МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

В. И. Ерошевская
Е. Л. Ерошевская
Л. П. Минченкова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методическое пособие

Часть 1

Минск
БНТУ
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

В. И. Ерошевская
Е. Л. Ерошевская
Л. П. Минченкова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методическое пособие

В 2 частях

Часть 1

Минск
БНТУ
2013

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.1я7
Е78

Р е ц е н з е н т ы:
М. В. Дубатовская, В. В. Павлов

Ерошевская, В. И.
Е78 Математическая статистика : методическое пособие : в 2 ч. / В. И. Ерошевская, Е. Л. Ерошевская, Л. П. Минченкова. – Минск : БНТУ, 2013– . – Ч. 1. – 2013. – 49 с.
ISBN 978-985-550-111-5 (Ч. 1).

Методическое пособие предназначено для помощи студентам в их самостоятельной работе при изучении темы «Математическая статистика» (часть 1).

По разделу «Математическая статистика» лекции не запланированы, поэтому в пособии рассмотрены теоретические вопросы, которые иллюстрируются примерами. К каждому практическому занятию предложены задачи для аудиторной и внеаудиторной работы, к которым даны ответы. В пособие включены теоретические вопросы для подготовки к зачету, а также таблицы значений функций, необходимые для решения задач.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-111-5 (Ч. 1)
ISBN 978-985-550-112-2

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ

1. Предмет и задачи математической статистики.
2. Статистическая совокупность.
3. Генеральная совокупность. Выборка.
4. Статистическое распределение выборки.
5. Вариационные ряды, их графическое представление.
6. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
7. Числовые характеристики выборки.
8. Оценки параметров распределения.
9. Точечные оценки параметров распределения и их свойства.
10. Точечные оценки для математического ожидания и дисперсии. Метод произведений для нахождения точечных оценок.
11. Интервальные оценки параметров. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.
12. Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известном среднем квадратическом отклонении.
13. Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестном среднем квадратическом отклонении.
14. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины.
15. Понятие о статистических гипотезах.
16. Уровень значимости и мощность критерия.
17. Критерий согласия Пирсона.
18. Проверка гипотезы о распределении случайной величины по нормальному закону.
19. Проверка гипотезы о распределении случайной величины по равномерному закону.
20. Проверка гипотезы о распределении непрерывной случайной величины по показательному закону.
21. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по биномиальному закону распределения.

22. Проверка гипотезы о распределении случайной величины по закону Пуассона.

23. Проверка гипотезы о значении генеральной средней нормально распределенной генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии.

24. Проверка гипотезы о значении генеральной средней нормально распределенной генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии.

25. Проверка гипотезы о равенстве двух средних нормально распределенных генеральных совокупностей с известными дисперсиями.

26. Проверка гипотезы о дисперсиях двух нормально распределенных совокупностей.

27. Проверка гипотезы о равенстве генеральных средних двух нормально распределенных совокупностей при неизвестных равных генеральных дисперсиях.

28. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

29. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства. Коэффициент детерминации.

30. Линейная регрессия. Определение параметров линейной регрессии.

Занятие 1

ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ. ВЫБОРКА. ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Краткие теоретические сведения

Статистической совокупностью называют множество предметов или явлений, объединенных каким-либо общим признаком или свойством качественного или количественного характера.

Статистическая совокупность называется ***генеральной***, если исследованию подвергаются все ее элементы.

Выборочной совокупностью, или ***выборкой***, называется совокупность объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объемом совокупности называется число ее объектов. ***Объем выборки*** – количество объектов, входящих в выборку. Например, если из 10 000 изготовленных деталей для обследования отобрано 100, то объем генеральной совокупности $N = 10\,000$, объем выборки $n = 100$.

Статистические данные представляют собой набор значений некоторой случайной величины X, после обработки которых строятся функции, называемые статистиками, характеризующие случайную величину.

Рассмотрим выборку, извлеченную из генеральной совокупности, в которой значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, ... , x_k наблюдалось n_k раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, где n – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называются ***вариантами***.

Упорядочение, расположение вариант в порядке возрастания (убывания) есть ранжирование вариант ряда.

Числа n_i называют ***частотами***, а их отношение к объему выборки – ***относительными частотами*** и обозначают $W_i = \frac{n_i}{n}$.

Статистическим распределением выборки называется соответствие между вариантами и их частотами (или относительными частотами).

Статистическое распределение может быть задано, например, с помощью таблицы, в которой указаны варианты и соответствующие им частоты. Статистическое распределение можно задавать также указанием последовательности некоторых интервалов и соответствующих им частот (сумма частот, попавших в этот интервал).

Вариационным рядом называется ранжированный в порядке возрастания (или убывания) ряд вариант с соответствующими им частотами или относительными частотами.

Вариационный ряд называется ***дискретным***, если любые его варианты отличаются на постоянную величину (обычно целое число).

Общий вид дискретного вариационного ряда представлен в табл. 1.1, где $i = \overline{1,k}$.

Таблица 1.1

Значение признака (варианты) x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
Частоты n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

Вариационный ряд называется ***интервальным*** (непрерывным), если варианты могут отличаться одна от другой на сколь угодно малую величину.

Общий вид интервального вариационного ряда представлен в табл. 1.2, где $i = \overline{1,l}$.

Таблица 1.2

Значение признака (варианты) x_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\dots$	$x_{i-1} - x_i$
Частоты n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_i

Под ***частотой интервала*** понимают число членов совокупности, варианта которых лежит в данном интервале.

Число интервалов l следует брать не очень большим, чтобы после группировки ряд не был громоздким, и не очень малым, чтобы не потерять особенности распределения признака.

Рекомендуемое число интервалов можно найти по формуле Стерджесса:

$$l = 1 + 3{,}322 \cdot \lg n,$$

где n – объем выборки,
а величину интервала (ширину интервала) – по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l},$$

где $x_{\max} - x_{\min}$ – разность между наибольшим и наименьшим значениями признака, которая называется ***размахом выборки***.

Если окажется, что h – дробное число, то за длину интервала следует брать либо ближайшее целое число, либо ближайшую простую дробь.

При изучении вариационных рядов используется также понятие ***накопленной частоты*** $n_i^{\text{нак}}$, которая показывает, сколько наблюдалось вариант со значением признака, меньшим x.

Отношение накопленной частоты к общему числу наблюдений называют ***накопленной частостью***:

$$W_i^{\text{нак}} = \frac{n_i^{\text{нак}}}{n}.$$

Накопленные частоты для дискретного ряда находятся по формуле

$$n_i^{\text{нак}} = n_i + n_{i-1} + \ldots + n_1 .$$

В случае интервального вариационного ряда накопленные частоты для каждого интервала находятся последовательным суммированием частот всех предшествующих интервалов, включая данный.

Для графического изображения вариационных рядов можно использовать полигон, гистограмму, кумулятивную кривую, огиву.

Полигон используют для изображения дискретного ряда. Для его построения в прямоугольной системе координат наносят точки с координатами (x_i, n_i) или (x_i, W_i). Ломаная, соединяющая отмеченные точки, называется ***полигоном распределения*** частот или частостей.

Гистограмма служит только для изображения интервальных вариационных рядов. Если интервалы имеют одинаковую величину, то гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значений признака, и высотами, равными частотам (частостям) интервалов. Соединив середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, получим полигон того же распределения.

