Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

Изучение законов движения материальной точки и системы материальных точек

Лабораторные работы № 7, 4

Минск 2010

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

Изучение законов движения материальной точки и системы материальных точек

Лабораторные работы № 7, 4

Минск 2010

УДК [531.1+531.6] (076.5)
ББК 22.2я7
И 32

Составители:
В.В. Красовский, В.Э. Малаховская, Ю.А. Бумай

Рецензенты:
П.Г. Кужир, И.А. Хорунжий

И 32 Изучение законов движения материальной точки и системы материальных точек: лабораторные работы № 7, 4 / сост.: В.В. Красовский, В.Э. Малаховская, Ю.А. Бумай. – Минск: БНТУ, 2010. – 40 с.

ISBN 978-985-525-259-8.

Издание содержит описание двух лабораторных работ, посвященных изучению законов механического движения тел, к которым применима модель материальной точки.

Даны определения основных кинематических и динамических величин. Сформулированы основные законы динамики, законы сохранения импульса и механической энергии. Изложены методики измерения ускорения и скорости, опытной проверки законов сохранения. Приведено описание лабораторных установок и задание.

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих раздел общей физики «Механика».

УДК [531.1+531.6] (076.5)
ББК 22.2я7

ISBN 978-985-525-259-8

СОДЕРЖАНИЕ

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Основные цели и задачи: изучение основных понятий кинематики (перемещение, скорость, ускорение) и динамики (сила, масса, импульс, механическая работа и энергия), основных законов динамики (законов Ньютона) и законов сохранения в механике.

Механическим движением называют изменение положения в пространстве материальных тел или их частей относительно друг друга с течением времени. Одно из этих тел выделяют в качестве тела отсчета.

При описании механического движения материального тела для широкого круга задач применима модель материальной точки (МТ).

Материальная точка – это макроскопическое тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с масштабом его движения.

Если в условиях некоторой задачи протяженностью тела нельзя пренебречь, то тело можно мысленно разбить на отдельные малые элементы, каждый из которых можно рассматривать как материальную точку, т.е. представить тело как систему материальных точек. Движение такой системы в принципе может быть описано, если известен закон взаимодействия между отдельными ее элементами. В простейшем (идеальном) случае эти элементы жестко связаны между собой так, что при движении тела расстояние между любыми двумя элементами остается неизменным. Такая модель недеформируемого тела представляет собой ***абсолютно твердое тело*** и также применяется для решения широкого круга механических задач.

Движение твердого тела, при котором жестко связанная с ним прямая перемещается параллельно самой себе, называется ***поступательным***. При поступательном движении все материальные точки, из которых состоит твердое тело, движутся одинаковым образом, и поэтому достаточно изучить движение только одной из них. Другими словами, в рамках модели материальной точки можно полностью описать поступательное движение твердого тела.

Для описания механического движения МТ выбирают систему отсчета, которая включает в себя тело отсчета, жестко связанную с ним систему пространственных координат (чаще всего используют декартову прямоугольную) и часы для измерения времени. Положение МТ в пространстве задается с помощью ее *радиуса-вектора*

r, который соединяет начало выбранной системы координат О с той точкой М, где в данный момент времени находится тело (рис. 1). Проекции радиуса-вектора на координатные оси есть координаты МТ:

$$r_X = x, \quad r_Y = y, \quad r_Z = z, \qquad \text{или} \qquad r = xi + yj + zk, \tag{1}$$

где i, j, k – орты координатных осей (векторы единичной длины вдоль осей OX, OY и OZ соответственно). При движении материальной точки ее радиус-вектор изменяется, т.е. он является функцией времени $r = r(t)$ или в проекциях:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

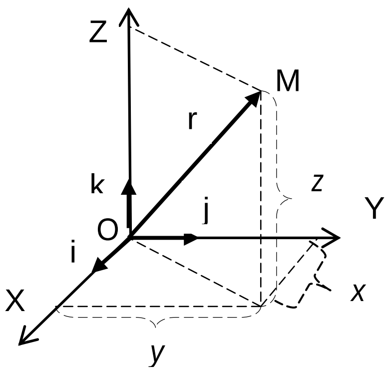

Рис. 1

Если зависимость координат от времени известна, то говорят, что задан закон движения МТ.

Совокупность положений, последовательно занимаемых точкой М в процессе ее движения, образует в пространстве линию, называемую ***траекторией*** движущейся точки. В общем случае траектория представляет собой некоторую кривую линию (рис. 2). Пусть в момент времени t_1 точка занимает положение $М_1$, а в момент времени t_2, т.е. через промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ – положение $М_2$. Расстояние Δs, которое проходит точка за время Δt, двигаясь вдоль траектории, называется ***путем***, пройденным материальной точкой. Путь – скалярная неотрицательная величина.

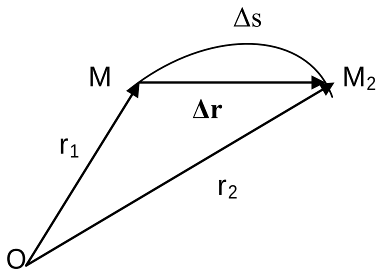

Рис. 2

Вектор Δr, проведенный из начального положения M_1 в конечное положение M_2, называется ***перемещением*** точки: $\Delta r = r_2 - r_1$. В общем случае модуль перемещения $|\Delta r|$ и путь Δs не равны. Они совпадают лишь при прямолинейном невозвратном движении. Однако в пределе для бесконечно малого промежутка времени $\Delta t \to 0$, когда $\Delta r \to 0$:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta r|} = 1 \text{ или } ds = |dr|, \qquad (2)$$

где знак d перед символом физической величины указывает на ее бесконечно малое изменение.

В Международной системе единиц (СИ) путь и модуль перемещения измеряются в метрах (м).

Скорость и ускорение материальной точки

Быстроту движения материальной точки характеризуют ***средняя скорость***

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \text{ (векторная величина),}$$

средняя путевая скорость

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (скалярная неотрицательная величина)}$$

и ***истинная***, или ***мгновенная скорость*** в точке М (скорость в данный момент времени)

$$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{M_2 \to M_1} \langle \upsilon \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Так как единицей измерения времени в СИ является секунда (с), то скорость выражается в метрах в секунду (м/с).

Учитывая (1), для мгновенной скорости можем записать

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \text{, т.е. } \upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

Мгновенная скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ при равномерном прямолинейном движении равна средней скорости $\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle$, поскольку $\boldsymbol{\upsilon} = \text{const}$. В общем случае $\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle$ характеризует движение лишь в среднем, средняя скорость эквивалентна скорости такого равномерного движения, при котором за все затраченное время тело совершило бы то же полное перемещение, как при реальном неравномерном движении. Если мгновенная скорость не изменяется по модулю (хотя может изменяться по направлению), то $|\boldsymbol{\upsilon}| = \langle\upsilon\rangle$. В любом другом случае $\langle\upsilon\rangle$ характеризует скорость прохождения пути лишь в среднем.

