условие Липшица порядка 1 выполняется.

Кроме того, данная функция имеет бесконечную вариацию:

$$Var = \left| f(\tfrac{1}{2}) - f(0) \right| + \left| f(1) - f(\tfrac{1}{2}) \right| + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \to \infty$$

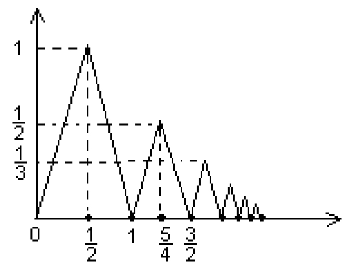

Рисунок 1 – График функции $f(x)$

Литература

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2003. – С. 108–111.

УДК 517.518.24

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТИ ДВУХ НЕУБЫВАЮЩИХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Гундина М.А., Абдыев А.Д.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Вопросу использования функции ограниченной вариации посвящено множество отечественных и зарубежных статей, монографий и учебно-методических пособий. В монографии [1] описываются основы теории метрических пространств, теория интегрирования дифференциальных форм на поверхностях, теория интеграла и особенности применения функции ограниченной вариации. Описана связь между множеством таких функций и монотонными функциями. В работе приведены основные принципы интегрирования для них, сформулированы теоремы о среднем значении с использованием понятия функции ограниченной вариации. В работе [2] в разделе функционального анализа выделяется отдельный подраздел, посвященный интегралу Стилтьеса, применению функции скачков, функции ограниченной вариа ции и интегрирующей функции ограниченной вариации для решения теоретических и прикладных задач. В [2] строго и системно изложена теория, связанная с введением понятия функции ограниченной вариации, приведены подробные пояснения и многочисленные примеры. Рассматривается взаимосвязь ограниченных функций и рассматриваемым классом функций. Формулируются свойства непрерывных функций, интегрируемых по функции ограниченной вариации. Подробно описана методика построения интеграла Стилтьеса, условия, накладываемые на функцию для его существования. В статье [3] подчеркивается, что в ситуации использования импульсных воздействий, производные функций, описывающих систему, могут иметь скачек. Тогда в этих случаях проводится анализ системы, учитывая, что функция не является непрерывной, а имеет ограниченную вариацию. В приведенной статье утверждается, что всякая функция ограниченной вариации имеет почти всюду конечную производную. В свою очередь, множество абсолютно непрерывных функций в пространстве функций ограниченной вариации образует линейное подпространство. В работе [4] описаны примеры специальных пространств, обзор топологий, теория операторов и общая спектральная теория. В данной монографии приведен набор упражнений по данной тематике, который позволяет детально проанализировать поведение данного класса функций. Особенности функции ограниченной вариации и строгие формулировки теорем о поведении такой функции, а также ее производной широко представлены в работах зарубежных авторов [5–8]. Так в работе [6] вводятся в рассмотрение и изучаются свойства класса подобных функций, описывается связь функций Липшица и функций ограниченной вариации. В данной работе класс функций описывается в рамках функционального подхода. Рассматривается задача об асимптотическом поведении функционала, который изучается в связи с теорией сходимости и фазовых переходов жидкостей [6]. Полученные в работе результаты проясняют природу описанного класса функций и его применение по отношению к неэвклидовым пространствам.

Известно, что монотонная функция, заданная на отрезке [a, b], является функцией ограниченной вариации [9].

Известно, что произвольную функцию f (x) из пространства функций ограниченной вариации на отрезке [a, b] всегда можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих функция:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

В качестве функции $f_1(x)$ можно выбрать функцию:

$$f_1(x) = V_a^x(f) = \sup_T \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|,$$

где T – это произвольное разбиение отрезка [a, b]:

$$T = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}.$$

Тогда вторая функция может быть найдена как разности $f_1(x)$ и исходной функции f(x).

Представим исходную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

в виде разности двух монотонных функций.

Поскольку выполняется условие: $f_1(x) = 0$, если $x \in [0, \frac{1}{2})$, $V_{0,5+0}^{1}(f) = 1$.

Пусть $f_1(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \in [0;0,5); \\ 1, \quad x = 0,5; \\ 2, \quad x \in (0,5;1]. \end{cases}$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \in [0;0,5); \\ 0, \quad x = 0,5; \\ 2, \quad x \in (0,5;1]. \end{cases}$$

Рассмотрим методику построения представления функции в виде разности двух монотонных функций на примере функции:

$$f(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi].$$

На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция монотонно возрастает и достигает наибольшего значения в точке $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Затем функция начинает убывать, производная этой функции меняет свой знак. Необходимо отразить график функции относительно оси симметрии – прямой $y = 1$. Это осуществляется следующим образом – меняем знак функции на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, тогда $y^*(x) = -\sin x$. Осуществляем сдвиг функции на значение $y(\frac{\pi}{2}) - y^*(\frac{\pi}{2})$. В данном примере это значение равно 2. Тогда функция примет вид:

$$f(x) = \begin{cases} y(x), & \text{если } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 2 - \sin x, & \text{если } x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

является монотонно возрастающей функцией. Теперь на отрезке $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ осуществим эту же последовательность действий. Меняем знак функции $2 - \sin x$ на $-2 + \sin x$ и сдвигаем функцию вверх на величину $y^*(\frac{3\pi}{2}) - y^{**}(\frac{3\pi}{2})$.

