УДК 532.516

О ФОРМАХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СЛОЕВ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

к. ф.-м. н. **Конон П.Н.**

УО «Белорусский государственный университет», Минск

В различных отраслях промышленности широко применяются технологические процессы, использующие движение слоя жидкости на вращающихся поверхностях. Во многих случаях эти процессы основаны на явлениях неустойчивости свободной поверхности слоя жидкости.

Например, производство минеральных и металлических волокон из высокотемпературных расплавов при центробежном способе состоит в переработке расплава в волокно вращающимися дисками. В данном случае при быстром вращении дисков имеет место неустойчивость слоя под действием центробежных сил. По касательной к поверхности струи жидкости сбрасываются в окружающее пространство, дробятся на капли, которые в свою очередь могут делиться и, вытягиваясь и застывая, образуют металлическую нить или минеральное волокно.

В других технологических процессах требуются минимальные возмущения поверхности слоя жидкости. Это достигается при определенных умеренных угловых скоростях вращения диска. Ряд экспериментов показывает, что в данном случае движение диска и слоя можно рассматривать как единое целое. В [3,4] рассмотрено относительное равновесие вязких слоев жидкости на внутренней и внешней поверхности закрученного цилиндра, другие задачи определения равновесных форм исследованы в книге [2].

Рассмотрим движение капли вязкой жидкости на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью ω диска в поле сил инерции, поверхностного натяжения и силы тяжести.

Движение удобно рассматривать в цилиндрической системе координат (r, φ, z), в которой ось z направлена вдоль оси симметрии; r –в радиальном, а φ –в окружном направлениях. Пусть $\vec{v}=(u,v,w)$ – вектор скорости, а u, v, w – его составляющие в проекции на оси r, φ, z соответственно, p – давление в жидкости, ρ – ее плотность жидкости, а μ – коэффициент динамической вязкости.

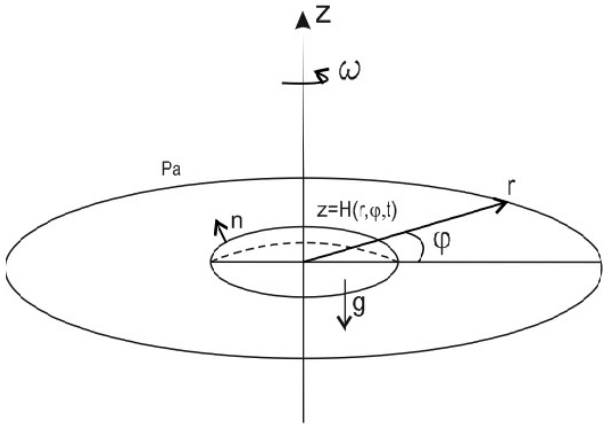


Рисунок 1 – К исследованию движения слоя на вращающемся диске

Движение капли жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности $z=H(r, \varphi, t)$:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{v^2}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial H}{\partial \varphi}=w\ ,.\ z=H(r,\varphi\,,\,t\,) \qquad (3)$$

Для получения конкретных решений из множества возможных при интегрировании системы уравнений (1)–(3) ставятся граничные условия.

На поверхности диска z=0 выполняется условие прилипания, т.е. совпадение скоростей частиц жидкости со скоростями точек вращающегося диска:

$$u=0;\ v=r\,\omega;\ w=0\ ,\ z=0. \qquad (4)$$

На свободной поверхности жидкости $z=H(r,\varphi,t)$ выполняются условия на нормальные и касательные напряжения. Два из них выражают непрерывность напряжений в касательной плоскости, а третье- скачок нормальных напряжений, вызванный действием капиллярных сил [1].

Система (1)-(3) с указанными граничными условиями, дополненная начальными значениями, определяет полную постановку задачи о движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося диска.

Ряд экспериментальных исследований подтверждает факт, что возможно вращение диска и жидкости как единого целого. Это говорит о том, что задача исследования форм относительного равновесия жидкости на вращающемся диске имеет самостоятельный интерес.

