УДК 621.3

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Кузнецов В.Ю.

Научный руководитель – к.ф-м.н., доцент Горошко В.И.

Цель работы: Эффективная методика составления системы дифференциальных уравнений в форме Коши.

Уравнение состояния в матричной форме имеет вид:

$$x' = \mathbb{A} \cdot x + \mathbb{B} \cdot \mathbb{v},$$

где -квадратная матрица размерности n*n (n-количество реактивных элементов);

$\mathbb{B}$-матрица коэффициентов источников;

$\mathbb{v}$-вектор-столбец источников;

x'-напряжение емкости или ток индуктивности.

Для цепей высокого порядка составление системы дифференциальных уравнений является громоздкой и плохо формализуемой задачей.

Применим для составления системы дифференциальных уравнений в форме Коши теоремы замещения для реактивных элементов.

Согласно теоремам замещения ток i_L и напряжения U_{C1}, U_{C2} можно представить соответственно как задающий ток источника тока $\mathcal{J}(t) = i_L(t)$ и задающие ЭДС источников напряжения $e_1(t) = U_{C1}$, $e_2(t) = U_{C2}$.

Схема исследуемой цепи представлена на рисунке 1.

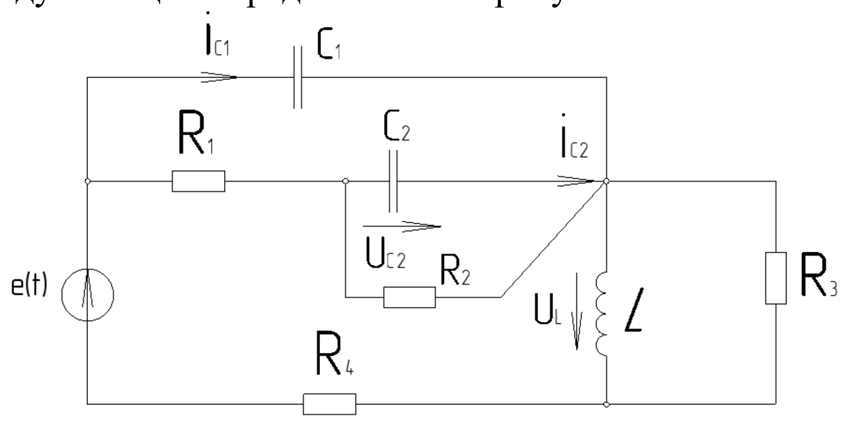

Рисунок 1

Для этой цепи система уравнений состояния имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{U_L}{L} &= i_L' = a_{11} i_L + a_{12} U_{C1} + a_{13} U_{C2} + b_1 e \\
\frac{U_{C1}}{C_1} &= U_{C1}' = a_{21} i_L + a_{22} U_{C1} + a_{23} U_{C2} + b_2 e \qquad (1) \\
\frac{i_{C2}}{C_2} &= U_{C2}' = a_{31} i_L + a_{32} U_{C1} + a_{33} U_{C2} + b_3 e,
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты пока не известны.

Эффективным способом вычисления коэффициентов a_{ij} и b_i в системе (1) является метод наложения, согласно которому в цепи поочередно оставляют один источник, а остальные нейтрализуют.

Первый случай: $i_L \neq 0, U_{C1} = U_{C2} = e = 0$ и получаем схему 1.

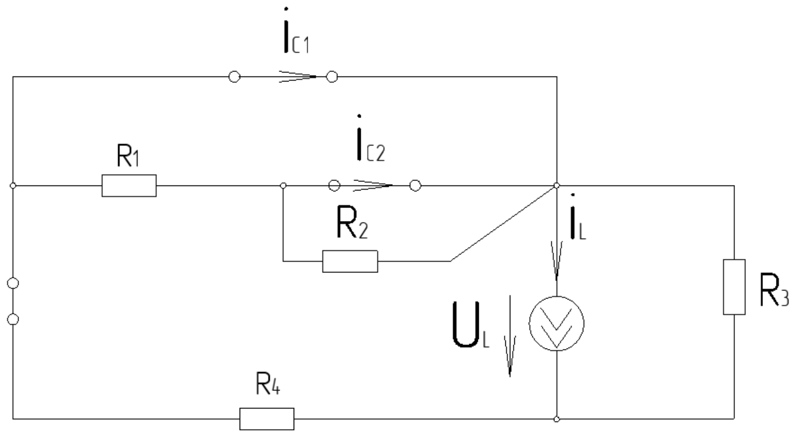

Схема 1

Рассчитаем коэффициент a_{11}, a_{21} и a_{31}:

$$a_{11} = \frac{U_L}{Li_L};$$

$$\frac{U_L}{i_L} = -R_X = -\frac{R_3R_4}{R_3 + R_4};$$

$$a_{11} = -\frac{R_3R_4}{L(R_3 + R_4)};$$

$$a_{21} = \frac{i_{C1}}{C_1 i_L};$$

$$i_{C1} = i_L \frac{R_3}{R_3 + R_4};$$

$$a_{21} = \frac{R_3}{C_1(R_3 + R_4)};$$

$$a_{31} = 0.$$

Аналогично получаем ещё 3 схемы и находим их коэффициенты, в которых последовательно оставлены источники U_{C1}; U_{C2} и реальный источник.

Из полученных коэффициентов составляем матрицы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ из уравнения: $\mathrm{x}' = \mathbb{A} \cdot \mathrm{x} + \mathbb{B} \cdot e$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_3R_4}{L(R_3+R_4)} & -\frac{R_3}{L(R_3+R_4)} & 0 \\ \frac{R_3}{C_1(R_3+R_4)} & -\frac{R_1+R_3+R_4}{C_1R_1(R_3+R_4)} & \frac{1}{C_1R_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2R_1} & -\frac{R_1+R_2}{C_2R_1R_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{R_3}{L(R_3+R_4)} \\ \frac{1}{C_1(R_3+R_4)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вывод: Если составлять систему уравнений в форме Коши с помощью законов Кирхгофа, то придется первоначально записать систему из 7 уравнений (3 – по Первому закону Кирхгофа и 4 – по Второму закону Кирхгофа), далее к ним добавляются 3 динамических уравнения реактивных элементов. В дальнейшем некоторые уравнения придется дифференцировать и исключать подстановкой лишние переменные. Предлагаемая методика сводится к однотипному анализу резистивных схем с одним источником и обладает, таким образом, чётким и простым алгоритмом.

Литература

1. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Основные теории линейных цепей. Под ред. П.А. Ионкина. Учебник для электротехн. вузов. Изд. 2-е, переработ. и доп. М., «Высш. школа», 1976.- 253 с.