

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

С.В. Гончарова, В.М. Хвасько

***Механика материалов.
Расчет статически неопределимых балок***

Электронное учебное пособие

Минск 2019

УДК 620.1 (075.4)
ББК 30.3я7
М 55

Составители:

С.В. Гончарова, В.М. Хвасько

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент *Е.А. Евсеева*

Электронное учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений для самостоятельного освоения учебного материала и отработки навыков решения задач на тему «Расчёт статически неопределимых балок» по курсу «Механика материалов» («Механика материалов и конструкций»).

Пособие содержит необходимую информацию для самостоятельного изучения данной темы курса: основные сведения из теории, методики раскрытия статической неопределимости балок, схемы балок для контрольной работы студентов.

Данное пособие будет полезно студентам при подготовке к практическим занятиям по теме «Расчёт статически неопределимых балок», а также может способствовать качественному выполнению студентами различных форм обучения расчетно-графических и контрольных работ.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017) 293-92-36
E-mail: smat@bntu.by
Регистрационный №

© Гончарова С.В., Хвасько В.М., 2019
© БНТУ, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ. МЕТОДЫ РАСЧЁТА	5
2. ОСНОВЫ МЕТОДА СИЛ	8
2.1 Примеры раскрытия статической неопределимости балок методом сил.....	13
Пример 1.....	13
Пример 2.....	15
Пример 3.....	19
3. РАСЧЁТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК УРАВНЕНИЕМ ТРЁХ МОМЕНТОВ.....	24
3.1 Примеры раскрытия статической неопределимости уравнением трех моментов.....	29
Пример 1.....	29
Пример 2.....	34
Пример 3.....	38
4. СХЕМЫ БАЛОК ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ	42
Литература	45
Приложение 1	46
Приложение 2	51

Введение

При изучении курса «Механика материалов» важное значение имеет практическое применение теоретических выводов. Данное электронное методическое пособие предназначено для усвоения студентами основ раздела «Статически неопределимые балки» и приобретения навыков раскрытия статической неопределимости. Существуют различные способы решения статически неопределимых балок. В пособии рассматриваются только основные из них: метод сил и решение с помощью уравнений трёх моментов. По каждому методу представлены краткие сведения из теории и даны примеры раскрытия статической неопределимости простейших балок. Также приводятся схемы балок для самостоятельной и контрольной работы студентов.

1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ. МЕТОДЫ РАСЧЁТА

Балки могут выполнять функции элемента конструкции лишь в тех случаях, если они неподвижны, т.е. когда их точки перемещаются только в результате деформирования. В случае действия нагрузки только в одной плоскости неподвижность обеспечивается тремя связями (опорами). Эти связи являются необходимыми. Поскольку для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, то реакции необходимых связей могут быть найдены с помощью лишь одних уравнений статики. Такие балки называются статически определимыми.

Однако в балке из конструктивных соображений, для увеличения её прочности и жёсткости, может быть больше трех связей (реакций). В этом смысле некоторые связи являются лишними. Балки с лишними связями называются статически неопределимыми, поскольку реакции таких балок невозможно определить только при помощи уравнений статики. Степень статической неопределимости балки определяется разностью между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений статики.

Балки, изображённые на рис. 1.1 являются один раз статически неопределимыми, так как имеют четыре опорные реакции при трёх уравнениях статики.

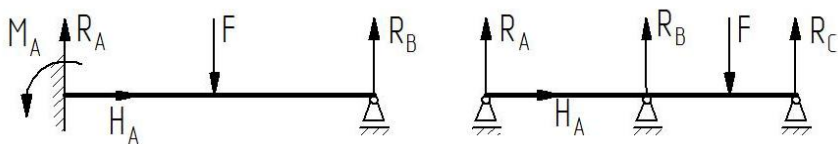


Рис. 1.1

На рис. 1.2 представлены дважды статически неопределимые балки.

Выбор метода расчёта статически неопределимой балки связан со степенью статической неопределимости. Если лишних связей не много (одна, две), то применяют общий метод: составляют

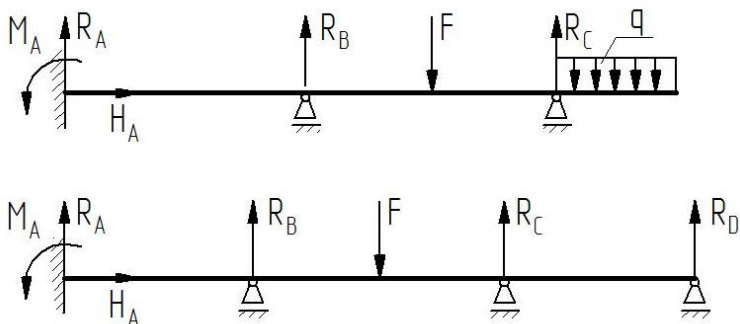


Рис.1.2

возможные независимые уравнения статики, добавляют необходимые уравнения совместности деформаций (перемещений). Из совместного решения всех составленных уравнений определяют усилия в связях (реакции). Дальнейшие расчёты не отличаются от расчётов статически определимых балок.

Рассмотрим балку, показанную на рис. 1.3.

Левая опора – жёсткая заделка, имеющая три связи, правая – шарнирно-подвижная, имеющая одну связь. Уравнений статики для этой балки можно составить три, поэтому она имеет одну лишнюю связь. Найдём реакции связей из совместного решения уравнений статики и одного уравнения перемещений.

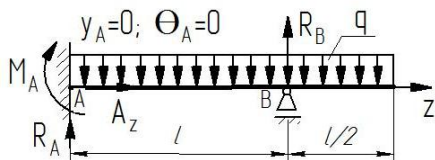


Рис. 1.3

Запишем уравнения статики:

$$1) \sum Z = 0 \quad R_z = 0;$$

$$2) \sum Y = 0 \quad R_A - q \cdot 1,5l + R_B = 0;$$

$$3) \sum M_A = 0 \quad M_A + \frac{q(1,5)^2}{2} - R_B l = 0.$$

Запишем уравнение прогиба в опорном сечении B , применив обобщённое уравнение оси балки и приняв начало координат в защемлении:

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 l + M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{24} = 0.$$

В опорных сечениях балки перемещения сечений $y_A = y_B = 0$, $\theta_A = \theta_0 = 0$, $y_B = 0$. Сократив оставшиеся члены уравнения на $l^2/2$, получим:

$$M_A + R_A \frac{2l}{3} - \frac{ql^2}{12} = 0.$$

Аналогичное уравнение получим составляя уравнение равновесия $\sum M_B = 0$:

$$M_A + R_A l - \frac{ql^2}{2} + \frac{ql^2}{8} = 0.$$

Из совместного решения двух последних уравнений получим:

$$M_A = -\frac{ql^2}{16}; \quad R_A = \frac{7ql}{16} = 0.$$

Из третьего уравнения статики находим реакцию R_B :

$$R_B = \frac{17ql}{16} = 0.$$

Контроль результатов проводим по второму уравнению статики.

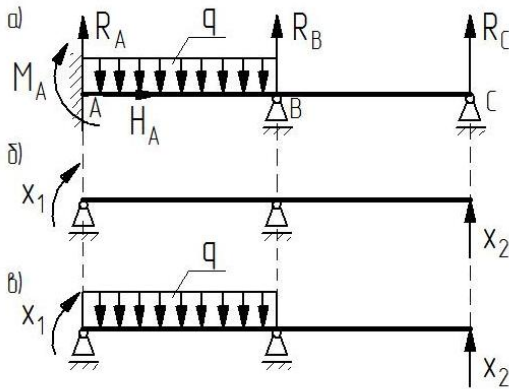
При раскрытии статической неопределимости рассматриваемой балки в качестве дополнительного применено обобщённое уравнение перемещений, записанное методом начальных параметров.

У неразрезных балок, которые перекрывают ряд пролётов и на своём пути не имеют ни разрезов, ни шарниров, степень статической неопределимости может быть высокой, а решение большого количества уравнений – трудоёмким. В таких случаях дополнительные уравнения используют не для совместного решения с уравнениями статики, а для определения неизвестных усилий в лишних связях. Метод расчёта, при котором система решается с неизвестными силами, называют методом сил.

2. ОСНОВЫ МЕТОДА СИЛ

Расчёт по методу сил выполняется в следующем порядке:

1. Устанавливается степень статической неопределимости, т.е. определяется число лишних связей (рис 2.1, а).



Заданная система:
 связей – 5;
 уравнений статики – 3;
 лишних связей – 2.

Основная система:
 $\Delta_1 = 0$;
 $\Delta_2 = 0$.

Эквивалентная система

Рис 2.1

2. Выбирается основная система, которая получается из статически неопределимой балки путём удаления лишних связей (рис. 2.1, б). Основная система является статически определимой и должна являться геометрически неизменяемой (не превращаться в механизм). Основная система выбирается по-разному, но с таким условием, чтобы решение уравнений для неё было наименее трудоёмким.

Эквивалентная система получена путём загрузки основной системы заданными внешними силами и неизвестными усилиями X_1 , X_2 (рис. 2.1, в).

3. Записывают условия эквивалентности основной системы заданной, по перемещениям. Если у заданной системы перемещения в направлении отброшенных связей отсутствуют, то для основной системы записывают условия $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, которые являются *дополнительными* уравнениями перемещений.

На основании принципа независимости действия сил запишем:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Первый индекс у перемещений Δ указывает, в направлении какой связи происходит перемещение; второй – усилие, которое вызвало это перемещение.

Смысл первого уравнения – отрицание угла поворота сечения балки у опоры A ; смысл второго – отрицание перемещения точки C оси балки по вертикали.

Перемещения от неизвестных сил X_1 и X_2 можно представить в виде: $\Delta_{11} = \delta_{11}X_1$, $\Delta_{12} = \delta_{12}X_2$, т.е. определяют перемещения δ от единичных сил, приложенных по направлению соответствующих неизвестных X . Тогда уравнения перемещений примут вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Для любой дважды статически неопределимой балки эти уравнения будут такими же, поэтому их называют каноническими уравнениями метода сил. Их количество равно степени статической неопределимости балки. Для балки n раз статически неопределимой канонические уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты δ_{11} , δ_{12} и т.д. являются единичными перемещениями, т.к. вызваны единичными силами, и называются единичными коэффициентами. Перемещения Δ_{1F} , Δ_{2F} и т.д. вызваны заданными нагрузками и называются грузовыми коэффициентами или свободными членами.

4. Определяют единичные коэффициенты и свободные члены. Для этого основной системе строятся в эпюры моментов от единичных значений неизвестных $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ от внешней нагрузки F . По формуле Мора и способу Верещагина путём перемножения соответствующих эпюр находят все коэффициенты:

$$\delta_{11} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz, \quad \delta_{12} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dz,$$

$$\Delta_{1F} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dz \quad \text{и так далее.}$$

В соответствии с теоремой о взаимности перемещений:

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

5. Далее решаются канонические уравнения и определяются неизвестные силы X_1 и X_2 . Балка становится статически определимой.

6. Используя уравнения равновесия, находят остальные реакции опор.

Рассмотрим порядок расчёта методом сил на простейшей статически неопределимой балке (рис. 2.2, а).

Балка является один раз статически неопределимой. Выберем в качестве основной системы консоль, нагруженную внешней силой F и лишней связью X_1 (рис. 2.2, б).

