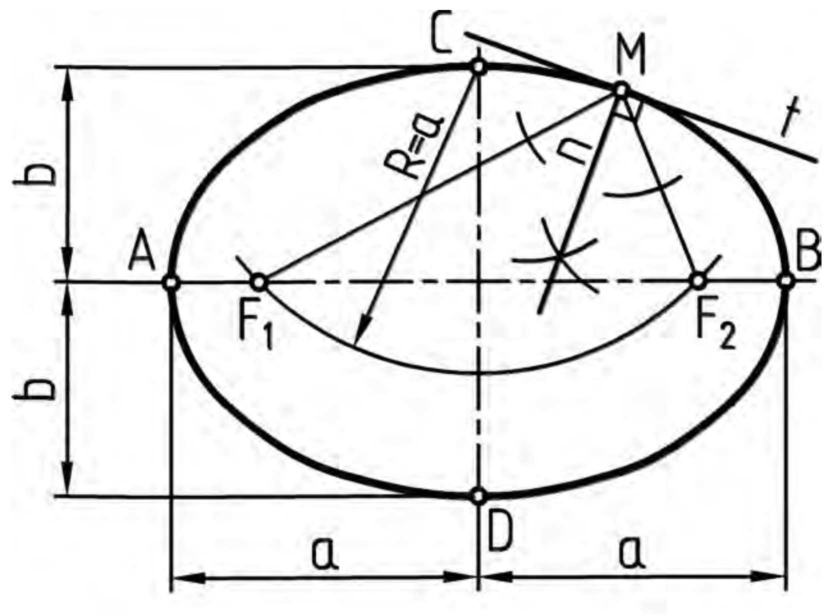
Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля»

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ: КРИВЫЕ ЛИНИИ, СОПРЯЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по инженерной графике



Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля»

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ: КРИВЫЕ ЛИНИИ, СОПРЯЖЕНИЯ

**Учебно-методическое пособие по инженерной графике
с вариантами индивидуальных заданий
для студентов машиностроительных специальностей**

Под общей редакцией П.В. Зеленого

Минск 2009

УДК [514.181.2+76:621](075.8)
ББК 22.151.3я7
Г 36

А в т о р ы:
Т.А. Марамыгина, С.В. Гиль,
Е.И. Белякова, П.В. Зеленый

Р е ц е н з е н т ы:
Н.А. Шавель, Н.М. Зеленовская

Марамыгина, Т.А.

Г 36 Геометрические построения: Кривые линии, Сопряжения: учебно-методическое пособие по инженерной графике с вариантами индивидуальных заданий для студентов машиностроительных специальностей / Т.А. Марамыгина [и др.], под общ. ред. П.В. Зеленого. – Минск: БНТУ, 2009. – 70 с.

ISBN 978-985-525-115-7.

В учебно-методическом пособии рассмотрены классические методы геометрических построений плоских кривых, касательных и сопряжений, описаны их свойства и представлены варианты построений с кратким алгоритмом, приведены по 30 вариантов индивидуальных заданий для практических занятий студентов машиностроительных специальностей по рассмотренным теоретическим вопросам, даны образцы их выполнения.

УДК [514.181.2+76:621](075.8)
ББК 22.151.3я7

ISBN 978-985-525-115-7

ВВЕДЕНИЕ

Геометрические построения используются при выполнении чертежей, а также непосредственно в условиях производства, в частности, опытного для индивидуальной разметки по контуру плоской детали. В серийном и массовом производствах – для изготовления приспособлений: штампа или шаблона (копира).

Элементарными геометрическими построениями на чертежах являются: деление отрезков прямой и углов на равные части; деление окружности на равные части; построение уклонов и конусности. Часто встречаются на чертежах различные виды сопряжений прямых дугами окружности и дуг окружностей между собой.

При проектировании деталям машин придают наиболее простые формы, удобные для их изготовления и последующей механической обработки. Вычерчивание таких деталей также значительно упрощается, так как их очертания составляются из прямых линий, окружностей и их дуг, а следовательно, могут быть нанесены на бумагу при помощи циркуля, линейки и угольника.

При разметке деталей от качества геометрических построений, выполняемых непосредственно на листовом материале (нанесение базовых осей для отметки заданных элементов детали, центров дуг окружностей, центров отверстий, характерных точек), в первую очередь зависит качество готовой детали.

Замечательные свойства кривых широко используются в различных механизмах, строительных конструкциях, оптике, судо-, авто- и авиастроении, архитектуре, при проектировании путей сообщения, в радиоэлектронике и других областях науки и техники.

С помощью кривых можно наглядно проследить тот или иной процесс, лучше понять сущность той или иной функциональной зависимости, исследовать закономерности, для которых еще не найдены аналитические выражения, придать наиболее целесообразные и красивые формы изделию. Многие кривые непосредственно реализуются в физических явлениях в природе.

Практика разработала много методов построения кривых: метод координат (по уравнениям и данным алгебраического анализа), метод геометрических мест (множеств), метод инверсии и т.д. Полное раскрытие особенностей формы кривой и ее свойств возможно лишь тогда, когда кривая выражена в аналитической форме. В этом случае могут быть точно вычислены координаты любой ее точки, например, при изготовлении точных шаблонов в оптике, при расчерчивании на плазе обводов летательных аппаратов, судов, автомобилей и т.п. [3].

1. КРИВЫЕ ЛИНИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В начертательной геометрии кривые линии представляют особый интерес как производящие (образующие) кинематических поверхностей.

Кривые, все точки которых принадлежат одной плоскости, называются **плоскими**, остальные – **пространственными**.

Способы задания кривых:

- *аналитический* – кривая задана математическим уравнением;
- *графический* – кривая задана визуально на носителе графической информации;
- *табличный* – кривая задана координатами последовательного ряда ее точек.

Закономерные кривые линии разделяют на алгебраические и трансцендентные.

Плоская кривая называется **алгебраической**, если в ее уравнении $f(x,y) = 0$ функция $f(x,y)$ является степенным многочленом относительно x и y; в остальных случаях – **трансцендентной**. Кривая, представляемая, например, уравнением $y = \sin x$ (синусоида), – не алгебраическая, она – трансцендентная. Алгебраическая кривая линия, представляемая в декартовых координатах уравнением n-й степени, называется алгебраической кривой n-го порядка. Степень уравнения кривой определяет ее порядок.

Порядок *плоской* алгебраической кривой линии определяется наибольшим числом точек ее пересечения прямой линией (рис. 1). Любая прямая может пересекать алгебраическую кривую n-го порядка не более чем в n точках. Порядок *пространственной* алгебраической кривой линии геометрически определяется наибольшим числом точек ее пересечения плоскостью общего положения (рис. 2).

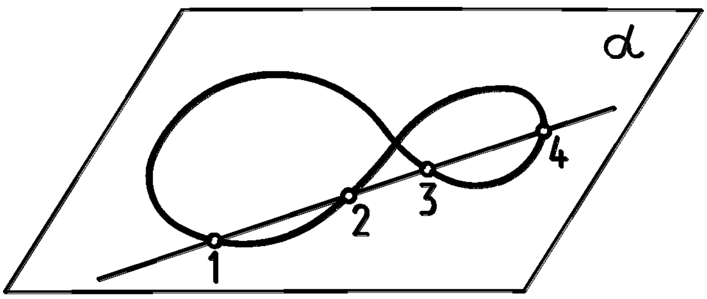


Рис. 1

Кривые линии в проекциях в общем случае представляются кривыми того же или более низкого порядка.

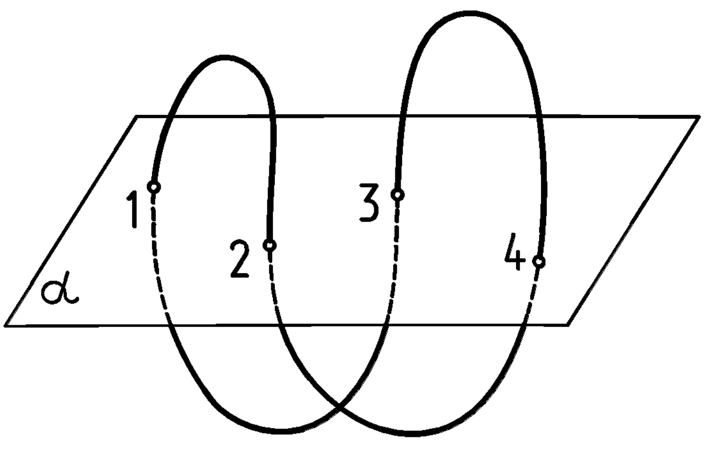


Рис. 2

В геометрическом черчении плоские кривые делят на две группы в зависимости от инструментов, которыми выполняется их построение: **коробовые (циркульные) кривые**, состоящие из дуг окружностей, и **лекальные кривые,** которые строят по точкам и обводят по лекалу.

Кривая линия как траектория движущейся точки должна быть **непрерывной.** Движущаяся точка в любом из положений должна иметь определенное направление движения. Это направление указывает прямая (**касательная**), проходящая через рассматриваемую точку.

Длина кривой (плоской или пространственной) определяется в общем случае суммой длин отрезков вписанной в нее ломаной линии с достаточно большим числом сторон, с заданной точностью передающей форму кривой.

Особый интерес представляют **окружность** и **цилиндрическая винтовая линия**, каждая из которых является соответственно эталоном плоских и пространственных кривых линий.

На чертеже кривые линии задают обычно проекциями последовательного ряда их точек [1; 3].

2. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ. КАСАТЕЛЬНЫЕ И НОРМАЛИ К ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

На рис. 3 показана плоская кривая a. Возьмем на ней произвольную точку A и проведем через нее секущие (хорды) AC и AE. При приближении точки C к точке A секущая AC будет поворачиваться вокруг точки A, и когда точка C совпадет с точкой A, AC достигнет своего предельного положения (луч t_1). В этом предельном положении секущая называется **полукасательной** к кривой a в точке A. Секущая AE в предельном положении также представляется полукасательной t_2.

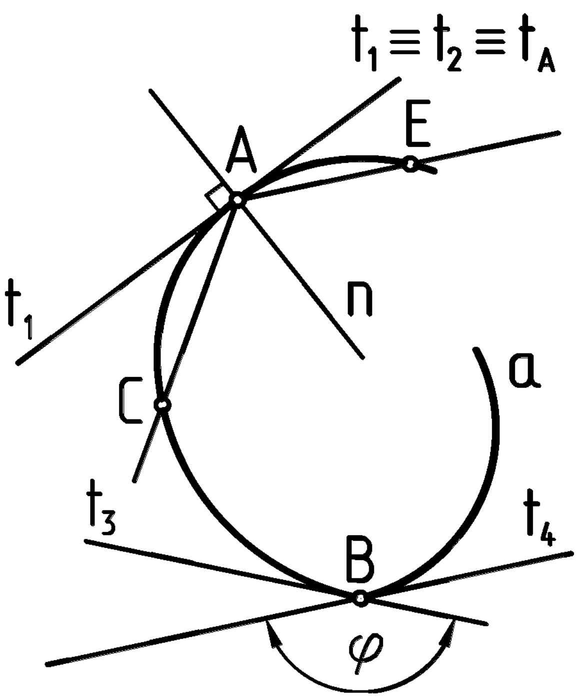


Рис. 3

Кривая линия в точке A имеет две разнонаправленные полукасательные. Если в точке A разнонаправленные полукасательные к кривой a образуют прямую линию – **касательную** (t_A), кривая линия в точке A называется **плавной.** Кривая, плавная во всех ее точках, называется **плавной кривой линией**.

Нормалью n в точке A кривой линии a называется перпендикуляр n к касательной t_A.

На кривой линии могут быть и точки, где разнонаправленные полукасательные не принадлежат одной прямой, а составляют между собой некоторый угол φ, отличный от 180°. Такая точка называется **точкой излома** или **выходящей точкой** (точка B на рис. 3).

При параллельном проецировании порядок плоской алгебраической кривой не изменяется. Число точек пересечения кривой линии с прямой линией равно числу точек пересечения их проекций.

Касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекции кривой.

Графический способ построения касательной и нормали к плоской кривой базируется на использовании «кривой ошибок». Для построения этой кривой из точки, через которую должна проходить искомая касательная, проводим лучи, пересекающие заданную кривую. Отмечаем концы хорд, по которым лучи пересекают кривую, и с помощью этих хорд строим «кривую ошибок».

Сущность этого метода проследим на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1. Построение касательной к кривой, проходящей через точку, не принадлежащую кривой (рис. 4).

Пусть даны кривая a и точка A, лежащие в одной плоскости, но точка A не принадлежит кривой a.

Проведем через точку A ряд секущих прямых a_1, a_2, a_2, a_3, a_4 . Отметим точки 1, 1_1, 2, 2_1, 3, 3_1, 4, 4_1, в которых эти секущие пересекают кривую a. Через середины полученных хорд проведем плавную кривую m («кривая ошибок»).

Пересечение линии m с заданной кривой a определит точку касания M. AM – искомая касательная t к кривой a, проведенная из точки A.

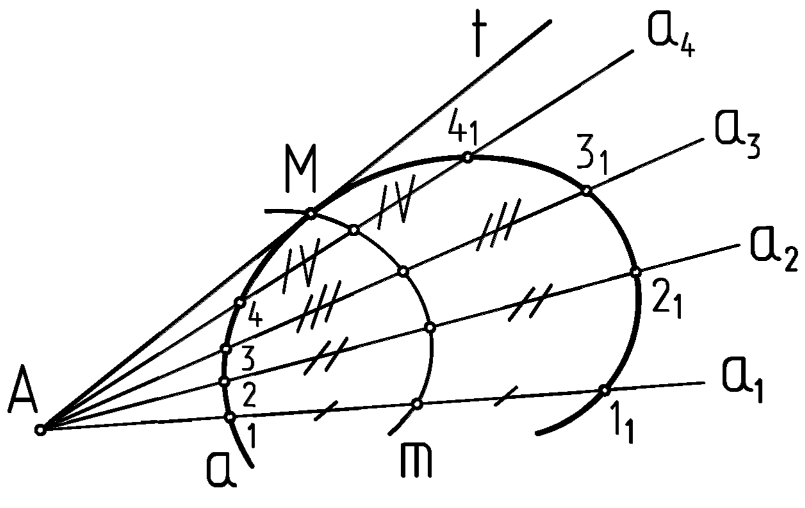


Рис. 4

ПРИМЕР 2. Построение касательной к кривой параллельно заданному направлению S (рис. 5).

Для определения точки касания M проведем ряд секущих прямых a_1, a_2, a_3, a_4 параллельно заданному направлению S. Через середины полученных хорд проведем плавную кривую m, отметим точку M ее пересечения с заданной кривой a. Точка M будет точкой касания, а прямая t, проходящая через эту точку параллельно S, искомой касательной.

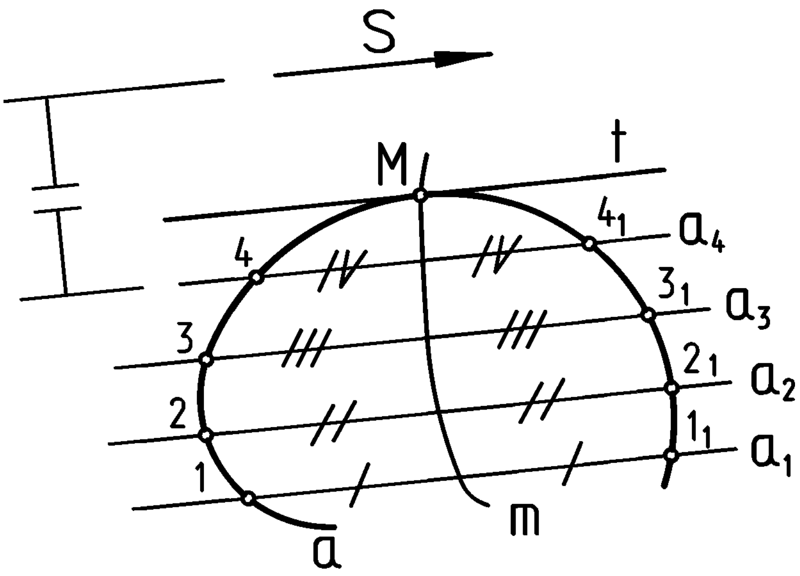


Рис. 5

ПРИМЕР 3.