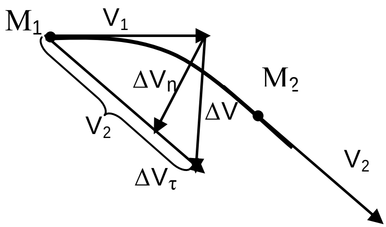

Рис. 3

Вектор мгновенной скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ в каждой точке траектории направлен по касательной к траектории (рис. 3). Изменение скорости за промежуток времени Δt $\Delta\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1$ можно представить в виде суммы двух составляющих

$$\Delta\boldsymbol{\upsilon} = \Delta\boldsymbol{\upsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\upsilon}_{\boldsymbol{\tau}}, \tag{3}$$

первая из которых характеризует изменение мгновенной скорости по направлению (направлена перпендикулярно траектории к центру кривизны – нормальная составляющая), а вторая показывает изменение скорости по модулю (направлена по касательной к траектории по или против направления самой скорости – тангенциальная составляющая).

Величина $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$ характеризует быстроту изменения скорости и носит название ***ускорения***. В соответствии с (3) ускорение в общем случае имеет две составляющие – нормальную a_n и тангенциальную a_τ:

$$a = a_n + a_\tau . \tag{4}$$

Так как $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon \mathbf{e}_\tau$, то
$$\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} e_\tau + \upsilon \frac{de_\tau}{dt} , \tag{5}$$

где υ – модуль скорости;

e_τ – единичный вектор тангенциального направления. Последний постоянен по модулю ($|e_\tau| = 1$), но изменяется по направлению при криволинейном движении.

Можно показать, что

$$\frac{de_\tau}{dt} = \frac{\upsilon}{R} e_n , \tag{6}$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке траектории;

e_n – единичный вектор нормального направления.

Сравнивая (4) и (5) с учетом (6), можем заключить, что

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} e_n , \qquad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} e_\tau . \tag{7}$$

Из (7) видно, что нормальное ускорение отсутствует ($a_n = 0$) при любом прямолинейном движении ($R = \infty$), а тангенциальное ускорение отсутствует при движении с постоянной по модулю скоростью.

Единицей измерения ускорения в СИ является метр на секунду в квадрате (м/с^2).

Описание движения материальной точки с помощью введенных выше величин без выяснения причин, влияющих на это движение, составляет предмет ***кинематики***.

Для установления закона движения материальной точки $r = r(t)$ необходимо знать ее ускорение $\boldsymbol{a}$, являющееся в общем случае функцией времени, координат и скорости, а также начальные условия движения – $\boldsymbol{v}_0$ ($\boldsymbol{v}$ при $t = 0$) и r_0 (r при $t = 0$). Закон движения находят путем интегрирования векторного дифференциального уравнения второго порядка, связывающего в общем случае ускорение, скорость, координаты и время (прямая задача). Во многих случаях бывает необходимо по известному закону движения найти скорость и ускорение материальной точки, нормальную и тангенциальную составляющие ускорения (обратная задача). Примеры решения типовых задач приведены в приложении.

Динамика материальной точки

Если кинематика описывает то, как движется материальная точка, то ***динамика*** отвечает на вопрос, почему именно так, а не иначе, она движется, т. е. рассматривает причины, определяющие характер конкретного движения. В основе динамики материальной точки лежат три закона Ньютона, которые получены как результат обобщения большого числа опытных фактов и не могут быть выведены из каких-либо более общих исходных теоретических предпосылок.

Первый закон Ньютона постулирует существование инерциальных систем отсчета – таких, относительно которых любое тело, не подверженное воздействию со стороны других тел, движется равномерно и прямолинейно.

Свойство материальных тел сохранять состояние равномерного и прямолинейного движения называется ***инерцией***. Первый закон Ньютона иначе называют законом инерции.

Количественной мерой инертности тела является физическая величина, носящая название ***массы***. Единица массы в СИ – *килограмм* (*кг*), которая наряду с *метром* (*м*) и *секундой* (*с*) является основной механической единицей СИ. Единицы других механических величин являются производными от трех названных основных единиц. Заметим, что модель материальной точки в механике абстрагируется от всех других характеристик реальных тел, кроме их массы. Произведение массы МТ на ее скорость называется ***импульсом***: $p = m\boldsymbol{v}$. Импульс, как и скорость, есть величина векторная. Импульс системы материальных точек равен векторной сумме импульсов отдельных материальных точек.

Чтобы описывать воздействия тел друг на друга вводят понятие силы. ***Сила*** – векторная величина, являющаяся мерой механического действия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет форму и размеры (деформируется). Сила F полностью задана, если указаны ее модуль F, направление в пространстве и точка приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Одновременное действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию одной силы, называемой *равнодействующей*, или *результирующей*, силой и *равной их геометрической сумме*. Единица силы – ньютон (Н): 1 Н – сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы.

Второй закон Ньютона гласит, что скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе F (при одновременном действии нескольких сил – их равнодействующей):

$$\frac{dp}{dt} = F .$$

Это уравнение называется уравнением движения тела.

В частном случае, если масса тела в процессе движения остается постоянной, уравнение движения принимает вид:

$$ma = F .$$

Уравнение движения позволяет выразить ускорение как функцию времени, координат и скорости, если известен характер приложенных к МТ сил, то есть получить необходимое дифференциальное уравнение для решения прямой задачи динамики.

Третий закон Ньютона: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия; силы с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки,

$$F_{ik} = -F_{ki} . \qquad (8)$$

Силы взаимодействия всегда имеют одинаковую физическую природу.

Третий закон Ньютона позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной системы материальных точек, поскольку позволяет свести любое взаимодействие к силам парного взаимодействия между материальными точками.

Движение центра инерции. Закон сохранения импульса

Рассмотрим движение произвольной системы материальных точек (частиц). Пусть O – начало системы координат, а m_i, r_i и $\boldsymbol{v}_i$ – масса, радиус-вектор и скорость i-й частицы (рис. 4). Центром инерции или центром масс системы материальных точек называют такую точку C, радиус-вектор которой

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i\ ,$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ – масса всей системы.

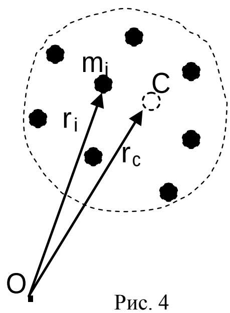

Рис. 4

Скорость центра инерции системы:

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i\right] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{p}{m}\,,$$

где $\boldsymbol{p}$ – импульс всей системы. Таким образом:

$$p = m\boldsymbol{v}_C\,, \qquad (9)$$

т.е. импульс системы равен произведению массы всей системы на скорость ее центра инерции.