Кумулятивная кривая – это кривая накопленных частот (частостей).

Для дискретного вариационного ряда ***кумулята*** – ломаная, соединяющая точки (x_i, $n_i^{\text{нак}}$) или (x_i, $W_i^{\text{нак}}$), $i = \overline{1, k}$.

Для интервального ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината – накопленной частоте (частости), равной нулю. Абсциссами других точек этой ломаной являются верхние границы интервалов, а ординатами – накопленные частоты (частости) соответствующих интервалов.

Огива строится аналогично кумуляте. На оси абсцисс наносятся точки, соответствующие накопленным частотам (частостям), а на оси ординат – значения варианты.

Пример 1.1.

В результате тестирования группа студентов из 25 человек набрала баллы: 4, 0, 3, 4, 1, 0, 3, 1, 0, 1, 0, 0, 3, 1, 0, 1, 1, 3, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3. Построить дискретный вариационный ряд. Построить полигон распределения частот и относительных частот, кумуляту и огиву статистического распределения.

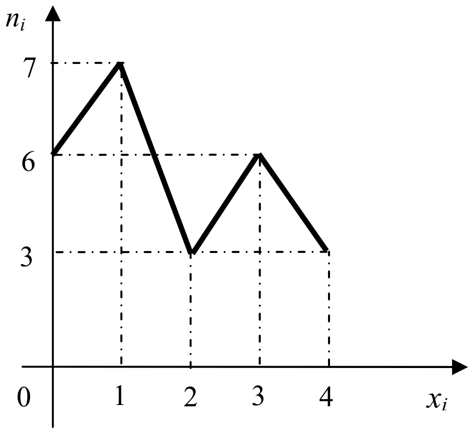
Решение. Проранжируем исходные данные, подсчитаем частоту вариант: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4 (табл. 1.3).

Таблица 1.3

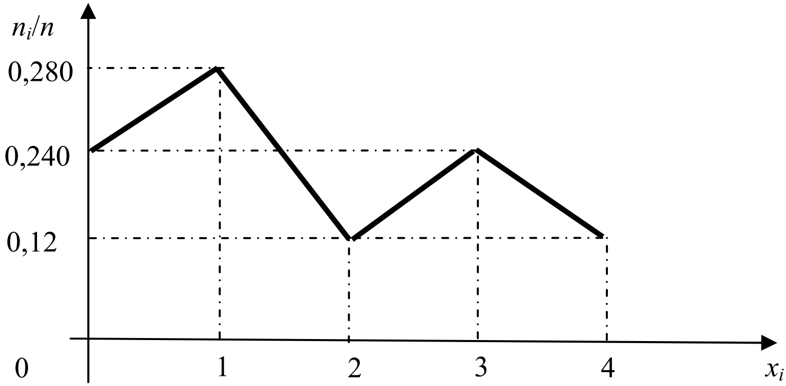
Балл x_i	0	1	2	3	4
Число студентов n_i	6	7	3	6	3

$$\sum_{i=1}^{5} n_i = 25.$$

Построим полигон частот.



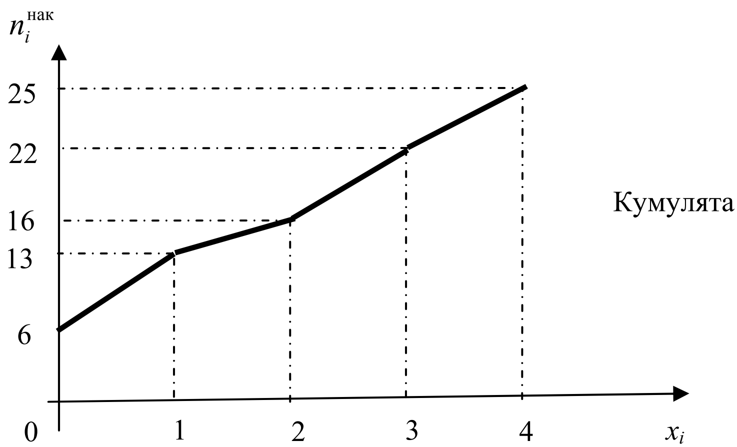
Полигон относительных частот будет иметь следующий вид.

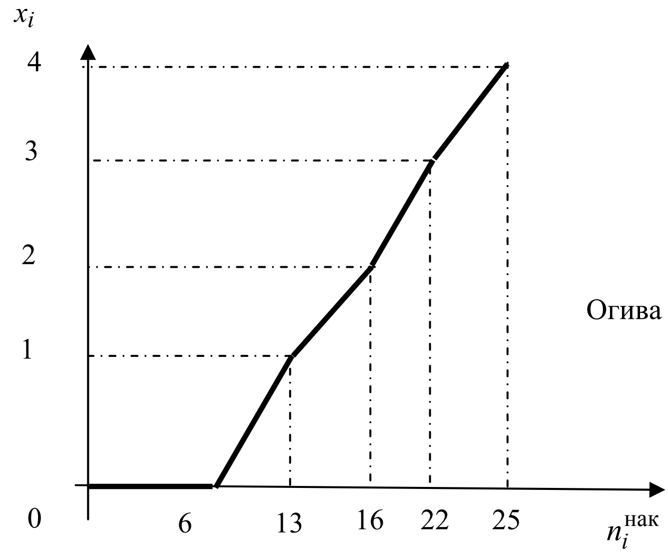


Вычислим накопленные частоты и частости (табл. 1.4).

Таблица 1.4

x_i	0	1	2	3	4
n_i	6	7	3	6	3
$n_i^{\text{нак}}$	6	13	16	22	25
$W_i^{\text{нак}}$	6/25	13/25	16/25	22/25	1





Пример 1.2.

Результаты измерения производительности труда 100 рабочих имеют следующий вид:
90 75 85 84 83 84 76 76 74 81 78 83 78 82 81 75 92 76 95 92 73 85 89 78 90 75 83 73 91 74 79 83 81 88 76 83 79 81 80 77 76 79 81 79 76 83 84 77 86 83 77 82 85 81 84 85 83 82 83 78 84 81 82 89 81 81 78 74 76 79 84 74 80 71 83 88 75 86 78 86 76 80 87 83 87 73 84 82 85 85 79 73 75 84 79 81 86 84 82 90.

Построить интервальный вариационный ряд. Построить гистограмму (полигон) частот. Построить кумуляту и огиву.

Решение. В случае, когда число вариант x_i достаточно велико (>30), составляют интервальный вариационный ряд. Наибольшим значением случайной величины является 95, а наименьшим – 71, т. е. $x_{\max} = 95$, $x_{\min} = 71$.