Решение задачи, соответствующее слою, неподвижному относительно вращающегося диска, разыскиваем в виде:

$$u=0,\ v=r\,\omega,\ w=0,\ p=p\,(r,\varphi,z)\,,\ z=H\,(r,\varphi)\,. \qquad (5)$$

Подставляя предполагаемый вид решения в уравнения движения (1), имеем систему:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\omega^2 r,\frac{\partial p}{\partial \varphi}=0,\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$$

с решением

$$p=p(r,z)=\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2-\rho g z+C.$$

Полагая, что давление в центре капли равно $p=p_0$, получаем выражение давления в слое вращающейся капли

$$p=p(r,z)=\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2-\rho g z+p_0. \qquad (6)$$

На поверхности $z=H(r,\varphi)$ выполняется граничное условие на нормальные напряжения, которое в случае относительного равновесия жидкости имеет вид:

$$p-p_a=\sigma\frac{2}{R_s}\,,\ z=H(r,\varphi)\,. \qquad (7)$$

Здесь $2/R_s$– средняя кривизна поверхности слоя, известная формула из дифференциальной геометрии; p_a – внешнее давление.

Из последних двух соотношений получаем уравнение, определяющее форму относительного равновесия капли на вращающемся диске:

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2-\rho g H+p-p_a=\sigma\frac{2}{R_s}. \qquad (8)$$

Приведем уравнение (8) к безразмерному виду. Для этого разделим левую и правую части равенства на $\rho l_0^2\omega^2$. В качестве значения характерной длины l_0 можно использовать величину $l_0=\sqrt{\sigma/\rho g}$.

В итоге уравнение (8) примет вид:

$$\frac{1}{2}We(2Eu+r^2-\frac{2H}{Fr})=\frac{2}{R_S}. \qquad (9)$$

Оно содержит три безразмерных параметра. Это число Эйлера *Eu*, характеризующее перепад давлений в точке слоя (0,0,0) и атмосферного; число Фруда *Fr* и число Вебера *We*: $Eu = \dfrac{p_0 - p_a}{\rho l_0^2 \omega^2}$,

$$Fr = \frac{l_0^2 \omega^2}{g l_0}, \quad We = \frac{\rho l_0^3 \omega^2}{\sigma}.$$

Величины r и H в (9) отнесены к l_0.

Подставляя значение $2/R_s$ средней кривизны поверхности слоя в (9), получаем основное уравнение, определяющее вид свободной поверхности слоя, неподвижного относительно вращающегося диска.

$$\frac{1}{2}We(2Eu + r^2 - \frac{2H}{Fr}) = \frac{r(1+H_r^2)(rH_r + H_{\varphi\varphi}) - 2H_r H_\varphi (rH_{\varphi\varphi} - H_\varphi) + (r^2 + H_\varphi^2) r H_{rr}}{[r^2(1+H_r^2) + H_\varphi^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (10$$

Здесь нижний индекс обозначает частную производную по соответствующему направлению. Уравнение (10) является в общем случае нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных.

В дальнейшем исследуются осесимметричные формы относительного равновесия капли, когда $H = H(r)$. Тогда уравнение (10) представляется в виде:

$$rH'' - We(Eu + \frac{1}{2}r^2 - \frac{H}{Fr}) r (1 + H'^2)^{\frac{3}{2}} + (1 + H'^2) H' = 0. \quad (11)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по *r*. К этому дифференциальному уравнению второго порядка необходимо добавить четыре условия: ограниченность смачиваемой поверхности, определяемой, вообще говоря, неизвестным радиусом r_0, наличие постоянного угла смачивания ε_0, выполнение симметрии решения относительно вертикальной оси и сохранения постоянной массы капли.

$$H\big|_{r=r_0} = 0; \quad H'\big|_{r=r_0} = -tg\,\varepsilon_0; \quad H'\big|_{r=0} = 0; \quad M = 2\pi\int_0^{r_0} rHdr = M_0 = const. \quad (12)$$

Условие *M*=const служит для определения перепада давления в центре капли и окружающей среды $Eu = p_0 - p_a$.Решение уравнения (11) с четырьмя условиями (12) позволит определить осесимметричную форму слоя вместе с радиусом смачиваемой поверхности r_0 и перепадом давлений *Eu*.