Силы, действующие на систему материальных точек со стороны тел, не входящих в данную систему (внешних тел), называют внешними силами. Силы взаимодействия между частицами данной системы называют внутренними силами. Пусть $F_i^{\text{внешн}}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на i-ю частицу, а F_{ik} – сила, действующая на нее со стороны k-й частицы системы (рис. 5). Напишем уравнения движения для каждой частицы системы:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dp_1}{dt} = F_1^{\text{âíåøí}} + F_{12} + F_{13} + \ldots + F_{1n} \\
\dfrac{dp_2}{dt} = F_2^{\text{âíåøí}} + F_{21} + F_{23} + \ldots + F_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dp_n}{dt} = F_n^{\text{âíåøí}} + F_{n1} + F_{n2} + \ldots + F_{n-1,n}
\end{array}\right\}$$

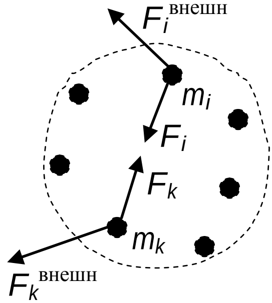

Рис. 5

Если сложить все уравнения почленно и учесть, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) = \frac{dp}{dt}$$

и соотношение (8), то в результате получим:

$$\frac{dp}{dt}=\sum_{i=1}^{n}F_i^{\text{внешн}}. \qquad (10)$$

Это уравнение является обобщением 2-го закона Ньютона на произвольную механическую систему. С учетом (9) можно записать:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(mv_c)=m\frac{dv_c}{dt}=ma_c,$$

где $\boldsymbol{a}_c$ – ускорение центра инерции. Таким образом,

$$ma_c=\sum_{i=1}^{n}F_i^{\text{внешн}},$$

т.е. *движение центра инерции системы не зависит от внутренних сил,* действующих между телами данной системы, а *определяется лишь внешними силами.* Если результирующая всех внешних сил, приложенных к системе, равна нулю, то

$$\frac{dp}{dt}=0 \quad \text{и} \quad p=\text{const}. \qquad (11)$$

Формула (11) выражает **закон сохранения импульса**: *импульс механической системы не изменяется с течением времени, если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю*.

В частности, импульс сохраняется у замкнутой системы тел, т.е. системы, на которую не действуют внешние силы.

Спроецируем уравнение (10) на некоторую координатную ось, например, Ох: $\dfrac{dp_x}{dt}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}^{\text{внешн}}$.

Если $\sum_{i=1}^{n}F_{ix}^{\text{внешн}}=0$, то $\dfrac{dp_x}{dt}=0$, откуда $p_x=\text{const}$.

Таким образом, в случае незамкнутой системы, *если сумма проекций внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция* *на эту же ось вектора импульса сохраняется*. Это утверждение называют законом сохранения проекции импульса.

Кинетическая энергия. Работа

Умножим уравнение движения материальной точки $m\frac{dv}{dt} = F$ на элементарное перемещение $dr = v\,dt$. Тогда

$$mv\frac{dv}{dt}dt = F \cdot dr.$$

Учтем, что $\frac{dv}{dt}dt = dv$, а $v \cdot dv = \frac{1}{2}d(v^2) = \frac{1}{2}d(v^2)$. Окончательно получим

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr. \qquad (12)$$

Если на материальную точку сила не действует ($F = 0$), то

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0 \text{ и } E_к \equiv \frac{mv^2}{2} = \mathrm{const}.$$

Величину $E_к$ называют **кинетической энергией** – *энергией, обусловленной механическим движением тела. Она численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы сообщить телу массы* m *скорость* v. Смысл введения кинетической энергии состоит в том, что это – сохраняющаяся величина при движении материальной точки в отсутствие действия сил. Кинетическая энергия – величина аддитивная, для системы из n материальных точек она равна сумме кинетических энергий отдельных точек:

$$E_к = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Под действием силы F кинетическая энергия частицы изменяется, и в соответствии с формулой (12) ее приращение равно $F \cdot dr$. Величина $dA = F{\cdot}dr$ называется **элементарной работой**, совершаемой силой F при перемещении частицы на dr (рис. 6). Т. к. $F{\cdot}dr = F{\cdot}|dr|{\cdot}\cos\alpha$, то элементарную работу можно выразить через проекцию силы на направление перемещения $F_s = F\cos\alpha$ и приращение пути ds, которое согласно (2) равно модулю элементарного перемещения:

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos\alpha = F_s ds. \tag{13}$$

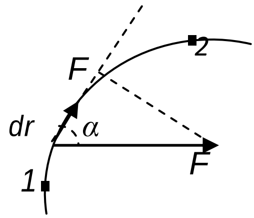

Рис. 6

Отметим, что в зависимости от угла между направлениями перемещения и силы, последняя может выполнять как положительную ($0 \le \alpha < \pi/2$, приращение кинетической энергии частицы положительно), так и отрицательную работу ($\pi/2 < \alpha \le \pi$, приращение кинетической энергии частицы отрицательно, работа выполняется против силы за счет запаса кинетической энергии частицы). В частности, при $\alpha = \pi/2$ работа не выполняется и кинетическая энергия сохраняется.

При движении частицы по конечному участку траектории от точки 1 до точки 2 (см. рис. 6) полную работу найдем как сумму работ на отдельных элементарных участках, т.е. как интеграл по траектории от точки 1 до точки 2:

$$A = \int_{\text{т.1}}^{\text{т.2}} F_s ds.$$

Учитывая (12) и (13), находим:

$$A = \int_{\text{т.1}}^{\text{т.2}} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{\kappa 2} - E_{\kappa 1}. \tag{14}$$

Таким образом, работа сил, действующих на частицу, равна приращению кинетической энергии частицы.

В СИ единицей работы и энергии является джоуль: 1 Дж = 1 Н·м.

Потенциальное поле. Потенциальная энергия. Консервативные силы

Если частица в каждой точке пространства подвержена действию сил, то говорят, что она находится в поле сил. Например, вблизи поверхности Земли в каждой точке пространства на частицу действует сила тяжести $G = m\boldsymbol{g}$. Поэтому говорят, что частица находится в поле силы тяжести.

Пусть в некоторой декартовой системе координат под действием силы $F = F_x\, i + F_y\, j + F_z\, k$ частица совершает элементарное перемещение $dr = dx\, i + dy\, j + dz\, k$. Если стационарное силовое поле можно описать с помощью функции $U(x, y, z)$ такой, что

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

то такое поле называется ***потенциальным***, а функция $U(x, y, z)$ есть ***потенциальная энергия*** тела, на которое действует силовое поле, создаваемое другими телами в данной точке пространства. Таким образом, ***потенциальная энергия*** *– механическая энергия системы тел, определяемая характером взаимодействия между телами и их взаимным расположением*. Для потенциального поля

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k\right) = -\mathrm{grad}U.$$

Элементарная работа сил поля

$$dA = F \cdot dr = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = -dU,$$

где $\mathrm{d}U$ − полный дифференциал функции $U(x, y, z)$. Если частица переместилась из точки 1 в точку 2, потенциальная энергия в которых равна U_1 и U_2 соответственно, то полная работа сил поля (рис. 7):

$$A=\int\limits_{т.1}^{т.2} F \cdot dr=\int\limits_{т.1}^{т.2} dU=U_1-U_2, \qquad (15)$$

т.е. работа, совершаемая над частицей, равна убыли ее потенциальной энергии. Форма траектории, по которой двигалась частица, может быть совершенно произвольной. В любом случае изменение потенциальной энергии будет одним и тем же. Таким образом, работа, совершаемая над частицей силами потенциального поля, не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положениями частицы.

