УДК 621.3

ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Кондратьева Н.К., Матвеенко В.Ю.

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент Горошко В.И.

Для электрических цепей высокого порядка составление дифференциального уравнения представляет собой громоздкую задачу. Для упрощения этой задачи целесообразно использовать топологические формулы, например, формулу Мэйсона:

$$\mathrm{W(P)} = \frac{U_2(P)}{E(P)} = \frac{\sum_k \Pi_k \Delta_k}{\Delta}, \qquad (1)$$

где $E(P)$ - операторная э.д.с.;

$U_2(P)$ - требуемая передаточная величина (в операторном виде);

Δ - узловой определитель схемы, получаемой при исключении вольтметра и источника тока или коротком замыкании амперметра и источника э.д.с.;

Π_k - передача k-го пути от плюса источника через вольтметр к минусу;

Δ_k - узловой определитель схемы, получаемой при замыкании k-го пути передачи.

Передачей W(P), как видно из определения, может быть любая входная и передаточная функция в зависимости от вида прибора и источника, а также от места их включения. Измерительный прибор вводят в качестве указателя – индикатора для большей наглядности расчета.

Согласно топологическому правилу (формула Мэйсона) передача W(P) при действии одного источника равна отношению алгебраической суммы произведений всех величин путей передачи $\Pi_к$ на их миноры $\Delta_к$ к определителю схемы:

Определитель определенной матрицы узловых проводимостей, называемый в целях краткости узловым определителем Δ, равен сумме произведений проводимости ветвей всех деревьев схемы:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} g_{j1}\, g_{j2} \dots g_{j(y-1)}, \qquad (2)$$

где $g_{J1} g_{j2} \dots g_{j(y-1)}$ - произведение проводимостей ветвей j-го дерева;

n – число всех возможных деревьев схемы.

Составим топологическим методом дифференциальное уравнение для напряжения индуктивности U_L. Исследуем цепь на рисунке 1:

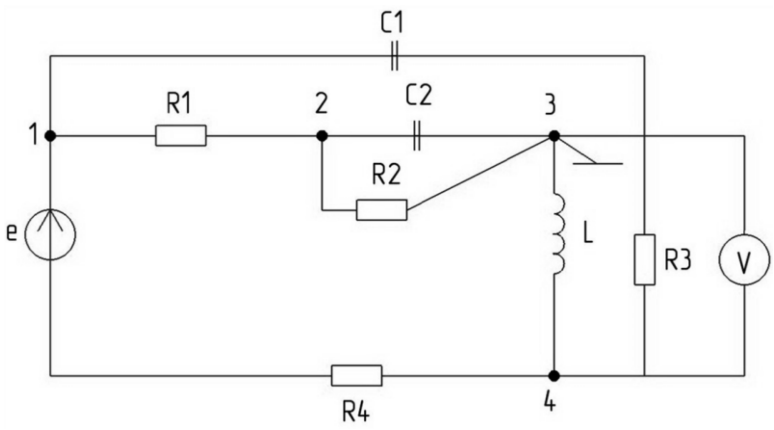

Рисунок 1

Требуется составить ОДУ для U_L с последующим переходом к индуктивному току i_L.

Граф схемы на рисунке 1 выглядит следующим образом:

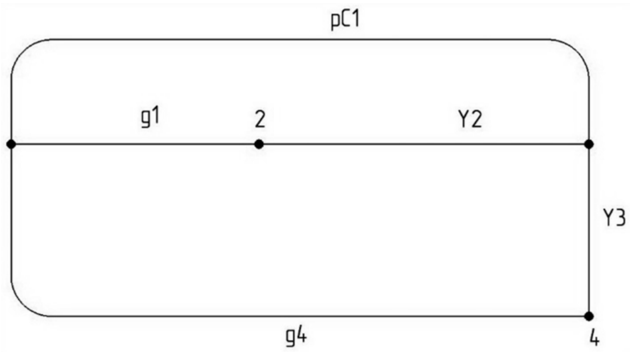

Рисунок 2

На рисунке 2: $$Y_2 = pC_1 + g_2$$

$$Y_3 = \frac{1}{pL} + g_3$$

Расчет входных и передаточных функций топологическим методом сводится к вычислению по топологическим формулам узлового определителя, алгебраических дополнений его элементов или разности алгебраических дополнений. Особенность топологических формул состоит в том, что они позволяют записать без вычисления большого числа сокращающихся слагаемых только положительные слагаемые узловых определителей (алгебраических дополнений). Непосредственное перечисление всех деревьев схем с большим числом узлов и ветвей (деревьев) является сложной задачей. Эта задача упрощается, если применять разложение узловых определителей на множители или слагаемые с общими множителями. При этом расчет узлового определителя (алгебраического дополнения) сложной схемы постепенно можно свести к расчету определителя простой схемы, все деревья очевидны.