Исследование уравнения относительного равновесия (11) в случае осевой симметрии удобно провести в естественной системе координат. Ее выбор обеспечивает возможность интегрировать систему дифференциальных уравнений, избегая особенности в вычислениях.

Пусть внутренняя система координат описывается параметрами s, ε, связанными с поверхностью капли, где *s* – текущая длина свободной поверхности, ε – угол между касательной к поверхности *z*=*H*(*r*) и положительным направлением оси *r*.

Из геометрических соображений ясно, что

$$\frac{dH}{ds} = \sin\varepsilon, \quad \frac{dr}{ds} = -\cos\varepsilon.$$

Тогда, вычисляя производные

$$H' = \frac{dH}{dr} = -tg\varepsilon, H'' = \frac{d}{dr}(-tg\varepsilon) = \frac{1}{\cos^3\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{ds}$$

с помощью уравнения (11) и определения массы получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dH}{ds}=\sin\varepsilon,\frac{dr}{ds}=-\cos\varepsilon,\frac{dM}{ds}=2\pi rH\sin\varepsilon,$$
$$\frac{d\varepsilon}{ds}=\frac{\sin\varepsilon}{r}+We(Eu+\frac{1}{2}r^2-\frac{H}{Fr}). \tag{13}$$

Граничные условия для системы (13) имеют вид:

$$z(0)=0, r(0)=r_0, \varepsilon(0)=\pi-\varepsilon_0, M(0)=0. \tag{14}$$

Дополнительные условия для определения поверхности смачивания r_0 и перепада давлений *Eu* запишутся в виде

$$r(\varepsilon(s))=0,\ \varepsilon(s)=\pi\ ; \quad M(\varepsilon(s))=M_0,\ \varepsilon(s)=\varepsilon_0. \tag{15}$$

Решение краевой задачи (13)-(15) позволяет найти зависимости $z=z(s)$, $r=r(s)$, $\varepsilon=\varepsilon(s)$, $M=M(s)$, а затем и форму свободной поверхности капли $z=H(r)$.

Рассмотрим численное решение задачи (11) с граничными условиями

$$H\big|_{r=1}=0; \quad H'\big|_{r=r_0}=-tg\,\varepsilon_0. \tag{16}$$

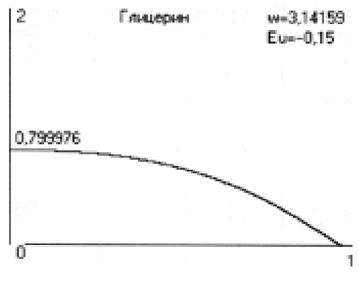
В этом случае масса слоя не фиксируется, а определяется заданным перепадом давлений *Eu* и найденной формой поверхности с помощью интеграла

$$M=2\pi\int_0^{r_0} rHdr. \tag{17}$$

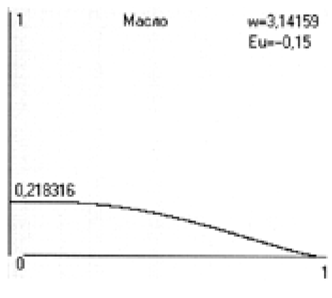
Решение задачи(11),(16) проводилось с помощью численного интегрирования по формулам Рунге-Кутта четвертого порядка точности для решения систем дифференциальных уравнений.

Исследованы формы равновесия вращающейся капли на диске при различных значениях угловой скорости, перепада давлений в слое и окружающей среде, физических свойств жидкостей. Масса жидкости однозначно определяется разностью давлений и смачиваемой поверхностью.