Построение касательной к кривой а в данной точке касания М (рис. 6). Способ простой и быстрый, но неточный.

Проведем дугу небольшого радиуса R с центром в точке М. Отметим точки 1 и 2 пересечения этой дуги и кривой а. Проведем через точки 1 и 2 прямую m. Далее через точку М проведем прямую t параллельно прямой m. Прямая t – искомая касательная. Перпендикулярно касательной t построим нормаль n к кривой а в точке М [1; 2; 3; 5].

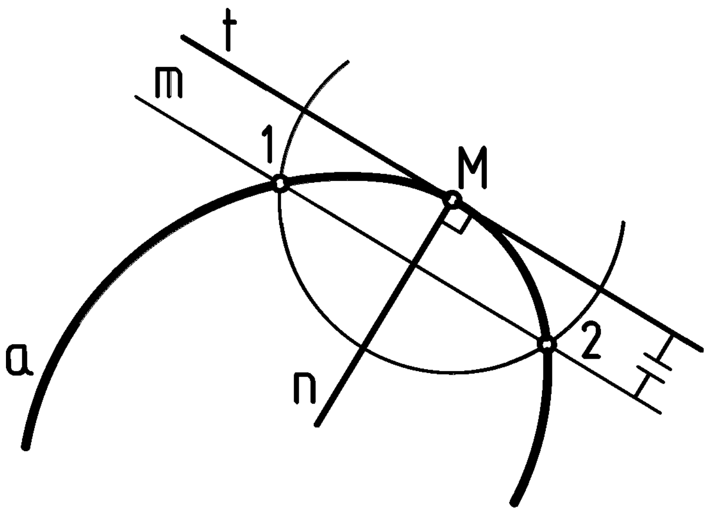


Рис. 6

3. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ. ЭВОЛЮТА И ЭВОЛЬВЕНТА КРИВОЙ

Угол φ (угол смежности) между касательными в двух бесконечно близких точках кривой, отнесенный к длине дуги между этими точками, определяет степень искривленности кривой линии, т.е. определяет **кривизну** кривой (рис. 7). Кривизной кривой линии называется величина **k**:

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}.$$

Кривизна прямой в любой ее точке равна нулю. Такие точки кривой называются *точками спрямления.*

Кривизна в каждой из точек плоской кривой а определяется с помощью *соприкасающейся окружности* (рис. 8).

Соприкасающейся окружностью или *кругом кривизны* кривой в данной точке называют предельное положение окружности, когда она проходит через данную точку и две другие бесконечно близкие к ней точки. Центр соприкасающейся окружности О называют **центром кривизны** кривой линии в данной точке, а радиус r_k такой

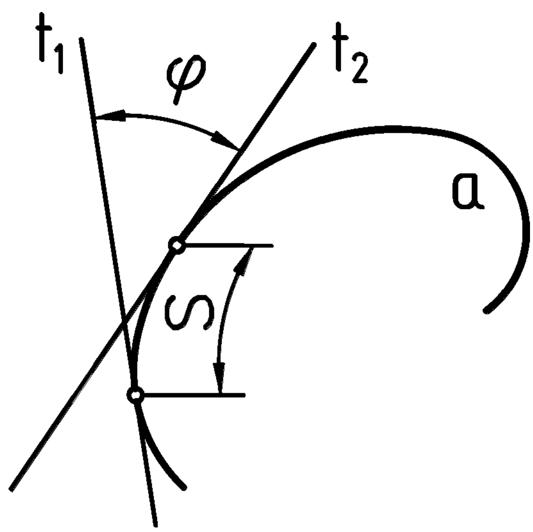


Рис. 7

окружности называют **радиусом кривизны**.

В рассматриваемой точке кривая линия и соприкасающаяся окружность имеют общие касательную t и нормаль n.

Кривизна кривой a в точке C равна:

$$k = \frac{1}{r_k}.$$

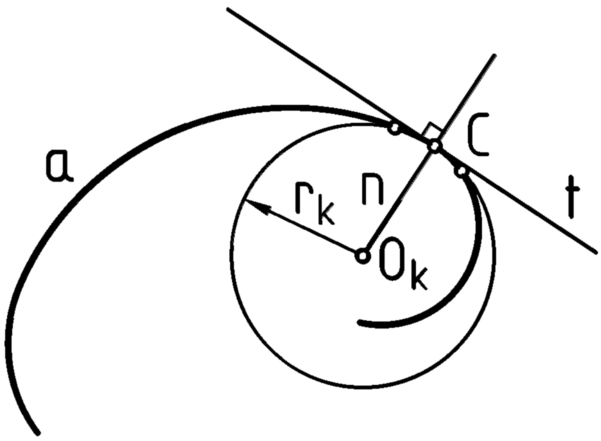


Рис. 8

Отсюда можно сделать вывод, что кривизна окружности радиусом r во всех точках постоянна и равна 1/r. Чем больше радиус окружности, тем меньше ее кривизна.

Кривые линии, у которых радиусы кривизны в последовательном ряде их точек непрерывно увеличиваются или уменьшаются, называются **монотонными**.

Множеством центров кривизны кривой a является кривая a_k. Ее называют **эволютой** данной кривой a. Кривая a по отношению к своей эволюте a_k называется **эвольвентой.**

Эвольвента – траектория точки касательной прямой, катящейся без скольжения по кривой линии a_k. Это множество точек называют также разверткой линии a_k [1; 3; 4].

4. КОРОБКОВЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Коробовые кривые представляют собой линии, состоящие из сопряженных дуг окружностей разных радиусов. К таким кривым относятся завитки, овалы и овоиды. Коробовые кривые получили такое название потому, что такие формы имели днища коробов. Профили кулачков, эксцентрики, фланцы, строительные элементы (арки, своды) в очертаниях имеют эти линии.

4.1. Завиток

Завиток (рис. 9) представляет собой плоскую кривую по форме похожую на спираль и состоящую из нескольких дуг различных радиусов, проведенных из нескольких центров.

Рассмотрим построение четырехцентрового завитка. Заданы четыре центра (1, 2, 3, 4), которые являются вершинами квадрата со стороной d. Продолжим стороны квадрата, как показано на рис. 9. Из точки 1 радиусом d проводят дугу от точки 4 до пересечения с продолженной стороной квадрата 1-2 в точке

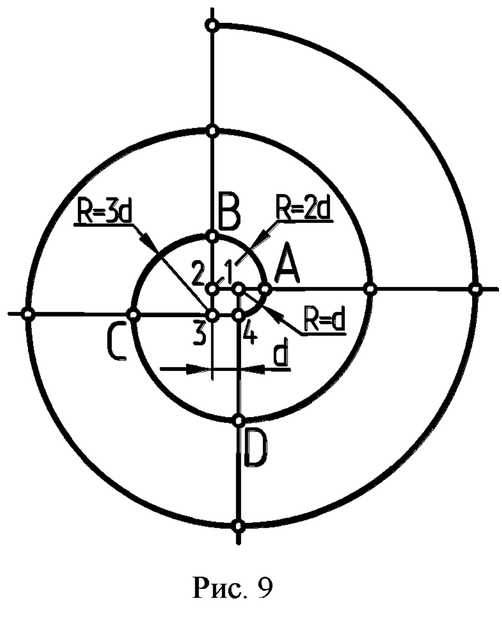


Рис. 9

А. Из точки 2 радиусом 2А (2d) проводят дугу от точки А до пересечения с продолженной стороной квадрата 2-3 в точке В. Из точки 3 радиусом 3В (3d) проводят дугу от точки В до пересечения с продолженной стороной квадрата 3-4 в точке С. Из центра 4 проводят дугу радиусом 4С (4d) от точки С до пересечения с продолженной стороной квадрата 1-4 в точке D. Далее построение продолжают в той же последовательности, увеличивая радиус дуги каждый раз на величину d [2; 7].

4.2. Овал

Овал (рис. 10) представляет собой плавную замкнутую симметричную кривую, состоящую из четырех сопрягающихся дуг. Для его построения нужно найти четыре центра дуг и четыре точки сопряжения.

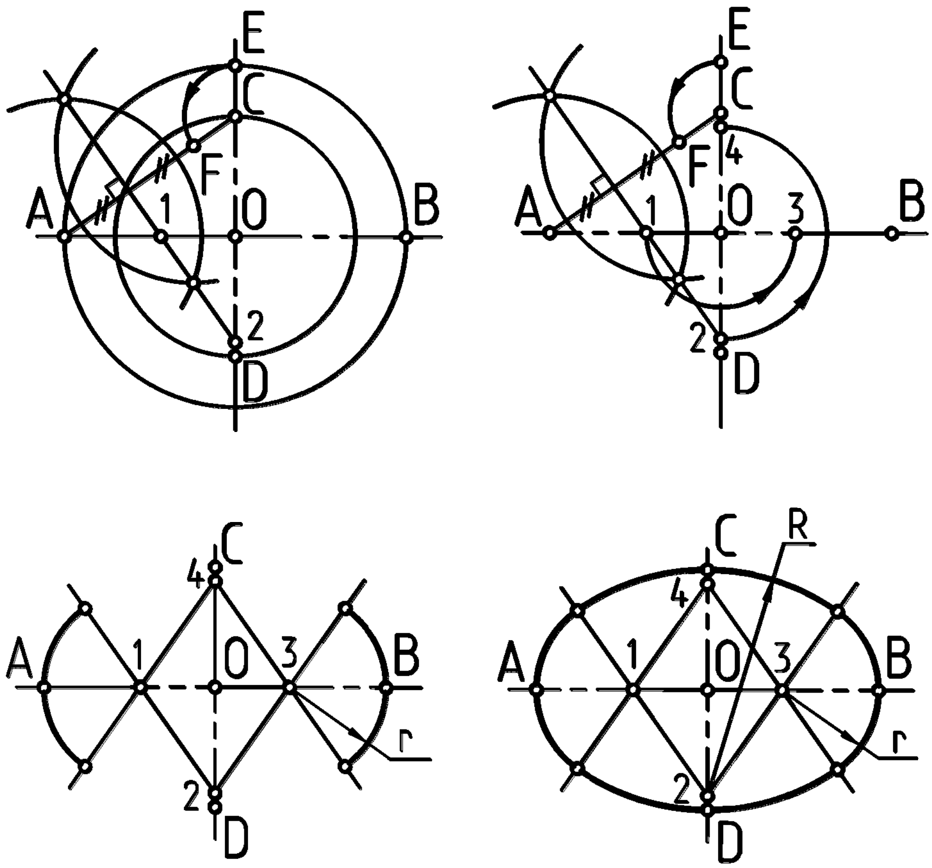


Рис. 10

По форме овал близок к эллипсу (лекальная кривая), поэтому эллипс часто заменяют овалом, так как овал вычерчивать проще. Овал имеет две оси: большую и малую. Они делят его на симметричные части. Овал чаще всего строят по двум заданным осям (АВ и CD). На рис. 10 представлен один из способов построения овала с четырьмя центрами [2].

4.3. Овоид

Овоид (рис. 11) представляет собой овал, имеющий одну ось симметрии. Эта кривая применяется при вычерчивании кулачков, рукояток и других деталей. Овоид задают диаметром d (или радиусом) основной окружности. Построение начинают с проведения оси овоида и центровой линии АВ основной окружности, как показано на рис. 11. Точка С будет центром малой дуги овоида. Точки А и В – центры больших дуг овоида. Для нахождения точек сопряжения К и М проводят прямые через центры (А, В и С) дуг сопряжения. Из точки А радиусом АВ, равным диаметру заданной окружности, проводят дугу до пересечения с прямой АС в точке К. Из точки В радиусом ВА проводят вторую дугу до пересечения с прямой ВС в точке М. К и М – точки сопряжения. Из центра С радиусом r = СК проводят дугу КМ. Дугу АВ проводят радиусом основной окружности [2].

5. ЛЕКАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

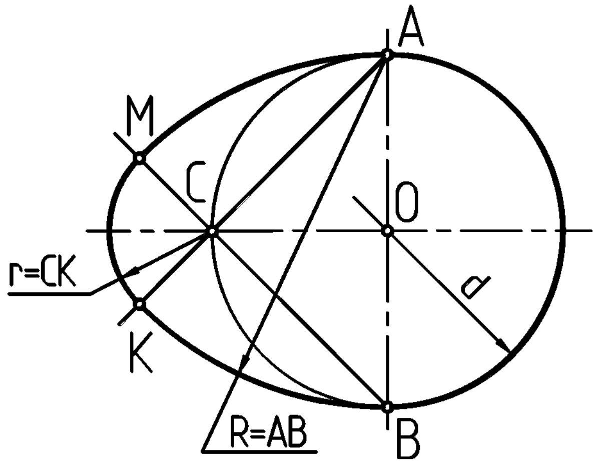


Рис. 11

Кривые называют лекальными потому, что их контур обводится по лекалу. Принадлежащие им точки не лежат на окружностях или дугах, их строят по определенным законам, соединяют тонкой плавной линией от руки и обводят по лекалу небольшими участками.

В технике часто встречаются детали, имеющие сложные очертания, состоящие из различных криволинейных участков, в том числе и лекальных кривых. Лекальные кривые получаются при пересечении поверхностей плоскостями, при перемещении какой-либо точки в плоскости по определенному закону, могут являться проекциями пространственных кривых и т.д.

По характеру образования лекальные кривые можно разделить: на *кривые конического сечения, циклические кривые, спирали, синусоидальные кривые*.

5.1. **Кривые конического сечения**

Кривые конического сечения – эллипс, параболу, гиперболу – можно получить при пересечении прямого кругового конуса плоскостями различного положения по отношению к образующим и оси конуса. Эти кривые являются кривыми 2-го порядка и представляют значительный теоретический и практический интерес.

5.1.1. ***Эллипс***

Эллипс – это замкнутая плоская кривая линия, у которой сумма расстояний от любой точки этой кривой до двух ее *фокусов* (F_1 и F_2), расположенных на большой оси, есть величина постоянная, равная большой оси эллипса. Например, сумма расстояний от точки М до двух фокусов F_1 и F_2 (рис. 12) равна величине большой оси эллипса АВ (2а), т.е. $F_1M + F_2M = AB = 2a$. Эллипс всегда имеет две взаимно перпендикулярные оси (большую и малую).

Если фокусы F_1 и F_2 совпадают, то $F_1M = F_2M = a$. Получаем множество точек, равноудаленных от одной данной точки, т.е. окружность (частный вид эллипса).

Ортогональной проекцией окружности в общем случае является эллипс. Большая ось эллипса равна диаметру окружности, малая – ортогональной проекции диаметра окружности, являющегося *линией наибольшего наклона* плоскости этой окружности к плоскости проекций.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Каноническое уравнение эллипса:

Оси координат x и y являются осями симметрии эллипса. Точку O пересечения осей симметрии называют *центром* эллипса, а точки A, B, C и D пересечения эллипса с осями симметрии – *вершинами* эллипса.