Дополнительное уравнение перемещений, выражающее равенство нулю перемещения точки B от сил F и X_1 , в канонической форме будет иметь вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

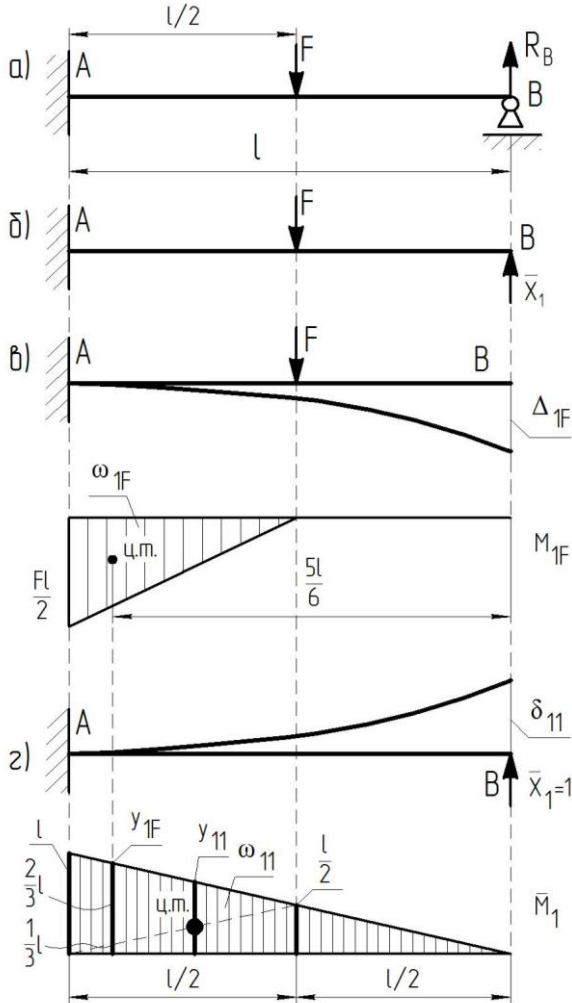


Рис.2.2

где Δ_{1F} - перемещение от заданной нагрузки F по направлению силы X_1 (рис. 2.2, в);

δ_{11} - перемещение от силы $\bar{X}_1 = 1$ по её направлению (рис. 5, г).

Коэффициенты канонического уравнения определяем по методу Мора. Прикладываем к основной системе нагрузку F и строим грузовую эпюру изгибающего момента M_F (рис. 2.2, в). Затем основную систему загружаем единичной силой $\bar{X}_1 = 1$ и строим единичную эпюру момента \bar{M}_1 (рис. 2.2, г).

Дальнейшие вычисления производим по способу Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l}{EI} = \frac{l^3}{3EI},$$

$$\Delta_{1F} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dz = \frac{\omega_{1F} y_{1F}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right)}{EI} =$$

$$= -\frac{\frac{Fl^2}{8} \cdot \frac{5}{6} l}{EI} = -\frac{5Fl^3}{48EI},$$

Где ω_{11}, ω_{1F} – площади единичной и грузовой эпюр соответственно (имеют вид треугольников);

y_{11} – ордината, проходящая через центр тяжести площади эпюры \bar{M}_1 ;

y_{1F} – ордината на единичной эпюре \bar{M}_1 , расположенная под центром тяжести площади эпюры M_F .

Знак минус перед Δ_{1F} означает, что эпюры \bar{M}_1 и M_F находятся по разные стороны от оси эпюры.

Подставляем полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение и находим X_1 :

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - \frac{5Fl^3}{48EI} = 0, \quad X_1 = \frac{5}{16} F.$$

Найденное значение X_1 является искомой реакцией. Дальнейший расчёт ведётся как для обычной статически определимой балки.

2.1 Примеры раскрытия статической неопределимости балок методом сил

Пример 1

Построить эпюры внутренних сил для балки на рис. 2.3, а.

Решение.

Балка является один раз статически неопределимой, т.к. число неизвестных реакций равно четырем, а уравнений статики можно составить три.

Выбираем основную систему: отбрасываем шарнирно-подвижную опору.

Основную систему загружаем заданной нагрузкой, заменяем её действие на балку неизвестной силой X_1 (рис. 2.3,б), и получаем эквивалентную систему (рис 2.3, в).

Записываем одно каноническое уравнение, т.к. система один раз статически неопределима:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Для нахождения коэффициентов уравнения используем метод Мора–Верещагина. Загружаем эквивалентную систему силой $\bar{X}_1 = 1$ и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 3.6,г), затем загружаем основную систему заданной нагрузкой и строим грузовую эпюру моментов M_F (рис 2.3, д). Умножая эпюру \bar{M}_1 саму на себя, находим :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1) = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{8}{3EI}.$$

Перемножаем эпюры \bar{M}_1 и M_F , получим:

$$\Delta_{1F} = \frac{(M_F \cdot \bar{M}_1)}{EI} = \frac{\omega_{1F} y_{1F}}{EI} = \frac{20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right)}{EI} = \frac{30}{EI}.$$

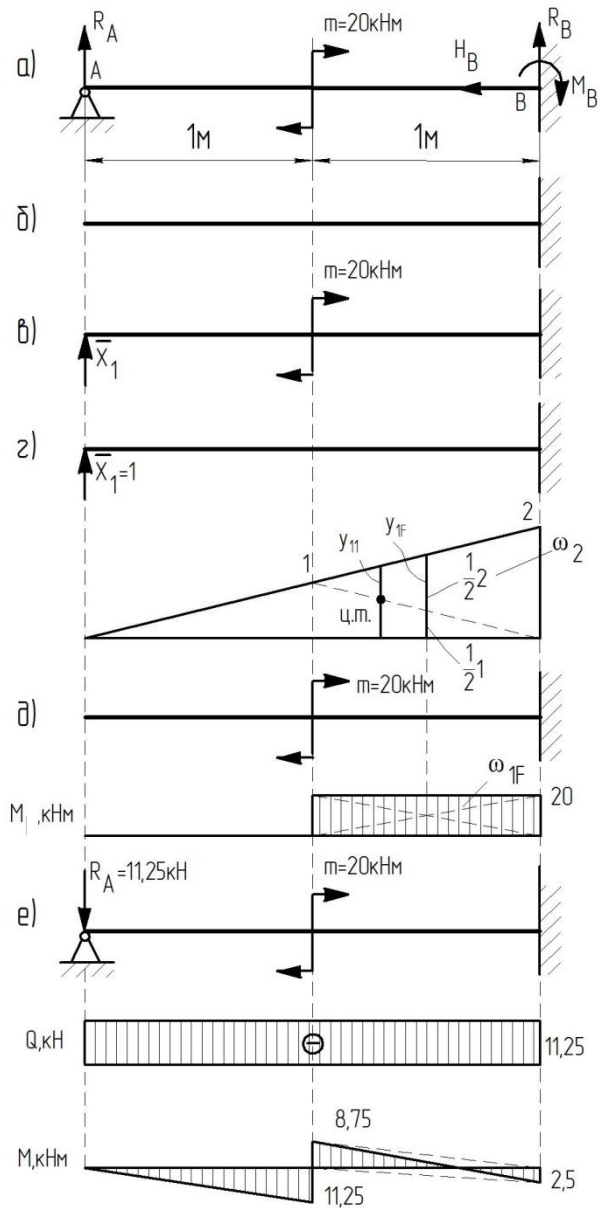


Рис. 2.3.

Произведение имеет знак плюс, так как эпюры \bar{M}_1 и M_F находятся по одну сторону от оси эпюры.

Подставляем полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение и находим X_1 :

$$\frac{8}{3EI} X_1 + \frac{30}{EI} = 0, \quad X_1 = -11,25.$$

Найденное усилие X_1 является искомой реакцией:

$$X_1 = R_A = -11,25 \text{ кН.}$$

Для балки с известной реакцией R_A строим окончательные эпюры внутренних сил (рис 3.6 е).

Сделаем проверку правильности определения величины X_1 . Перемножим окончательную эпюру моментов $M_{Fок}$ и единичную эпюру \bar{M}_1 , т.е. найдем перемещение сечения A (по условию $\Delta_A = 0$):

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{1}{EI} (M_{Fок} \cdot \bar{M}_1) = \frac{\omega_{1Fок} y_{1F}}{EI} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 11,25 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 8,75 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (-3,75 + 5,83 - 2,08) = 0. \end{aligned}$$

Пример 2

Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 2.4, а.

Решение.

Балка является один раз статически неопределимой.

Выбираем основную и эквивалентные системы, заменяя защемление шарнирно-неподвижной опорой и неизвестным моментом X_1 (рис. 2.4 б, в).

Уравнение перемещения имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Строим грузовую M_F и единичную \bar{M}_1 эпюры моментов (рис. 15 г, д).

Находим коэффициенты канонического уравнения методом Мора–Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1) = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{EI} = \frac{4}{3EI},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EI} (M_F \cdot \bar{M}_1) = \frac{-\omega_1 y_{11} - \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3}{EI} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{EI} = -\frac{10}{3EI}. \end{aligned}$$

Подставляем полученные коэффициенты в каноническое уравнение и находим X_1 :

$$\frac{4}{3EI} X_1 - \frac{10}{3EI} = 0, \quad X_1 = 2,5.$$

С учетом $X_1 = M_A = 2,5$ кН, и заданной нагрузки определяем реакции опор для балки (рис. 2.4,е) и строим окончательные эпюры внутренних сил.

Проверка правильности вычислений:

$$\Delta_A = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{1}{EI} (M_{F_{ок}} \cdot \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