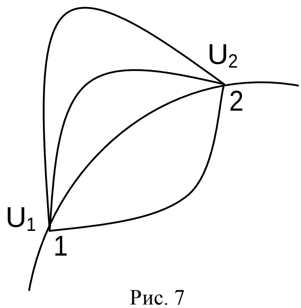

Рис. 7

Силы, работа которых не зависит от формы траектории, по которой частица перемещается из одного положения в другое, называются **консервативными**. Поле консервативных сил является потенциальным. Легко видеть, что работа консервативных сил при перемещении частицы по замкнутой траектории равна нулю. Для доказательства этого достаточно положить в (15), что частица, пройдя некоторый путь, возвратилась в исходное положение (т.е., что точки 1 и 2 совпадают). Понятие потенциальной энергии можно ввести только для полей консервативных сил. Согласно формуле (15), ***потенциальная энергия численно равна работе, совершаемой консервативными силами поля при перемещении частицы из данной точки в точку, потенциальная энергия в которой принята за нуль*** (в зависимости от конкретной задачи).

Силы, работа которых зависит от формы траектории и относительной скорости, называются ***диссипативными***.

Примером консервативной силы является сила тяжести. Работа силы тяжести $A = mg(h_1 - h_2)$, где h_1 и h_2 – начальная и конечная высота тела над поверхностью Земли, не зависит от формы пути. Теми же свойствами обладают силы упругости при не слишком больших деформациях. Напротив, силы трения – диссипативны.

Закон сохранения механической энергии

Сравнивая выражения (14) и (15) для работы, выполненной консервативными силами по перемещению материальной точки, можно записать

$$E_{к2} - E_{к1} = U_1 - U_2$$

или после переноса

$$E_{к2} + U_2 = E_{к1} + U_1.$$

Последний результат означает, что величина $E = E_к + U$ для частицы, находящейся в поле консервативных сил, остается постоянной, т.е.

$$E = E_к + U = \text{const}. \qquad (16)$$

Величину E, т.е. сумму кинетической и потенциальной энергии, называют ***полной механической энергией*** частицы. Формулу (16) автоматически можно распространить на систему невзаимодействующих между собой материальных точек, находящихся в поле консервативных сил. Полная механическая энергия такой системы сохраняется

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} U_i = \text{const},$$

где U_i – потенциальная энергия i-й частицы в поле внешних консервативных сил.

Теперь учтем взаимодействие между частицами системы. В этом случае в полную энергию системы дает вклад потенциальная энергия взаимодействия частиц между собой. Эта энергия зависит от взаимного расстояния для каждой пары частиц, т.е. в конечном итоге от конфигурации системы в целом.

$$E = E_{\text{к}} + U^{\text{внешн}} + U^{\text{вз}},$$

где $U^{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^{n} U_i$ – потенциальная энергия системы во внешнем поле;

$U^{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq k}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_{ik}^{\text{вз}}$ – потенциальная энергия взаимодействия частиц.

Полная механическая энергия системы взаимодействующих тел, при действии только консервативных сил (как внешних, так и внутренних), остается постоянной. Это и есть **закон сохранения полной механической энергии.**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ И СКОРОСТИ

Цель работы: изучить методы измерения кинематических величин – ускорения и скорости быстродвижущихся тел; экспериментально определить ускорение свободного падения и скорость пули из пружинного пистолета.

ЧАСТЬ А. **Определение ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда**

Методика выполнения работы

Принципиальная схема машины Атвуда показана на рис. 8. Машина состоит из вертикальной колонны *1* с линейкой с миллиметровой шкалой. В верхней части колонны укреплен легкий блок *2*, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута тонкая нерастяжимая нить *3*, на концах которой закреплены цилиндрические грузы *4* и *5* одинаковой массы M. На правом грузе *5* устанавливается перегрузок *6* массой m, имеющий форму кольца. На колонне установлен кронштейн со съемным кольцом *7*, внутренний диаметр которого больше, чем диаметр груза *5*, но меньше диаметра перегрузка *6*. При движении вниз груз *5* свободно проходит сквозь кольцо *7*, а перегрузок *6* снимается. До снятия перегрузка система грузов движется равноускоренно, а после снятия – с постоянной скоростью. Кронштейн со съемным кольцом можно перемещать вдоль колонны, тем самым изменяя пути равноускоренного (S) и равномерного (S_1) движений груза *5*, проходимых им до и после съема перегрузка. По указателю *8* устанавливают нижний срез груза *5* в исходное состояние, в котором система удерживается благодаря электромагнитному тормозу. Тормоз приводится в действие при отжатой кнопке «Пуск» на электронном приборе (на схеме не показана), блокировка снимается при ее нажатии. Прибор оснащен электронным секундомером для определения времени равномерного движения груза *5* на отрезке пути S_1. Секундомер автоматически запускается в момент съема перегрузка благодаря тому, что в этот же момент нижний край груза перекрывает световой пучок в фотореле, выдающего на секундомер запускающий импульс, и так же автоматически останавливается при достижении грузом *5* нижней точки пути (фотореле на схеме не показаны). Предварительно до нажатия кнопки «Пуск» необходимо обнулить на табло секундомера показания предыдущего измерения кнопкой «Сброс».

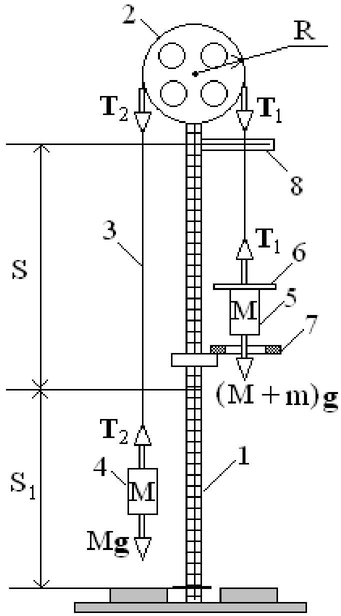

Рис. 8

Рассмотрим работу установки. Запишем основное уравнение динамики поступательного движения системы грузов. Сразу же учтем, что нить практически невесома и нерастяжима и потому ускорения левой и правой частей системы будут одинаковы по модулю, сила натяжения нити одинакова в любом сечении с одной стороны блока. Для правой части системы (груз *5* с перегрузком *6*):

$$(M+m)\cdot g - T_1 = (M+m)\cdot a,$$

где T_1 – сила натяжения нити в правой части;

a – модуль ускорения системы грузов;

g – ускорение свободного падения.

Для левого груза *4*

$$T_2 - Mg = Ma.$$

Запишем для блока основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела в проекции на ось блока

$$M_{T_1} - M_{T_2} - M_{\text{тр}} = I\varepsilon,$$

где $M_{T_1} = T_1 R$, $M_{T_2} = T_2 R$ – моменты сил натяжения нити справа и слева от блока соответственно;

$M_{\text{тр}}$ – момент сил трения;

I – момент инерции блока;

ε – угловое ускорение блока.