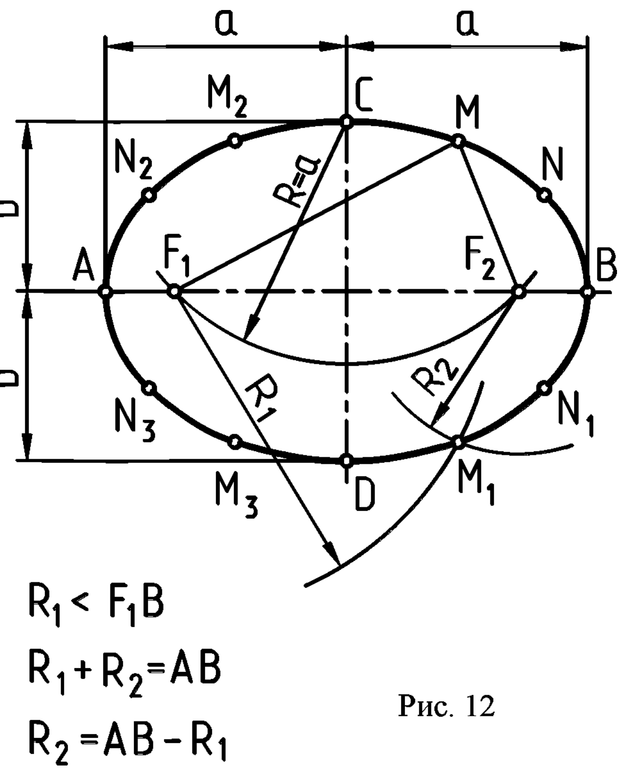


Рис. 12

Существует несколько способов построения эллипса. Рассмотрим два из них.

СПОСОБ 1. На рис. 12 дана большая ось эллипса AB = 2a и малая ось CD = 2b. Требуется построить эллипс, используя его фокусы. Сначала находят два фокуса F_1 и F_2. Для этого из точек C или D проводят дугу радиусом R = a до пересечения с большой осью в точках F_1 и F_2. Эти точки являются фокусами, так как точка C принадлежит эллипсу, а $CF_1 + CF_2 = AB$ по построению. Для построения точек M, M_1, M_2, M_3 произвольным радиусом R_1 (R_1 не больше расстояния F_1B) сначала из фокуса F_1, а потом из фокуса F_2 сверху и снизу от большой оси проводят небольшие дуги. Второй радиус (R_2) равен разности $AB\text{-}R_1$. Радиусом R_2 из двух фокусов делают засечки на четырех ранее проведенных дугах, получают точки M, M_1, M_2, M_3. Число точек для построения очертания эллипса берется по необходимости, и все они строятся аналогично точкам M, M_1, M_2, M_3.

СПОСОБ 2. Заданы оси эллипса AB (большая) и CD (малая). Требуется построить эллипс (рис. 13). Проводят две взаимно перпендикулярные прямые и от точки их пересечения (точка O) откладывают вверх и вниз по половине малой оси (отмечают точки C и D), а влево и вправо – по половине большой оси (отмечают точки A и B). Из точки O описывают две концентрические окружности: одну – через концы

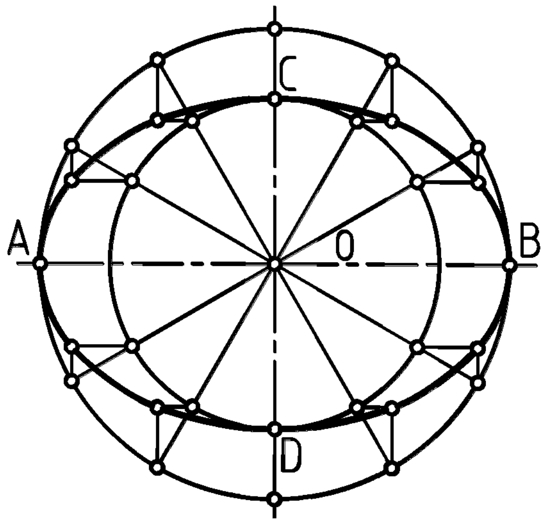


Рис.13

малой оси, а вторую – через концы большой оси. Большую окружность делят на любое число равных частей, например, на двенадцать. Все точки деления соединяют прямыми с точкой O. Эти двенадцать радиусов разделяют малую окружность тоже на двенадцать равных частей. Из всех двенадцати точек, лежащих на большой окружности, проводят прямые, параллельные малой оси, а из точек, лежащих на малой окружности, проводят прямые, параллельные большой оси эллипса, до пересечения друг с другом. В пересечении этих прямых получают точки, принадлежащие эллипсу. Затем эти точки соединяют от руки тонкой плавной линией и обводят по лекалу.

НАХОЖДЕНИЕ ФОКУСОВ ЭЛЛИПСА; ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ЭЛЛИПСУ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ЭЛЛИПСЕ (рис. 14).

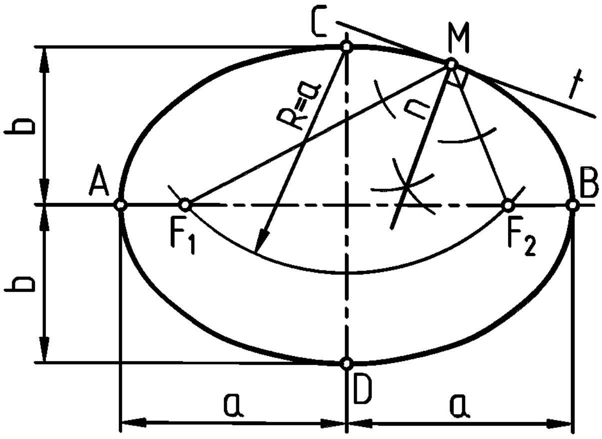


Рис. 14

Если не задано положение фокусов, то необходимо их найти. Для нахождения фокусов эллипса F_1 и F_2 надо, приняв один из концов малой оси за центр, засечь большую ось дугой, радиус которой равен половине большой оси. Далее для построения касательной и нормали в точке M надо соединить точку M с фокусами и разделить пополам угол между радиус-векторами F_1M и F_2M. Биссектриса внутреннего угла F_1MF_2 является нормалью, а перпендикуляр к ней (прямая t) – касательной [1, 2, 3, 5, 6, 7].

5.1.2. **Парабола**

Парабола – это плоская кривая, каждая точка которой удалена на одинаковое расстояние от заданной точки – *фокуса* F и заданной прямой – *директрисы* AB (рис. 15). Парабола имеет одну ось симметрии. Расстояние KF = p от фокуса F до директрисы AB называют *параметром* параболы. Вершина параболы (точка O) всегда находится посередине этого расстояния, потому что она, как и любая точка параболы, должна находиться на одинаковом расстоянии от фокуса и директрисы.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

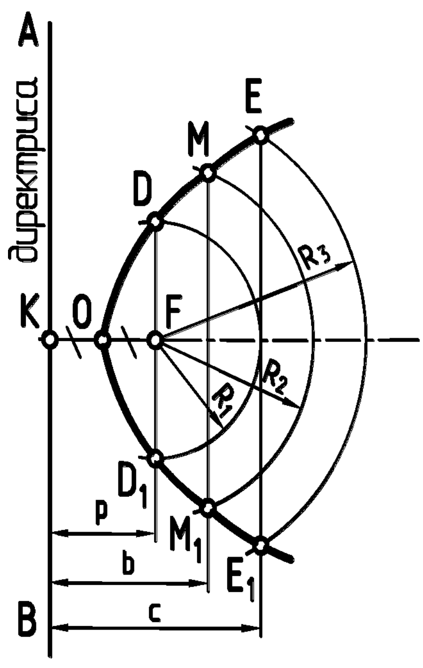


Рис. 15

Существует несколько способов построения параболы.

СПОСОБ 1. На рис. 15 показано построение параболы с заданным параметром p = KF. Через точку K проводят директрису. Параллельно директрисе произвольно проводят несколько прямых. На рисунке первая прямая проведена через фокус F. Из точки F радиусом R_1 = p проводят дугу до пересечения с прямой в точках D и D_1. Эти точки будут принадлежать параболе, так как они находятся на одинаковом расстоянии (p) от директрисы и фокуса. Вторая прямая проведена на расстоянии b от директрисы. Из точки F проводят дугу радиусом R_2 = b до пересечения с этой прямой в точках M и M_1 и т. д.

$$R_1 = p;\ R_2 = b;\ R_3 = c.$$

ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПАРАБОЛЕ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ПАРАБОЛЕ.

СПОСОБ 2. На рис. 16 показано построение параболы по оси CD, вершине O и точке B, принадлежащей параболе. Из вершины параболы O перпендикулярно оси параболы CD параболы проводят прямую n. Из точки B параллельно оси проводят прямую m до пересечения с первой прямой в точке A. Отрезки OA и AB делят на одинаковое число равных частей, затем полученные точки нумеруют от вершины O на вертикальной прямой n и от точки A на горизонтальной прямой m. Вершину O соединяют с точками на прямой AB. Из точек, лежащих на прямой OA, проводят прямые параллельно оси параболы: из точки 1 – до пересечения с прямой $O1_1$, из точки 2 – до пересечения с прямой $O2_1$ и т.д. Точки пересечения будут точками параболы.

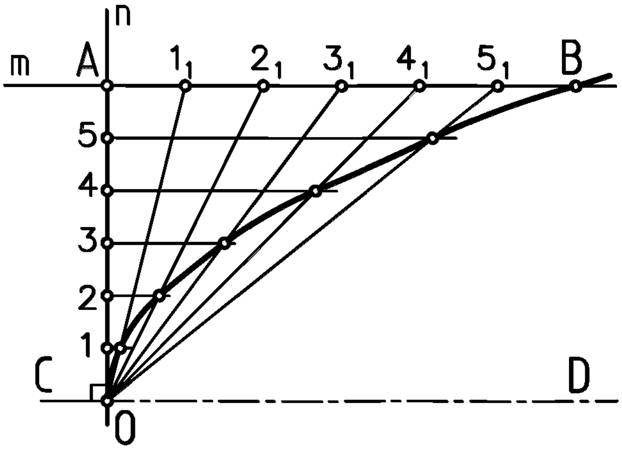


Рис. 16

Для построения касательной и нормали к параболе в заданной точке M (рис. 17), надо соединить точку M с фокусом параболы и опустить перпендикуляр из точки M на директрису. Биссектриса угла FMN является касательной к параболе в точке M. Если фокус F не известен (рис. 18), то из точки M опускают на ось параболы перпендикуляр MG и откладывают от вершины O отрезок OE = OG. Касательная проходит через точки E и M. Нормаль проводят перпендикулярно касательной [1; 2; 3; 5; 6; 7].

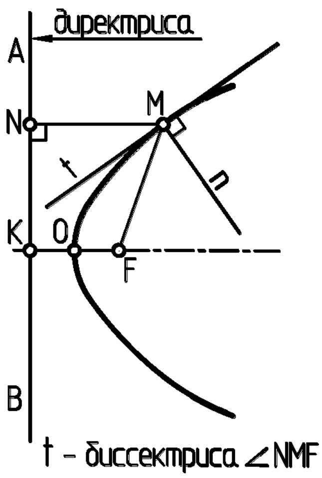


Рис. 17

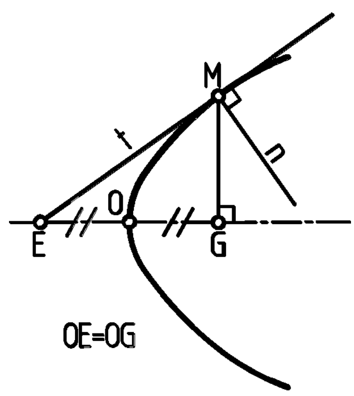


Рис. 18

*5.1.3. **Гипербола***

Гипербола – это плоская кривая, разность расстояний от каждой точки которой до двух заданных точек F_1 и F_2 (*фокусов*) есть величина постоянная, равная расстоянию между вершинами гиперболы A_1 и A_2 (рис. 19).

Гипербола имеет две незамкнутые симметрично расположенные ветви. Оси x и y координат являются осями симметрии гиперболы, точка пересечения координатных осей – центром симметрии. Ось симметрии, пересекающую гиперболу x, называют *действительной* осью симметрии (*фокальной* осью), ось симметрии, которая не пересекает гиперболу y, называют *мнимой* осью симметрии. Величины a и b называют соответственно действительной и мнимой *полуосями* гиперболы. Если $a = b$, гиперболу называют *равносторонней*. На действительной оси располагаются два фокуса (F_1 и F_2), вершины (A_1 и A_2) и центр гиперболы (точка O), который находится посередине отрезка A_1A_2.

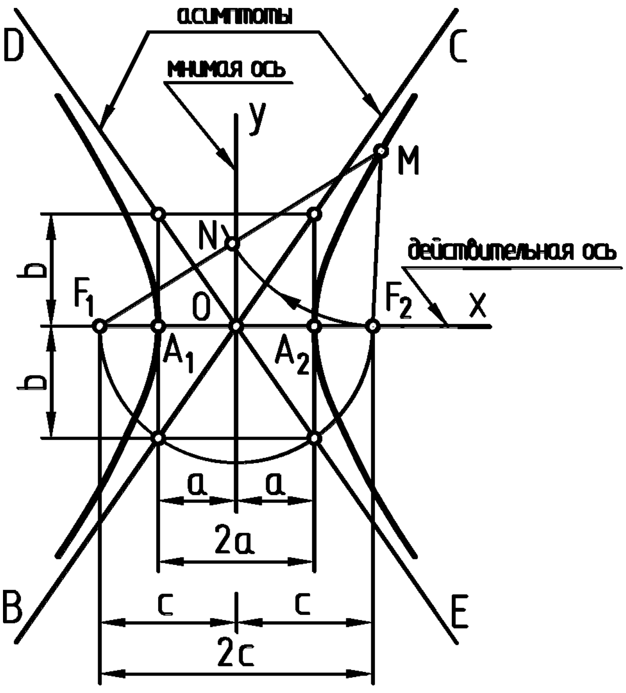


Рис. 19

Две прямые линии, проходящие через центр гиперболы и касающиеся гиперболы в несобственных (бесконечно удаленных) точках, называют *асимптотами* гиперболы.

На рис. 19 на примере произвольно взятой на гиперболе точки M показано, что разность расстояний от этой точки до фокусов F_1 и F_2, т.е. отрезок F_1N, равна отрезку A_1A_2 – расстоянию между вершинами гиперболы ($A_1A_2 = 2a$).

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ГИПЕРБОЛЫ ПО ЗАДАННЫМ ФОКУСАМ И ВЕРШИНАМ (рис. 20).

Заданы расстояния между фокусами F_1 и F_2 ($2c$) и между вершинами A_1 и A_2 ($2a$). Сначала проводят действительную ось x и мнимую ось y. В их пересечении лежит центр гиперболы (точка O), от которого откладывают влево и вправо расстояния a и c, т.е. строят фокусы F_1 и F_2 и вершины A_1 и A_2. На действительной оси (x) правее фокуса F_2 отмечают произвольные точки 1, 2, 3, 4 и т.д. Далее из фокусов, как из центров, проводят дуги окружностей соответственно радиусами r_1 из одного фокуса и $R_1 = 2a+r_1$ из другого фокуса (величина $r_1 = A_21$).

Точки их пересечения являются точками гиперболы, так как разность расстояний от каждой точки до фокусов равна $2a$ и есть величина постоянная. Изменяя величину r_1 на r_2 (затем на r_3 и т.д.) и повторяя построения, получаем новые точки гиперболы.

ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ГИПЕРБОЛЕ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГИПЕРБОЛЕ.

СПОСОБ 1 (способ асимптот, рис. 21).

Через заданную точку M, расположенную на гиперболе, проводят прямую MN параллельно асимптоте ED и откладывают отрезок NL = ON. Прямая ML – искомая касательная. Нормаль проводят перпендикулярно касательной.

СПОСОБ 2 (рис. 22).

Соединяют точку M с фокусами гиперболы. Биссектриса угла F_1MF_2 является касательной к гиперболе в точке M. Нормаль проводят перпендикулярно касательной.