Для определения величины интервала используем формулу Стерджесса:

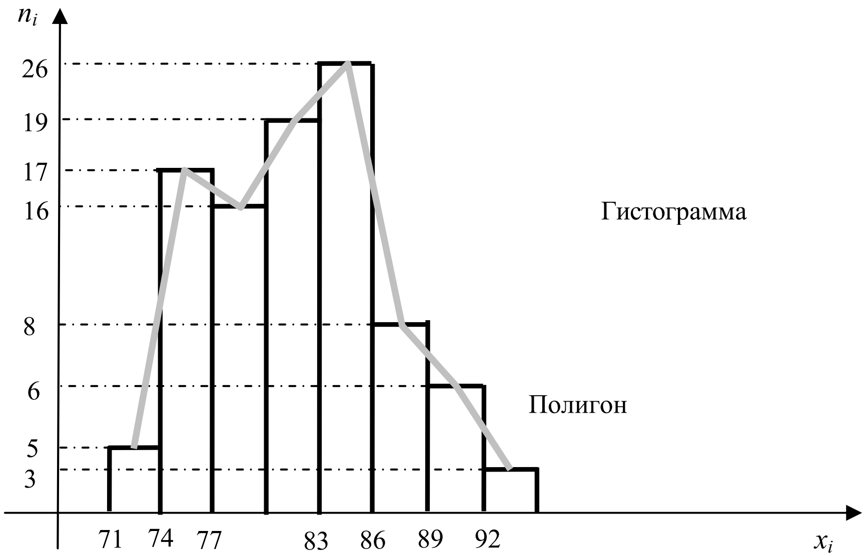
$$h = \frac{95 - 71}{1 + 3{,}322\lg 100} = 3{,}14.$$

Возьмем за ширину интервала h = 3.

Интервальный ряд представлен в табл. 1.5.

Таблица 1.5

$[x_{i-1} - x_i)$	[71–74)	[74–77)	[77–80)	[80–83)	[83–86)	[86–89)	[89–92)	[92–95]
n_i	5	17	16	19	26	8	6	3



Гистограмма относительных частот является аналогом дифференциальной функции случайной величины.

Найдем накопленные частоты $n_i^{\text{нак}}$ для каждого из интервалов данного интервального вариационного ряда (табл. 1.6).

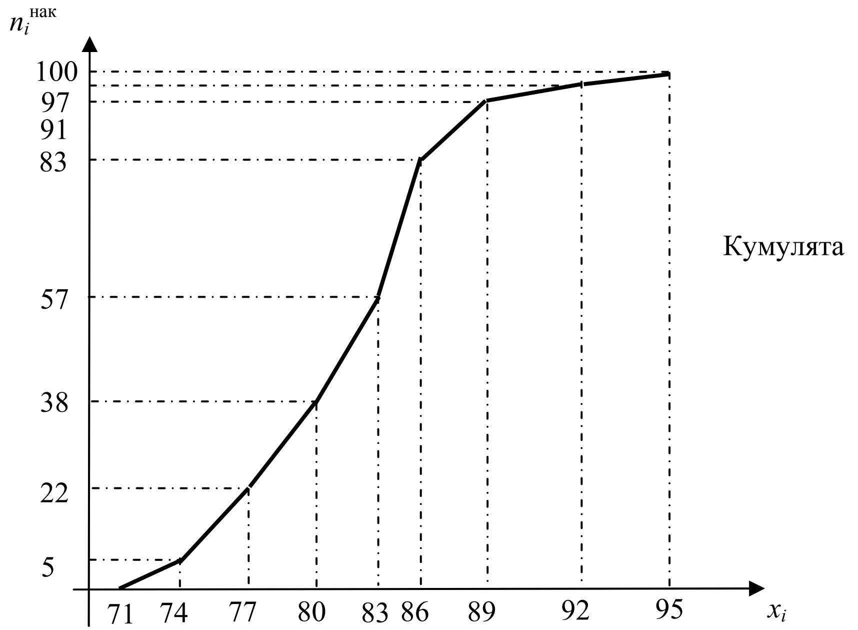
Таблица 1.6

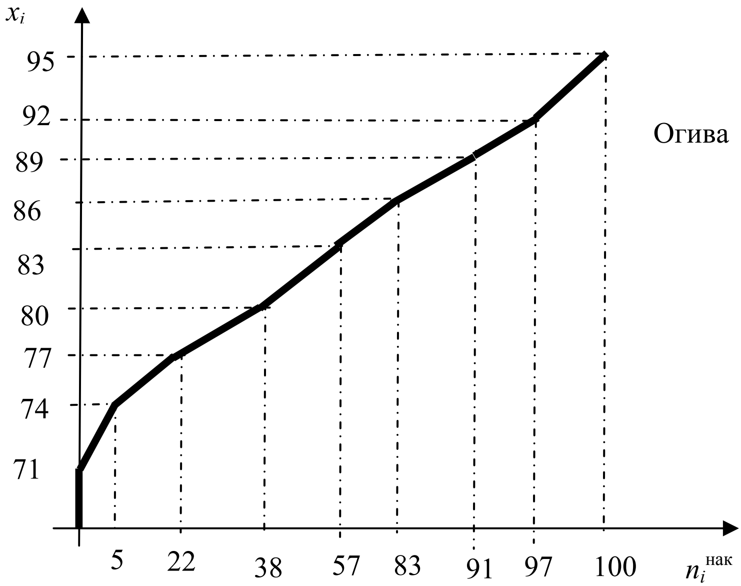
$n_i^{\text{нак}}$	5	22	38	57	83	91	97	100

Кумулятивный ряд представлен в табл. 1.7.

Таблица 1.7

$[x_{i-1} - x_i)$	[71–74)	[74–77)	[77–80)	[80–83)	[83–86)	[86–89)	[89–92)	[92–95]
$n_i^{\text{нак}}$	5	22	38	57	83	91	97	100





Задачи для аудиторной работы

Задача 1.1.

Наблюдая за толщиной (в мм) 50 слюдяных прокладок, получили следующие результаты:

0,021 0,039 0,030 0,042 0,031 0,028 0,030 0,024 0,033 0,040
0,031 0,027 0,031 0,031 0,045 0,027 0,034 0,028 0,027 0,046
0,033 0,030 0,043 0,030 0,028 0,051 0,036 0,031 0,034 0,031
0,030 0,039 0,031 0,042 0,034 0,036 0,030 0,031 0,033 0,031
0,030 0,048 0,030 0,033 0,028 0,031 0,036 0,034 0,042 0,037.

Построить интервальный вариационный ряд с равными интервалами (первый интервал 0,020–0,024; второй – 0,024–0,028 и т. д.). Начертить гистограмму частот. Построить кумулятивный ряд.

Задача 1.2.

В течение часа АТС регистрировалось число неправильных соединений в минуту: 1, 2 ,1, 1, 0, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 2, 2, 2, 2, 0, 1, 4, 3, 3, 1, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 4, 0, 2, 2, 2, 1, 3, 1, 3, 2.

Построить:

а) дискретный вариационный ряд;

б) полигон распределения частот;

в) кумуляту и огиву статистического распределения.

Задача 1.3.

По данной выборке

3,86 4,06 3,67 3,97 3,76 3,61 3,96 4,04 3,84 3,94 3,99 3,69 3,76
3,71 3,94 3,82 4,16 3,76 4,00 3,46 3,71 3,81 4,02 4,17 3,72 4,09
3,78 4,02 3,73 3,52 4,03 4,14 3,72 4,33 3,82 4,03 3,62 3,91 3,98
4,08 3,89 3,57 3,88 3,92 3,87 4,01 4,18 4,07 3,93 4,26

построить:

а) интервальный вариационный ряд;

б) гистограмму частот;

в) кумуляту и огиву.

Задачи для внеаудиторной работы

Задача 1.4.

В результате тестирования 60 студентов набрали баллы:

20 19 22 24 21 18 23 17 20 16 15 23 21 24 21 18 23 21 19 20 24
21 20 18 17 22 20 16 22 18 20 17 21 17 19 20 20 21 18 22 23 21
25 22 20 19 21 24 23 21 19 22 21 19 20 23 22 25 21 21.