$y^*(\frac{3\pi}{2}) = 3$, $y^{**}(\frac{3\pi}{2}) = -3$, тогда сдвиг равен 6. Тогда $y^{**} = 6 + (-2 + \sin x) = 4 + \sin x$.

Следовательно, функция $f_1(x)$:

$$f_1(x)=\begin{cases}\sin x, \text{если } x\in[0;\frac{\pi}{2}]\\ 2-\sin x, x\in(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]\\ 4+\sin x, x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi].\end{cases}$$

Тогда функция $f_2(x)$ будет найдена вычитанием из функции $f_1(x)$ исходной функции f (x):

$$f_2(x)=\begin{cases}0, \text{если } x\in[0;\frac{\pi}{2}];\\ 2-2\sin x, x\in(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]\\ 4, x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi].\end{cases}.$$

Пусть исходной функцией является следующая функция: $f(x)=2\cos x, x\in[0,2\pi]$.

Поскольку необходимо функцию представить в виде разности двух неубывающих функций, то на отрезке $[0,\pi]$ необходимо осуществит действие описанного выше алгоритма, поменять знак функции $-2\cos x$ и осуществить сдвиг графика функции на величину $2\cos 0-(-2\cos(0))=4$.

Тогда $y^*(x)=4-2\cos x$ на отрезке $[0,\pi]$. На оставшемся отрезке $[\pi,2\pi]$

$$y^{**}(x)=4-2\cos(\pi)-(-4+2\cos(\pi))+(-4+ \\ +2\cos x)=8+2\cos x.$$

Тогда исходная функция может быть представлена в виде разности следующих функций:

$$f_1(x)=\begin{cases}4-2\cos x, & \text{если } x\in[0,\pi],\\ 8+2\cos x, & \text{если } x\in(\pi,2\pi].\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}4-4\cos x, & \text{если } x\in[0,\pi],\\ 8, & \text{если } x\in(\pi,2\pi].\end{cases}$$

В работе описана методика разложения функции в виде разности двух монотонных, неубывающих функций, описаны примеры ее применения.

Литература

1.Рудин, У. Основы математического анализа / У. Рудин. – СПб.: Лань, 2004. –320 с.

2.Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М. : Наука, 2008. – Т. 5. – 624 с.

3.Чмелева, Г.А. Функции ограниченной вариации / Г.А. Чмелева, В.В. Кокорева // Естественнонаучные решения. – 2014. – № 1. – С. 62–64.

4.Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 898 с.

5.Alberti, G. Rank-one properties for derivatives of functions of bounded variation / G. Alberti // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A., 1993. – № 123. – P. 239–274.

6.Ambrosio, L. Metric space valued functions with bounded variation / L. Ambrosio // Ann. Scuola Nrm. Sup. Pisa Cl. Sci., 1990. – Vol. 17., № 3. – P. 291–322.

7.Volpert, A.I. Spaces BV and quasi-linear equations / A.I. Volpert // Math USSR Sp., 1967. – Vol. 2, № 2. – P. 225–267.

8.Лебег, А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / Пер. с франц. – М. – Л.: ОНТИ, 1934. – 324 с.

9. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – С.-Пб.: Лань, 2008. – 560 с.

УДК 37

СПОСОБЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТА

Кондратьева Н.А., Канашевич Т.Н., Гундина М.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Под эффективностью можно понимать способность к выполнению успешной учебной деятельности в оптимальные сроки.

Поскольку эффективность деятельности студента предусматривает минимизацию временных затрат, возникает вопрос, как в описанный критерий может включаться временной параметр.

В течение семестра, по причине выпадения занятий на праздничные дни, либо занятий, отводимых на проведение текущего промежуточного контроля, наблюдается снижение фактических часов, которые планируются на изучение дисциплины. Также снижение фактических часов учебной деятельности обучающегося может быть связано с болезнью и пропусками занятий.

Способ 1.

Пусть *временной функционал качества усвоения* материала *T* определяется следующим образом:

$$T=\frac{t_ф}{t_{пл}},$$

где $t_{пл}$ – количество часов, которые отводятся на изучение данной дисциплины по плану; $t_ф$ – количество часов, которые фактически посетил студент за семестр.

Случай *T* = 1 соответствует ситуации полного совпадения фактической и плановой нагрузки по этой дисциплине (может быть в случае отсутствия