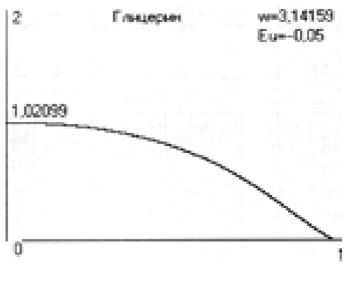
Рассмотрим формы свободных поверхностей капель глицерина (ρ=1260 кг/м^3, σ=0,07н/м) и масла (ρ=1110 кг/м^3, σ=0,05н/м), имеющих различный краевой угол смачивания. Для слоя глицерина он равен $\varepsilon_0=60^0$, для слоя масла – $\varepsilon_0=15^0$. Будем изменять параметр *Eu* на отрезке [-0.15; 0.15] с шагом *dEu*=0.1. Частота вращения диска предполагается равной *n*=0.5 оборота в секунду. При этом угловая скорость $\omega=2\pi n$ равна 3.1416рад/сек. На рисунках 2 представлен вид поверхности половины слоя, вращающегося как одно целое с диском при различном перепаде давления и числах Вебера и Фруда, равных для глицерина *We*=0,0024, *Fr*=417,6, для масла *We*=0,0022 *Fr*=461,0



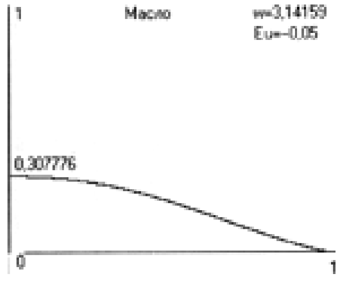
а)



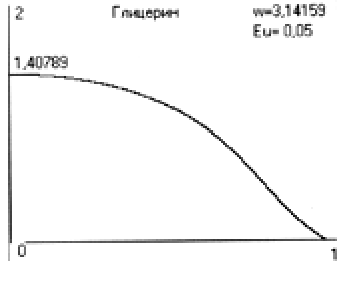
б)



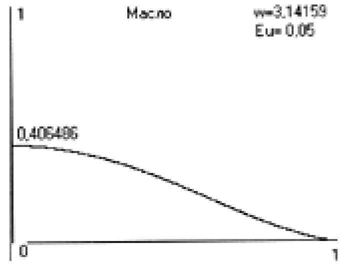
в)



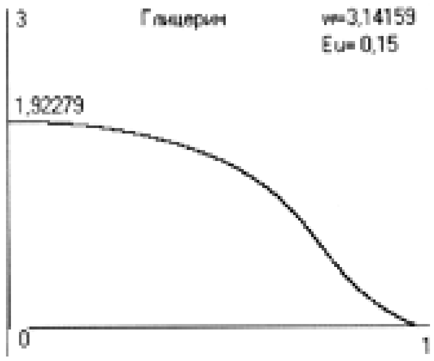
г)



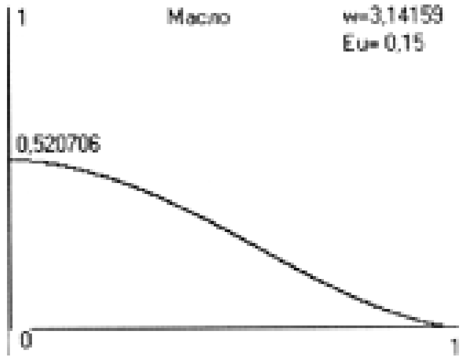
д)



е)



ж)



з)

Рисунок 2 – Формы равновесия капли глицерина и масла при а),б) Eu=-0.15; в),г) Eu=-0.05; д),е) Eu=0.05; ж),з) Eu=0.15