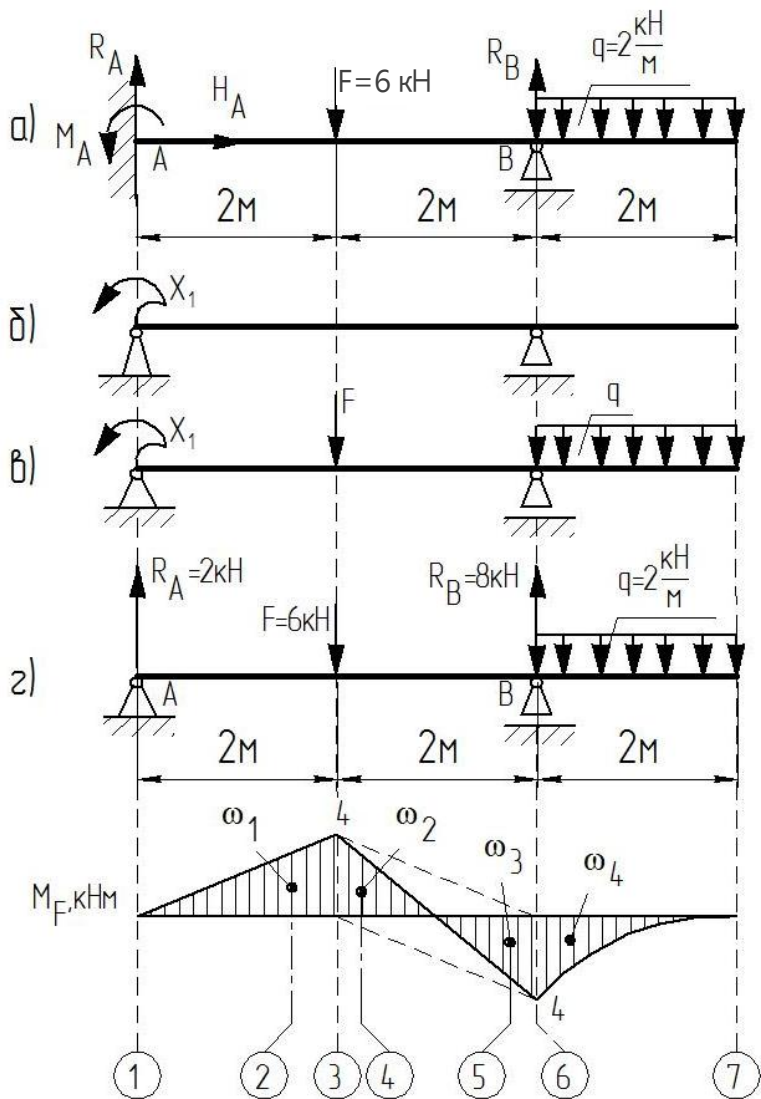


Рис. 2.4

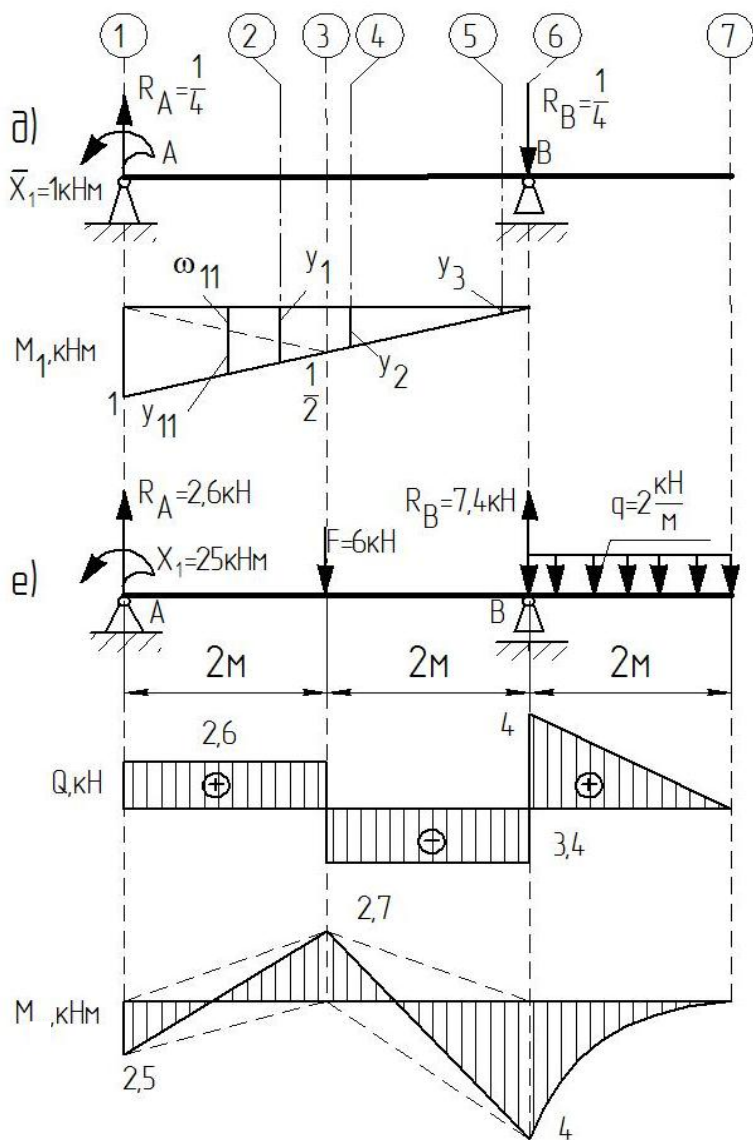


Рис. 2.4 (продолжение)

Пример 3

Построить эпюры внутренних сил для балки (рис. 2.5).

Решение.

Балка является два раза статически неопределимой, т.к. число неизвестных реакций равно пяти, а уравнений статики можно составить три.

Записываем два канонических уравнения метода сил, т.к. система дважды статически неопределима:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Строим единичные эпюры \bar{M}_1, \bar{M}_2 , грузовую эпюру M_F .

Находим единичные, побочные и грузовые коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1) = \frac{\omega_1 y_1}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4}{EI} = \frac{64}{3EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{8}{3EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right)}{EI} = \frac{20}{3EI}.$$

На основании теоремы о взаимности перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$.

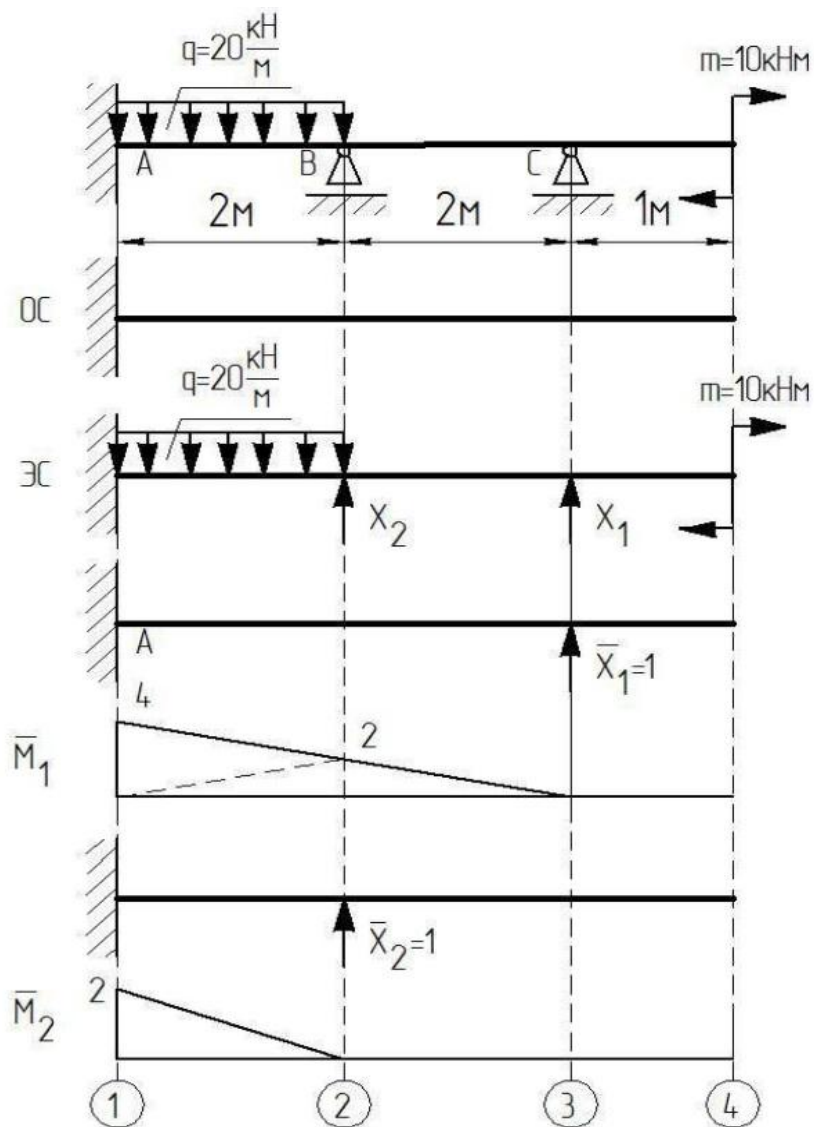


Рис.2.5

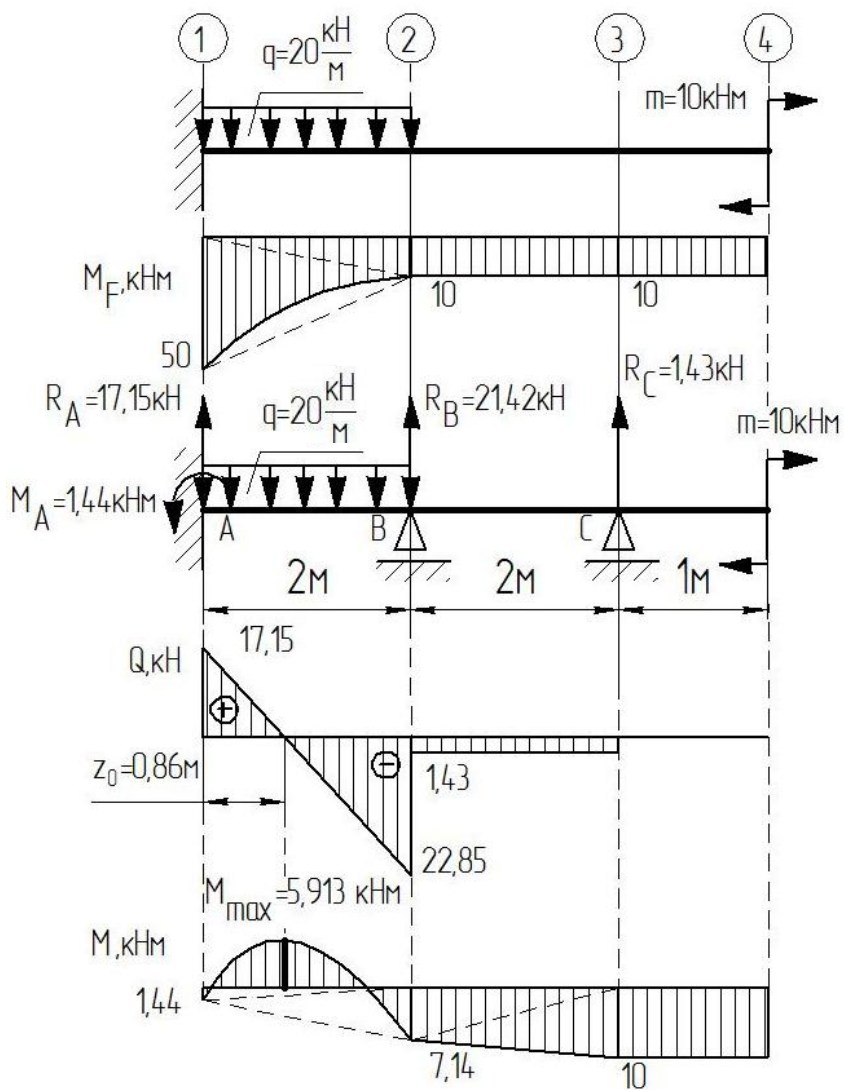


Рис. 2.5 (продолжение)

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} (M_F \cdot \bar{M}_1) = \frac{-10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right)}{EI} -$$

$$- \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right)}{EI} =$$

$$= \frac{-20 + 40 - \frac{80}{3} - \frac{500}{3}}{EI} = -\frac{520}{3EI},$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} (M_F \cdot \bar{M}_2) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2}{EI} -$$

$$- \frac{\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{\frac{20}{3} - \frac{20}{3} - \frac{200}{3}}{EI} = -\frac{200}{3EI}.$$

Подставляем найденные коэффициенты в канонические уравнения метода сил и находим X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{64}{3EI} X_1 + \frac{20}{3EI} X_2 - \frac{520}{3EI} = 0 \\ \frac{20}{3EI} X_1 + \frac{8}{3EI} X_2 - \frac{200}{3EI} = 0 \end{cases} \begin{cases} 64X_1 + 20X_2 - 520 = 0 \\ 20X_1 + 8X_2 - 200 = 0 \end{cases}$$

$$X_2 = \frac{200 - 20X_1}{8},$$

$$64X_1 + 20 \cdot \left(\frac{200 - 20X_1}{8} \right) - 520 = 0,$$

$$64X_1 + 500 - 50X_1 - 520 = 0,$$

$$X_1 = 1,43, \quad X_2 = \frac{200 - 20 \cdot 1,43}{8} = 24,42.$$

Найденные силы представляют собой реакции опор:

$$R_B = 21,42 \text{ кН}, \quad R_C = 1,43 \text{ кН}.$$

Находим остальные реакции опор из уравнений статики:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, -M_A - q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 2 + R_C \cdot 4 - m = 0, \\ M_A &= -20 \cdot 4 \cdot 2 + 21,42 \cdot 2 + 1,43 \cdot 4 - 10 = -1,44 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ \sum M_C &= 0, M_A + q \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 2 - R_A \cdot 4 - m = 0, \\ R_A &= \frac{1,44 + 20 \cdot 2 \cdot 3 - 21,42 \cdot 2 - 10}{4} = 17,15 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Строим окончательные эпюры внутренних сил Q и M .