Зависимости, выражаемые кривыми 2-го порядка, используются при выводах и в формулировках многих законов природы; они находят применение в астрономии, физике, архитектуре и других прикладных науках. Гиперболовидные кривые используют при проведении, например, различных экономических расчетов. Равносторонняя ги пербола графически выражает обратную пропорциональную зависимость. Так связан объем с давлением идеального газа по закону Бойля-Мариотта. Известно, например, что планеты вращаются вокруг Солнца по эллипсам; траекторией движения твердого тела, брошенного с некоторой начальной скоростью под углом к плоскости уровня, является парабола; вид параболы имеет и струя жидкости, вытекающей из бокового отверстия сосуда, и т.д. [1; 2; 3; 5; 6; 7].

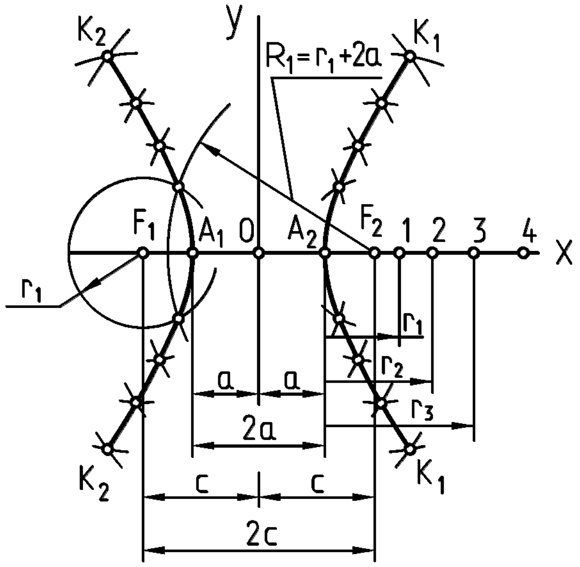


Рис. 20

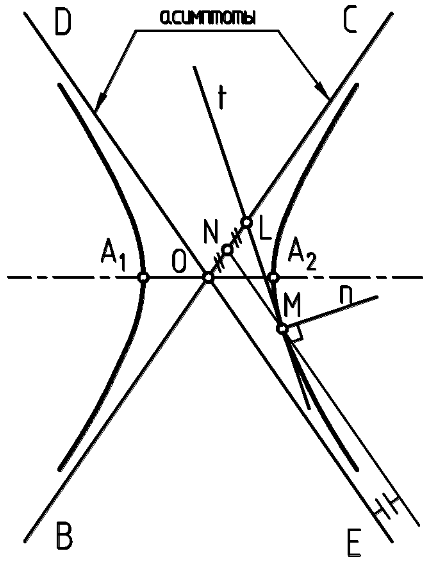


Рис. 21

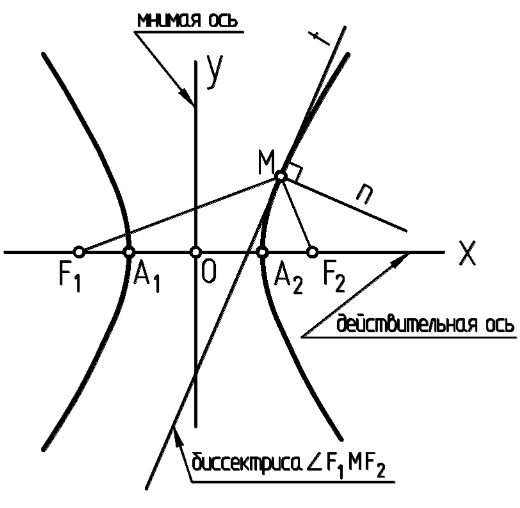


Рис. 22

5.2. Циклические кривые

Циклические кривые – это плоские линии, которые получаются в результате перемещения точки окружности, катящейся по какой-либо линии. Катящаяся окружность, на которой лежит точка, является *производящей* окружностью, а окружность или прямая, по которой катится окружность, – *направляющей*.

К циклическим кривым относятся циклоида, эпициклоида, гипоциклоида. Эти кривые применяются в машиностроении в деталях, обычно связанных с круговым движением, например, в построениях профиля зуба зубчатых колес и реек. Колеса с циклоидальным профилем зуба применяются в точных механизмах, например, в часовых. Циклоидальные передачи обладают наибольшей плавностью хода.

5.2.1. Циклоида

Циклоида – плоская кривая, описываемая точкой окружности, которая без скольжения катится по прямой линии (рис. 23).

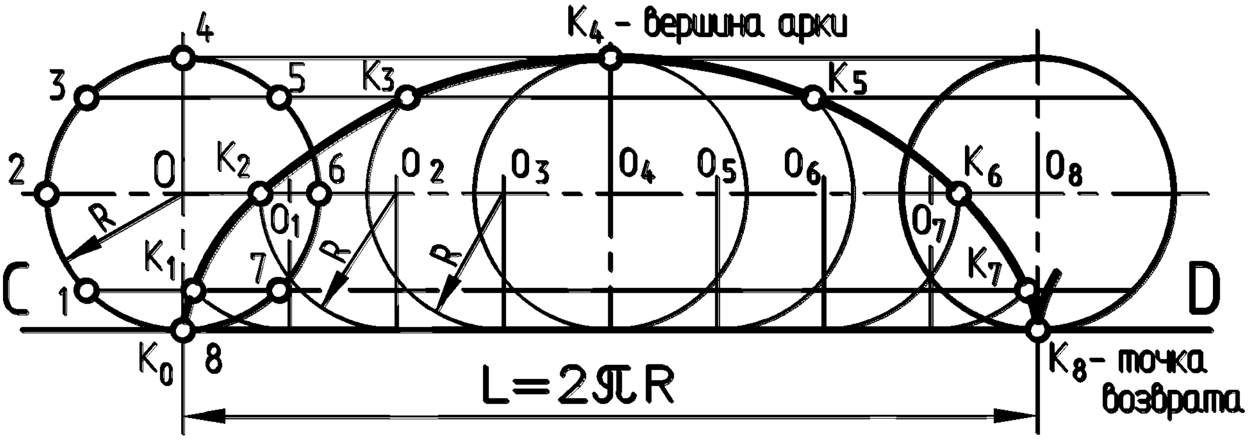


Рис. 23

Пусть заданы направляющая прямая CD и произвольная окружность радиуса R с лежащей на ней точкой K, исходное положение которой K_0. Проследим, какой путь пройдет точка K за один полный оборот окружности, катящейся по прямой CD. Это будет полный цикл кривой. Окружность за это время пройдет по прямой путь, равный длине развернутой окружности, т.е. $L = 2\pi R$. Точка K после одного оборота окружности снова окажется на прямой CD в точке K_8.

Для определения промежуточных положений точки K через равные промежутки фиксируют положение этой точки. Для этого делят окружность на любое число равных частей, например, на восемь, получают точки 1...8. Далее проводят из точки O линию центров, на которой отмечают восемь промежуточных положений центров ($O_1...O_8$) производящей окружности, разделив $L = 2\pi R$ на восемь равных частей.

Когда производящая окружность пройдет 1/8 своего пути, точка K сместится вправо и вверх и окажется над направляющей прямой CD на такой же высоте, на которой находится точка 1. Поэтому для построения промежуточной точки K_1 из точки 1 проводят прямую, параллельную CD, а из центра O_1 описывают часть производящей окружности в ее промежуточном положении радиусом R до пересечения с этой прямой.

Это и будет первое промежуточное положение K_1 точки K. Аналогично строят остальные точки. Соединив точки $K_0...K_8$ плавной тонкой линией от руки, получают циклоиду, которую обводят по лекалу.

ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ЦИКЛОИДЕ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ЦИКЛОИДЕ (рис. 24).

Необходимо найти положение производящей окружности, когда она проходит через заданную точку M. Определяют центр производящей окружности O_M и проводят диаметр NN_1. Хорда окружности NM определит полунормаль, а N_1M – полукасательную.

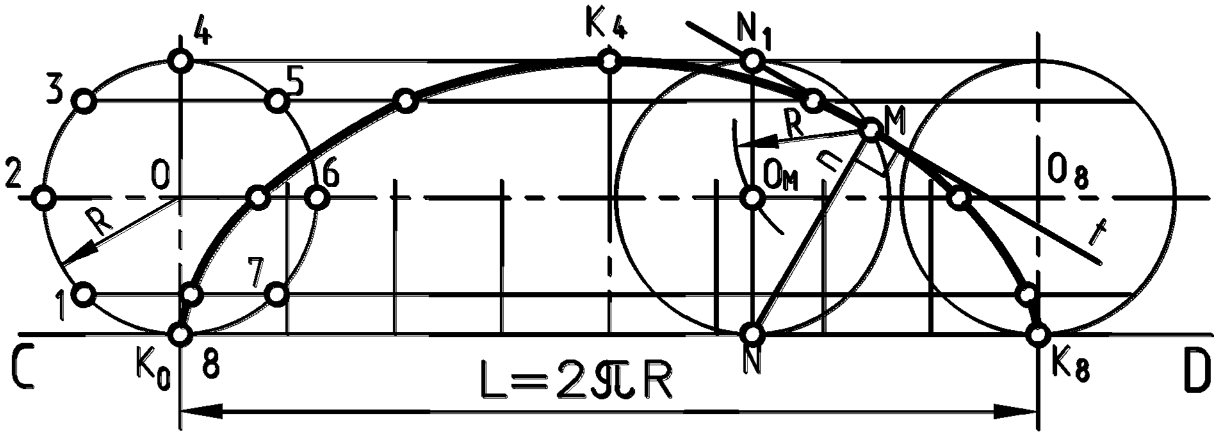


Рис. 24

Исследованием циклоиды занимался выдающийся голландский математик и механик Христиан Гюйгенс (1629–1695). Он установил *таутохронность* (равновременность) движения по циклоиде. Гюйгенсу принадлежит изобретение часов с циклоидальным маятником. Он доказал, что часы с обыкновенным круговым маятником не могут идти точно, и поставил перед собой задачу: определить по какой кривой должна двигаться точка, чтобы период ее колебаний не зависел от амплитуды (т.е. чтобы время качания маятника не зависело от его размаха). Такой «таутохронной» кривой оказалась циклоида.

Циклоида обладает еще одним интересным свойством. Если на разной высоте желобка, имеющего в вертикальной плоскости форму циклоиды, поместить одинаковые тяжелые шарики и одновременно их отпустить, все они одновременно достигнут нижней точки циклоиды. Решение этой задачи сыграло выдающуюся роль в истории математики. Оно привело к созданию новой ветви математики – вариационного исчисления.

Не менее интересной является и задача о *брахистохроне* – кривой быстрейшего спуска. Ее поставил в 1696 г. Иоганн Бернулли (1667–1748). Это задача об исследовании линии, по которой в наикратчайшее время тело перемещается из одного его положения в другое (относительно уровня земли) под действием силы тяжести. Такой линией также оказалась циклоида [1; 2; 3; 5; 6].

5.2.2. Эпициклоида

Эпициклоида – плоская кривая, описываемая точкой производящей окружности, которая без скольжения катится по направляющей окружности, при этом производящая и направляющая окружности имеют внешнее касание.

В технике, например, траекторию в виде эпициклоиды имеют точки подвижных колес планетарных редукторов с внешним зацеплением [2].

5.2.3. Гипоциклоида

Гипоциклоида – плоская кривая, описываемая точкой производящей окружности, которая без скольжения катится по направляющей окружности, при этом направляющая и производящая окружности имеют внутреннее касание [2].

5.3. Спирали

Спираль – плоская кривая, описываемая точкой, которая вращается вокруг неподвижного центра и одновременно удаляется от него в соответствии с определенной закономерностью.

Спирали широко используются в технике при конструировании зажимных эксцентриковых приспособлений, в кулачковых патронах и механизмах, при конструировании фрез, изготовлении плоских пружин и т. п.

5.3.1. Спираль Архимеда

Спираль Архимеда – плоская кривая, образованная движением точки, равномерно движущейся по радиус-вектору, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки – полюса (рис. 25).

Уравнение архимедовой спирали в полярной системе координат: $\rho = k\varphi$, где ρ – радиус-вектор точки; φ – угол ее поворота; k – параметр спирали.

Характер спирали Архимеда определяется шагом $P = 2\pi k$, т.е. расстоянием, которое пройдет точка по прямой за один полный оборот этой прямой на 360°. Вращение прямой может происходить как по часовой стрелке, так и против.

На рис. 25 показан способ построения спирали Архимеда с шагом P и вращением прямой по часовой стрелке. Чтобы построить спираль, необходимо зафиксировать несколько промежуточных положений точки и прямой, по которой она перемещается. Для этого вспомогательная окружность, проведенная радиусом, равным P, и отрезок O8, равный шагу, делятся на одинаковое число равных частей, например, на восемь. Начальная точка (K_0) совпадает с точкой O. Отрезок O8, по которому движется точка, вращается так, что один конец (точка O) неподвижен. При повороте отрезка на 1/8 полного угла (45°) точка K пройдет 1/8 своего пути. Поэтому если из центра O радиусом O1 провести дугу до пересечения с прямой, проведенной через точку 1_1 и центр O, получим точку K_1, принадлежащую спирали. Если провести дугу радиусом O2 до пересечения с прямой $O2_1$, получится точка K_2, принадлежащая спирали, и т.д. При полном обороте отрезка O8 вокруг точки O отрезок совпадет со своим начальным положением, а точка K займет положение K_8. Полученные точки K_0...K_8 соединяют плавной линией, которую обводят по лекалу.

При вычерчивании следующего витка спирали построение продолжают таким же образом, увеличивая радиус на 1/8 шага. Дальнейшее построение можно выполнить и более простым способом. Для этого от точек K_1...K_8

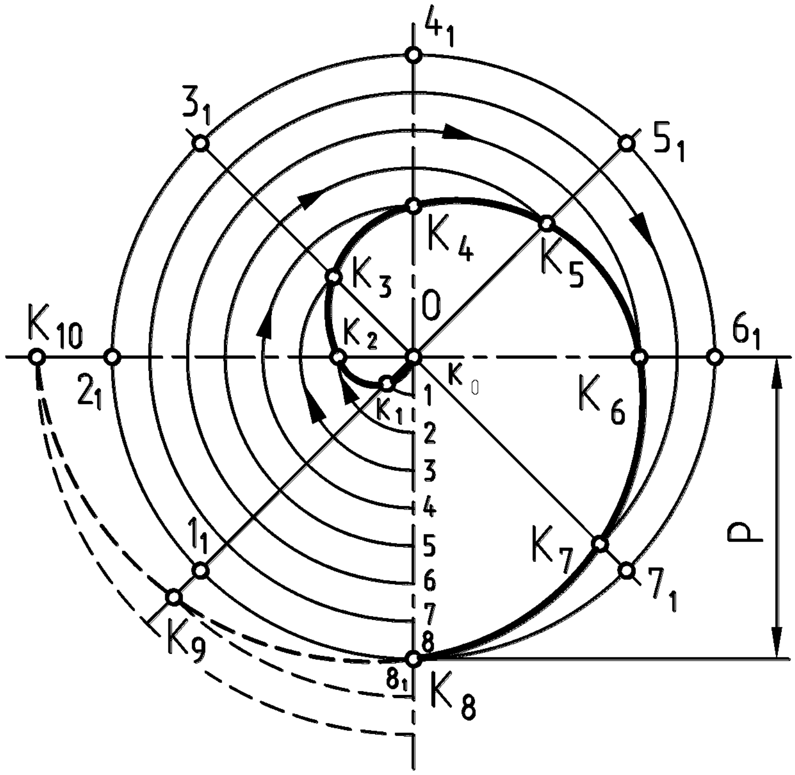


Рис. 25

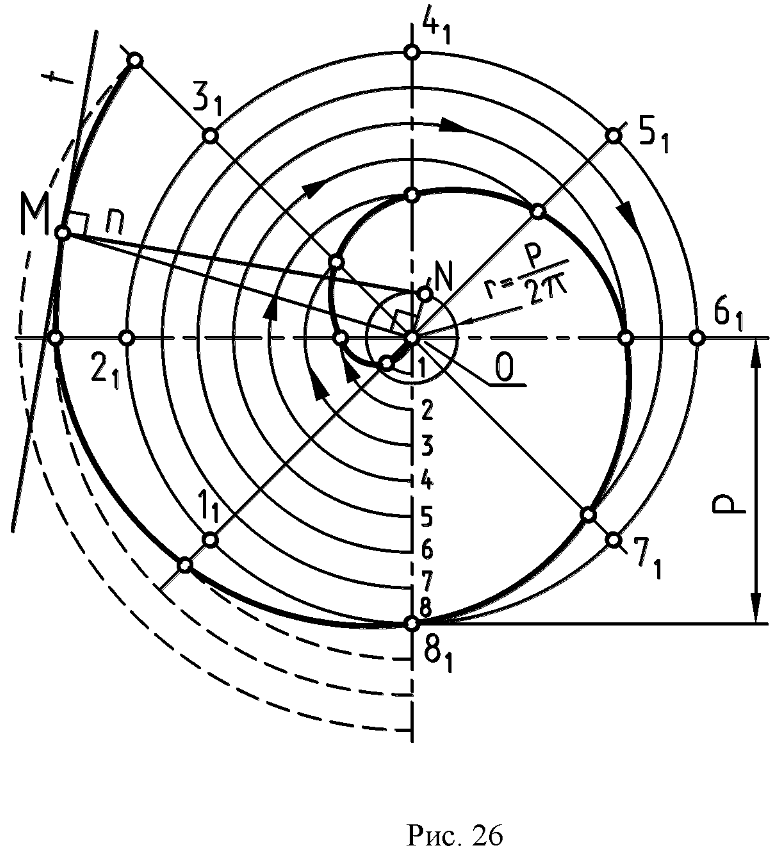


Рис. 26

откладывают по прямым $O1_1...O8_1$ отрезок, равный шагу P, получают точки $K_9...K_{16}$.

ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К СПИРАЛИ АРХИМЕДА В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА СПИРАЛИ (рис. 26).

Для построения касательной и нормали в заданной точке M проводят вспомогательную окружность, длина которой равна шагу P, а радиус соответственно равен параметру спирали k. То есть радиус этой окружности $r = P/(2\pi) = k$. Соединяют точку M с полюсом O, строят ON перпендикулярно MO. Прямая MN – нормаль (n). Прямая t (перпендикулярная нормали n) – касательная [1; 2; 3; 5; 6].

5.3.2. ***Эвольвента окружности***

Эвольвента окружности – плоская кривая линия, представляющая собой траекторию точки окружности при ее развертывании (рис. 27). Слово «эвольвента» в переводе с латинского означает «развертывающий».

Эвольвенту окружности можно получить, если поверхность цилиндра обернуть упругой проволокой в один полный оборот и закрепить один ее конец. Отпущенный второй конец, развертываясь (распрямляясь в отрезок), опишет в пространстве кривую, которая и будет эвольвентой. При этом длина проволоки будет равна длине окружности основания данного цилиндра ($2\pi R$).

Такую же кривую описывает любая точка прямой линии, катящейся без скольжения по окружности. Эвольвента используется при профилировании кулачков, эксцентриков, зубьев зубчатых колес и т.д.

Если окружность разделить на любое число равных дуг и представить развертывание и выпрямление каждой дуги в отрезок прямой линии, то полученные отрезки будут касательными к заданной окружности. Точки касания будут точками окончания каждой дуги, которые будут одновременно начальными точками следующих дуг. А как известно, касательная перпендикулярна к радиусу окружности, проведенному в точку касания.

На рис. 27 показано построение эвольвенты окружности. Заданную окружность делят на любое число равных дуг

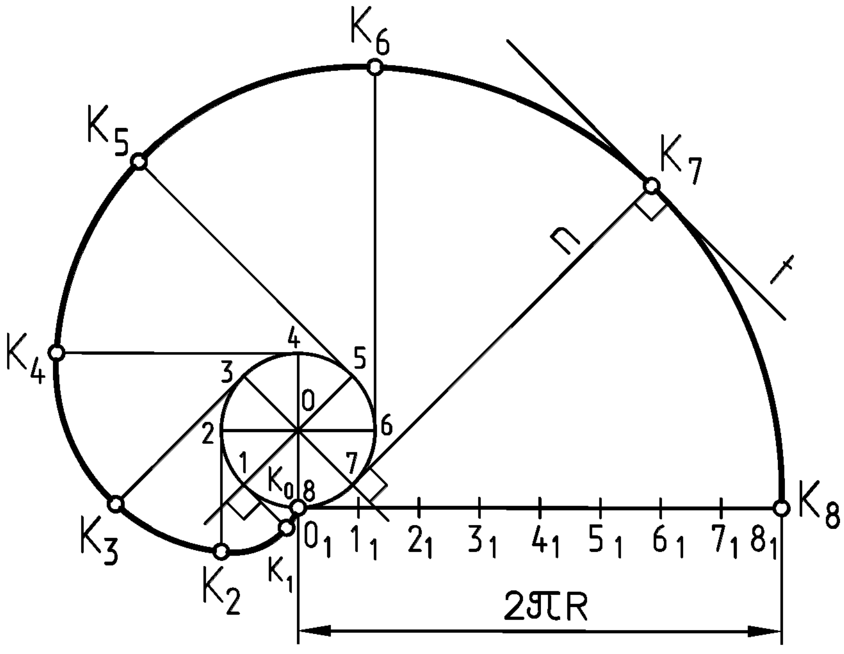


Рис. 27

(в данном случае на восемь), получают точки 1...8. Каждую точку деления соединяют с центром окружности (точка О). Из точки 8 проводят касательную к окружности и откладывают на ней длину окружности ($2\pi R$). Этот отрезок будет развернутой окружностью. Точка 8_1 будет принадлежать эвольвенте. Затем полученный отрезок делят на восемь равных частей и получают отрезки, равные 1/8 длины окружности, для определения длины каждой развернутой дуги. Далее через точки 1...8 проводят касательные и откладывают на них отрезки, равные длине соответствующей дуги. От точки 1 откладывают отрезок, равный длине развернутой дуги $O_1 1_1$, от точки *2* – отрезок, равный длине развернутой дуги $O_1 2_1$, и т.д. Получают точки $K_1...K_8$, принадлежащие эвольвенте. Полученные точки соединяют плавной кривой линией, которую обводят по лекалу.

КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭВОЛЬВЕНТЕ, например, в точке K_7, перпендикулярна к касательной $K_7 7$, проведенной к исходной окружности [1; 2; 3; 5].

5.4. Синусоидальные кривые

Синусоида – плоская кривая линия, изображающая изменение синуса в зависимости от изменения угла φ. Она используется в построении проекций винтовых линий. Уравнение синусоиды $y = \sin \varphi$.

На рис. 28 показано построение синусоиды. Прямая O_x – ось синусоиды, t – шаг или длина волны. Если $t = 2\pi R$, синусоида называется *нормальной*; при $t<2\pi R$ синусоида *сжатая*; при $t>2\pi R$ синусоида *растянутая.* Высшая и низшая точки синусоиды называются *вершинами* (точки K_2 и K_6).

Для построения нормальной синусоиды (шаг $t = 2\pi R$) проводят оси координат Ох и Оу (рис. 28). На некотором расстоянии слева от точки О проводят окружность заданного радиуса R. Вправо от точки О, по оси Ох, откладывают отрезок длиной $t = 2\pi R$. Окружность и отрезок t делят на одинаковое число равных частей (например, на восемь). Из точек деления отрезка проводят перпендикуляры, на которых откладывают отрезки, равные соответствующим полухордам (1М, $O_1 2$ и т. д.). Для этого из точек 1...8 деления окружности проводят прямые, параллельные оси Ох, до пересечения с перпендикулярами из соответствующих точек $1_1...8_1$ деления отрезка t, получают точки $K_1...K_8$. Эти точки принадлежат синусоиде. Их соединяют тонкой плавной линией от руки, а затем обводят по лекалу.

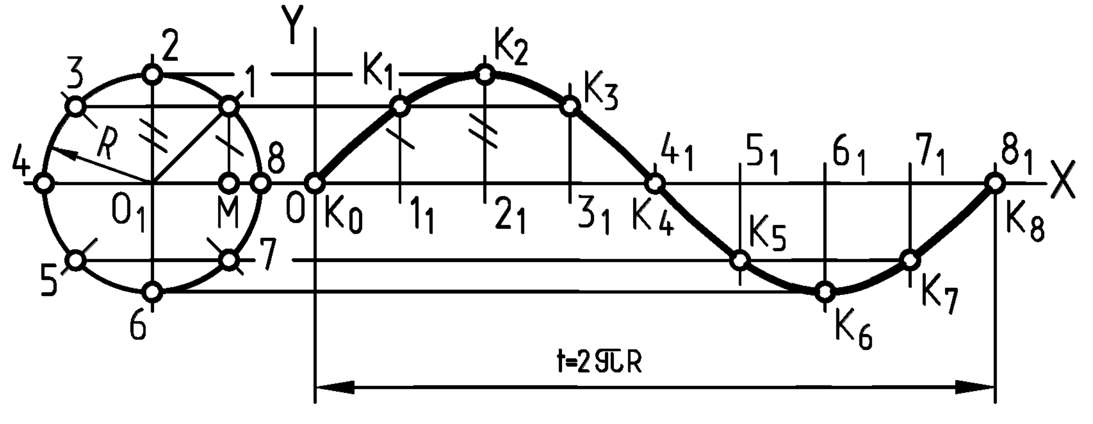


Рис. 28

ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К СИНУСОИДЕ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ СИНУСОИДЕ.

Построение нормали и касательной к синусоиде в данной на ней точке A и ей симметричной точке B показано на рис. 29. В точках A_0 и B_0 проводят касательные к окружности и на них откладывают отрезки A_0D_0 и B_0C_0, равные длине дуги A_0B_0. Проводят прямую C_0 D_0. Затем в точках A и B восставляют перпендикуляры к оси O_x до пересечения с горизонтальной прямой C_0 D_0. Отмечают точки C и D. Прямые AD и BC определят искомые касательные t_A и t_B, а перпендикуляры к ним – нормали n_A и n_B [1; 2; 3; 5; 6].

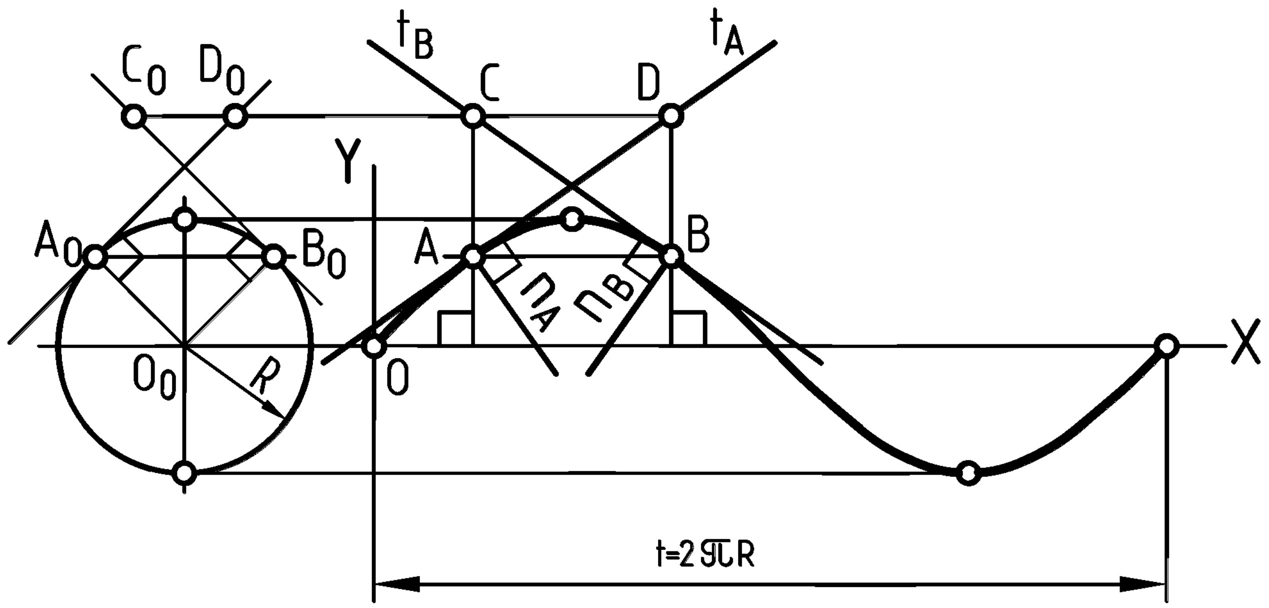


Рис. 29

6. СОПРИКАСАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛИНИЙ.

Кривые линии называются **соприкасающимися**, если в общей их точке они имеют общую касательную. Кривые могут иметь внешнее и внутреннее соприкасание.

Кривые линии имеют *внешнее* соприкасание, если они располагаются по разные стороны от общей их касательной. В точке соприкасания нормали кривых направлены в разные стороны.

Кривые имеют *внутреннее* соприкасание, если они располагаются по одну сторону от общей их касательной. Нормали в точке их соприкасания направлены в одну сторону [1].

7. ПЛОСКИЕ СОСТАВНЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ (ОБВОДЫ). КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

В практике конструирования кривых линий и поверхностей широко используются составные кривые – **обводы**, которые составлены из дуг различных монотонных кривых. Обводом ряда точек плоскости является *плоская кривая.* Обводом ряда точек пространства является *пространственная кривая.* Точки стыка кривых обвода называют **узлами** (**вершинами**), а сами кривые – **сторонами** составной кривой линии (сторонами обвода).

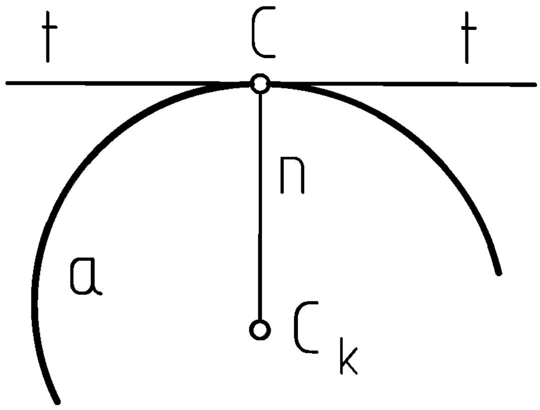


Рис. 30

Точку стыка (узел обвода) называют *регулярной вершиной*, если в этой точке полукасательные сторон располагаются на одной прямой линии и в этой точке стороны имеют общий центр кривизны. Все другие вершины, отличные от регулярных, называют *иррегулярными*.

Кривые линии, имеющие только регулярные вершины, называют *регулярными* (рис. 30). Замкнутые регулярные кривые линии называют *овалами.*

Составные кривые, у которых хотя бы одна из вершин иррегулярна, называют *иррегулярными кривыми линиями.*

Рассмотрим некоторые гладкие составные кривые с вершинами, в которых полукасательные сторон располагаются на одной прямой линии.