Исследования показали, что масса слоя, удерживаемого силами поверхностного натяжения и тяжести с увеличением влияния давления атмосферы уменьшается по сравнением с давлением в центре капли уменьшается. С уменьшением внешнего давления у линии поверхности слоя может появиться точка перегиба. Капли глицерина, у которого угол смачивания ($\varepsilon_0 = 60^0$) значительно больше, чем у масла ($\varepsilon_0 = 15^0$) имеет большую высоту поверхности при прочих равных условиях. Высота капли жидкости зависит от скорости вращения и разности давлений. Могут существовать различные значения *We*, *Fr* и *Eu*, при которых капля будет иметь одинаковую высоту и близкую к совпадающей форму поверхности, что показано на рисунке 3 . Левый рисунок соответствует значениям *We*=0,0024, *Fr*=417,6, *E*u= -0,1; правый– *We*=0,0016, *Fr*=644,9, *Eu*= 0,1.

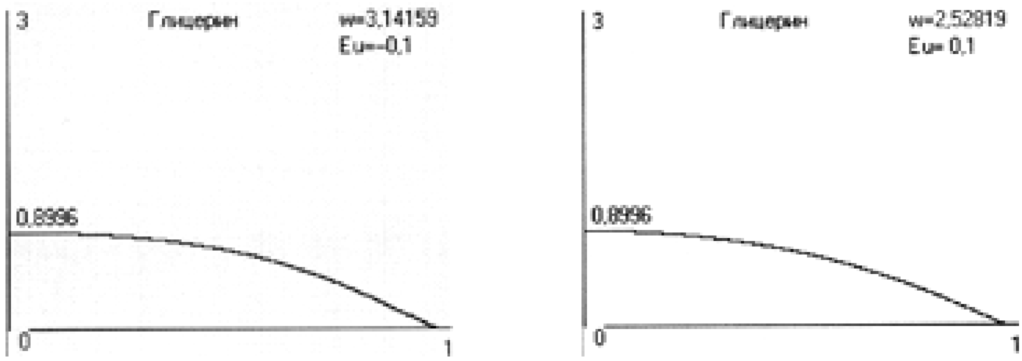


Рисунок 3 – Близкие по виду формы равновесия капли глицерина при различных значениях параметров We, Fr и Eu: We=0,0024, Fr=417,6, Eu= -0,1 и We=0,0016, Fr=644,9, Eu= 0,1

Проведенные автором результаты экспериментальных исследований позволяет сделать вывод, что при определенной угловой скорости вращения диска для вязкой жидкости могут наблюдаться осесимметричные формы капли. С увеличением угловой скорости от нее могут ответвляться капли близкие к неподвижным с периодически распределенными по углу возмущениями, что показано на рисунке 4.

Рисунок 4 – Вид сверху капли на вращающемся диске с периодически распределенными по углу возмущениями

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено движение капли вязкой жидкости на поверхности вращающегося диска в поле сил инерции, поверхностного натяжения и силы тяжести. Проведены экспериментальные исследования. Получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, описывающее относительное равновесие капли Проведены его исследования во внутренней системе координат, связанной с поверхностью слоя. Численно получены и проанализированы формы относительного равновесия свободной поверхности капли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. -М., -1973г.-192 с.
2. Гидромеханика невесомости/ Под ред. А.Д. Мышкиса.-М.: Наука, -1976.-506 с.
3. Епихин В.Е., Конон П.Н., Шкадов В.Я. О формах кольцевых слоев жидкости на поверхности вращающегося цилиндра// ИФЖ.-1988.-Т.55, N 3.-С. 423-430.
4. Конон П.Н., Шпортько В.В. Исследования плоских и осесимметричных слоев жидкости, неподвижных относительно внутренней поверхности вращающегося цилиндра// Вестник БРФФИ-2011.-№3.-С. 98-110.

SUMMARY

We consider a motion of a viscous liquid drops on the surface of the rotating disk in the inertia forces of surface tension and gravity. An experiment was conducted. A nonlinear differential equation of the second order partial derivatives, which describes the relative balance of the drop. Conducted his research in the internal coordinate system associated with the surface layer. Numerically obtained and analyzed the relative equilibrium shape of the free surface of the drop.

Поступила в редакцию 23.10.2013