

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ – КУТТЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

д. ф.-м. н. **Янковский А.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск*

Многие физические и механические явления и процессы описываются начально-краевыми задачами с сингулярным возмущением [1 и др.], решения которых обладают локальными эффектами типа пограничных слоев. Как правило, наибольший интерес у исследователей вызывает поведение неизвестных функций именно в этих подобластях погранслоев, где решения имеют большие градиенты. Поэтому актуальной является проблема разработки надежных, устойчивых методов численного интегрирования начально-краевых задач с большими градиентами решения [2 и др.]. Для наиболее достоверного определения поведения неизвестных функций в подобластях с большими и быстроосциллирующими градиентами целесообразно, чтобы эти методы обладали высокими порядками точности.

В одномерных случаях хорошо зарекомендовали себя неклассические методы Рунге – Кутты (МРК) [3] для эффективного численного интегрирования начальных и краевых задач с жесткими дифференциальными уравнениями, решения которых обладают указанными выше особенностями. Поэтому естественно возникает вопрос о целесообразности обобщения этих методов на многомерные случаи, что и было сделано автором в [4 и др.].

Известно, что уравнение переноса является модельным и позволяет «отрабатывать» схемы для более сложных уравнений акустики, нелинейных уравнений газовой динамики и др. [5]. Поэтому исследование численных схем интегрирования этого уравнения обобщенными МРК представляет определенный методологический интерес. В работе [4] было показано, что некоторые классические конечно-разностные схемы интегрирования уравнения переноса могут быть получены как следствие применения обобщенных МРК.

Настоящее исследование посвящено изучению спектральной устойчивости обобщенных МРК высоких порядков точности применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса.

С этой целью рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial y}{\partial x}, \quad y(0, x) = y_0(x), \quad |x| < \infty, \quad t \geq 0, \quad \alpha = \pm 1, \quad (1)$$

где $y_0(x)$ – дифференцируемая функция. Решением задачи (1) является «бегущая волна» [5]

$$y(t, x) = y_0(x + \alpha t). \quad (2)$$

Дискретизируем начальную задачу (1) по времени, т.е. будем рассматривать ее решение в моменты времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t_0 = 0, \quad (3)$$

где τ – шаг по времени (возможно, переменный: $\tau = \tau_{n+1}$).

Далее будем исследовать спектральную устойчивость разных обобщенных МРК применительно к (1) в дискретные моменты времени (3). Согласно [5], для этого решение при $t = t_n$ представим в виде гармоника

$$y^n(x) \equiv y(t_n, x) = q_n \sin(kx + \varphi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Тогда в силу свойства «бегущей волны» (2) решение в следующий момент времени должно иметь вид

$$y^{n+1}(x) = q_{n+1} \sin(kx + \varphi_{n+1}), \quad |x| < \infty, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n, \quad (5)$$

где k , q_n , q_{n+1} , φ_n , θ_n – некоторые постоянные, причем q_{n+1} , θ_n зависят от α , k , q_n , φ_n , τ ; θ_n – сдвиг фазы гармоника, характеризующий свойство переноса («бегущую волну»).

Введем норму решения в пространстве C :

$$\|y^n\|_C = \max_x |y^n(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

тогда в силу (4), (5) имеем

$$\|y^n\|_C = |q_n|, \quad \|y^{n+1}\|_C = |q_{n+1}|. \quad (7)$$

Отношение

$$R = R(\alpha, \tau, k) = |q_{n+1}|/|q_n| \quad (8)$$

по аналогии с терминологией, принятой в [3], целесообразно назвать функцией устойчивости соответствующего обобщенного МРК применительно к начальной задаче для уравнения переноса (1).

Согласно (6)–(8), если $R \leq 1$, то обобщенный МРК спектрально устойчив, а при $R > 1$ – спектрально неустойчив.

В силу равенств (4), (5), (8) для определения функции устойчивости в (4) достаточно принять

$$q_n = 1, \quad (9)$$

тогда из (8) следует

$$R(\alpha, \tau, k) = |q_{n+1}(\alpha, \tau, k)|. \quad (10)$$

Таким образом, для определения функции устойчивости R , соответствующей обобщенному МРК, необходимо определить коэффициент q_{n+1} в (5) при выполнении равенств (4), (9).