Делаем проверку. Вертикальные перемещения точек B и C должны быть равны 0.

$$\begin{aligned}\Delta_B &= \frac{1}{EI} (M_F \cdot \bar{M}_2) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1,44 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI} - \\ & - \frac{\frac{1}{2} \cdot 7,14 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2}{EI} = \frac{6,67 - 1,92 - 4,76}{EI} = \frac{6,67 - 6,68}{EI} = \frac{-0,01}{EI}.\end{aligned}$$

Погрешность: $\frac{0,01}{6,67} \cdot 100\% = 0,15\% < 1\%$ – допустимо.

$$\begin{aligned}\Delta_C &= \frac{1}{EI} (M_F \cdot \bar{M}_1) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 7,14 \right)}{EI} + \\ & + \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) - \frac{1}{2} \cdot 7,14 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right)}{EI} - \\ & - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,14 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right)}{EI} = \frac{-16,19 + 40 - 19,04 - 4,8}{EI} = \\ & = \frac{40 - 40,03}{EI} = \frac{-0,03}{EI}.\end{aligned}$$

Погрешность: $\frac{0,03}{40} \cdot 100\% = 0,075\% < 1\%$

3. РАСЧЁТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК УРАВНЕНИЕМ ТРЁХ МОМЕНТОВ

Неразрезные балки характеризуются высокой степенью статической неопределимости, т.е. большим количеством лишних связей (рис. 3.1, а). Весьма существенное значение при расчёте этих балок имеет рациональный выбор основной системы. При выборе основной системы путём замены в них лишних связей неизвестными усилиями (рис. 3.1, б) вычисление параметров канонического уравнения значительно усложняется, т.к. каждое уравнение содержит все неизвестные усилия.

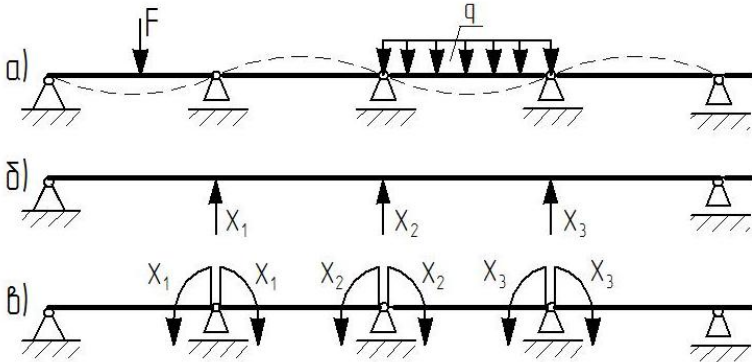


Рис. 3.1

В практических расчётах неразрезных балок принято выбирать основную систему путём постановки шарниров в промежуточных опорах балки, а в качестве неизвестных принимать значения опорных моментов (рис. 3.1, в). В этом случае, очевидно, основной системой будет система однопролетных балок, соединённых на опорах шарнирами. Тогда эквивалентная система при расчёте будет представлять собой ряд простых шарнирно-опертых балок, нагруженных заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами по концам:

$$M_1 = X_1, M_2 = X_2, \dots, M_{n+1} = X_{n+1}.$$

Канонические уравнения метода сил в этом случае могут быть записаны в другом виде. Дополнительное уравнение перемещений для каждой промежуточной опоры должно выражать условие равенства нулю взаимного угла поворота опорных сечений смежных балок. Поскольку каждая из двух опорных балок основной системы под действием внешних нагрузок в пролете и концевых моментов деформируется независимо от другой, то торцы двух смежных балок, примыкающих к одной опоре, например к n -й (рис. 3.2), могут поворачиваться на некоторый угол $\Delta_n^{лев}$ и $\Delta_n^{прав}$.

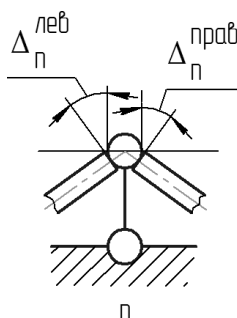


Рис. 3.2

Так как в исходной статически неопределимой неразрезной балке каждая пара таких сечений представляет собой одно сечение, то из условий сплошности их взаимный угол поворота должен быть равен нулю. Отсюда для каждой промежуточной опоры:

$$\Delta = \Delta^{лев} + \Delta^{прав} = 0.$$

Так как основная система состоит из отдельных, не связанных между собой однопролетных балок (рис. 3.3), то при раскрытии условия достаточно рассмотреть примыкающие к n -й опоре два пролета l_n и l_{n+1} .

Тогда условие, записанное в канонической форме, принимает вид:

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{nF} = 0.$$

В соответствии с построениями, приведенными на рис. 3.1:

$$\Delta_{nF} = \frac{1}{EI_n} \omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EI_{n+1}} \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

$$\delta_{n,n-1} = \frac{1}{EI_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EI_n}.$$

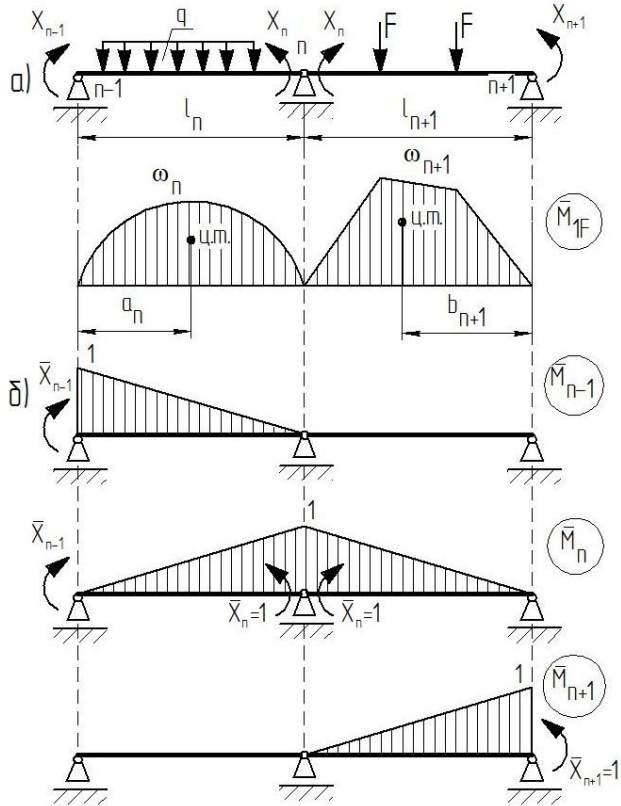


Рис. 3.2

$$\begin{aligned} \delta_{n,n} &= \frac{1}{EI_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_n}{3EI_n} + \frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}} \delta_{n,n+1} = \\ &= \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}. \end{aligned}$$

С учётом этого, и после соответствующих преобразований, уравнение перемещений в канонической форме для опоры « n » будет иметь вид:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Уравнение записывается для каждого пролёта балки и называется уравнением трёх моментов, так как каждое из них независимо от степени неопределимости содержит не более трёх неизвестных. В полученном уравнении трёх моментов:

ω_n и ω_{n+1} - площади эпюр изгибающих моментов от заданной нагрузки в n и $n+1$ пролетах, рассматриваемых как простые двухопорные балки.

a_n и b_{n+1} - расстояния от центров тяжести этих эпюр до $n-1$ -й (левой) и $n+1$ -й (правой) опор соответственно.

Для балки n раз статически неопределимой составляется система из n уравнений трех моментов, решение которой позволяет определить неизвестные опорные моменты M_1, M_2, \dots, M_n .

Далее находятся опорные реакции неразрезной балки. Для чего каждый пролет рассматривается как простая двухопорная балка, нагруженная заданной внешней нагрузкой и найденными опорными моментами, и строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

После определения полных реакций опор строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Их получают совмещением эпюр Q и M , построенных для каждого пролета в отдельности. Поперечные силы и изгибающие моменты в произвольном сечении n -го пролета балки могут быть определены по формулам:

$$M_z = M_z^0 + M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} z,$$

$$Q_z = Q_z^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

где M_z и Q_z - изгибающий момент и поперечная сила от заданной внешней нагрузки в рассматриваемом сечении.

Некоторые особенности имеет расчет неразрезной балки с консолями и защемлениями (рис. 3.4).

При наличии нагруженной консоли нагрузка на ней приводится к опоре. Полученный при этом момент удобно учитывать в левой части уравнения трех моментов. В случае защемления вводится "нулевой" пролёт длиной $l_1 = 0$.

При наличии на промежуточной опоре сосредоточенного момента его следует, рассматривать как внешнюю нагрузку и относить к наименее нагруженному пролёту, либо делить в долях между смежными пролётами.

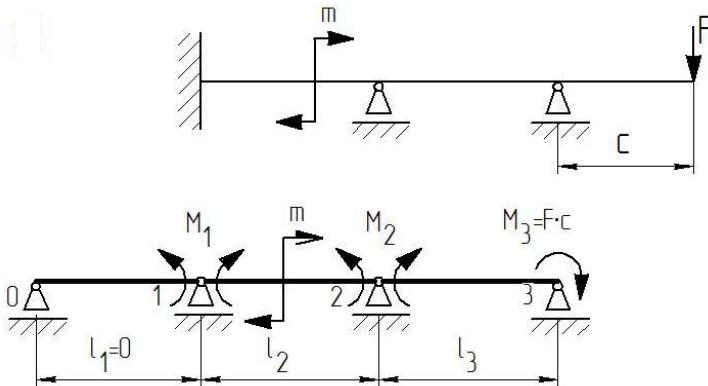


Рис. 3.4

В заключение укажем рекомендуемый порядок расчета неразрезной балки уравнением трех моментов:

1. Определяется степень статической неопределимости балки.
2. Изображается эквивалентная система.
3. Записываются уравнения трех моментов для каждой промежуточной опоры.

4. Для каждого пролета, рассматриваемого как отдельная двух-опорная балка, отроятся эпюры изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки.
5. Определяются правые части уравнений трех моментов.
6. Путем решения этих уравнений находятся значения опорных моментов.
7. Определяются опорные реакции неразрезной балки.
8. Строятся окончательные эпюры Q и M .
9. Производятся контроль правильности решения задачи.

3.1 Примеры раскрытия статической неопределимости уравнением трех моментов

Пример 1

Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 3.5.

Решение.

Балка один раз статически неопределима.