Построить:

а) дискретный вариационный ряд;

б) полигон распределения относительных частот;

в) огиву и кумуляту.

Задача 1.5.

По данной выборке

111 85 85 91 101 109 86 102 111 98 105 85 112 109 115 99 105
111 94 107 99 107 125 89 104 113 105 88 103 97 115 109 89 108
107 97 106 107 96 108 109 139 116 117 103 127 119 118 125 105

116 117 107 105 119 107 119 111 112 129 113 106 104 106 98 105 106 139 108 109 93 107 117 107 118 99 108 108 109 109 128 128 127 121 118 122 116 124 125 114 126 113 109 96 103 145 104 109 116 109 117 106 101 113 87 123 108 93 119 98 108 101 131 141 143 112 98

построить:

а) интервальный вариационный ряд;

б) гистограмму частот;

в) кумулятивный ряд.

Занятие 2

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБОРКИ

Краткие теоретические сведения

Эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ называется относительная частота того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x, т. е.

$$F_n(x) = W(X < x) = W_x^{\text{нак}}.$$

Для данного x эмпирическая функция распределения представляет накопленную частость

$$W_x^{\text{нак}} = \frac{n_x^{\text{нак}}}{n}.$$

Эмпирическая функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значение эмпирической функции принадлежит отрезку [0; 1].

2. Эмпирическая функция является неубывающей.

3. Если x_1 – наименьшее значение варианты, а x_k – наибольшее, то $F_n(x) = 0$ при $x \le x_1$ и $F_n(x) = 1$ при $x > x_k$.

В отличие от эмпирической функции распределения выборки $F_n(x)$ интегральную функцию $F(x)$ распределения генеральной совокупности называют ***теоретической функцией распределения***. Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F_n(x)$ определяет относительную частоту этого же события.

При больших n значения $F_n(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого. Следовательно, $F_n(x)$ может служить для оценки $F(x)$.

Пример 2.1. По данному распределению выборки (табл. 2.1) найти эмпирическую функцию распределения.

Таблица 2.1

x_i	1	2	3	4	5
n_i	4	6	15	25	50

Решение. Определяем объем выборки: $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 100$.

Определяем относительные частоты вариант (табл. 2.2):

$$W_i = \frac{n_i}{n}.$$

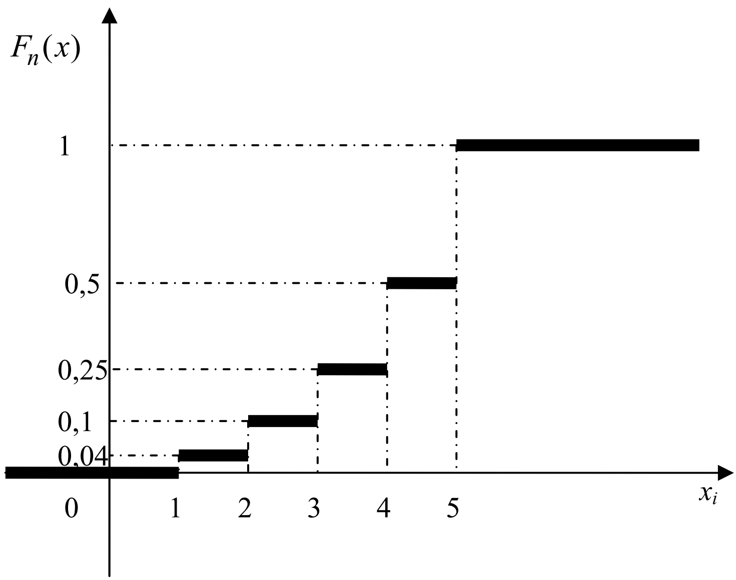
Таблица 2.2

x_i	1	2	3	4	5
W_i	0,04	0,06	0,15	0,25	0,5

Так как значение $F_n(x)$ есть сумма относительных частот вариант x_i, попадающих в интервал $(-\infty; x)$, то запишем эмпирическую функцию распределения:

$$F_n(x) = W(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1 \\ 0,04 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0,1 & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 0,25 & \text{при } 3 < x \le 4; \\ 0,5 & \text{при } 4 < x \le 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

График примет вид:



В случае дискретного вариационного ряда $F_n(x)$ представляет собой разрывную ступенчатую функцию.

Для интервального вариационного ряда имеем лишь значения функции $F_n(x)$ на концах интервала, поэтому для графического изображения этой функции целесообразно ее доопределить, соединив точки графика, соответствующие концам интервалов, отрезками прямой. В результате полученная ломаная совпадает с кумулятой.

Для описания выборки применяются числовые характеристики:

– характеристики положения (средняя арифметическая $\overline{x}$, мода Mo(X), медиана Me(X));

– характеристики рассеяния (выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение);

– характеристики меры скошенности (коэффициент асимметрии) и эксцесс распределения.

Средней арифметической $\boldsymbol{\overline{x}}$ ($\overline{x}_{\text{в}}$ – выборочной средней) ***дискретного вариационного ряда*** называется отношение суммы произведений вариант на соответствующие частоты к объему выборки:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}.$$

Средняя арифметическая $\boldsymbol{\overline{x}}$ ***для интервального вариационного ряда*** находится по формуле

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i}{n},$$

где x_i^* – середина соответствующего интервала.

Модой Mo(X) дискретного вариационного ряда называется варианта, которой соответствует наибольшая частота.

Медианой Me(X) дискретного вариационного ряда называется варианта, делящая ряд на две равные части.

Если дискретный вариационный ряд имеет $2m$ членов: $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m}$, то

$$\mathrm{Me}(X) = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

Если дискретный вариационный ряд имеет $2m - 1$ членов: $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-1}$, то

$$\mathrm{Me}(X) = x_m.$$

Для интервальных вариационных рядов с равными интервалами применяют следующие формулы:

а) медианы

$$\mathrm{Me}(X) = x_{\mathrm{Me}} + h\frac{0,5n - S_{\mathrm{Me}-1}}{n_{\mathrm{Me}}},$$

где x_{Me} – начало медианного интервала, т. е. интервала $\left(x_l, x_{l+1}\right)$, где $l = \overline{1, k-1}$, номер которого определяется на основании неравенства

$$\sum_{i=1}^{l} n_i \le \frac{n}{2} < \sum_{i=1}^{l+1} n_i .$$

В случае выполнения равенства номер равен l, в противном случае – $l + 1$;

h – длина частичного интервала;

n – объем совокупности;

$S_{\mathrm{Me}-1}$ – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me} – частота медианного интервала;

б) моды

$$\mathrm{Mo}(X) = x_{\mathrm{Mo}} + h\frac{n_{\mathrm{Mo}} - n_{\mathrm{Mo}-1}}{(n_{\mathrm{Mo}} - n_{\mathrm{Mo}-1}) + (n_{\mathrm{Mo}} - n_{\mathrm{Mo}+1})},$$

где x_{Mo} – начало модального интервала, т. е. интервала, которому соответствует наибольшая частота;

n_{Mo} – частота модального интервала;

$n_{\mathrm{Mo}-1}$ – частота предмодального интервала;

$n_{\mathrm{Mo}+1}$ – частота послемодального интервала.