Согласно [4], применение s -стадийного обобщенного МРК для интегрирования начальной задачи (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по пространственной переменной x следующего вида:

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{E}y^n(x) + \alpha\tau\mathbf{A}\mathbf{Y}'(x); \quad (11)$$

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \alpha\tau\mathbf{B}^*\mathbf{Y}'(x), \quad (12)$$

где

$$\mathbf{Y}(x) = \{Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_s(x)\}^*, \quad \mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}^*; \quad (13)$$

$\mathbf{Y}(x)$ – вспомогательная векторная функция; $A = (a_{ij})$ – $s \times s$ -матрица Бутчера соответствующего МРК; \mathbf{B} – s -компонентный вектор, составленный из элементов последней строки матрицы Бутчера (см. (3.1.6) в [3]); \mathbf{E} – s -компонентный единичный вектор; звездочка означает операцию транспонирования; штрих – производная по x .

З а м е ч а н и е. Без потери общности рассуждений для упрощения выкладок в (4) можно принять $\varphi_n = 0$ и учесть (9), тогда из (5), (10) получим функцию устойчивости и $\varphi_{n+1} = \theta_n$.

Подставим (4) в (11), тогда периодическое по x решение системы (11) следует разыскивать в виде

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{U} \sin kx + \mathbf{V} \cos kx, \quad |x| < \infty, \quad (13)$$

где \mathbf{U}, \mathbf{V} – s -компонентные векторы-столбцы, подлежащие определению.

Из системы (11) с учетом (4), (13) и замечания следует матричное равенство

$$\mathbf{U} \sin kx + \mathbf{V} \cos kx = \mathbf{E} \sin kx + \alpha\tau\mathbf{A}(k\mathbf{U} \cos kx - k\mathbf{V} \sin kx). \quad (14)$$

Так как функции $\sin kx$, $\cos kx$ являются линейно независимыми, то из (14) получаем матричные соотношения

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} - \alpha\tau k\mathbf{A}\mathbf{V}; \quad (15)$$

$$\mathbf{V} = \alpha\tau k\mathbf{A}\mathbf{U}. \quad (16)$$

Подставим (16) в (15), тогда будем иметь матричное уравнение

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} - (\alpha\tau k)^2 \mathbf{A}^2 \mathbf{U},$$

откуда

$$\left[I + (\tau k)^2 \mathbf{A}^2 \right] \mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad (17)$$

где I – единичная $s \times s$ -матрица.

Матричное уравнение (17) является СЛАУ относительно \mathbf{U} . Решив это уравнение, определим вектор \mathbf{U} , после подстановки которого в (16) получим и вектор \mathbf{V} .

Согласно (5), имеет место разложение $y^{n+1}(x) = y_s^{n+1} \sin kx + y_c^{n+1} \cos kx$, где y_s^{n+1} , y_c^{n+1} – разыскиваемые коэффициенты. Подставим это выражение в (12) и учтем (4), (13) и замечание, тогда получим

$$y_s^{n+1} \sin kx + y_c^{n+1} \cos kx = \sin kx + \alpha \tau \mathbf{B}^* (k\mathbf{U} \cos kx - k\mathbf{V} \sin kx),$$

отсюда следует

$$y_s^{n+1} = 1 - \alpha \tau k \mathbf{B}^* \mathbf{V}, \quad y_c^{n+1} = \alpha \tau k \mathbf{B}^* \mathbf{U}. \quad (18)$$

Согласно (5), (9), (10) и замечанию, из (18) окончательно получаем

$$R(\alpha, \tau k) = \sqrt{(y_s^{n+1})^2 + (y_c^{n+1})^2}, \quad \cos \theta_n = y_s^{n+1} / R, \quad \sin \theta_n = y_c^{n+1} / R. \quad (19)$$

На основании соотношений (16)–(19) можно исследовать спектральную устойчивость обобщенных МРК разных порядков точности. Для этого необходимо лишь использовать компоненты матрицы Бутчера соответствующего МРК [3]. В случаях малостадийных МРК (низких порядков точности) функцию устойчивости R можно получить в явном виде. В случаях же многостадийных МРК (высоких порядков точности по τ) целесообразно исследовать функцию устойчивости по схеме (16)–(19) численно, варьируя произведение τk от нуля до бесконечности (машинной бесконечности).