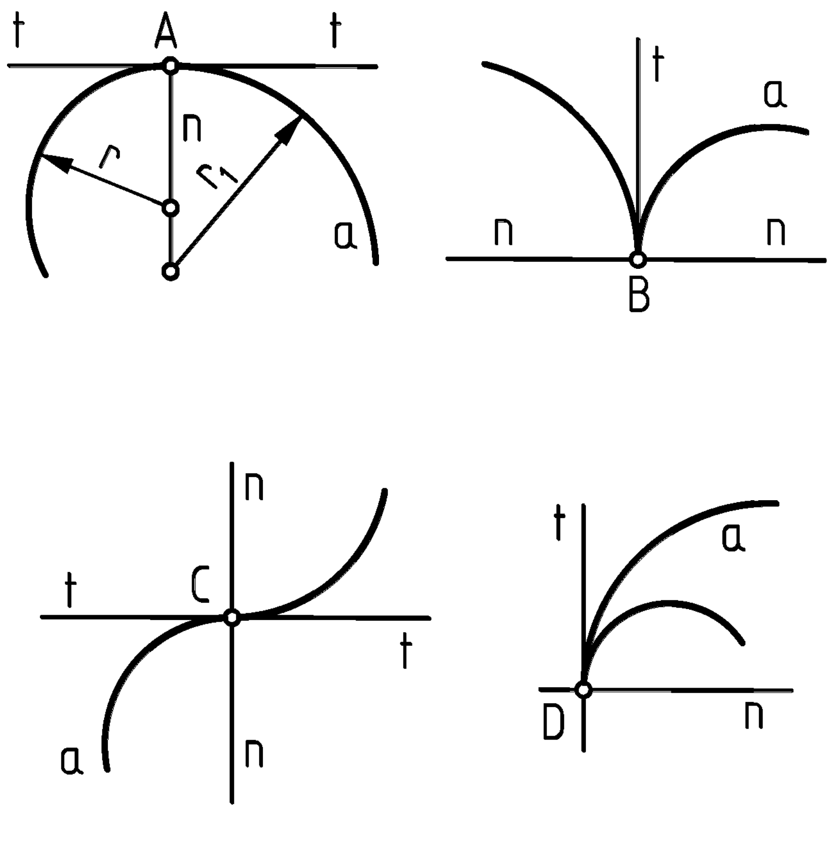


Рис. 31

Точку стыка сторон двух монотонных кривых называют *двойной вершиной,* если в ней полукасательные сторон составляют одну прямую и направлены в разные стороны, нормали направлены в одну сторону и радиусы кривизны не равны (точка A на рис. 31).

Точку стыка сторон двух монотонных кривых называют *вершиной острия*, если в ней полукасательные сторон совпадают, а нормали имеют противоположные направления (точка B на рис. 31). Вершину острия называют также точкой *возврата первого рода* или точкой *заострения*.

Точку стыка сторон двух монотонных кривых называют *вершиной перегиба*, если в ней полукасательные и нормали сторон имеют противоположные направления (точка C на рис. 31). Вершину перегиба называют также *поворотной* или *инфлекционной* точкой кривой.

Точку стыка сторон двух монотонных кривых называют *вершиной клюва* или точкой *возврата второго рода*, если в ней совпадают полукасательные сторон и совпадают нормали сторон (точка D на рис. 31).

Составные плоские кривые линии могут иметь и другие особые точки (рис. 32): точку *излома* A, где полукасательные не принадлежат одной прямой линии; *узловую* точку B с двумя касательными; точку *самоприкосновения* C; *тройную узловую* точку D и т.д.

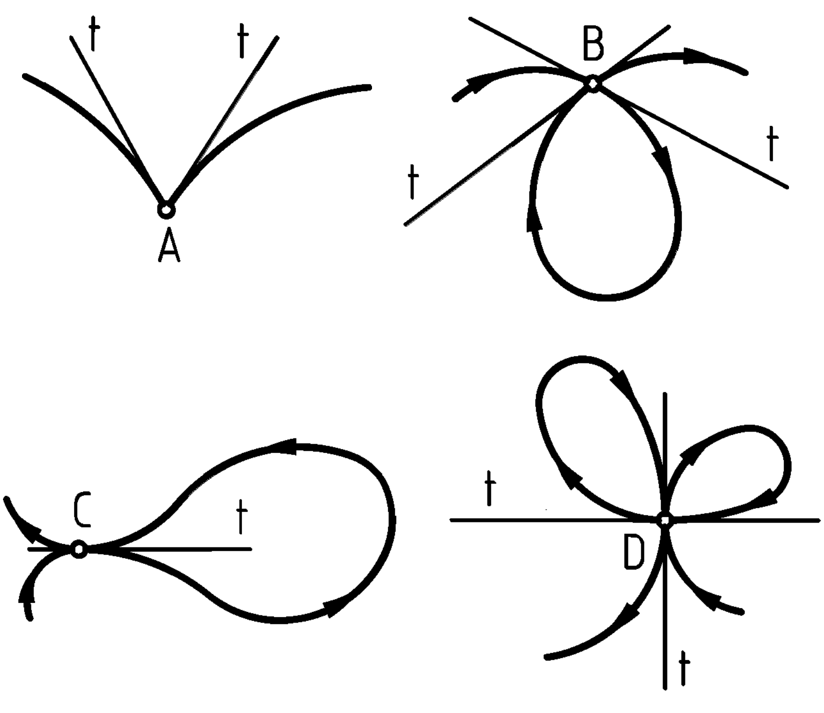


Рис. 32

Составные кривые (обводы) имеют *первый порядок гладкости*, если их монотонные (гладкие) дуги имеют в точках стыка общую касательную. Обвод имеет *второй порядок гладкости*, если во всех его точках плавно изменяются касательные и кривизна кривой. Обвод имеет *третий порядок гладкости*, если плавно изменяются касательные и кривизна кривой, а также плавно меняется скорость изменения кривизны.

При конструировании обводов всегда желательно иметь максимально плавную кривую, т.е. иметь наивысший порядок гладкости [1; 3; 4].

8. ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Обвод, заданный координатами своих точек, называют **дискретным.** Часто дискретный обвод с некоторым приближением *аппроксимируют* (приближенно заменяют) математическим уравнением. Если аппроксимирующий обвод проходит через узловые точки дискретного обвода, его называют **интерполирующим**.

Обвод называют **гладким**, если дуги обвода в его узлах имеют общие касательные.

В системах автоматизированного проектирования (САПР) графическая информация об обводе часто является исходной. В ЭВМ она заменяется дискретной кривой с координатами некоторых ее узловых точек. Затем необходима математическая информация об обводе. Определяются коэффициенты аппроксимирующей функции, заменяющей исходный дискретный обвод с заданной точностью.

В промышленности для описания обводов широко распространены интерполирующие функции прямых, дуг окружностей, кривых 2-го порядка. Для задания сложных обводов обычно используют степенные функции $y = x^a$. При задании некоторых частных обводов применяют тригонометрические функции различных видов. Наиболее широкое распространение при задании обводов и поверхностей получили так называемые сплайн-функции. Они обладают наибольшей простотой их реализации на ЭВМ.

Интерполяция и аппроксимация кривых являются основными задачами САПР, в сути которых заложены способы представления и отображения графической информации.

Рассмотрим графический алгоритм интерполирования дискретного обвода дугами окружностей. Он основан на элементарных свойствах окружностей.

Пусть даны узловые точки A, B, C, D, E дискретного обвода и касательная t_A в начальной точке A (рисунок 33). Требуется построить гладкий обвод – составную кривую линию окружностей, проходящих через точки A, B, C, D и E.

Определим радиусы r и координаты центров O каждой составляющей обвода по следующему алгоритму:

$$K \in [AB] \Rightarrow |AK| = |KB|;$$
$$K \in g \wedge g \perp [AB];$$
$$A \in a \wedge a \perp t_A;$$

$$O_A = g \cap a;$$
$$r_A = |AO_A|;$$
$$B \in t_B \wedge t_B \perp |BO_A|$$

и т.д.

Широкое распространение получили алгоритмы построения обводов из дуг кривых 2-го порядка. Кривая 2-го порядка определяется пятью параметрами. Ее можно задать пятью условиями: пятью точками, тремя точками и двумя касательными и т.д.

Пусть даны точки A, B, C, D, E. Построим составную кривую, проходящую через эти точки (рис. 34). Зададимся, например, касательными t_A, t_B,... в точках A, B, C, D, E к составной кривой.

Строим треугольник, где $K = t_A \cap t_B$. На медиане a треугольника ABK выбираем точку M. Кривая 2-го порядка определяется двумя точками A и B, касательными t_A и t_B и точкой M. (Меняя положение точки M, можно получить другую кривую 2-го порядка. Это дает возможность управлять формой кривой, что широко используется в практике конструирования обводов.)

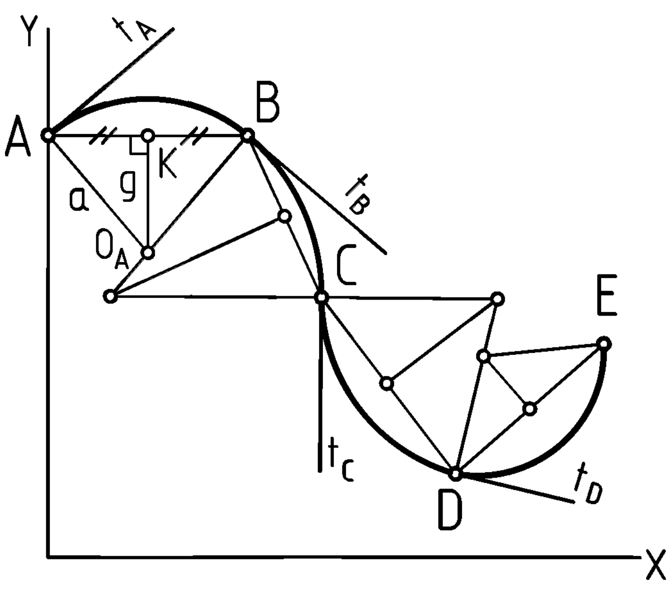


Рис. 33

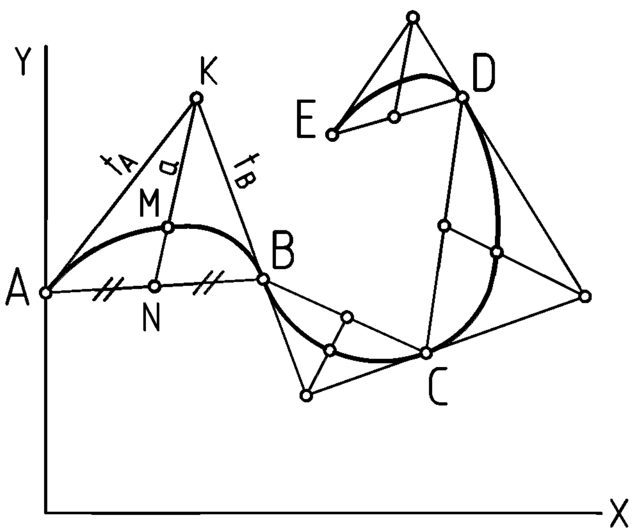


Рис. 34

Величина f называется *инженерным дискриминантом:*

$$f = \frac{MN}{KN}.$$

Она характеризует тип кривой 2-го порядка.

В зависимости от значения величины f имеем: эллипс ($0 < f > 0,5$); параболу ($f = 0,5$); гиперболу ($1 > f > 0,5$).

Изменяя инженерный дискриминант, можно составить обвод из различных дуг кривых 2-го порядка [1].

9. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

9.1. Длина пространственной кривой

Пространственные кривые линии (кривые двоякой кривизны) в начертательной геометрии обычно рассматриваются как результат пересечения поверхностей.

Пространственную линию, так же как и плоскую кривую, на чертеже задают последовательным рядом ее точек.

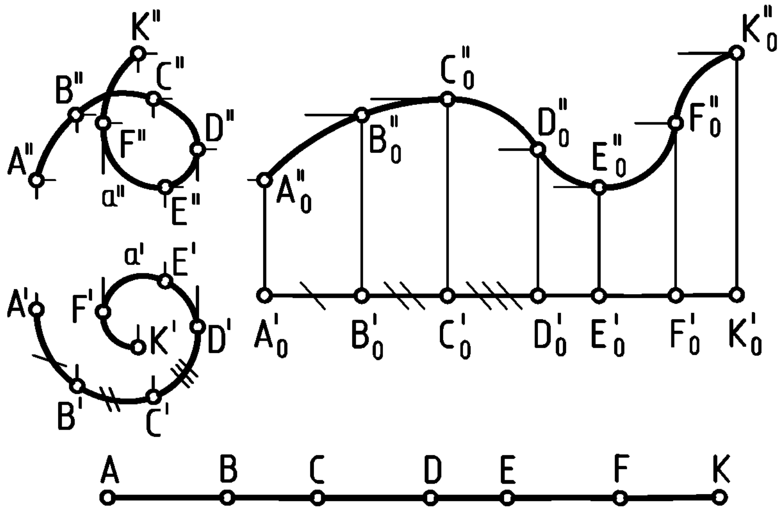


Рис. 35

Длина пространственной кривой линии, заданной ее ортогональными проекциями, графически определяется приближенно заменой длин дуг кривой отрезками прямых. На кривой (рис. 35) намечается ряд точек A, B, C, ..., K так, чтобы дуги кривой были близки к отрезкам прямых.

Одна из проекций кривой (например, горизонтальная) со всеми помеченными точками преобразуется в прямую $A_1B_1C_1...K_1$, параллельную направлению оси проекций. Из точек фронтальной проекции кривой проводятся горизонтальные прямые линии до пересечения их с соответствующими линиями связи точек горизонтальной проекции кривой в преобразовании. Эти точки пересечения наметят кривую линию $A_0B_0C_0...K_0$. Действительная длина заданной пространственной кривой линии представится отрезком AK прямой линии, равным длине кривой линии $A_0B_0C_0...K_0$ [1; 4].

9.2. Ортогональные проекции кривой линии

Для построения ортогональных проекций кривой (пространственной или плоской) необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на оригинале. При задании кривой ее проекциями необходимо указать по крайней мере проекции одной точки, принадлежащей кривой. Действительно, если на проекциях кривой a (рис. 36) не указать проекции точки A(A', A''), то по одним только проекциям a' и a'' нельзя судить о форме кривой.

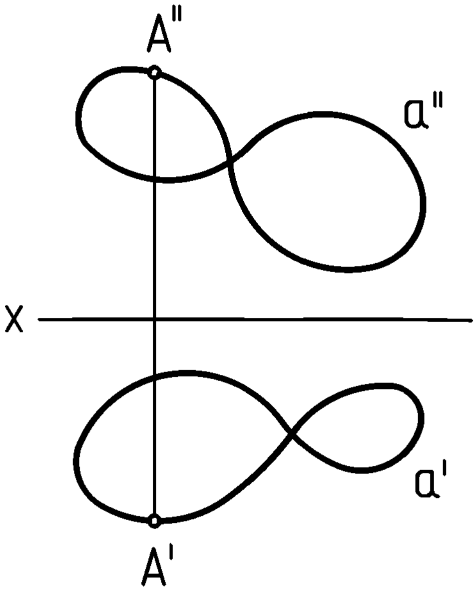


Рис. 36

Следует также иметь в виду, что по двум ортогональным проекциям кривой нельзя сразу ответить на вопрос о том, какой кривой (плоской или пространственной) соответствуют данные проекции. Чтобы установить, какая (плоская или пространственная) кривая линия задана на эпюре, необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости: если принадлежат – кривая плоская, иначе – пространственная. Заданная на рис. 37 кривая a – пространственная, так как точка M, взятая на кривой, не принадлежит плоскости a, определяемой тремя другими точками A, B, C этой кривой [1; 4].

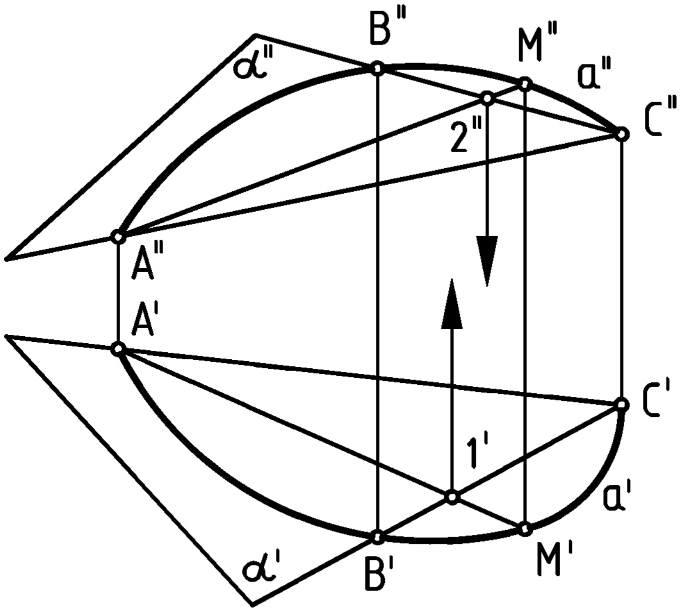


Рис. 37

9.3. Цилиндрические винтовые линии. Гелисы

Из пространственных кривых линий в технике находят широкое применение цилиндрические винтовые линии и особенно *цилиндрические линии одинакового уклона* – **гелисы**. Эти кривые встречаются, например, в резьбовых крепежных деталях, в элементах механизмов для преобразования вращательного движения в поступательное. Нарезанные на одном валу в виде гелисы левая и правая резьбы применяются в некоторых поворотных механизмах.