Выборочная дисперсия вариационного ряда – средняя арифметическая квадратов отклонений вариант от их средней арифметической:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2.$$

Выборочная дисперсия равна разности между средним значением квадрата вариант и квадратом средней арифметической:

$$D_{\text{в}} = \overline{X}^2 - (\overline{x})^2,$$

где $\overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i$.

Выборочным средним квадратическим отклонением называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}.$$

Коэффициентом асимметрии называется число

$$\overline{A} = \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma_{\text{в}}^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^3 n_i}{n\sigma_{\text{в}}^3}.$$

Эксцессом называется число

$$\overline{E} = \frac{\overline{\mu}_4}{\sigma_в^4} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^4 n_i}{n\sigma_в^4} - 3.$$

Задачи для аудиторной работы

Задача 2.1.

Построить эмпирическую функцию распределения по данным табл. 1.3 и вычислить числовые характеристики выборки.

Задача 2.2.

По данной выборке
12 6 8 6 10 11 7 10 12 8 7 7 6 7 8 6 11 9 11 9 10 11 9 10 7 8 8 8 11 9 8 7 5 9 7 7 14 11 9 8 7 11 15 6 4 7 5 5 10 7 7 5 8 10 10 15 10 10 13 12

построить:

а) интервальный вариационный ряд;

б) эмпирическую функцию распределения.

Найти числовые характеристики.

Задачи для внеаудиторной работы

Задача 2.3.

Построить эмпирическую функцию распределения по данным табл. 1.5 и вычислить числовые характеристики выборки.

Задача 2.4.

Вычислить по данным выборки числовые характеристики эмпирического распределения:
19 3 4 17 27 44 61 59 34 15 1 6 13 1 39 55 77 83 103 75 50 9 9 12 4 39 27 35 26 18 5 12 9 38 54 7 19 70 96 45 51 38 13 5 24 22 94 1 17 2 23 29 2 71 28 6 19 12 14 4 30 36 21 89 52 31 6 18 10 47 63 25 8 11 8 32 25 43 6 18 41 11 31 87 76 119 79.

Занятие 3

ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Краткие теоретические сведения

Пусть известен закон распределения для СВ X (нормальный, Пуассона, показательный и т. д.), зависящий от одного или нескольких параметров. Требуется по выборке, полученной в результате n экспериментов, оценить (найти приближенно) неизвестный параметр распределения. Оценка, определяемая одним числом, называется ***точечной***.

Оценкой неизвестного параметра распределения называют функцию от наблюдаемых значений случайной величины.

Оцениваемый параметр обозначим через θ, а его оценку – $\overline{\theta}$: $\overline{\theta} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$\overline{\theta}$ является случайной величиной.

Точечная оценка должна удовлетворять определенным требованиям:

– быть несмещенной, т. е. $M(\overline{\theta}) = \theta$;

– быть эффективной, т. е. если неизвестный параметр имеет несколько оценок, вычисленных по выборкам одного и того же объема n, то нужно выбрать ту, которая имеет наименьшую дисперсию;

– быть состоятельной, т. е. при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon) = 1 \;\; \forall \varepsilon > 0$.

Выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной для математического ожидания генеральной совокупности.

Несмещенной и состоятельной оценкой для дисперсии генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия:

$$D_{\text{и}} = S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}; \qquad D_{\text{и}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_{\text{в}} \right)^2 \cdot n_i}{n-1}.$$

Исправленным средним квадратическим отклонением является

$$S = \sqrt{D_{\text{и}}}; \qquad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}}.$$

Для вычисления $\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$ используют наиболее распространенный метод – метод произведений.

Целесообразно составить таблицу:

1) в первый столбец записывают x_i, располагая в порядке возрастания;

2) во второй столбец записывают число экспериментов, в которых получено соответствующее значение x_i и сумму $\sum_{i=1}^{k} n_i$;

3) в третий столбец записывают условные варианты $U_i = \frac{x_i - b}{h}$, где h – шаг разбиения, b – «ложный нуль».

В качестве b берется варианта, стоящая посередине вариационного ряда, или варианта, имеющая максимальную частоту. В клетках над нулем пишут последовательно –1, –2, –3, …, а под нулем пишут 1, 2, 3, …;

4) находят $n_i \cdot U_i$ и сумму $\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot U_i$ и записывают в четвертый столбец;

5) в пятый столбец записывают $n_i \cdot U_i^2$ и сумму $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot U_i^2$;

6) в шестой столбец записывают $n_i(U_i+1)^2$ и сумму $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(U_i+1)^2$.

Если сумма $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(U_i+1)^2$ будет равна сумме $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i + 2\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot U_i + {}$ $+\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot U_i^2$, то вычисления произведены правильно.

Определяем условные начальные моменты 1-го и 2-го порядков:

$$\overline{\nu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} U_i \cdot n_i\,; \qquad \overline{\nu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} U_i^2 \cdot n_i.$$

Находим выборочное среднее $\overline{x}_\text{в}$ и выборочную дисперсию $D_\text{в}$:

$$\overline{x}_\text{в} = \overline{\nu}_1 \cdot h + b\,; \qquad D_\text{в} = \left(\overline{\nu}_2 - \left(\overline{\nu}_1\right)^2\right) \cdot h^2.$$

Пример 3.1. Методом произведений вычислить выборочную среднюю и выборочную дисперсию по данным выборки (табл. 3.1).

Таблица 3.1

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

Решение. В качестве «ложного нуля» возьмем варианту 16. Следовательно, $b = 16$, $U_i = \dfrac{x_i - 16}{2}$.

Результаты вычислений сведем в табл. 3.2.

Таблица 3.2

x_i	n_i	U_i	$n_i \cdot U_i$	$n_i \cdot U_i^2$	$n_i(U_i+1)^2$
12	5	–2	–10	20	5
14	15	–1	–15	15	0
$\boxed{16}$	50	0	0	0	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
$\sum$	100	–	23	127	273

Контроль: 273 = 100 + 46 + 127.

Равенство выполнено, следовательно, таблица заполнена верно.

Вычислим условные начальные моменты:

$$\overline{\nu}_1 = \frac{1}{100} \cdot 23 = 0,23; \qquad \overline{\nu}_2 = \frac{127}{100} = 1,27.$$

Вычислим выборочную среднюю и выборочную дисперсию: $\overline{x}_в = 0,23 \cdot 2 + 16 = 16,46$; $D_в = (1,27 - (0,23)^2) \cdot 4 = (1,27 - 0,0529) \cdot 4 =$ $= 1,2171 \cdot 4 = 4,8684 \approx 4,87$.

Определим исправленную выборочную дисперсию: $D_и = S^2 = \dfrac{100}{99} \cdot 4,87 = 4,92$, и исправленное среднее квадратическое отклонение: $S = \sqrt{4,92} = 2,22$.

Получим несмещенные оценки для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Задачи для аудиторной работы

Задача 3.1.

По данным выборки (табл. 3.3) найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

Таблица 3.3

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Задача 3.2.

Найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии по данным выборки (табл. 3.4).

Таблица 3.4

x_i	7,9	8,1	8,3	8,5	8,7	8,9
n_i	5	20	80	95	40	10

Задача 3.3.

По данным выборки (табл. 3.5) найти:

а) несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии;

б) коэффициент асимметрии и эксцесс.