Учтем, что в отсутствие проскальзывания нити $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$. Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&(M+m)g - T_1 = (M+m)a,\\
&T_2 - Mg = Ma,\\
&T_1 R - T_2 R - M_{\text{тр}} = I\,\frac{a}{R}.
\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений относительно a имеет следующий вид:

$$a = \frac{mgR - M_{\text{тр}}}{(2M+m)R + \dfrac{I}{R}}. \qquad (17)$$

Поскольку трение на оси блока и момент инерции блока весьма малы $M_{\text{тр}} << mgR$, $I << (2M+m)R^2$, то выражение (17) упрощается:

$$a = \frac{m}{(2M+m)}g.$$

Следовательно, если измерить ускорение, с которым движется система грузов на участке S, то можно определить ускорение свободного падения g:

$$g = \frac{(M + m)}{m} a.$$

С целью уменьшения погрешности, которая может возникнуть из-за неточности установки системы в исходное положение, ускорение определяют по измеренным пути ускоренного движения и скорости в конце этого пути (П.6). Эту скорость находят по значениям пути S_1 и времени t_1 равномерного движения после снятия перегрузка. Таким образом:

$$a = \frac{v^2}{2S} = \frac{S_1^2}{2St_1^2},$$

и рабочая формула для нахождения ускорения свободного падения имеет вид:

$$g = \frac{(M + m)}{m} \frac{S_1^2}{2St_1^2}.$$

Значения масс используемых грузов и перегрузков: M = (64,25 ± 0,05) г; m_1 = (7,80 ± 0,05) г; m_2 = (10,50 ± 0,05) г; m_3 = (12,00 ± 0,05) г.

Задание:

1. Измерьте ускорение свободного падения для трех различных масс перегрузка при значении S_1 в пределах 15–20 см. Для определения случайной погрешности измерения времени Δt_1 проведите измерения 5 раз с каждым перегрузком.
2. Повторите измерения для S_1 = 25–30 см.
3. Определите абсолютную случайную погрешность измерения времени t_1 и рассчитайте абсолютную погрешность определения ускорения свободного падения для каждой серии измерений.

ЧАСТЬ Б. **Определение скорости полета пули с помощью крутильного баллистического маятника**

МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Метод баллистического маятника используется для измерения скорости быстродвижущихся тел – пуль или снарядов. В основе метода лежат законы физики абсолютно неупругого удара. Пуля массы m, летящая со скоростью v, попадает в покоящееся массивное тело-мишень массы $M_м$ ($m<<M_м$) и застревает в нем. Возникающие в течение короткого промежутка времени большие диссипативные силы взаимодействия приводят к превращению большей части начальной кинетической энергии пули в тепловую энергию. Следовательно, полная механическая энергия системы пуля-мишень не сохраняется. Напротив, полный импульс этой системы сохраняется, т. к. названные силы для нее являются внутренними. Поэтому

$$mv = (M_м + m)u \quad \text{и} \quad v = \frac{(M_м + m)}{m}u, \qquad (18)$$

где u – скорость системы непосредственно после удара.

Как видно из (18), она значительно меньше скорости пули и легко может быть измерена. Например, мишень может быть подвешена на достаточно длинной нити, т.е. представлять собой математический маятник. В нижней точке (положение равновесия) маятник приобретает скорость u, и тем самым получает запас кинетической энергии, которая при предельном отклонении маятника полностью превращается в потенциальную энергию. Измерив угол отклонения α, определяют скорость u из равенства

$$\frac{(M_м + m)u^2}{2} = (M_м + m)gh,$$

где $h = l(1 - \cos\alpha)$ – высота подъема маятника;

l – длина маятника.

Наибольшей компактностью с обеспечением высокой точности измерений обладает ***крутильный баллистический маятник***. Принципиальная схема этого маятника приведена на рис. 9. На закрепленной в станине стальной струне *1* перпендикулярно к ней расположены два стержня *2* с нанесенными через равные интервалы засечками. На концах стержней установлены две мисочки *3*, заполненные пластилином. На стержнях также крепятся два перемещаемых груза *4*, которые располагают симметрично относительно оси. Прибор имеет шкалу *5* для отсчета угла поворота маятника. Пуля выстреливается устройством *6*, установленным напротив правой мисочки. Попадая при выстреле в мисочку и застревая в пластилине на расстоянии *r* от оси маятника, пуля сообщает маятнику момент импульса

$$I_1\omega = m\upsilon r, \tag{19}$$

где I_1 – момент инерции маятника относительно оси вращения при положении грузов *4* на расстоянии R_1 от оси;

ω – угловая скорость маятника после удара.

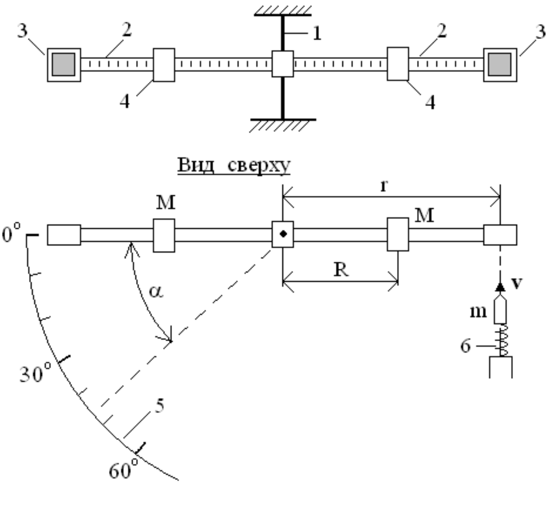

Рис. 9

По мере вращения маятника происходит закручивание струны и под действием момента упругих сил, возрастающего с увеличением угла закручивания, угловая скорость уменьшается до нуля. При предельном угле закручивания α потенциальная энергия достигает максимального значения.

$$W_{\text{пот.max}} = f\,\frac{\alpha^2}{2},$$

где f – модуль кручения струны, а угол α выражен в радианах.

При упругой деформации струны выполняется закон сохранения механической энергии

$$\frac{I_1\omega^2}{2} = \frac{f\alpha^2}{2}.$$

Отсюда находим начальную угловую скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{I_1}}\alpha. \qquad (20)$$

Подставляя выражение (20) в уравнение (19), получаем:

$$\sqrt{I_1 f}\cdot\alpha = m\upsilon r. \qquad (21)$$

Расстояние r и максимальный угол отклонения маятника α легко измерить на опыте. Напротив, величины I_1 и f необходимо выразить через другие величины, определенные путем прямых измерений. Если отклонить маятник на угол α и отпустить, то он будет совершать колебания с периодом

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{f}}. \qquad (22)$$

Умножая уравнения (21) и (22), исключим модуль кручения

$$m\upsilon r T_1 = 2\pi I_1\alpha. \qquad (23)$$

Момент инерции маятника можно представить следующим образом:

$$I_1 = 2MR_1^2 + I_0, \qquad (24)$$

где M – масса каждого из перемещаемых грузов *4*;

R_1 – установленное перед стрельбой расстояние от их центров масс до оси маятника;

I_0 – момент инерции не смещаемой части (стержни, мисочки, зажим).