Основной системой будет система двух однопролетных балок, соединенных на промежуточной опоре шарниром. Тогда эквивалентная система при расчете будет представлять собой две простые шарнирно-опертые балки, нагруженных заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами по концам:

$$M_1 = X_1, M_2 = X_2, M_3 = X_3.$$

Записываем уравнение трёх моментов:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right).$$

Согласно эквивалентной схеме определяем опорные моменты:

$$M_1 = 0, M_3 = -m = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

M_2 - неизвестный момент.

Момент m на крайней правой опоре учитываем один раз, как опорный момент M_3 , и тогда не учитываем его на втором пролете балки.

Строим эпюры изгибающего момента для каждой балки в отдельности и определяем правые части уравнения трех моментов:

$$\omega_1 a_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{40 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 135 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$\omega_2 b_2 = 0.$$

После подстановки и преобразований находим опорный момент M_2 :

$$2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \frac{\omega_1 a_1}{l_1},$$

$$2M_2(l_1 + l_2) = -6 \frac{\omega_1 a_1}{l_1} - M_3 l_2,$$

$$M_2 = -3 \frac{\omega_1 a_1}{l_1(l_1 + l_2)} - \frac{M_3 l_2}{2(l_1 + l_2)},$$

$$M_2 = -3 \cdot \frac{135}{3 \cdot 6} - \frac{-80 \cdot 3}{2 \cdot 6} = -22,5 + 20 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Момент получился отрицательный, поэтому меняем его направление.

Находим реакции опор для каждой однопролетной балки с учетом нагрузки и найденного опорного момента.

Пролет 1. $\sum M_1 = 0, -M_2 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - R_{01} \cdot 3 = 0,$

$$R_{01} = \frac{-2,5 + 40 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 59,2 \text{ кН},$$

$$\sum M_0 = 0, -M_2 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_{11} \cdot 3 = 0,$$

$$R_{11} = \frac{2,5 + 40 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 60,8 \text{ кН}.$$

Пролет 2. $\sum M_1 = 0, M_2 - m + R_{22} \cdot 3 = 0,$

$$R_{22} = \frac{80 - 2,5}{3} = 25,8 \text{ кН},$$

$$\sum M_2 = 0, M_2 - m + R_{12} \cdot 3 = 0,$$

$$R_{12} = \frac{80 - 2,5}{3} = 25,8 \text{ кН}.$$

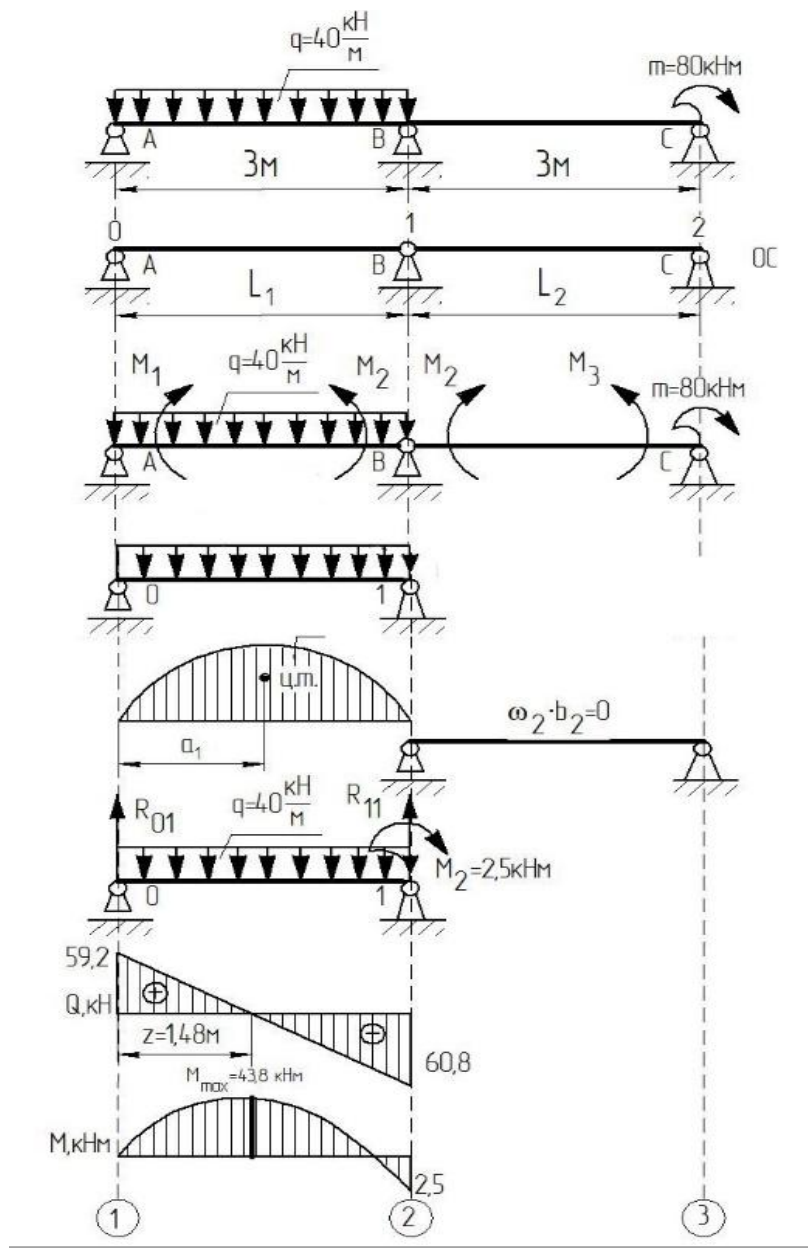


Рис. 3.5

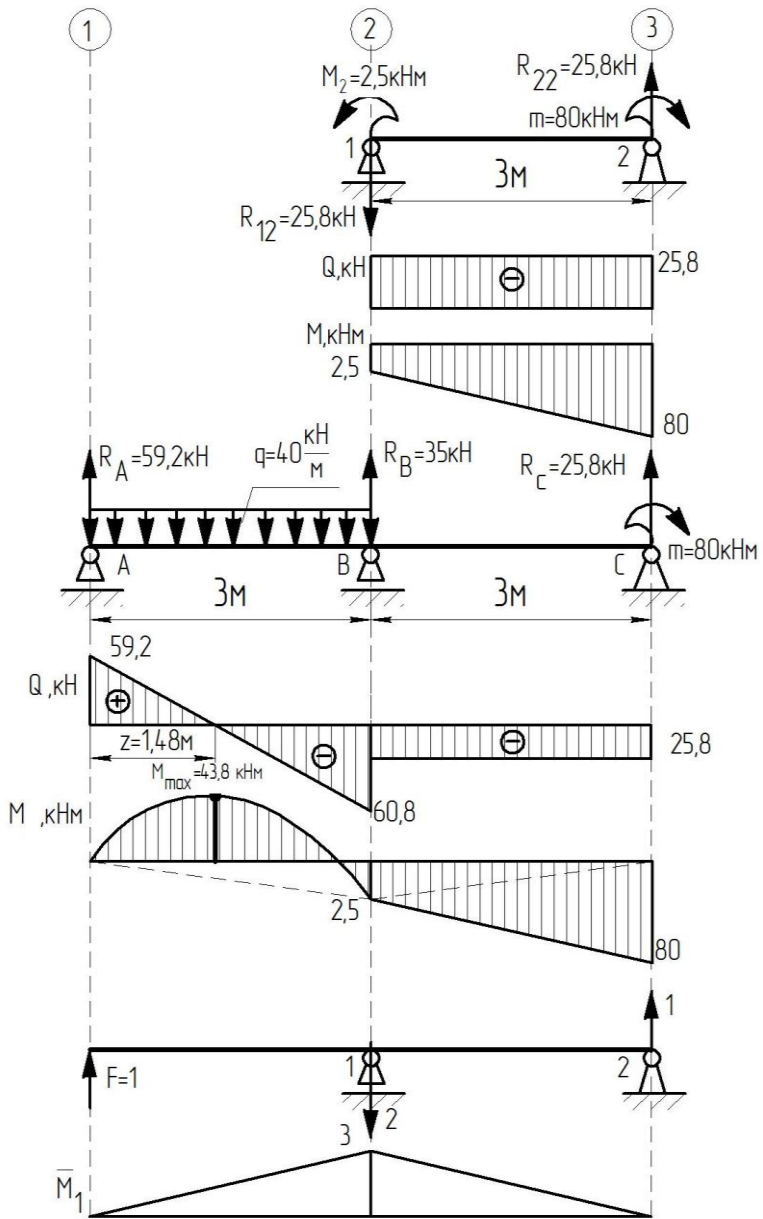


Рис.3.5 (продолжение)

Строим эпюры по пролётам. Реакции на опорах балки будут равны:

$$R_A = R_{01} = 59,2 \text{ кН},$$

$$R_B = R_{11} + R_{12} = 60,8 - 25,8 = 35 \text{ кН},$$

$$R_C = R_{12} = 25,8 \text{ кН}.$$

Выполняем проверку правильности вычислений. Вертикальное перемещение точки A должно быть равным нулю:

$$\Delta_A = 0,$$

$$\Delta_A = \frac{(M_F \bar{M}_1)}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{40 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = 0$$

Пример 2

Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 3.6.

Решение.

Балка один раз статически неопределима. Рисуем приведенную, основную и эквивалентную системы.

Записываем уравнение трёх моментов:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right).$$