Исследуем спектральную устойчивость конкретных обобщенных МРК высоких порядков точности.

Четырехстадийный ($s = 4$) метод Лобатто IIIA (здесь и далее использованы названия МРК, принятые в [3]) шестого порядка точности по τ определяется следующими компонентами матрицы A и вектора \mathbf{B} (см. (11), (12))

$$\begin{aligned} a_{1j} &= 0 \quad (j = \overline{1, 4}), \quad a_{21} = (11 + \sqrt{5})/120, \quad a_{22} = (25 - \sqrt{5})/120, \quad a_{23} = (25 - 13\sqrt{5})/120, \\ a_{24} &= (-1 + \sqrt{5})/120, \quad a_{31} = (11 - \sqrt{5})/120, \quad a_{32} = (25 + 13\sqrt{5})/120, \quad a_{33} = (25 + \sqrt{5})/120, \\ a_{34} &= (-1 - \sqrt{5})/120, \quad a_{41} = a_{44} = b_1 = b_4 = 1/12, \quad a_{42} = a_{43} = b_2 = b_3 = 5/12. \end{aligned} \quad (20)$$

Расчеты, проведенные по формулам (16)–(19) с учетом (20), показали, что для этого метода $R \equiv 1$, т.е. имеет место спектральная устойчивость.

Четырехстадийный метод Лобатто IIIB (шестой порядок точности) характеризуется коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1/12, \quad a_{i4} = 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad a_{12} = (-1 - \sqrt{5})/24, \quad a_{13} = (-1 + \sqrt{5})/24, \quad a_{22} = (25 + \sqrt{5})/120, \\ a_{23} &= (25 - 13\sqrt{5})/120, \quad a_{32} = (25 + 13\sqrt{5})/120, \quad a_{33} = (25 - \sqrt{5})/120, \quad a_{42} = (11 - \sqrt{5})/24, \\ a_{43} &= (11 + \sqrt{5})/24, \quad b_1 = b_4 = 1/12, \quad b_2 = b_3 = 5/12, \end{aligned} \quad (21)$$

на основании которых по формулам (16)–(19) было получено $R \equiv 1$ (спектральная устойчивость).

Четырехстадийный метод Лобатто IIIC (шестой порядок точности) определяется следующими компонентами матрицы A и вектора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1/12 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad a_{12} = -\sqrt{5}/12, \quad a_{13} = \sqrt{5}/12, \quad a_{14} = -1/12, \\ a_{22} &= 1/4, \quad a_{23} = (10 - 7\sqrt{5})/60, \quad a_{24} = \sqrt{5}/60, \quad a_{32} = (10 + 7\sqrt{5})/60, \quad a_{33} = 1/4, \\ a_{34} &= -\sqrt{5}/60, \quad a_{41} = a_{44} = b_1 = b_4 = 1/12, \quad a_{42} = a_{43} = b_2 = b_3 = 5/12. \end{aligned} \quad (22)$$

Расчеты, проведенные по формулам (16)–(19) с учетом (22), показали, что в отличие от предыдущих случаев функция устойчивости этого метода монотонно убывает от 1 до 0 при изменении произведения τk от 0 до бесконечности ($R < 1$ при $\tau k \in (0, \infty)$) – спектральная устойчивость).

Трехстадийный ($s = 3$) метод Радо IIA (пятый порядок точности по τ) характеризуется коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= (88 - 7\sqrt{6})/360, \quad a_{12} = (296 - 169\sqrt{6})/1800, \quad a_{13} = (-2 + 3\sqrt{6})/225, \\ a_{21} &= (296 + 169\sqrt{6})/1800, \quad a_{22} = (88 + 7\sqrt{6})/360, \quad a_{23} = (-2 - 3\sqrt{6})/225, \\ a_{31} &= b_1 = (16 - \sqrt{6})/36, \quad a_{32} = b_2 = (16 + \sqrt{6})/36, \quad a_{33} = b_3 = 1/9, \end{aligned} \quad (23)$$

на основании которых было установлено, что функция устойчивости этого метода монотонно убывает от 1 до 0 при $\tau k \in [0, \infty)$ (спектральная устойчивость).