Чтобы исключить I_0, передвинем грузы *4* на расстояние R_2 от оси и измерим период колебаний T_2 в этом случае. При новом положении грузов момент инерции маятника равен

$$I_2 = 2MR_2^2 + I_0. \qquad (25)$$

Вычитая из равенства (25) равенство (24), получаем:

$$I_2 - I_1 = 2M\left(R_2^2 - R_1^2\right). \qquad (26)$$

Как видно из (22):

$$\frac{I_1}{T_1^2} = \frac{I_2}{T_2^2}.$$

Выражая отсюда I_2 через I_1 и подставляя в (26), найдем:

$$I_1 = \frac{2MT_1^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{\left(T_2^2 - T_1^2\right)}. \qquad (27)$$

Теперь, подставляя (27) в (23), получим расчетную формулу для определения скорости полета пули

$$\upsilon = \frac{4\pi M\alpha T_1\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{mr\left(T_2^2 - T_1^2\right)}.$$

Для уменьшения погрешности результата необходимо, чтобы R_1 и R_2, а, следовательно, и T_1 и T_2 отличались как можно больше, т.е. следует брать крайние положения грузов. По той же причине угол α должен быть по возможности больше. Поэтому стрельбу следует производить при минимальном расстоянии от грузов до оси вращения (т.е. при наименьшем моменте инерции маятника в целом).

Значения параметров: M = (200,00±0,05) г; m =(2,00±0,05) г.

Задание

1. Определите скорость полета пули по серии из 5 выстрелов и рассчитайте ее абсолютную погрешность. *Внимание: перед выстрелом проверяйте установку коромысла маятника на нулевую отметку угломера.*
2. Повторите серию измерений при максимальном удалении грузов от оси вращения. Рассчитайте абсолютную погрешность определения скорости в этом случае и сравните ее значения в п. 1 и п. 2

Контрольные вопросы

1. Что такое средняя и мгновенная скорость?
2. Что такое ускорение? Что такое нормальное и тангенциальное ускорение?
3. Сформулируйте три закона Ньютона.
4. В чем суть рассмотренного в работе метода измерения ускорения свободного падения?
5. Как создается равномерное движение двух грузов на машине Атвуда?
6. Какие упрощения были сделаны при выводе расчетной формулы для ускорения свободного падения?
7. Почему ускорение свободного падения не зависит от массы падающего тела?
8. Что представляет собой крутильный баллистический маятник?
9. В чем суть рассмотренного в работе метода определения скорости быстролетящего тела (пули)?
10. Какие законы сохранения лежат в основе работы крутильного баллистического маятника?
11. Чему равен период колебаний крутильного маятника?
12. Как рассчитывается момент инерции маятника? Какое при этом делается упрощение?

Литература

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2003. – 541 с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 т. / И.В. Савельев. – Т.1 Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
3. Петровский, И.И. Механика / И.И. Петровский. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973. – 352 с.
4. Сивухин, Д.В. Механика: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Цель работы: изучить закон сохранения и превращения механической энергии при движении тел в поле консервативных сил; изучить закон сохранения импульса; экспериментально проверить выполнение этих законов.

ЧАСТЬ А. **Экспериментальная проверка выполнения закона сохранения механической энергии**

Методика выполнения работы

Установка для проверки закона сохранения механической энергии (рис.10) имеет ту же базовую часть, что и машина Атвуда в лабораторной работе № 7. Поэтому для более полного ознакомления с установкой можно также изучить описание установки к работе № 7. Основное отличие заключается в отсутствии устройства для съема перегрузка, весь путь система грузов проходит равноускоренно. Электронный секундомер автоматически запускается в момент начала движения системы импульсом с фотореле *1*, формируемым при пересечении правым грузом светового луча в нем, и таким же образом останавливается при помощи фотореле *2*, установленного в нижней точке пути. Таким образом, высота h, фигурирующая в выводимой ниже рабочей формуле, есть расстояние между уровнями фотодатчиков *1* и *2*, измеряемое по линейке на колонне. Поскольку рабочая формула справедлива только при начальной кинетической энергии системы, равной нулю, то при проведении измерений очень важно в исходном состоянии устанавливать нижний срез правого груза m точно по уровню верхнего фотодатчика *1*. Блок затормаживается электромагнитом при отжатой кнопке «Пуск» на электронном приборе и система удерживается в статическом состоянии (блокируется). Блокировка снимается нажатием кнопки «Пуск», при этом кнопка фиксируется в нажатом положении. При проведении очередного замера времени необходимо обнулить предыдущее показание секундомера с помощью кнопки «Сброс».

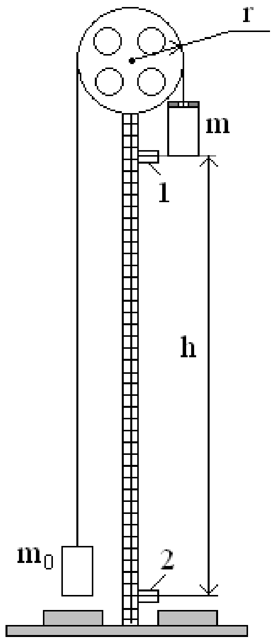

Рис. 10

Рассмотрим работу установки. Через блок, вращающийся с малым трением, перекинута нить, на концах которой подвешены грузы m_0 и m. Масса груза m больше, чем m_0, и его устанавливают на высоте h над нулевой отметкой (уровень нижнего фотодатчика 2). При этом длина нити должна быть такой, чтобы груз m_0 находился не выше нулевой отметки (в противном случае этот груз достигнет блока раньше, чем груз m опустится на нулевую отметку). При разблокировании системы она приходит в движение, груз m опускается в конце пути на нулевую отметку, а груз m_0 при этом поднимается на высоту h, так как нить практически не растяжима. Потенциальная энергия mgh, которой обладал груз m в исходном состоянии, превращается в его кинетическую энергию, а также в кинетическую и потенциальную энергию груза m_0 и кинетическую энергию вращения блока. Кроме того часть энергии расходуется на совершение работы против сил трения на оси блока и сил сопротивления воздуха.

Таким образом, закон сохранения и превращения энергии в данном случае принимает вид:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m_0\upsilon^2}{2} + m_0gh + \frac{I\omega^2}{2} + A_{\text{тр}} + A_{\text{с}}, \qquad (28)$$

где υ – конечная скорость груза (его скорость на нулевой отметке);

ω и I – соответственно конечная угловая скорость и момент инерции блока;

$A_{\text{тр}}$ – работа, совершаемая против сил трения в блоке;

$A_{\text{с}}$ – работа, совершаемая против сил сопротивления воздуха.

Грузы и блок движутся равноускоренно, поэтому конечная скорость груза

$$\upsilon = \frac{2h}{t}, \qquad (29)$$

где t – измеренное время движения системы, а конечная угловая скорость вращения блока:

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{2h}{rt}, \qquad (30)$$

где r – радиус блока; r = 0,042 м.

Момент инерции блока можно считать как момент инерции диска:

$$I = \frac{Mr^2}{2}, \qquad (31)$$

масса блока – M = (8,50±0,05) г .