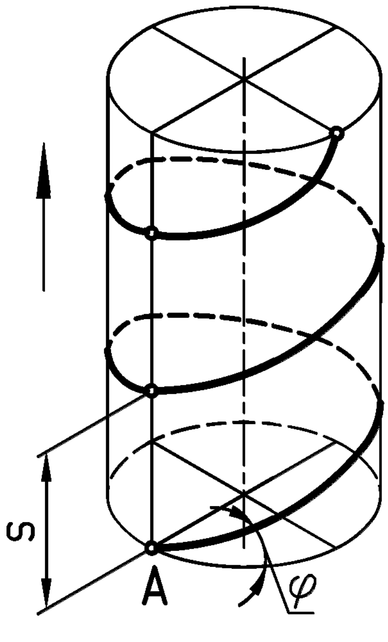


Рис. 38

Гелису можно рассматривать как траекторию движения точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно равномерно перемещающейся в направлении (вдоль) этой оси (рис. 38).

Если ось вращения будет перпендикулярна одной из плоскостей проекций, то на эту плоскость винтовая линия будет проецироваться в окружность, а на другую – в синусоиду (рис. 39).

Гелиса характеризуется диаметром цилиндра, направлением хода, шагом или углом подъема.

Если точка, вращаясь по часовой стрелке, удаляется от наблюдателя, то имеем *правую* винтовую линию (см. рис.

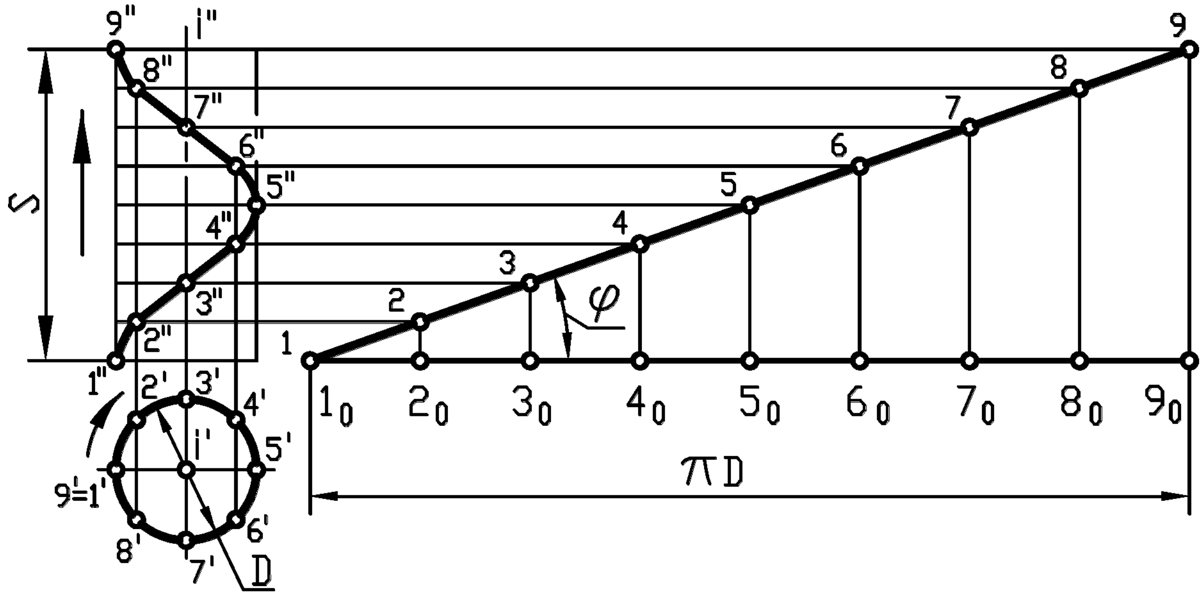


Рис. 39

38). Если точка, вращаясь против часовой стрелки, удаляется от наблюдателя, то имеем *левую* винтовую линию (см. рис. 39).

Шаг винтовой линии S – величина перемещения точки в направлении оси за один оборот.

Шаг S, угол подъема линии φ и диаметр цилиндра D находятся в следующей зависимости: $\operatorname{tg} \varphi = S/(\pi D)$.

Гелиса на развертке ее цилиндра вращения представляется прямой линией (см. рис. 39).

Гелиса, как прямая линия и окружность, обладает свойством сдвигаемости. Любой участок гелисы можно сдвигать вдоль самой кривой. Она используется как эталон при сравнении с ней других пространственных кривых линий на бесконечно малых их участках, как базовая линия при задании винтовых поверхностей, а также при решении ряда задач, относящихся к винтовым поверхностям [1; 4].

9.4. Конические винтовые линии

Коническая винтовая линия образуется как траектория точки, движущейся по пря-

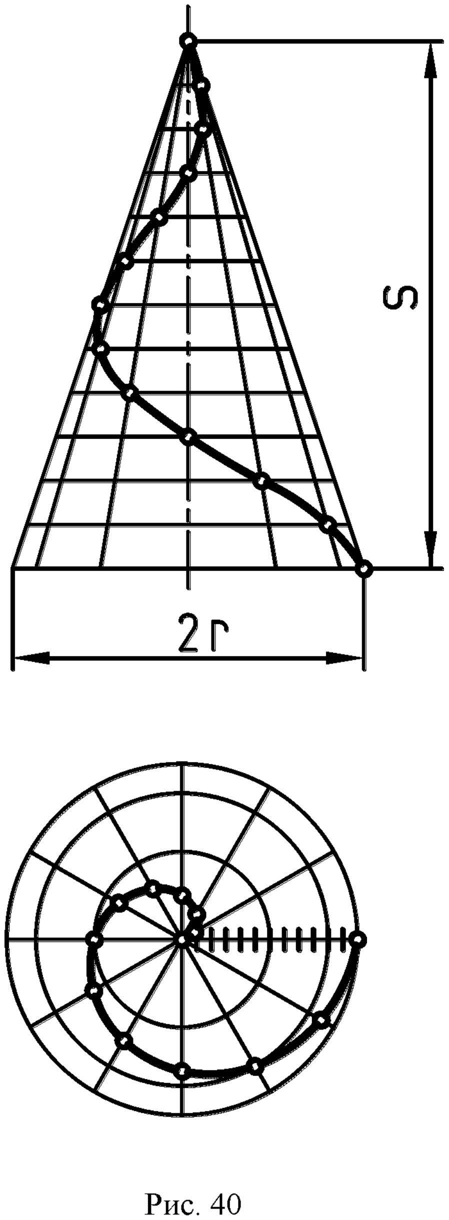


Рис. 40

молинейной производящей, вращающейся вокруг оси прямого кругового конуса.

Размер перемещения точки в направлении оси конуса за полный оборот точки вокруг оси называют шагом конической винтовой линии. Если и вращательное, и поступательное перемещение точки равномерно, получается *коническая винтовая линия с постоянным шагом* S (рис. 40).

Коническая винтовая линия с постоянным шагом проецируется на плоскость, перпендикулярную оси конуса вращения, в виде спирали Архимеда, полюсом которой является проекция вершины конуса, а на плоскость, параллельную оси конуса вращения, – в виде синусоиды с уменьшающейся амплитудой (угасающая синусоида) [1].

9.5. **Кривые линии на сфере**

На сфере можно построить как плоские, так и пространственные кривые линии. Все плоские кривые линии на сфере являются окружностями или их дугами.

Окружности, полученные от пересечения сферы горизонтальными плоскостями, называют **линиями широт** или **параллелями**. Наибольшую параллель называют **экватором**. Она получается от пересечения сферы горизонтальной плоскостью, проходящей через ее центр.

Окружности, полученные от пересечения сферы горизонтально-проецирующими плоскостями, проходящими через центр сферы, называют **меридианами**.

Окружность, полученная от пересечения сферы любой плоскостью, проходящей через ее центр, называют **геодезической линией**. Она кратчайшим путем соединяет любые точки на сфере. Геодезическую линию называют также **брахистодой** или **ортодромией**.

Сферическая **линия одинакового ската** имеет постоянный угол наклона к горизонтальной плоскости проекций.

Среди пространственных кривых линий на сфере особый интерес представляет сферическая **локсодромия** – кривая, пересекающая все меридианы сферы под одним и тем же углом. Она используется в судовождении и авиации. Корабль (или самолет), например, следуя на дальние расстояния, держится постоянного курса, т.е. придерживается постоянного угла между меридианом и направлением движения корабля (самолета). Траекторией движения точки в этом случае является локсодромия. Она прокладывается на сфере по спирали и, делая бесконечно большое число оборотов, стремится к полюсам.

Локсодромия не является кратчайшей линией на земной поверхности. Чем дальше удалены две точки друг от друга и чем дальше они от экватора, тем больше относительная разность (в процентах) между локсодромическим и кратчайшим (ортодромическим) расстояниями между этими точками. Например, длина ортодромии между Москвой и Нью-Йорком равна 7502 км, а длина локсодромии равна 8343 км (на 11% больше).

Передвижение по ортодромии сопряжено с необходимостью непрерывного изменения курса. Это трудно осуществить, поэтому плавания и полеты совершаются не точно по ортодромии, а по некоторой ломаной, вершины которой расположены на ортодромии, а стороны являются дугами локсодромии [1].

10. СОПРЯЖЕНИЯ

При выполнении машиностроительных чертежей, а также при разметке заготовок деталей на производстве часто приходится плавно соединять между собой геометрические элементы, т.е. линии, окружности, и тем самым выполнять сопряжение.

Сопряжение – плавный переход одной линии в другую. В технических чертежах наиболее часто встречаются сопряжения двух прямых, прямой и окружности и двух окружностей заданной дугой сопряжения. Методики графических построений приведены в учебных и справочных пособиях многих авторов [4; 6; 7; 8]. Графическое решение этих задач сводится к построению центра дуги сопряжения и точек сопряжения.

Центр сопряжения – это точка, равноудаленная от сопрягаемых геометрических элементов на заданную величину радиуса сопряжения.

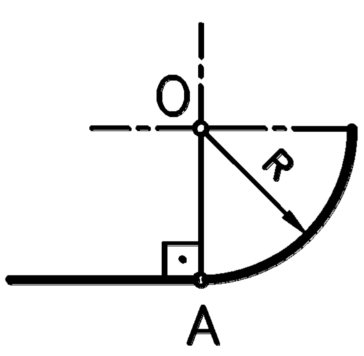


Рис. 41

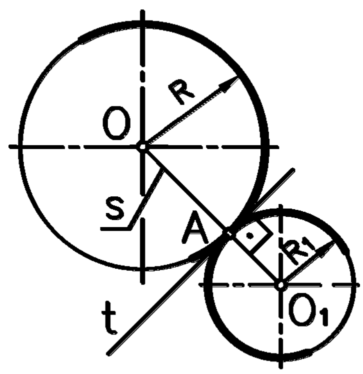


Рис. 42

Точки сопряжения – это общие точки линии сопряжения, в которых осуществляется плавный переход одного геометрического элемента в другой.

Все построения основаны на свойствах прямых, касательных к окружностям и на свойствах касающихся окружностей. Сущность этих геометрических свойств следующая:

1) для сопряжения прямой и дуги радиуса R необходимо, чтобы центр окружности, точка O, которой принадлежит дуга, лежал на перпендикуляре, проведенном к прямой в точке касания A (рис. 41);

2) для сопряжения двух дуг с радиусами R и R_1 необходимо, чтобы центры окружностей – точки O и O_1, которым они принадлежат, – лежали на прямой S, перпендикулярной к общей касательной t дуг в точке их касания или сопряжения A (рис. 42).

Рассмотрим примеры графических способов построения касательных линий к окружностям и различных случаев сопряжений.

10.1. **Построение касательной прямой t к окружности радиуса R в заданной точке A, принадлежащей но- сти**

Касательную прямую t провести перпендикулярно радиусу окружности OA (рис. 43).

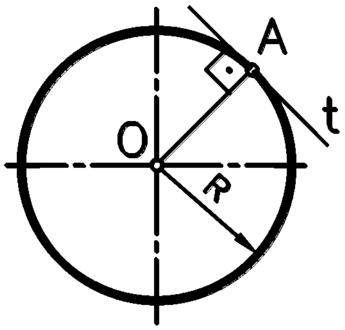


Рис. 43

10.2. **Построение касательной прямой t к окружности радиуса R из заданной точки A, лежащей вне окружности**

1. Из середины отрезка OA точки O_1 провести вспомогательную окружность радиусом $R_1 = OO_1 = O_1A$.
2. На пересечении вспомогательной окружности радиуса R_1 с заданной окружностью радиуса R отметить точку сопряжения B.
3. Искомую касательную t провести перпендикулярно радиусу OB через заданную точку A (рис. 44).

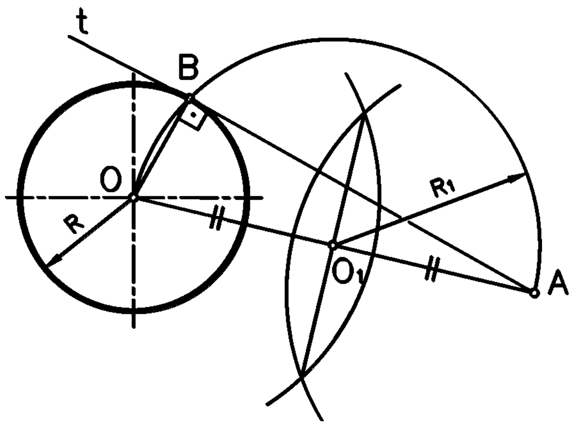


Рис. 44

10.3. **Построение касательной прямой t к двум окружностям радиусов R_1 и R_2**

Возможны два варианта касания: внешнее и внутреннее.

Внешнее касание (рис. 45).

1. Из середины отрезка O_1O_2 точки O провести вспомогательную окружность радиусом $R = OO_1 = OO_2$.
2. Из центра O_1 заданной окружности провести вспомогательную окружность радиусом $R_3 = R_1 - R_2$.
3. На пересечении вспомогательных окружностей с ра-

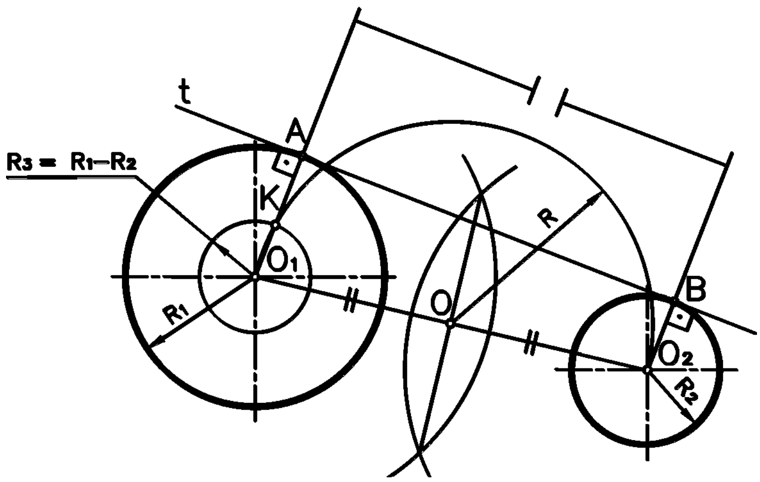


Рис. 45

диусами R и R_3 отметить вспомогательную точку K.