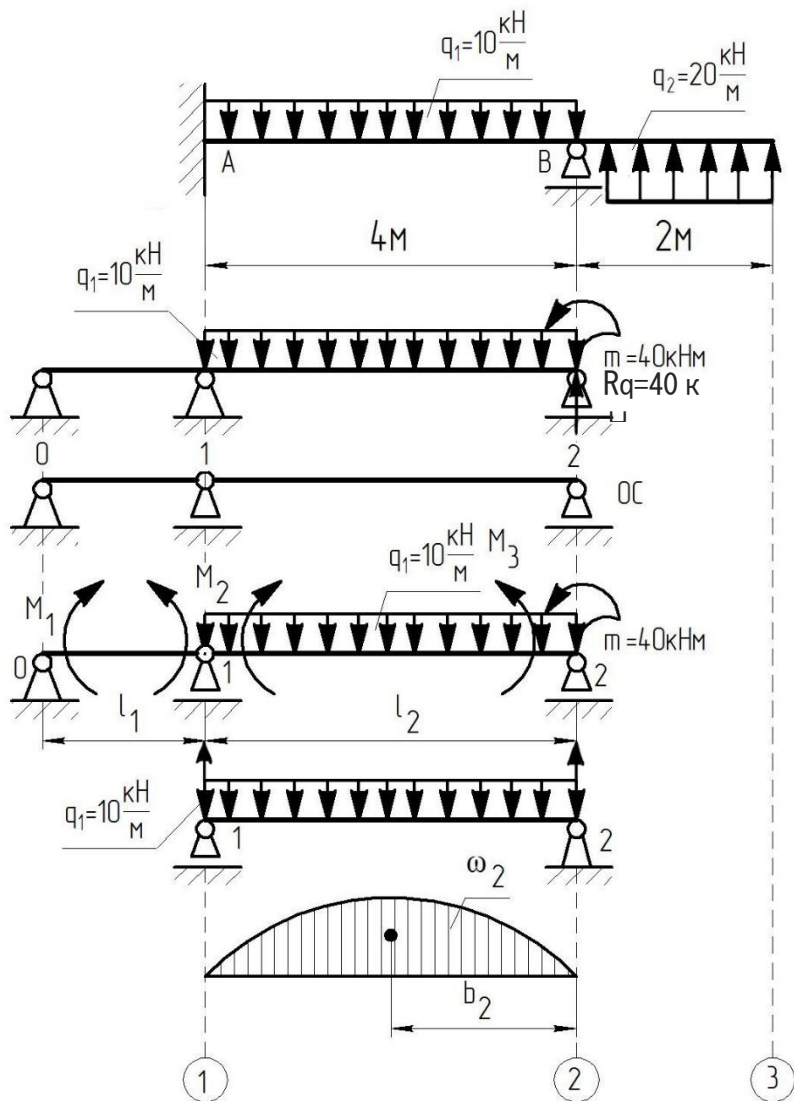


Рис. 3.6

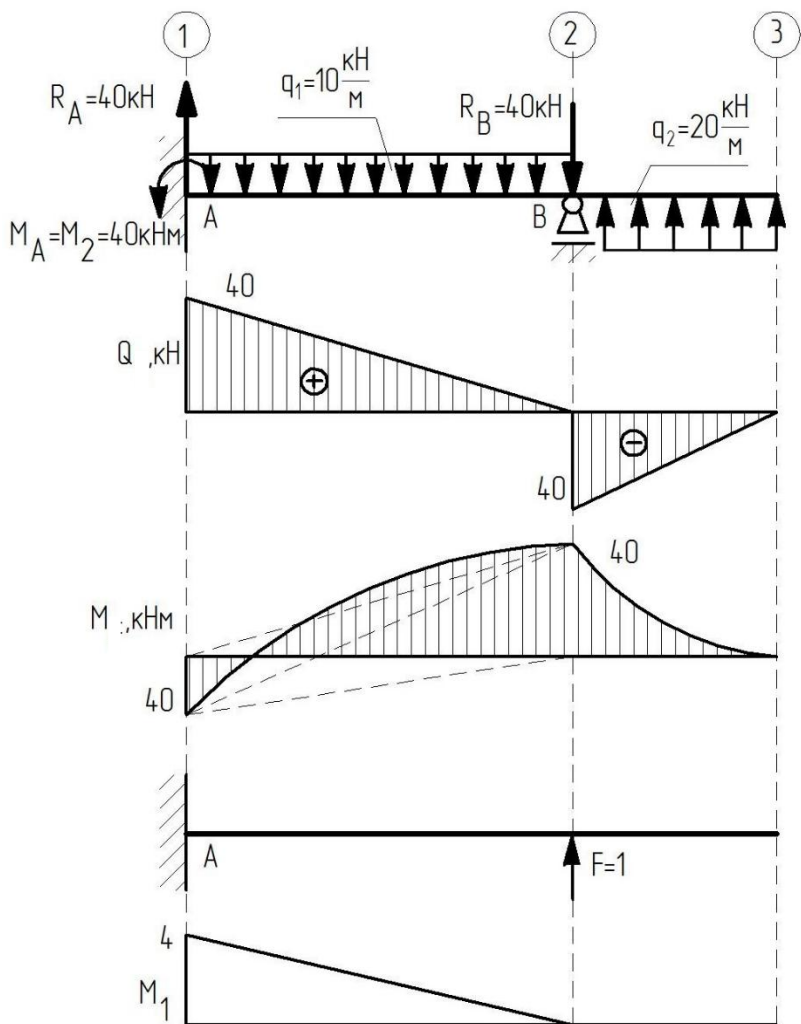


Рис. 3.6 (продолжение)

Находим моменты в опорах:

$$M_1 = 0, \quad M_3 = m = q_2 \cdot 2 = 40 \text{ кНм.}$$

Момент m учитываем только один раз в уравнении трех моментов и не учитываем на втором пролете балки.

Строим эпюры изгибающего момента для каждой балки в отдельности и определяем правые части уравнения трех моментов:

$\omega_1 a_1 = 0$; $l_1 = 0$, т.к. это фиктивный (нулевой) пролет.

$$\omega_1 b_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 = 106,67 \text{ кНм}^3.$$

После подстановки в уравнение трех моментов и преобразований находим момент M_2 :

$$2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \frac{\omega_1 a_1}{l_1},$$

$$M_2 = -3 \frac{\omega_1 a_1}{l_1(l_1 + l_2)} - \frac{M_3 l_2}{2(l_1 + l_2)},$$

$$M_2 = -3 \cdot \frac{106,67}{4 \cdot 4} - \frac{40 \cdot 4}{2 \cdot 4} = -20 - 20 = -40 \text{ кНм}, \quad M_A = M_2 = -40 \text{ кНм.}$$

Находим реакции опор и строим эпюры внутренних сил:

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - q_1 \cdot 4 \cdot 2 + q_2 \cdot 2 \cdot 5 - R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{40 - 10 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot 5}{4} = 40 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0, \quad M_A + q_1 \cdot 4 \cdot 2 + q_2 \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{40 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 40 \text{ кН.}$$

Проверяем правильность решения задачи. Вертикальное перемещение точки B должно равняться нулю:

$$\Delta_B = 0,$$

$$\Delta_B = \frac{(M_F \cdot \bar{M}_1)}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right) = 0.$$

Пример 3

Построить эпюры внутренних сил для балки, изображенной на рис. 3.7.

Решение.

Балка дважды статически неопределима. Выбираем основную систему путем постановки шарниров в промежуточные опоры балки.

Записываем систему уравнений трёх моментов:

$$\begin{cases} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right), \\ M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_3 = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \right). \end{cases}$$

В данном примере:

$M_0 = 0$, $M_3 = 0$, $l_1 = l_2 = l$, M_2 , M_3 - неизвестные моменты.

Тогда получим:

$$\begin{cases} 4M_1 l + M_2 l = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l} + \frac{\omega_2 b_2}{l} \right), \\ M_1 l + 4M_2 l = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{l} + \frac{\omega_3 b_3}{l} \right). \end{cases}$$

Строим эпюры изгибающих моментов и определяем правые части уравнений трех моментов:

$$\frac{\omega_1 a_1}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 2 \right) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

$$\frac{\omega_2 b_2}{l} = \frac{\omega_2 a_2}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{40 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 \right) = \frac{320}{3} \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_3 b_3}{l} &= \frac{\omega_3' b_3' - \omega_3'' b_3''}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}^2. \end{aligned}$$

Подставляем значения в систему уравнений. Получим:

$$M_1 = -55 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_2 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Моменты отрицательны, поэтому меняем их направление на обратное направление (б).

Максимальное значение изгибающего момента на втором пролёте определим по формуле:

$$M_z = M_z^0 + M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} z_0 = 38 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_z^0 = \frac{ql_2}{2} z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = 79,5 \text{ кН}\cdot\text{м}, z_0 = \frac{86,25}{q} = 2,16 \text{ м}.$$

Выполним проверку путём перемножения эпюры изгибающих моментов M на единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{(M \cdot \bar{M}_1)}{EI} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{3EI} (-500 + 500) = 0, \\ \frac{(M \cdot \bar{M}_2)}{EI} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (-350 + 350) = 0. \end{aligned}$$

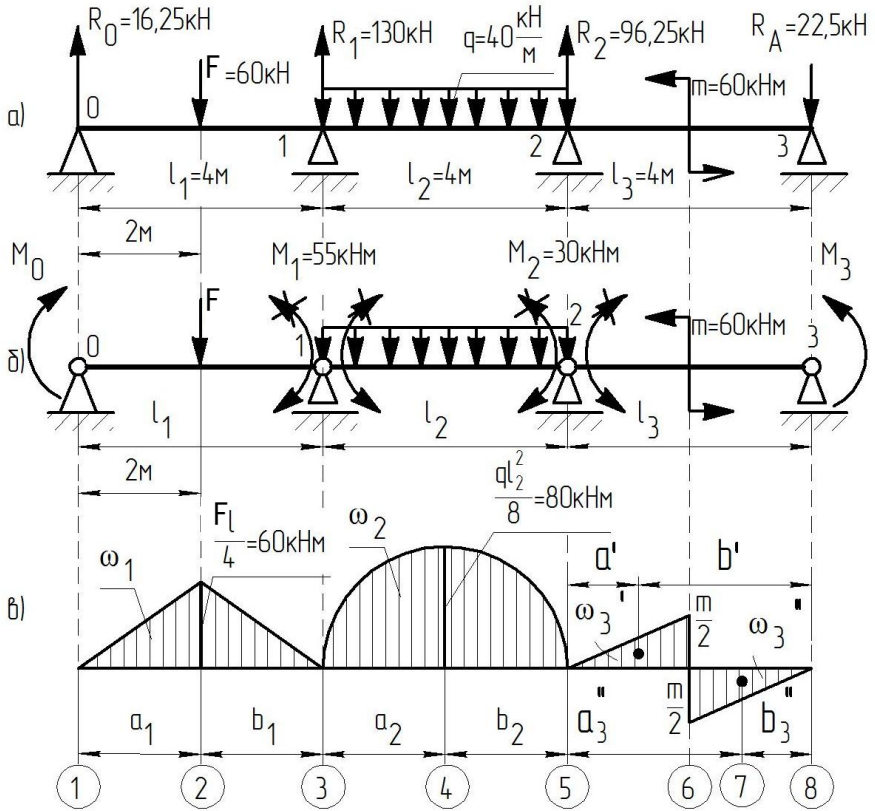


Рис 3.7

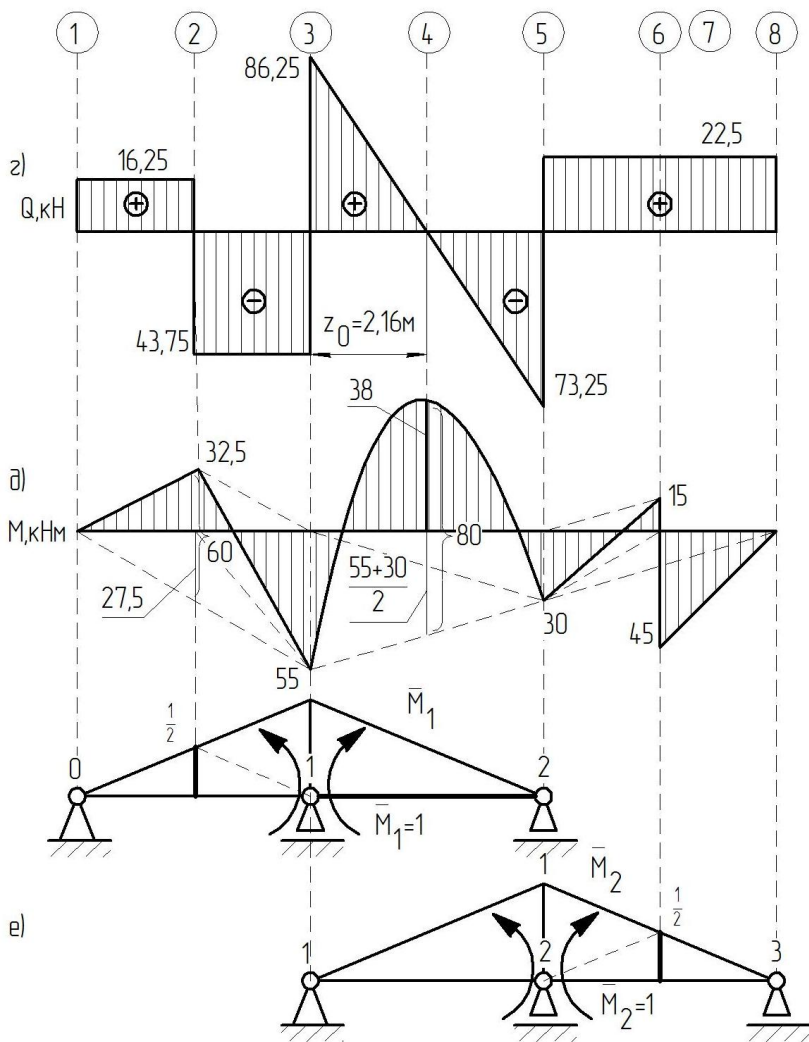


Рис. 3.7 (продолжение)