Трехстадийный метод Радо IIA (пятый порядок точности по τ) определяется следующими компонентами матрицы A и вектора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{i1} = 1/9 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad a_{12} = (-1 - \sqrt{6})/18, \quad a_{13} = (-1 + \sqrt{6})/18, \\ a_{22} &= (88 + 7\sqrt{6})/360, \quad a_{23} = (88 - 43\sqrt{6})/360, \quad a_{32} = (88 + 43\sqrt{6})/360, \\ a_{33} &= (88 - 7\sqrt{6})/360, \quad b_2 = (16 + \sqrt{6})/36, \quad b_3 = (16 - \sqrt{6})/36. \end{aligned} \quad (24)$$

Расчеты, проведенные по формулам (16)–(19) с учетом (24), показали, что функция устойчивости этого метода также монотонно убывает от 1 до 0 при $\tau k \in [0, \infty)$ (спектральная устойчивость).

Трехстадийный метод Гаусса – Лежандра (шестой порядка точности по τ) характеризуется коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= 5/36, & a_{12} &= (80 - 24\sqrt{15})/360, & a_{13} &= (50 - 12\sqrt{15})/360, & a_{21} &= (50 + 15\sqrt{15})/360, \\ a_{22} &= 2/9, & a_{23} &= (50 - 15\sqrt{15})/360, & a_{31} &= (50 + 12\sqrt{15})/360, & a_{32} &= (80 + 24\sqrt{15})/360, \\ a_{33} &= 5/36, & b_1 &= b_3 = 5/18, & b_2 &= 4/9, \end{aligned} \quad (25)$$

на основании которых было установлено, что для этого метода $R \equiv 1$ (имеет место спектральная устойчивость).

Согласно (20)–(25), все исследованные выше обобщенные МРК являются неявными. Для решения же задачи Коши (1) наиболее естественно использовать явные методы [5]. Компоненты матрицы Бутчера для явных МРК разных порядков точности приведены, например, в [6]. Анализ явных обобщенных МРК, проведенный по формулам (16)–(19), показал, что для них функция устойчивости монотонно изменяется от 1 до бесконечности при $\tau k \in [0, \infty)$ (т.е. все явные обобщенные МРК спектрально неустойчивы). В частности, явный метод Эйлера (первый порядок точности по τ), согласно (1), реализуется так:

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=t_n} = y^n(x) + \alpha \tau (y^n(x))',$$

и имеет функцию устойчивости $R = \sqrt{1 + (\tau k)^2} > 1$ при $\tau k \in (0, \infty)$.

Среди неявных обобщенных МРК особое место занимают диагональные методы, так как для них ненулевые компоненты матрицы A (см. (11)) расположены на и под главной диагональю, что позволяет интегрировать уравнения системы (11) последовательно на каждой стадии. Так, например, трехстадийный диагонально неявный метод (метод Барриджа) определяется следующими ненулевыми компонентами матрицы A и вектора B :

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \gamma \quad (i = \overline{1, 3}), & a_{21} &= 1/2 - \gamma, & a_{31} &= 2\gamma, & a_{32} &= 1 - 4\gamma, \\ b_1 &= b_3 = [24(1/2 - \gamma)^2]^{-1}, & b_2 &= 1 - [12(1/2 - \gamma)^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

где γ – некоторая постоянная. При

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(\pi/18) \quad (27)$$

метод имеет четвертый порядок точности, а при других γ – третий [3]. Анализ функции устойчивости, проведенный по формулам (16)–(19) с учетом (26), (27), показал, что для метода Барриджа она монотонно убывает от 1 до 0.6304 при $\tau k \in [0, \infty)$ (спектральная устойчивость).