Таблица 3.5

$x_i - x_{i+1}$	[0–5)	[5–10)	[10–15)	[15–20)	[20–25)	[25–30)
n_i	49	41	26	14	17	3

Задачи для внеаудиторной работы

Задача 3.4.

По данным табл. 1.5 найти:

а) несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии;

б) коэффициент асимметрии и эксцесс выборки.

Задача 3.5.

Дана выборка
40, 43, 43, 46, 46, 46, 54, 56, 59, 62, 64, 64, 66, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 69, 71, 75, 75, 76, 76, 78, 80, 82, 82, 82, 82, 82, 83, 84, 86, 88, 90, 90, 91, 91, 95, 102, 127, 69, 92.

Найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии:

а) не прибегая к группировке чисел;

б) объединяя числа в группы с интервалами в 5 единиц: 40–44; 45–49; 50–54 и т. д.

Занятие 4

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Краткие теоретические сведения

Точечная оценка неизвестного параметра генеральной совокупности является приближенным его значением даже в том случае, если она несмещенная, эффективная и состоятельная, и в случае выборки малого объема может существенно от него отличаться.

В этом случае лучше использовать интервальную оценку параметра.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, который с определенной вероятностью γ накрывает неизвестное значение параметра θ генеральной совокупности. Границы интервала и его величина находятся по выборочным данным, поэтому являются случайными величинами в отличие от оцениваемого параметра θ – величины неслучайной.

В качестве интервальной оценки используют доверительные интервалы. Интервал, содержащий оцениваемый параметр генеральной совокупности, называют ***доверительным интервалом***, а вероятность γ – ***доверительной вероятностью*** или надежностью оценки.

Если исследуемая СВ распределена по нормальному закону с известным средним квадратическим отклонением σ, то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством

$$\overline{x}_{\text{в}} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{4.1}$$

где $\delta = t_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – точность оценки;

n – объем выборки;

t_γ – значение аргумента функции Лапласа, при котором $2\Phi(t_\gamma) = \gamma \Rightarrow \Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Если среднее квадратическое отклонение неизвестно, то доверительный интервал для математического ожидания исследуемой СВ определяется неравенством

$$\overline{x}_{\text{в}} - t_{\gamma,n} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + t_{\gamma,n} \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{4.2}$$

где $S = \sqrt{D_{\text{и}}}$;

значения $t_{\gamma,n}$ находят по табл. П3 по заданным n и γ;

$\delta = t_{\gamma,n} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$ – точность оценки математического ожидания.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения исследуемой СВ определяется неравенством

$$Sq_1 < \sigma < Sq_2. \tag{4.3}$$

Значения q_1 и q_2 находятся по табл. П4 по заданным γ и n.

Пример 4.1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0,95$, если по данным выборки объемом $n = 36$ вычислено $\overline{x}_{\text{в}} = 4,1$.

Решение. Определим значение t_γ по табл. П2:

$$\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475 \Rightarrow t_\gamma = 1,96.$$

Точность оценки $\delta = t_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1,96 \cdot 3}{6} = 0,98.$

Подставим в неравенство (4.1):

$$4,1 - 0,98 < a < 4,1 + 0,98;$$

$$3,12 < a < 5,08.$$

Смысл полученного результата:

если произведено достаточно большое число выборок по 36 в каждой, то 95 % из них определяют такие доверительные интервалы, в которых a заключено, и лишь в 5 % случаев оно может выйти за границы доверительного интервала.

Пример 4.2. Для исследования нормального распределения СВ X извлечена выборка (табл. 4.1).

Таблица 4.1

$x_i - x_{i+1}$	[45–47)	[47–49)	[49–51)	[51–53)	[53–55)	[55–57]
n_i	4	13	34	32	12	5

Найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения исследуемой СВ.

Решение. Найдем несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии, используя метод произведений (табл. 4.2).

Таблица 4.2

x_i^*	n_i	U_i	$U_i \cdot n_i$	$U_i^2 \cdot n_i$	$(U_i+1)^2 \cdot n_i$
46	4	–2	–8	16	4
48	13	–1	–13	13	0
50	34	0	0	0	34
52	32	1	32	32	128
54	12	2	24	48	108
56	5	3	15	45	80
$\sum$	100	–	50	154	354

Контроль: $354 = 100 + 2 \cdot 50 + 154$. $354 = 354$.

$$\overline{\nu}_1 = \frac{1}{100} \cdot 50 = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \overline{\nu}_2 = \frac{154}{100} = 1,54; \quad b = 50; \quad h = 2;$$

$$\overline{x}_{\text{в}} = \overline{\nu}_1 \cdot h + b = \frac{1}{2} \cdot 2 + 50 = 51;$$

$$D_{\text{в}} = (\frac{154}{100} - \frac{1}{4}) \cdot 4 = 5,16;$$

$$D_{\text{и}} = \frac{100}{99} \cdot \frac{516}{100} = \frac{516}{99} \approx 5,21;$$

$$S = \sqrt{D_{\text{и}}} = 2,283.$$

По табл. П3 по данным $\gamma = 0,95$ и $n = 100$ находим $t_{\gamma,\, n} = t_{0,95;\,100} = 1,984$.

Для определения доверительного интервала для математического ожидания используем неравенство (4.2):

$$51 - \frac{1,984 \cdot 2,283}{10} < a < 51 + \frac{1,984 \cdot 2,283}{10};$$

$$50,547 < a < 51,453.$$

Таким образом, интервал $(50,547; 51,453)$ накрывает точку a с вероятностью $0,95$.

Для определения доверительного интервала для среднего квадратического отклонения используем неравенство (4.3). По табл. П4 по заданным $\gamma = 0,95$ и $n = 100$ находим $q_1 = 0,878$, $q_2 = 1,161$.

$$2,004 < \sigma < 2,651.$$

С вероятностью 0,95 неизвестное значение σ накрывается интервалом $(2,004; 2,651)$.

Задачи для аудиторной работы

Задача 4.1.

Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$.

Задача 4.2.

СВ X имеет нормальное распределение. По выборке объемом n = 25 найдено S = 0,8. Найти доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения с надежностью $\gamma = 0,95$.

Задача 4.3.

Даны результаты исследования грануляции порошка (в мкм) (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Грануляция порошка x_i	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
Частота n_i	8	18	32	26	9

Найти интервальные оценки параметров нормального распределения с надежностью 0,95.

Задача 4.4.

Найти с надежностью 0,99 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по данным выборки (табл. 4.4).

Таблица 4.4

x_i	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
n_i	8	18	45	20	9

Задача 4.5.

Для контроля срока службы электроламп из большой партии было отобрано 25 штук. В результате испытаний оказалось, что средний срок службы отработанных ламп равен 985 часам, а среднее квадратическое отклонение их срока службы – 20 часов. Определить границы, в которых с вероятностью 0,95 заключен средний срок службы ламп во всей партии.

Задачи для внеаудиторной работы

Задача 4.6.

Найти с надежностью 0,95 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по данным выборки (табл. 4.5).

Таблица 4.5

Задание А					
x_i	1,4	1,8	2,2	2,6	3
n_i	8	18	45	20	9

Задание Б						
$x_i - x_{i+1}$	[2,69–2,74)	[2,74–2,79)	[2,79–2,84)	[2,84–2,89)	[2,89–2,94)	[2,94–3,01)
n_i	2	0	6	18	14	10

Задача 4.7.

Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ равна 0,3, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,5$.

Задача 4.8.

Телефонная компания провела оценку среднего времени междугородных переговоров в течение выходных, когда действует льготный тариф. Случайная выборка из 45 звонков дала среднюю $\overline{x}_{\text{в}} = 14,5$ мин со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5,6$ мин. Найти 95 % и 90 %-е доверительные интервалы для средней продолжительности переговоров в выходные дни.

ОТВЕТЫ

Задача 1.4

x_i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n_i	1	2	4	5	6	10	13	7	6	4	2
$n_i^{\text{нак}}$	1	3	7	12	18	28	41	48	54	58	60
W_i	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{2}{60}$

Задача 1.5

$$h = 8$$

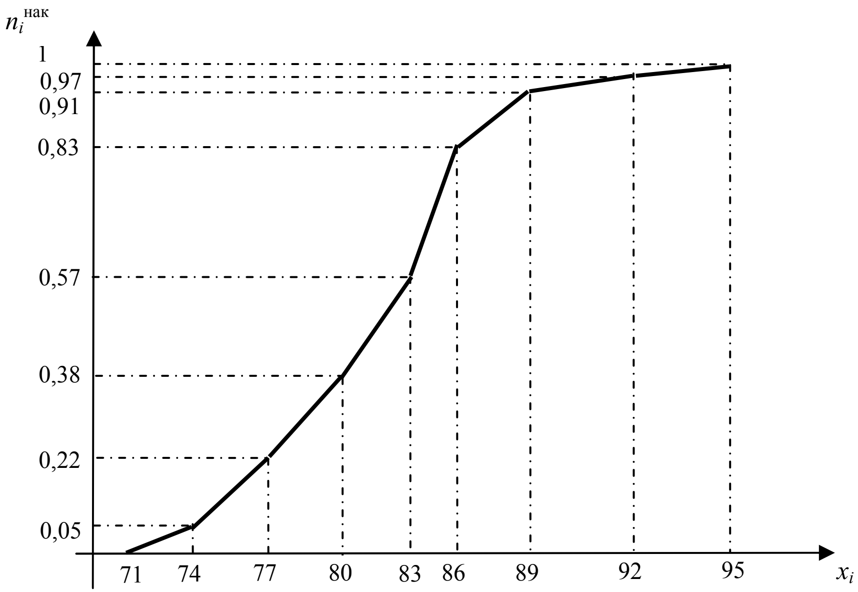
$x_{i-1} - x_i$	$[85–93)$	$[93–101)$	$[101–109)$	$[109–117)$
n_i	9	14	36	28
$x_{i-1} - x_i$	$[117–125)$	$[125–133)$	$[133–141)$	$[141–145]$
n_i	15	10	2	3

Кумулятивный ряд имеет вид:

$x_{i-1} - x_i$	$[85–93)$	$[93–101)$	$[101–109)$	$[109–117)$
$n_i^{\text{нак}}$	9	23	59	87
$x_{i-1} - x_i$	$[117–125)$	$[125–133)$	$[133–141)$	$[141–145]$
$n_i^{\text{нак}}$	102	112	114	117

Задача 2.3

$\overline{x}_{\text{в}} = 81,71$; $\text{Me}(X) = 81,89$; $\text{Mo}(X) = 83,84$; $D_{\text{в}} = 25,87$; $\sigma_{\text{в}} = 5,1$; $\overline{A} = 0,196$; $\overline{E} = -0,52$.



Задача 2.4

$\overline{x}_{\text{в}} = 32,9;$ $\mathrm{D}_{\text{в}} = 688,7;$ $\sigma_{\text{в}} = 26,2;$

$\overline{A} = 0,99;$ $\overline{E} = 0,957;$ $\text{Mo} = 7,22;$

$\text{Me} = 24,7.$

Задача 3.4

а) $\overline{x}_{\text{в}} = 81,71;$ $D_{\text{и}} = 26,23;$

б) $\overline{A} = 0,196;$ $\overline{E} = -0,52.$

Задача 3.5

а) $\overline{x}_{\text{в}} = 73,16;$ $D_{\text{и}} = 305,83;$

б) $x_{\text{в}} = 73,22;$ $D_{\text{и}} = 314,14.$

Задача 4.6

А) $2{,}134 < a < 2{,}298;$ $0{,}363 < \sigma < 0{,}481;$

Б) $2{,}1868 < a < 2{,}906;$ $0{,}056 < \sigma < 0{,}083.$

Задача 4.7

$n = 79.$

Задача 4.8

$12{,}864 < a < 16{,}136;$ $13{,}123 < a < 15{,}877.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти методом произведений:

а) выборочную среднюю;

б) выборочную дисперсию;

в) выборочное среднее квадратическое отклонение по данному статистическому распределению выборки (в первой строке указаны выборочные варианты x_i, а во второй – соответствующие частоты n_i количественного признака X).

x_i	105	110	115	120	125	130	135
n_i	4	6	10	40	20	12	8

x_i	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5
n_i	5	15	40	25	8	4	3

x_i	10,2	10,9	11,6	12,3	13	13,7	14,4
n_i	8	10	60	12	5	3	2

x_i	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	10	40	20	12	8

x_i	110	115	120	125	130	135	140
n_i	5	10	30	25	15	10	5

x_i	12,4	16,4	20,4	24,4	28,4	32,4	36,4
n_i	5	15	40	25	8	4	3

x_i	26	32	38	44	50	56	62
n_i	5	15	40	25	8	4	3

x_i	10,6	15,6	20,6	25,6	30,6	35,6	40,6
n_i	8	10	60	12	5	3	2

x_i	100	110	120	130	140	150	160
n_i	4	6	10	40	20	12	8

x_i	130	140	150	160	170	180	190
n_i	5	10	30	25	15	10	5

2. Найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочную среднюю $\overline{x}_в$, объем выборки n и среднее квадратическое отклонение σ.

$\overline{x}_в = 75{,}17$ $\sigma = 6$ $n = 36$

$\overline{x}_в = 75{,}16$ $\sigma = 7$ $n = 49$

$\overline{x}_в = 75{,}15$ $\sigma = 8$ $n = 64$

$\overline{x}_в = 75{,}14$ $\sigma = 9$ $n = 81$

$\overline{x}_в = 75{,}13$ $\sigma = 10$ $n = 100$

$\overline{x}_в = 75{,}12$ $\sigma = 11$ $n = 121$

$\overline{x}_в = 75{,}11$ $\sigma = 12$ $n = 144$

$\overline{x}_в = 75{,}10$ $\sigma = 13$ $n = 169$

$\overline{x}_в = 75{,}09$ $\sigma = 14$ $n = 196$

$\overline{x}_в = 75{,}08$ $\sigma = 15$ $n = 225$

3. а) Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с заданной надежностью γ при известных n и σ;

б) Найти доверительный интервал по известным n, γ, S, неизвестны a и σ.