4. СХЕМЫ БАЛОК ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Для балки, изображенной на рис. 4.1 при значениях нагрузок q , $F=\alpha q a$, $M=\beta q a^2$ из табл. 4.1 требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость.
2. Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M . Сделать окончательную проверку.
3. Подобрать двутавровое сечение балки при $a = 2$ м, $[\sigma]=160$ МПа. Принять $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблица 4.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q, \text{кН/м}$	10	15	20	25	30	35	40	10	15	20
α	1,85	0,40	0,30	0,74	0,25	0,50	0,50	0,50	1,30	0,50
β	0,55	0,30	0,20	0,10	0,20	0,25	0,20	0,80	0,50	0,30
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q, \text{кН/м}$	25	30	35	40	10	15	20	25	30	35
α	0,20	0,40	0,30	0,15	1,00	0,80	0,75	0,34	0,30	0,20
β	0,20	0,30	0,20	0,10	0,90	0,40	0,50	0,30	0,35	0,15
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$q, \text{кН/м}$	40	10	15	20	25	30	35	40	10	15
α	0,25	1,40	1,00	0,45	0,54	0,65	0,40	0,30	0,75	0,60
β	0,15	0,40	0,60	0,40	0,40	0,15	0,25	0,25	0,95	0,20

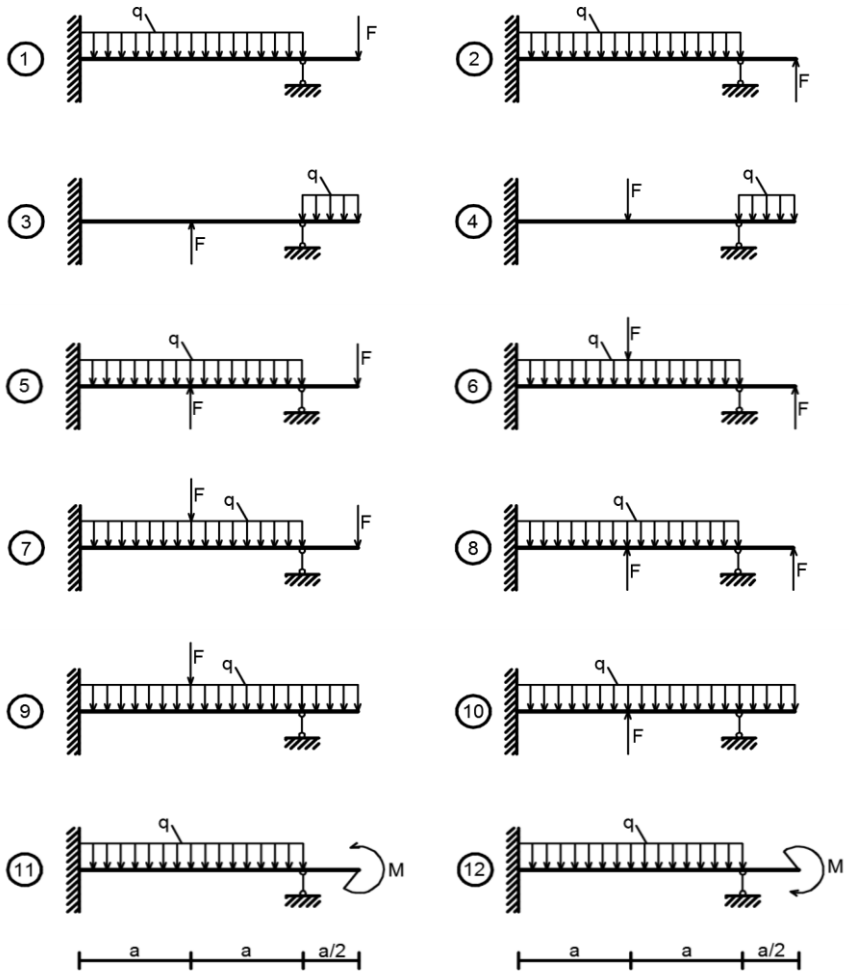


Рис. 4.1

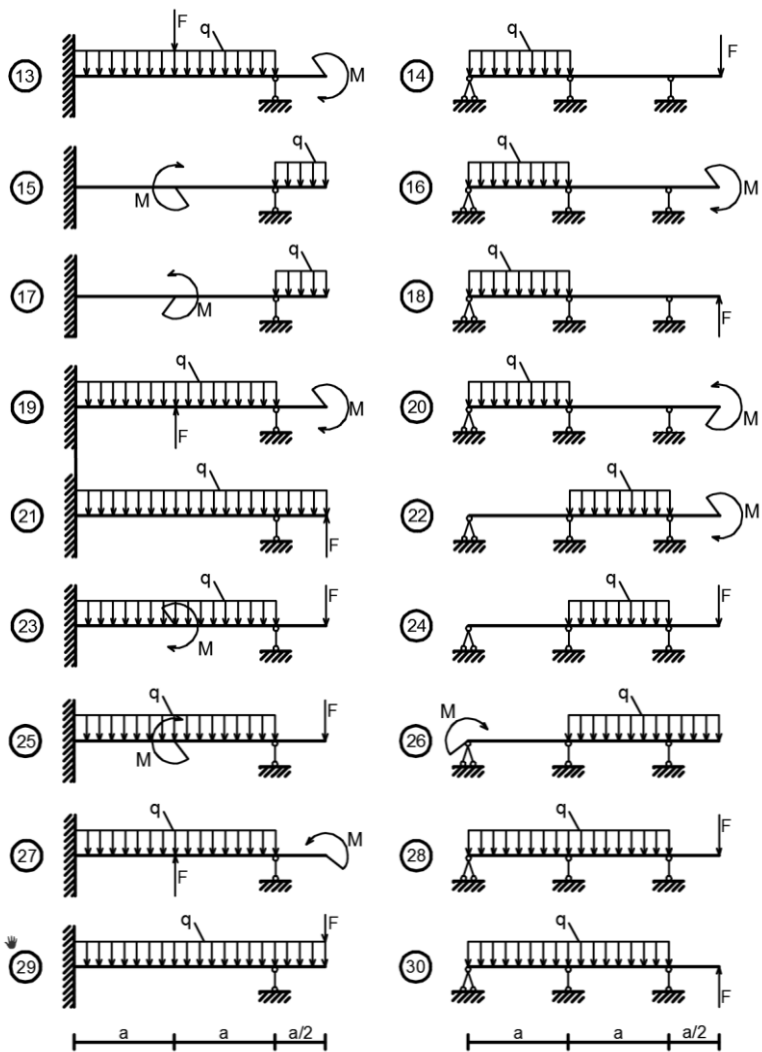


Рис. 4.1 (продолжение)

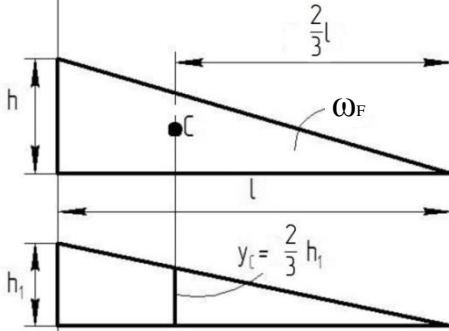
Литература

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. - М.: Наука, 1967 (1986; 1999). - 552 (512; 591) с.
2. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. - М.: Высшая школа, 1968 (1973; 1987). - 424 (328; 367) с.
3. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г.С. Шпиро. - М.: Высшая школа, 1975 (1989). - 742 (624) с.
4. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка [и др.] - Киев: Вища школа, 1986. - 775 с.
5. Бородин, Н. А. Сопротивление материалов: учебное пособие / Н. А. Бородин. - М.: Дрофа, 2001. - 288 с.
6. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. - М.: Физматлит, 2002. - 544 с.
7. Василевич, Ю. В. Механика материалов: учебное пособие / Ю. В. Василевич, Ю. П. Бобруйко [и др.] - Минск: БНТУ, 2005. - 155 с.
8. Качурин, В. К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В. К. Качурин. - М.: Наука, 1970. - 432 с.
9. Винокуров, Е. Ф. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев. - Минск: Наука и техника, 1988. - 464 с.

Приложение 1

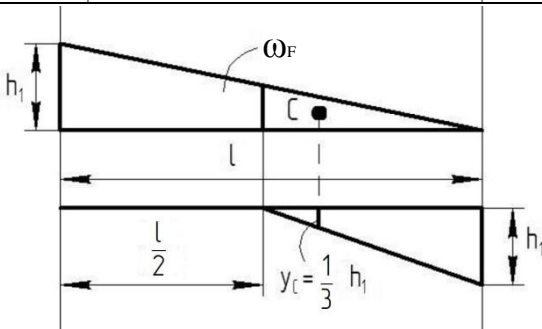
Перемножение эпюр по методу А. Н. Верещагина

$$K = \omega_F y_c$$



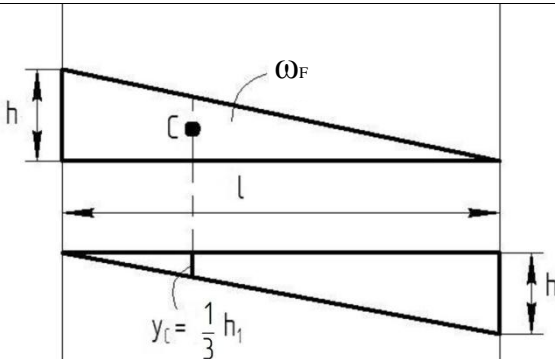
$$K = \frac{1}{2} h l \cdot \frac{2}{3} h_1$$

Примечание. Если эпюры расположены по одну сторону от оси, то они перемножаются со знаком «плюс», если по разные – со знаком «минус».