Для апробации полученных выше схем интегрирования начальной задачи (1) рассмотрим случай $\alpha = -1$ при начальном условии

$$y_0(x) = \sum_{m=0}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m x), \quad k_m = 2\pi(2m+1), \quad M = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

которое представляет собой конечную сумму гармоник.

Сравнивая (28) и (4) при $n = 0$, получим

$$q_0^{(m)} = 8/k_m, \quad \varphi_0^{(m)} = 0, \quad 0 \leq m \leq M. \quad (29)$$

Согласно (28), функция $y_0(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для периодической ступенчатой функции

$$z(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 + l \leq x < l; \\ +1, & l \leq x < 1/2 + l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (30)$$

с периодом $X = 1$. Точное решение начальной задачи Коши (1), (28) в силу (2) имеет вид

$$y(t, x) = \sum_{m=0}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m(x-t)). \quad (31)$$

Из равенства (31) следует, что на прямых $x-t = l/2$ частные производные по модулю

$$\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = 8 \left| \sum_{m=0}^M \cos(\pi(2m+1)l) \right| = 8(M+1), \quad x-t = l/2, \quad (32)$$

а модуль градиента решения в этих точках равен $8\sqrt{2}(M+1)$.

В качестве конкретного примера рассмотрим случай $M = 29$. При этом максимальные значения модуля градиента решения больше 330, а модуль функции (31) с учетом эффекта Гиббса, возникающего в силу разрывности функции (30), не превосходит значения 1.2, т.е. градиенты решения являются большими и пе-

риодически повторяющимися. Именно на задачах с такими особенностями решения целесообразно апробировать обобщенные МРК высокого порядка точности, позволяющих выяснить достоинства и недостатки этих методов, которые трудно оценить на весьма гладких (типа одной гармоники) решениях начальной задачи (1).

Так как точное решение (31) является периодическим с периодом $T = X = 1$ (равным периоду колебаний низшей гармоники при $m = 0$), то внутри каждого периода колебаний целесообразно ввести локальное время t_* ($0 \leq t_* < T = 1$). Тогда глобальное t и локальное t_* время связаны между собой соотношением

$$t = t_* + TN = t_* + N, \quad 0 \leq t_* < 1, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (33)$$

где N – количество периодов колебаний низшей гармоники, предшествующих рассматриваемому периоду.

На рис. 1–3 приведены точное (кривые 1) и приближенные (остальные кривые) решения начальной задачи (1), (28) в точке $x = 0$ при относительно малых и больших значениях времени t . Согласно (33), на всех рисунках по оси абсцисс отложено локальное время t_* и указано соответствующее значение N : $N = 5 \cdot 10^4$ для рис. 1, 2 и рис. 3, б (большие значения времени) и $N = 50$ для рис. 3, а (относительно малые значения времени t). В расчетах шаг τ выбирался так, чтобы 10 шагов по времени были равны периоду колебаний высшей гармоники в решении (31), т.е. при $m = M = 29$.

На рис. 1 кривая 2 соответствует приближенному решению задачи (1), (28), полученному на основе обобщенного трехстадийного метода Гаусса – Лежандра (см. (25)). Дополнительные расчеты показали, что приближенные решения, полученные на базе четырехстадийных методов Лобатто IIIA и IIIB (см. (20), (21)), визуально не отличаются от этой кривой (для всех этих методов $R \equiv 1$). На рис. 2 кривая 2 характеризует

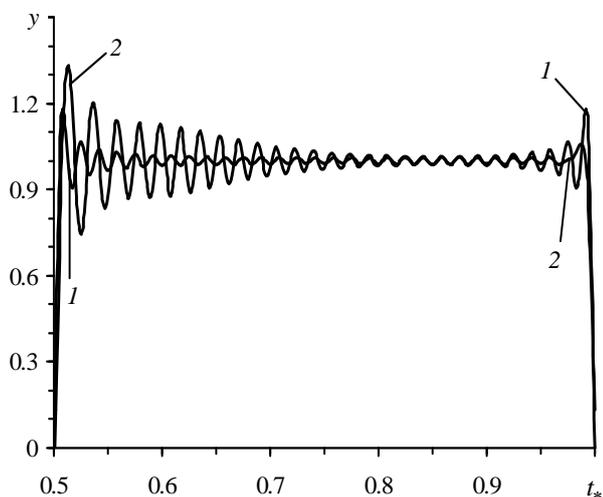


Рисунок 1 – Точное и приближенное решение, полученное трехстадийным методом Гаусса – Лежандра при $N = 5 \cdot 10^4$