Чтобы найти Δ, воспользуемся следующей формулой Максвелла:

$$\Delta = \sum_{k=1} \Pi_k \Delta_k. \tag{3}$$

В результате разложения по узлам 1 и 3 получаем Рисунок 3:

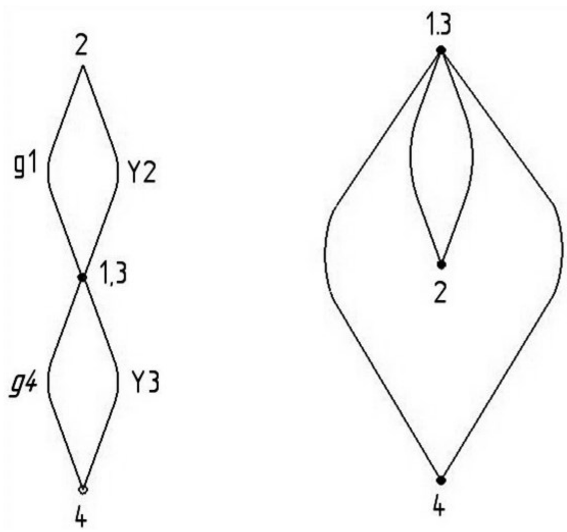

Рисунок 3

Для этого рисунка имеем:

$$\Pi_1 = pC_1; \tag{4}$$

$$\Delta_1 = (g_1 + Y_2)(Y_3 + g_4). \tag{5}$$

Аналогично Δ_k и Π_k находим для остальных случаев. В результате имеем:

$$\Delta = Y_3[Y_2(pC_1 + g_1 + g_4) + pC_1 g_1 + g_1 g_4] + Y_2 g_4 (pC_1 + g_1) + pC_1 g_1 g_4. \tag{6}$$

Расчет числителя передаточной функции (Рисунок 4):

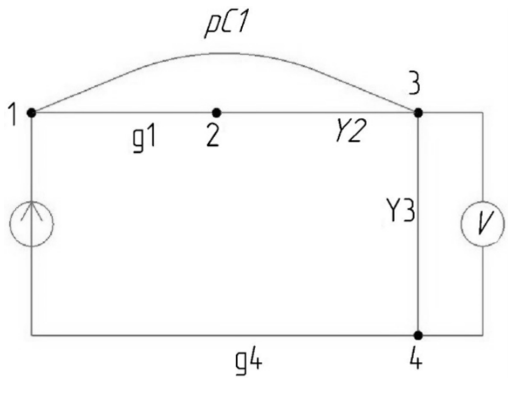

Рисунок 4

Передача первого пути:

$$\Pi_1 = pC_1 \cdot g_4. \tag{7}$$

Узловой определитель первого пути:

$$\Delta_1 = Y_2 + g_1. \quad (8)$$

Аналогично рассчитываем передачу и узловой определитель второго пути. И в результате имеем:

$$\sum \Pi_k \Delta_k = pC_1 g_4 (Y_2 + g_1) + Y_2 g_1 g_4. \quad (9)$$

Составим ОДУ и перейдем к индуктивному току i_L:

$$\Delta \cdot U_L = e \sum \Pi_k \Delta_k \quad (10)$$

$$U_L = Lpi_L \quad (11)$$

Так же зададимся числами:

$g_1 = 0{,}1$ См,

$g_2 = 0{,}2$ См,

$g_3 = 0.4$ См,

$g_4 = 0{,}1$ См,

$C_1 = 1000$ мкФ $= 10^{-3}$Ф,

$C_2 = 500$ мкФ $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$Ф,

$L = 0{,}1$ Гн.

Окончательное ОДУ:

$$i_L''' + 780 i_L'' + 88 \cdot 10^3 i_L' + 2 \cdot 10^6 = \frac{e}{25},$$

Представленный пример иллюстрирует эффективность применения топологических подходов к составлению ОДУ высокого порядка. Рассмотренная цепь имеет не слишком высокий (третий) порядок и для неё эффективность применения топологической формулы Мэйсона раскрывается в неполной мере. Однако для цепей более высокого порядка преимущество топологических формул становится несомненным.

Литература

1. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Основные теории линейных цепей. Под ред. П.А. Ионкина. Учебник для электротехн. вузов. Изд. 2-е, переработ. и доп. М., «Высш. школа», 1976.- 253 с.