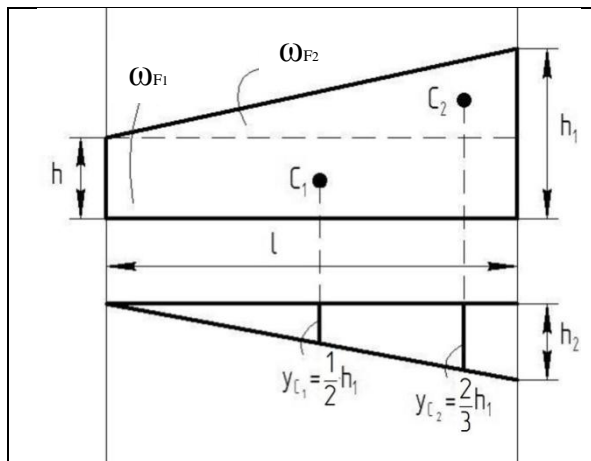
$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} h_1$$

Примечание. Перемножение эпюр производится по участкам.



$$K = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot l \cdot \frac{1}{3} h_1$$

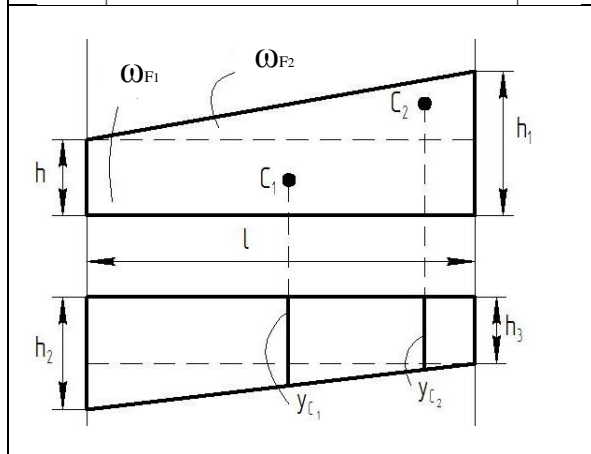
Примечание. Если обе эпюры линейные, то безразлично - умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй, или наоборот



$$K = \omega_{F1} y_{c1} + \omega_{F2} y_{c2} =$$

$$= -h \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot h_2 - \frac{1}{2} (h_1 - h) \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot h_2$$

Примечание. Перемножение эюр можно производить только в том случае, когда хотя бы одна из эюр линейная



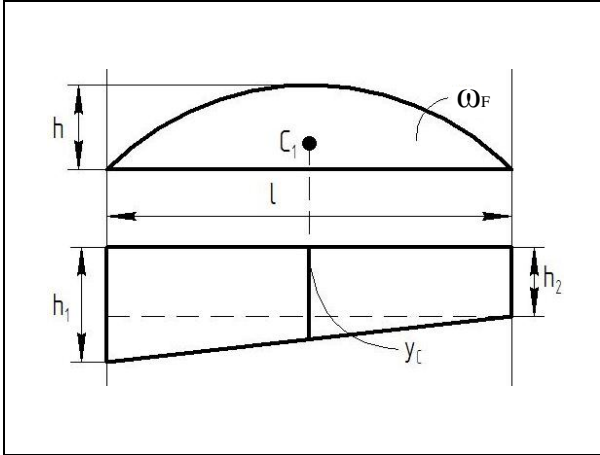
$$y_{c1} = h_3 + \frac{1}{2} (h_2 - h_3);$$

$$y_{c2} = h_3 + \frac{1}{3} (h_2 - h_3);$$

$$K = \omega_{F1} y_{c1} + \omega_{F2} y_{c2} =$$

$$= -hl \left(h_3 \cdot \frac{1}{2} (h_2 - h_3) \right) -$$

$$- \frac{1}{2} l (h_1 - h) \left(h_3 + \frac{1}{3} (h_2 - h_3) \right).$$

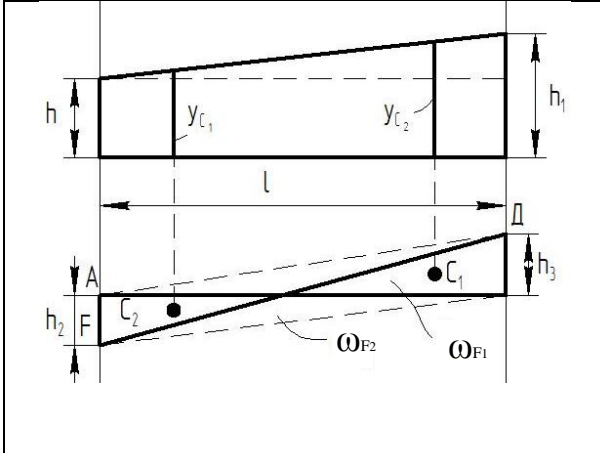


$$h = \frac{ql^2}{8},$$

$$\omega_F = \frac{2}{3}hl,$$

$$K = -\frac{2}{3}hl \cdot \left(h_2 + \frac{1}{2}(h_1 - h_2) \right)$$

Примечание. Если одна из эпюр криволинейна, то площадь всегда берётся только на криволинейной эпюре.

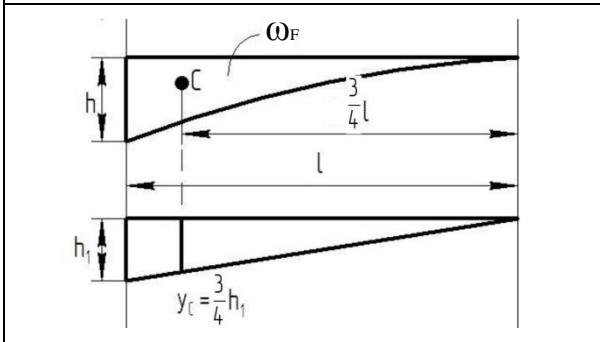


$$y_{C1} = h + \frac{1}{3}(h_1 - h),$$

$$y_{C2} = h + \frac{2}{3}(h_1 - h),$$

$$K = \frac{1}{2}lh_3 \left(h + \frac{2}{3}(h_1 - h) \right) - \frac{1}{2}lh_2 \left(h + \frac{1}{3}(h_1 - h) \right)$$

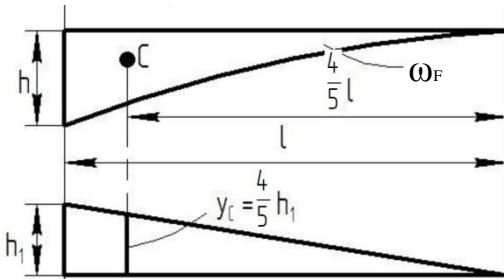
$$\Delta ABD = \omega_{F1}, \Delta ABF = \omega_{F2}.$$



Чистая квадратичная парабола:

$$h = \frac{ql^2}{8}, \omega_F = \frac{1}{3}hl,$$

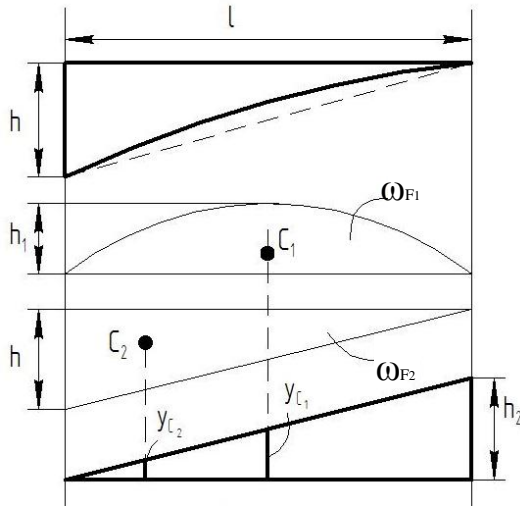
$$K = \frac{1}{3}hl \frac{3}{4}h_1$$



Кубическая парабола

$$\omega_F = \frac{1}{4}hl,$$

$$K = -\frac{1}{4}hl\frac{4}{5}h_1$$



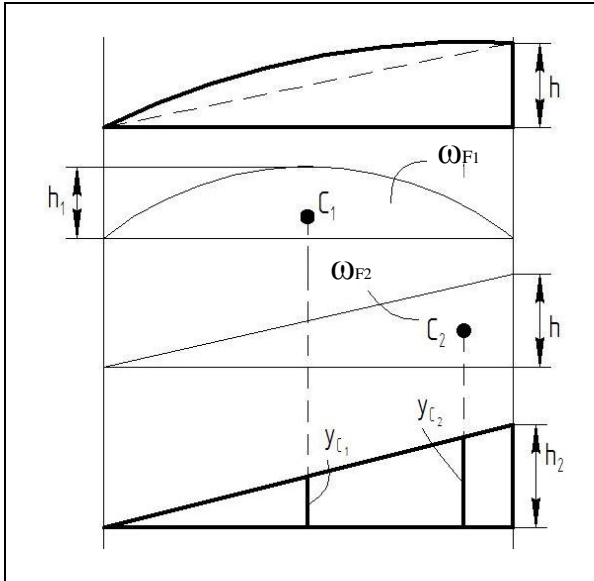
$$y_{c1} = \frac{1}{2}h_2,$$

$$y_{c2} = \frac{1}{3}h_2,$$

$$K = \omega_{F1}y_{c1} + \omega_{F2}y_{c2} =$$

$$= \frac{2}{3}h_1l\frac{1}{2}h_2 - \frac{1}{2}hl\frac{1}{3}h_2.$$

где $h = \frac{ql^2}{8},$



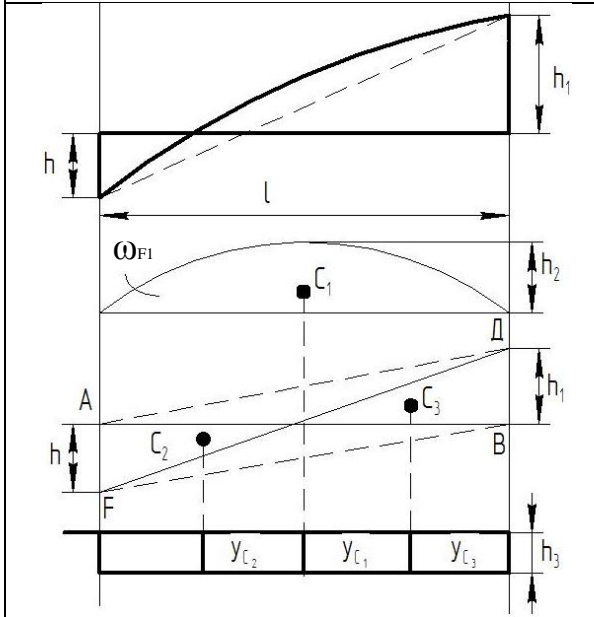
$$y_{c1} = \frac{1}{2}h_2,$$

$$y_{c2} = \frac{2}{3}h_2,$$

$$K = \omega_{F1}y_{c1} + \omega_{F2}y_{c2} =$$

$$= \frac{2}{3}h_1l \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}hl \frac{1}{3}h_2.$$

Где $h_1 = \frac{ql^2}{8}.$



$$\Delta ABD = \omega_{F3}, \Delta ABF = \omega_{F2},$$

$$K = \omega_{F1}y_{c1} + \omega_{F2}y_{c2} =$$

$$= -\frac{2}{3}h_2l \frac{1}{2}h_3 + \frac{1}{2}hlh_3 - \frac{1}{2}h_1lh_3,$$

$$h_2 = \frac{ql^2}{8}.$$

Примечание. Если одна эпюра сложная, то она разбивается на простейшие, и перемножение совершается для каждой простейшей фигуры.

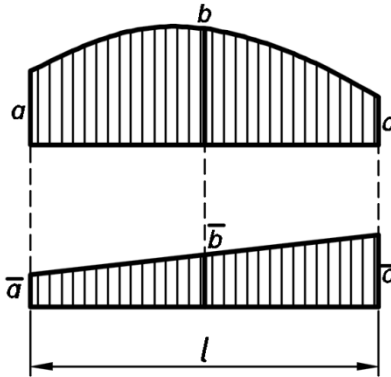
Формула Симпсона

В случае более сложных эпюр для вычисления интеграла в формуле Максвелла-Мора целесообразно применять формулу Симпсона:

$$\Delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_k \cdot M_F}{EI} dx = \frac{l}{6EI} (a \cdot \bar{a} + 4 \cdot b \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{c}),$$

где a , \bar{a} , c , \bar{c} - значения изгибающих моментов в крайних точках интервала интегрирования (см. рис.);

b , \bar{b} - значения в средних точках интервала интегрирования.



Для увеличения точности результатов интегрирования нужно уменьшить длину участка интегрирования.