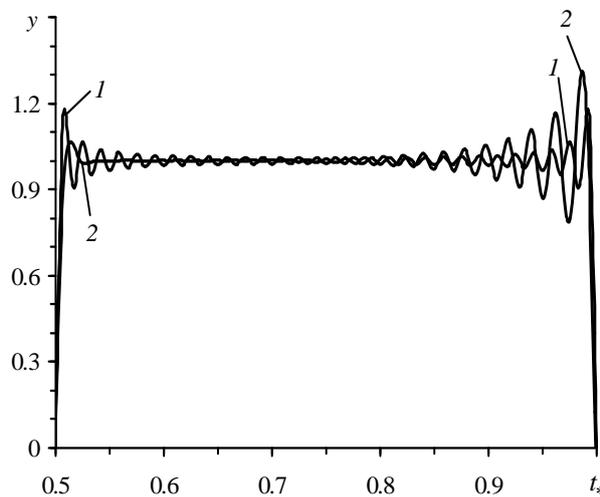


Рисунок 2 – Точное и приближенное решение, полученное четырехстадийным методом Лобатто IIIC при $N = 5 \cdot 10^4$

приближенное решение, определенное четырехстадийным методом Лобатто IIIС ($R < 1$).

Согласно поведению кривых 2 на рис. 1, 2, при больших значениях времени t ($N = 5 \cdot 10^4$, см. (33)) все указанные методы приводят к резкому увеличению «пиковых» значений (экстремумов) в окрестности точек $t_* \approx 0,5$ и $t_* \approx 1$ соответственно (т.е. в окрестности точек, в которых точное решение (31) имеет большие по модулю градиенты (32)). Так как для кривой 2, изображенной на рис. 1, $R \equiv 1$, то с увеличением времени t (с увеличением N) максимальные пиковые значения не убывают, а возрастают, хотя и ограничены сверху по модулю (последнее можно показать, исходя из (4), (5), (28), (29)). Пики же на кривой 2 рис. 2 с увеличением t постепенно затухают, так как для метода Лобатто IIIC $R < 1$.

На рис. 3 кривые 2 рассчитаны трехстадийным методом Радо IA (расчет методом Радо ПА (см. (23), (24)) приводит к результату, который визуально не отличается от линий 2), а кривые 3 – методом Барриджа (см. (26), (27)). Как видно из рис. 3, а, методы Радо IA и ПА при относительно малых значениях времени t ($N = 50$) приводят к приближенным результатам, которые визуально не отличаются от точного решения (кривая 1). Аналогичные результаты при $N = 50$ получаются и в случаях использования методов шестого порядка точности (см. (20)–(22), (25)).

Метод Барриджа (кривые 3 на рис. 3) в силу наименьшего порядка точности по сравнению с другими рассмотренными методами дает наихудшее приближение к точному решению, причем даже при относительно малых значениях времени t точность решения является достаточно грубой.

Сопоставление приближенных решений, приведенных на рис. 1–3, с точным решением позволяет сделать вывод, что, по-видимому, для численного интегрирования начальной задачи (1) наиболее целесообразно использовать методы Радо IA и ПА (см. кривые 2 на рис. 3).