а) $\sigma = 2$, $\overline{x}_в = 6{,}3$, $\gamma = 0{,}99$, $n = 50$;

б) $S = 1{,}8$, $\overline{x}_в = 17{,}2$, $n = 16$, $\gamma = 0{,}99$;

а) $\sigma = 3$, $\overline{x}_в = 6,1$, $\gamma = 0,999$, $n = 100$;

б) $S = 2,4$, $\overline{x}_в = 14,28$, $n = 9$, $\gamma = 0,95$;

а) $\sigma = 3$, $\overline{x}_в = 7,3$, $\gamma = 0,99$, $n = 100$;

б) $S = 5,3$, $\overline{x}_в = 19,2$, $n = 20$, $\gamma = 0,95$;

а) $\sigma = 5$, $\overline{x}_в = 9,2$, $\gamma = 0,999$, $n = 50$;

б) $S = 3,7$, $\overline{x}_в = 8,3$, $n = 16$, $\gamma = 0,99$;

а) $\sigma = 7$, $\overline{x}_в = 8,2$, $\gamma = 0,999$, $n = 80$;

б) $S = 2,95$, $\overline{x}_в = 6,14$, $n = 12$, $\gamma = 0,99$;

а) $\sigma = 4$, $\overline{x}_в = 5,7$, $\gamma = 0,99$, $n = 100$;

б) $S = 2,95$, $\overline{x}_в = 8,31$, $n = 16$, $\gamma = 0,95$;

а) $\sigma = 9$, $\overline{x}_в = 20,11$, $\gamma = 0,999$, $n = 81$;

б) $S = 3,14$, $\overline{x}_в = 7,34$, $n = 16$, $\gamma = 0,95$;

а) $\sigma = 5$, $\overline{x}_в = 11,11$, $\gamma = 0,999$, $n = 64$;

б) $S = 4,7$, $\overline{x}_в = 39,14$, $n = 16$, $\gamma = 0,999$;

а) $\sigma = 5$, $\overline{x}_в = 5,11$, $\gamma = 0,99$, $n = 10$;

б) $S = 3,4$, $\overline{x}_в = 13,12$, $n = 10$, $\gamma = 0,99$;

а) $\sigma = 5$, $\overline{x}_в = 3,14$, $\gamma = 0,99$, $n = 81$;

б) $S = 3,5$, $\overline{x}_в = 17,28$, $n = 14$, $\gamma = 0,99$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М., 1999.

2. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер. – М., 2001.

3. Станишевская, Л. В. Математическая статистика / Л. В. Станишевская, Ю. Н. Черторицкий. – Минск, 2006.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Значения функции Гаусса $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3084	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3025	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2804	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0846	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180

Окончание табл. П1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0032	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0012	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0010	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П2

Значения функции Лапласа $\Phi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,08	0,0319	0,16	0,0636	0,24	0,0948
0,01	0,0040	0,09	0,0359	0,17	0,0675	0,25	0,0987
0,02	0,0080	0,10	0,0398	0,18	0,0714	0,26	0,1026
0,03	0,0120	0,11	0,0438	0,19	0,0753	0,27	0,1064
0,04	0,0160	0,12	0,0478	0,20	0,0793	0,28	0,1103
0,05	0,0199	0,13	0,0517	0,21	0,0832	0,29	0,1141
0,06	0,0239	0,14	0,0557	0,22	0,0871	0,30	0,1179
0,07	0,0279	0,15	0,0596	0,23	0,0910	0,31	0,1217

Продолжение табл. П2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212	1,22	0,3883
0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238	1,23	0,3907
0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264	1,24	0,3925
0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289	1,25	0,3944
0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315	1,26	0,3962
0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340	1,27	0,3980
0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365	1,28	0,3997
0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389	1,29	0,4015
0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413	1,30	0,4032
0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438	1,31	0,4049
0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461	1,32	0,4066
0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485	1,33	0,4082
0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508	1,34	0,4099
0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531	1,35	0,4115
0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554	1,36	0,4131
0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577	1,37	0,4147
0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599	1,38	0,4162
0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621	1,39	0,4177
0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643	1,40	0,4192
0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665	1,41	0,4207
0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686	1,42	0,4222
0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708	1,43	0,4236
0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729	1,44	0,4251
0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749	1,45	0,4265
0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770	1,46	0,4279
0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790	1,47	0,4292
0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810	1,48	0,4306
0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830	1,49	0,4319
0,60	0,2257	0,90	0,3159	1,20	0,3849	1,50	0,4332
0,61	0,2291	0,91	0,3186	1,21	0,3869	1,51	0,4345

Окончание табл. П2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,52	0,4357	1,79	0,4633	2,12	0,4830	2,66	0,4961
1,53	0,4370	1,80	0,4641	2,14	0,4838	2,68	0,4963
1,54	0,4382	1,81	0,4649	2,16	0,4846	2,70	0,4965
1,55	0,4394	1,82	0,4656	2,18	0,4854	2,72	0,4967
1,56	0,4406	1,83	0,4664	2,20	0,4861	2,74	0,4969
1,57	0,4418	1,84	0,4671	2,22	0,4868	2,76	0,4971
1,58	0,4429	1,85	0,4678	2,24	0,4875	2,78	0,4973
1,59	0,4441	1,86	0,4686	2,26	0,4881	2,80	0,4974
1,60	0,4452	1,87	0,4693	2,28	0,4887	2,82	0,4976
1,61	0,4463	1,88	0,4699	2,30	0,4893	2,84	0,4977
1,62	0.4474	1,89	0,4706	2,32	0,4898	2,86	0,4979
1,63	0,4484	1,90	0,4713	2,34	0,4904	2,88	0,4980
1,64	0,4495	1,91	0,4719	2,36	0,4909	2,90	0,4981
1,65	0,4505	1,92	0,4726	2,38	0,4913	2,92	0,4982
1,66	0,4515	1,93	0,4732	2,40	0,4918	2,94	0,4984
1,67	0,4525	1,94	0,4738	2,42	0,4922	2,96	0,4985
1,68	0,4535	1,95	0,4744	2,44	0,4927	2,98	0,4986
1,69	0,4545	1,96	0,4750	2,46	0,4931	3,00	0,49865
1,70	0,4554	1,97	0,4756	2,48	0,4934	3,20	0,49931
1,71	0,4564	1,98	0,4761	2,50	0,4938	3,40	0,49966
1,72	0,4573	1,99	0,4767	2,52	0,4941	3,60	0,499841
1,73	0,4582	2,00	0,4772	2,54	0,4945	3,80	0,499928
1,74	0,4591	2,02	0,4783	2,56	0,4948	4,00	0,499968
1,75	0,4599	2,04	0,4793	2,58	0,4951	4,50	0,499997
1,76	0,4608	2,06	0,4803	2,60	0,4953	5,00	0,499997
1,77	0,4616	2,08	0,4812	2,62	0,4956		
1,78	0,4625	2,10	0,4821	2,64	0,4959		

Таблица П3

Значения функции $t_{\gamma, n} : \overline{x}_в - t_{\gamma, n} \dfrac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_{\gamma, n} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

n/γ	0,95	0,99	0,999	n/γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица П4

Значения коэффициентов q_1 и q_2; $q_1 S < \sigma < q_2 S$

n	0,99		0,98		0,95		0,90	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
1	0,356	15,0	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916

Окончание табл. П4

n	0,99		0,98		0,95		0,90	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,676	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,668	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,414	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

ЕРОШЕВСКАЯ Вера Ивановна
ЕРОШЕВСКАЯ Елена Леонидовна
МИНЧЕНКОВА Лариса Павловна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методическое пособие

В 2 частях

Часть 1

Редактор *В. О. Кутас*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 30.05.2013. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,85. Уч.-изд. л. 2,23. Тираж 50. Заказ 1373.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.