В работе используются грузы одинаковой формы, поэтому на них действуют равные силы сопротивления воздуха. Груз набирается из основы массой m_0 = (21,50±0,05) г и дополнительных шайб с прорезями для надевания на основу, масса каждой из них m' = (5,50±0,05) г. Таким образом можно набрать массы $m_1 = m_0 + m'$ = = (27,00±0,10) г, $m_2 = m_0 + 2m'$ = (32,50±0,15) г.

Для двух различных правых грузов с массами m_1 и m_2 в соответствии с (28) получим два независимых уравнения

$$\begin{cases} m_1gh = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_0\upsilon_1^2}{2} + m_0gh + \dfrac{I\omega_1^2}{2} + A_{\text{тр}} + A_{\text{с}}, \\ m_2gh = \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} + \dfrac{m_0\upsilon_2^2}{2} + m_0gh + \dfrac{I\omega_2^2}{2} + A_{\text{тр}} + A_{\text{с}}. \end{cases} \tag{32}$$

Учитывая, что работы против сил трения и сопротивления среды при различных значениях массы правого груза практически равны, из системы уравнений (32) получим:

$$2gh(m_2 - m_1) = (m_2\upsilon_2^2 - m_1\upsilon_1^2) + m_0(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) + I(\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Используя выражения (29), (30), (31), получим окончательную рабочую формулу:

$$g(m_2 - m_1) = 2h\left(\frac{m_2}{t_2^2} - \frac{m_1}{t_1^2}\right) + (2m_0 + M)\left(\frac{h}{t_2^2} - \frac{h}{t_1^2}\right). \tag{33}$$

Измерив значения величин h, t_1, t_2 и используя приведенные выше значения m_1, m_2, m_0, M и $g = 9{,}81$ м/с^2, можно убедиться, что численные значения левой и правой частей равенства (33) совпадают с точностью до ошибок измерения. Тем самым экспериментально подтверждается закон сохранения и превращения механической энергии, т. к. равенство (33) является прямым следствием этого закона.

Задание

1. Проведите измерение величин h, t_1, t_2, входящих в формулу (33). Времена t_1 и t_2 определите по серии из 5 измерений для каждого, определите абсолютные случайные погрешности измерения времени Δt_1 и Δt_2.
2. Подставьте измеренные величины в формулу и проведите вычисления.
3. Рассчитайте погрешности выражений, стоящих в левой и правой частях равенства (21).
4. Сравните численные значения правой и левой частей и сделайте вывод о выполнении закона сохранения энергии в механике.

ЧАСТЬ Б. **Экспериментальная проверка выполнения закона сохранения импульса**

Методика выполнения работы

Наиболее отчетливо закон сохранения импульса проявляется при соударении двух тел. Удар – это кратковременное взаимодействие тел, двигавшихся до этого с различными скоростями, при их соприкосновении, в результате которого резко меняется состояние их движения. При этом считается, что как до, так и после удара тела не взаимодействуют. Прямая, совпадающая с нормалью к поверхности соударяющихся тел в точке их соприкосновения, называется линией удара. Если линия удара проходит через центры масс тел, удар называется центральным. Если оба соударяющихся тела до удара двигались по линии удара, то удар называется прямым, в противном случае удар будет косым.

Прямой центральный удар является ***абсолютно неупругим***, если скорости тел после соударения становятся одинаковыми, так что оба тела движутся вместе, оставаясь в соприкосновении и в деформированном состоянии. Пусть два шара, массы которых m_1 и m_2, до удара двигались со скоростями v_1 и v_2. После абсолютно неупругого удара они будут двигаться с общей скоростью u. Так как силы взаимодействия между шарами при ударе являются внутренними, то они не могут изменить общего импульса системы шаров. Значит:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{u}.$$

Отсюда общая скорость шаров после удара:

$$\boldsymbol{u} = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Из этого выражения видно, что после удара оба шара будут двигаться в сторону движения шара, обладавшего до удара большим импульсом. Суммарная кинетическая энергия шаров после неупругого удара становится меньше, чем до удара, поскольку часть ее расходуется на создание деформаций, не исчезающих после удара, и превращается в итоге в энергию молекулярно-теплового движения. Таким образом, кинетическая энергия шаров после удара $E'_к$

равна разности между их кинетической энергией до удара $E_{к}$ и ее потерями на совершение работы деформации A:

$$E'_{к} = E_{к} - A.$$

Суммарная кинетическая энергия шаров до удара равна

$$E_{к} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2},$$

после удара

$$E'_{к} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Следовательно, работа деформации в процессе удара равна

$$A = E_{к} - E'_{к} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2,$$

т.е. она пропорциональна квадрату относительной скорости соударяющихся тел $(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2$ и зависит от соотношения их масс.

Вторым крайним случаем прямого центрального удара является ***абсолютно упругий*** удар. Удар называется абсолютно упругим, если суммарные кинетические энергии соударяющихся тел после удара и до удара равны. После упругого удара скорости соударяющихся тел u_1 и u_2 различны, а сами тела не деформированы. Запишем для прямого центрального абсолютно упругого удара двух шаров законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2;$$

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Решив эту систему уравнений, получим скорости шаров после удара

$$u_1 = \frac{2m_2 \upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2}; \qquad (34)$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \tag{35}$$

Пусть два шара подвешены на практически нерастяжимых нитях. Массы шаров m_1 и m_2, диаметры одинаковы (рис. 11). Если шар 2 отвести на угол α от положения равновесия и отпустить, то между шарами произойдет упругий удар. До соударения шар 1 покоится в состоянии равновесия, т.е. $v_1 = 0$. В момент соударения шары образуют замкнутую систему, т. к. в положении, в котором происходит удар, внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга. Следовательно, скорости шаров после удара можно определить по формулам (34) и (35):

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2; \tag{36}$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 . \tag{37}$$

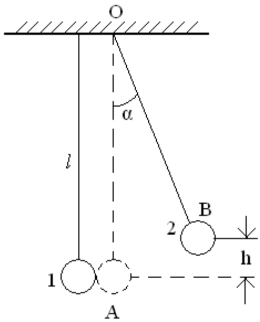

Рис.11

Скорость шара 2 $\boldsymbol{\upsilon}_2$ в момент, предшествующий удару, определяется из закона сохранения энергии. Шар, отклоненный на угол α, обладает потенциальной энергией $E_п = mgh$. В положении равновесия эта энергия переходит в кинетическую $E_к = \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}$, тогда

$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$. Из ΔAOB имеем: $\cos\alpha = \frac{l-h}{l}$, откуда $h = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$, тогда

$$\upsilon_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{38}$$

где l – длина нити.