Систему (11) можно разрешить относительно производных:

$$\mathbf{Y}'(x) = \alpha \tau^{-1} A^{-1} [\mathbf{Y}(x) - \mathbf{E}y^n(x)], \quad (34)$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A . Применяя для интегрирования системы (34) обычные МРК [3, 6] и исключая из (12) за счет (34) производные, получим конечно-разностные схемы для интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса. В [4] было продемонстрировано, что некоторые классические конечно-разностные схемы могут быть получены именно таким путем. Анализ этих схем показал, что если они построены на базе явных обобщенных МРК, для которых $R > 1$, то являются условно устойчивыми; если на основе неявных обобщенных МРК, для которых $R \equiv 1$, то схемы устойчивы в энергетической норме

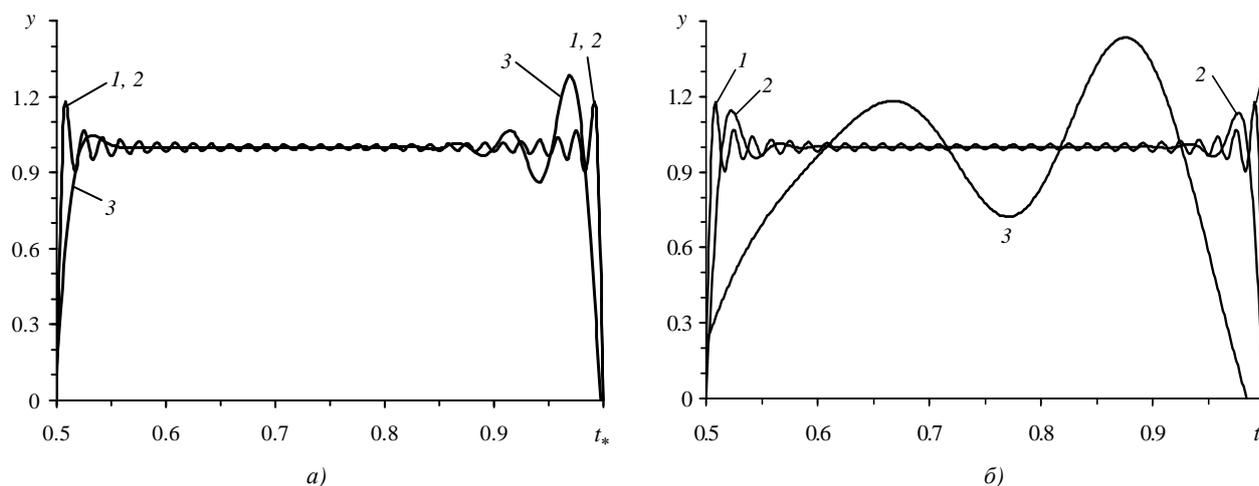


Рисунок 3 – Точное и приближенные решения, полученные трехстадийными методами Радо IA, ПА и методом Барриджа: а) – при $N = 50$; б) – при $N = 5 \cdot 10^4$

и неустойчивы в норме C пространства сеточных функций; если же на базе неявных обобщенных МРК, для которых $R < 1$, то схемы получаются безусловно устойчивыми в пространстве C . Эти факты дают некоторое представление о том, на какие обобщенные МРК следует ориентироваться при построении численных схем высоких порядков точности для интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса. Окончательный вывод может быть сделан, конечно же, лишь после изучения устойчивости конкретной конечно-разностной схемы, что выходит за рамки настоящего исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

РЕЗЮМЕ

Исследована спектральная устойчивость обобщенных методов Рунге – Кутты высоких порядков точности применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса. Проведено сравнение приближенных решений, полученных на базе разных обобщенных методов Рунге – Кутты, с точным решением при сложно осциллирующих начальных условиях с большими по модулю производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Найфе, А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 536 с.
2. Лисейкин, В.Д. Технология построения разностных сеток / В.Д. Лисейкин, Ю.И. Шокин, И.А. Васева, Ю.В. Лиханова. – Новосибирск: Наука, 2009. – 414 с.
3. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
4. Немировский, Ю.В. Обобщение методов Рунге – Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 57–76.
5. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
6. Березин, И.С. Методы вычислений. Т. II. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1959. – 620 с.

SUMMARY

Spectral stability of generalized Runge – Kutta high order method is studied as applied to the numerical integration of initial task for the transfer equation. Comparison of approximate solutions obtained on the basis of different generalized Runge – Kutta methods, with the exact solution in difficult oscillating initial conditions with large modulo derivatives is held.

Поступила в редакцию 04.11.2013