Аналогично можно определить скорости шаров после удара по их амплитудному отклонению (α_1 – для шара 1, α_2 – для шара 2):

$$u_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1}{2}; \qquad u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_2}{2}. \tag{38′}$$

Тогда проверка выполнения закона сохранения импульса заключается в проверке выполнения равенства

$$m_2\sin\frac{\alpha}{2} = m_1\sin\frac{\alpha_1}{2} + m_2\sin\frac{\alpha_2}{2}. \tag{39}$$

причем α_2 нужно брать со знаком минус, если после удара шар 2 отклонится в сторону, противоположную к направлению его движения до удара. Массы используемых шаров: m_1 = (105,00±0,05) г, m_2 = (112,50±0,05) г, длина подвеса шаров l = (49,00±0,10) см. Шар 2 в отклоненном состоянии удерживается электромагнитом при отжатой кнопке «Пуск» на электронном блоке, при нажатии этой кнопки шар освобождается. Устанавливая один и тот же угол начального отклонения шара 2 (например, α = 10°), проведите серию измерений значения угла отклонения α_1 шара 1 после удара, затем для шара 2 (α_2). При выполнении работы в паре эти измерения можно совместить.

Задание

1. Измерьте углы отклонения шаров α, α_1 и α_2. Определите погрешность измерения.

2. По формуле (39) проверьте выполнение закона сохранения импульса.

3. По формулам (38) и (38') рассчитайте скорости шаров до и после удара.

4. Подставляя значение υ_2 в формулы (36) и (37), рассчитайте значения скоростей u_1 и u_2, которые удовлетворяют условию абсолютно упругого удара.

5. Сравните значения, полученные в п. 4, со значениями, определенными в п. 3. Сделайте вывод о степени упругости удара.

Контрольные вопросы

1. Чему равна работа силы? Как определить работу переменной силы?
3. Назовите виды механической энергии.
1. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
2. Дайте определение импульса тела.
3. Сформулируйте закон сохранения импульса.
4. Что собой представляет абсолютно упругий удар? Что собой представляет абсолютно неупругий удар?
5. Как на опыте осуществляется проверка закона сохранения механической энергии? Сделайте вывод расчетной формулы.
6. Как на опыте осуществляется проверка закона сохранения импульса? Какие при этом проводятся прямые измерения?

Литература

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2003. – 541 с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 т. / И.В. Савельев. – Т.1: Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
3. Петровский, И.И. Механика / И.И. Петровский. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973. – 352 с.
4. Сивухин, Д.В. Механика: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Действующая на материальную точку результирующая сила в общем случае может быть функцией времени, координат и скорости материальной точки – $F = F(t, x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$. Соответственно, функцией этих переменных является и ускорение МТ: $a = \frac{F}{m}$. Уравнение движения в векторном виде

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{F(t, x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)}{m},$$

что равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{F_x(t, x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)}{m}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{F_y(t, x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)}{m}, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \dfrac{F_z(t, x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)}{m}. \end{cases} \tag{П.1}$$

Для решения этих дифференциальных уравнений необходимо также знать начальные условия, т.е. значения координат и проекций скорости при $t = 0$: x_0, y_0, z_0, υ_{x0}, υ_{y0}, υ_{z0} . Решение системы (П.1) в общем случае представляет сложную задачу и может быть осуществлено приближенно только численными методами с помощью компьютера. Точное аналитическое решение получается лишь в наиболее простых, но часто встречающихся на практике случаях. Рассмотрим их в порядке возрастания сложности.

1. На МТ не действуют силы, либо равнодействующая приложенных сил равна нулю: $F = 0$ и $a = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 = \mathrm{const}$, т.е. имеет место равномерное прямолинейное движение МТ. В этом случае наиболее рационально выбрать систему отсчета

так, чтобы движение осуществлялось вдоль одной координатной оси, например, оси Ох. Тогда

$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0$, а $\upsilon_y = \upsilon_z = 0$ и $y = z = 0$ – задача одномерная. Поскольку $\frac{dx}{dt} = \upsilon_0$, закон движения имеет вид:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t \ . \qquad (П.\ 2)$$

2. На МТ действует постоянная сила (равнодействующая сил) и потому: $\boldsymbol{a}$ = const. В этом случае возможны два варианта задачи:

2.1 Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_0$ коллинеарные. В этом случае изменение вектора скорости возможно только вдоль его начального направления и мы опять имеем одномерное (прямолинейное) движение. За положительное направление оси Ох выбираем направление вектора $\boldsymbol{\upsilon}_0$, тогда $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, $\upsilon_y = \upsilon_z = 0$, а также принимаем $y = z = 0$. Проекция ускорения a_x на эту ось может быть как положительной ($a \uparrow\uparrow \boldsymbol{\upsilon}$, $a_x = a$ – ускоренное движение), так и отрицательной ($a \uparrow\downarrow \boldsymbol{\upsilon}$, $a_x = -a$ – замедленное движение). Интегрируем:

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = a_x \rightarrow \upsilon_x = \upsilon_0 + a_x t \text{, если } \upsilon_0 = 0 \text{, то } \upsilon_x = a_x t \ ; \qquad (П.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + a_x t \rightarrow \text{закон движения – } x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{a_x t^2}{2} . \qquad (П.4)$$

Если движение происходит без начальной скорости ($\upsilon_0 = 0$, $a_x = a$ – тело может только разгоняться), то, согласно (П.4), путь, пройденный телом за время t, равен

$$S = x - x_0 = \frac{at^2}{2} . \qquad (П.5)$$

Отсюда ускорение a можно определить по измеренному пути и времени ускоренного движения. Если же определить скорость υ в конце равноускоренного движения, то, выразив из (П.3) время и подставив в (П.5), получим равенство $S = \frac{\upsilon^2}{2a}$, откуда

$$a = \frac{\upsilon^2}{2S} \qquad \text{П.6)}$$

2.2 Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_0$ не коллинеарные. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_0$ задают плоскость, в которой происходит движение тела. Выберем оси координат так, чтобы движение происходило в плоскости xOy. Ось Oy, например, направим вдоль вектора $\boldsymbol{a}$. Тогда $a_x = 0$, $a_y = a$, $a_z = 0$, т.е. $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{j}$, а $\upsilon_0 = \upsilon_{0x}\boldsymbol{i} + \upsilon_{0y}\boldsymbol{j}, \quad \upsilon_z = \upsilon_{0z} = 0$. Интегрируем:

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 0 \to \upsilon_x = \upsilon_{0x};\ \frac{dx}{dt} = \upsilon_{0x} \to x = x_0 + \upsilon_{0x}t \qquad (\text{П.7})$$

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = a \to \upsilon_y = \upsilon_{0y} + at$$

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_{0y} + at \to y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{at^2}{2}; \qquad (\text{П.8})$$

$z = 0$

Уравнение траектории движения получим, выразив из (П.7) время t через x, x_0, υ_{0x} и подставив в (П.8):

$$y = y_0 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_{0x}}(x - x_0) + \frac{a(x - x_0)^2}{2\upsilon_{0x}^2}.$$

Траекторией является парабола. Пример – движение тела, брошенного под углом к горизонту.

Учебное издание

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Лабораторные работы № 7, 4

Составители:
КРАСОВСКИЙ Василий Васильевич
МАЛАХОВСКАЯ Вера Эдуардовна
БУМАЙ Юрий Александрович

Редактор Е.О. Коржуева
Компьютерная верстка Л.А. Адамович

Подписано в печать 16.03.2010.
Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 1,82. Тираж 100. Заказ 1139.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.