4. Продлить отрезок O_1K до пересечения с заданной окружностью радиуса R_1 и получить первую точку касания A.

5. Отрезок O_2B провести параллельно отрезку O_1A. Точка B – вторая точка касания.

6. Искомую касательную t провести перпендикулярно радиусам O_1A и O_2B через точки сопряжения A и B.

Внутреннее касание (рис. 46).

Построение выполняется аналогично рассмотренному ранее. Только вспомогательную окружность провести радиусом $R_3 = R_1 + R_2$ (рис. 46).

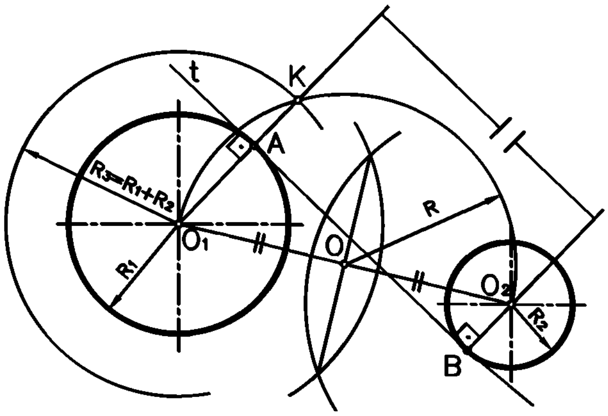


Рис. 46

На рис. 47 показано применение графического способа построения касательных к окружностям разного диаметра для выполнения очерков фронтальной и горизонтальной проекций воздуховода к графической работе № 9 по начертательной геометрии «Развертка воздуховода».

10.4. Сопряжение двух пересекающихся прямых m и n дугой окружности заданного радиуса сопряжения R_c

1. Параллельно заданным прямым m и n на расстоянии R_c провести две вспомогательные прямые.
2. На пересечении вспомогательных прямых отметить точку O – центр сопряжения.

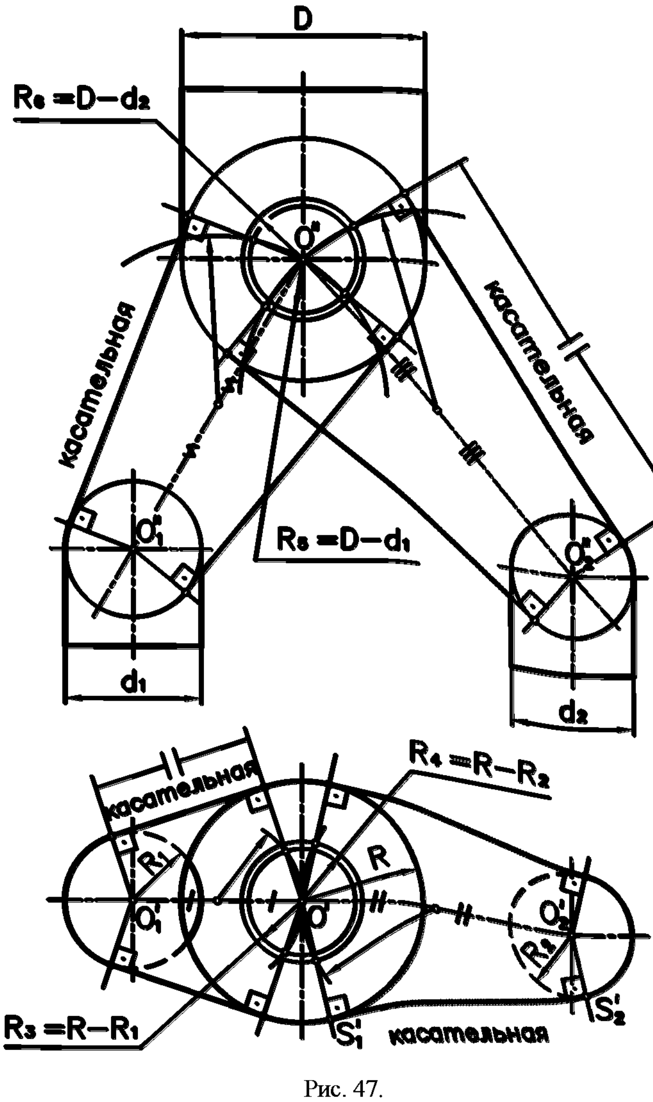


Рис. 47.

3. Из точки O на заданные прямые m и n опустить перпендикуляры. Точки A и B – основания перпендикуляров, являются точками сопряжения.

4. Провести дугу сопряжения заданным радиусом R_c.

Построение сопряжения выполняется аналогич Рис. 47 ımых, пересекающихся под острым, прямым и тупым углом (рис. 48, ...

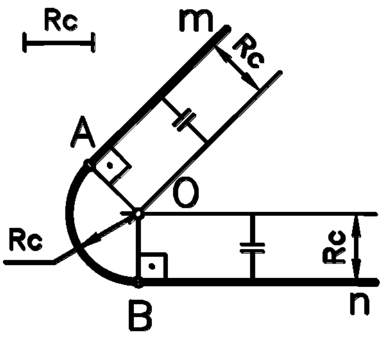


Рис. 48

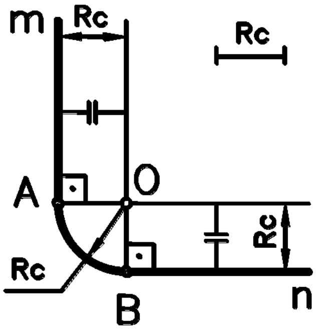


Рис. 49

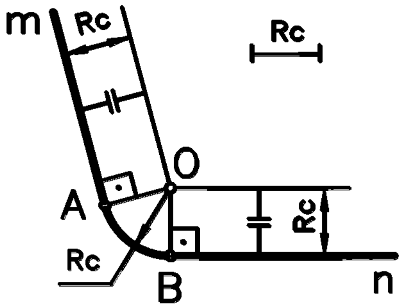


Рис. 50

10.5. Сопряжение дуги окружности радиуса R_1 с прямой n дугой сопряжения заданного радиуса R_c.

Возможны два варианта сопряжения: внешнее и внутреннее.

Внешнее сопряжение (рис. 51).

1. Параллельно заданной прямой n на расстоянии R_c провести вспомогательную прямую.

2. Из центра O_1 заданной окружности провести вспомогательную дугу окружности радиусом $R_2 = R_1 + R_c$.

3. На пересечении вспомогательной дуги окружности радиусом R_2 и вспомогательной прямой отметить точку O – центр сопряжения.

4. Из точки O на заданную прямую n опустить перпендикуляр. Точка A – основание перпендикуляра, является первой точкой сопряжения.

5. Вторая точка сопряжения **B** определяется на пересечении заданной окружности радиуса R_1 и отрезка O_1O, соединяющего центр заданной окружности и центр дуги сопряжения.

6. Провести дугу сопряжения заданным радиусом R_c.

Внутреннее сопряжение (рис. 52).

Построение внутреннего сопряжения выполняется аналогично построению внешнего. Только вспомогательную окружность необходимо провести радиусом $\mathbf{R_2 = R_c - R_1}$.

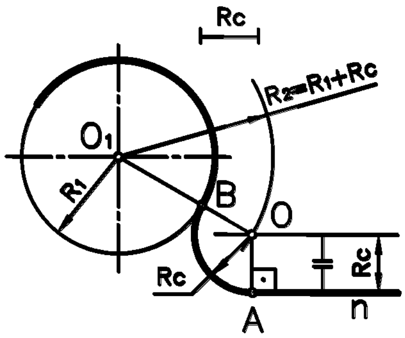


Рис. 51

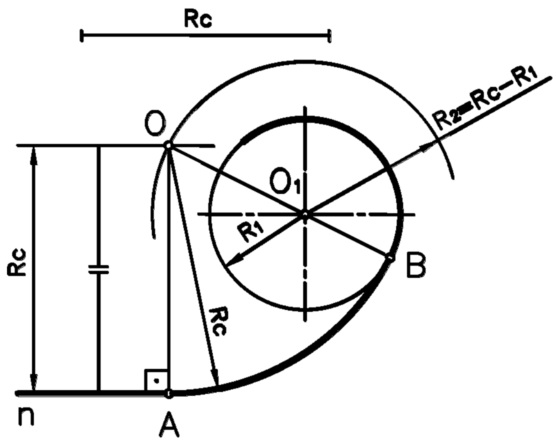


Рис. 52.

10.6. Сопряжение двух дуг окружностей с радиусами R_1 и R_2 дугой сопряжения заданного радиуса R_c

Возможны три варианта сопряжения: внешнее (дуга сопряжения является вогнутой по отношению к сопрягаемым дугам окружностей), внутреннее (дуга сопряжения является выпуклой по отношению к сопрягаемым дугам окружностей) и внешне-внутреннее.

Внешнее сопряжение (рис. 53)

1. Провести вспомогательные дуги окружностей:

из центра O_1 – радиусом $R_3 = R_1 + R_c$;

из центра O_2 – радиусом $R_4 = R_2 + R_c$.

2. На пересечении вспомогательных окружностей R_3 и R_4 отметить точку O – центр сопряжения.

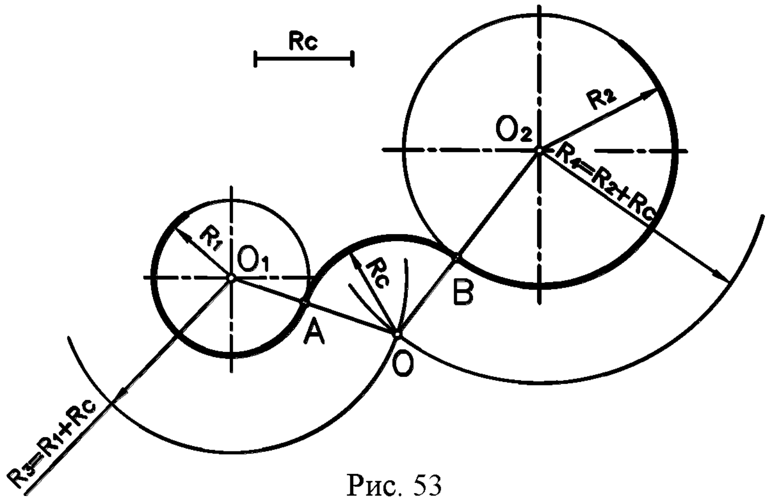


Рис. 53

3. Точки сопряжения A и B определить на пересечении отрезков OO_1 и OO_2 и заданных окружностей R_1 и R_2.

4. Провести дугу сопряжения заданным радиусом R_c.

Внутреннее и внешне-внутреннее сопряжения (рис. 54, 55).

Построение этих сопряжений выполняется аналогично, изменяется только определение величины дуг вспомогательных окружностей:

- для внутреннего сопряжения $R_3 = R_c – R_1$; $R_4 = R_c – R_2$ (см. рис. 54);
- для внешне-внутреннего сопряжения $R_3 = R_c – R_1$; $R_4 = R_c + R_2$ (см. рис. 55).

10.7. Сопряжение двух неконцентричных дуг окружностей с радиусами R_1 и R_2 дугой сопряжения заданного радиуса R_c

1. Провести вспомогательные окружности:

из центра O_1 – радиусом $R_3 = R_1 – R_c$;

из центра O_2 – радиусом $R_4 = R_2 + R_c$.

2. На пересечении вспомогательных окружностей R_3 и R_4 отметить точку O – центр сопряжения.

3. Точки сопряжения A и B определить на пересечении отрезков O_1O и O_2O и заданных окружностей радиусов R_1 и R_2.

4. Провести дугу сопряжения заданным радиусом сопряжения R_c (рис. 56).

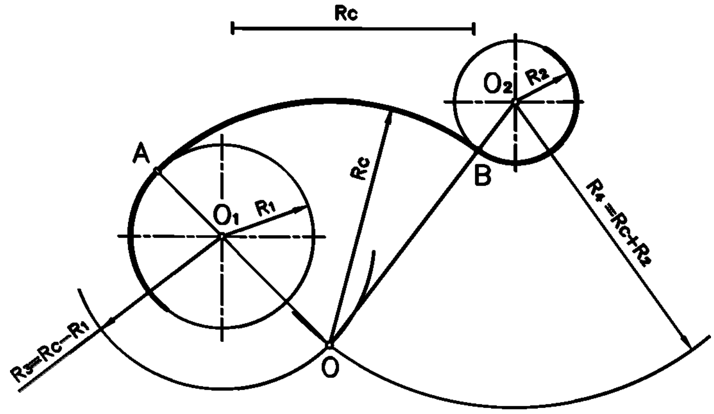


Рис. 54

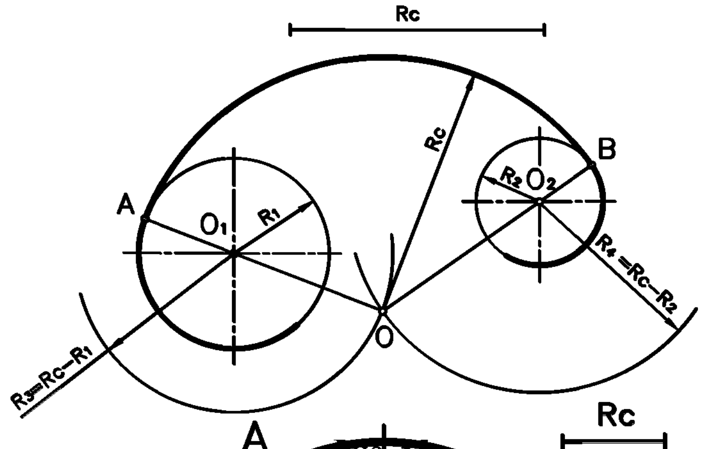


Рис. 55

10.8. Сопряжение двух параллельных прямых m и n дугой сопряжения заданного радиуса R_c

Возможны следующие варианты построений.

Если на параллельных прямых m *и* n *даны две концевые точки сопряжения* A *и* B (рис. 57), необходимо:

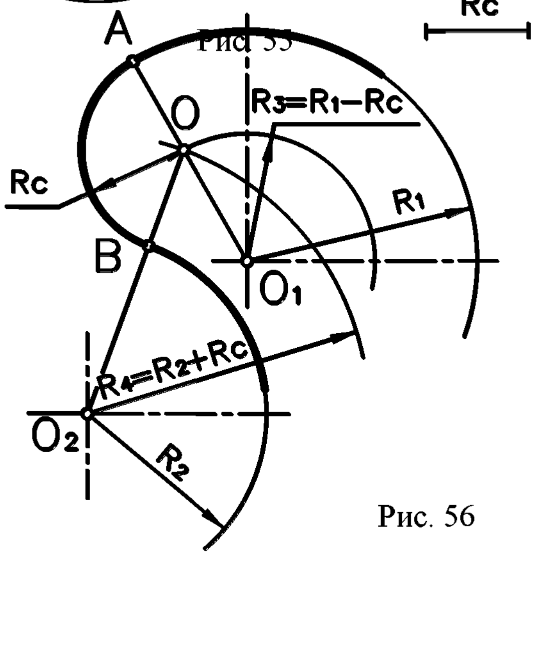


Рис. 56

1) разделить пополам отрезок AB, соединяющий точки сопряжения, таким образом строится точка O – центр сопряжения;

2) провести дугу сопряжения заданным радиусом R_c.

Если точка сопряжения A *дана на одной из параллельных прямых и известно, что радиусы сопряжения этих прямых равны* $R_c = R_1 = R_2$ (рис. 58), необходимо:

1) провести вспомогательную прямую t параллельно заданным прямым и на равном расстоянии от каждой;

2) из первой точки сопряжения A на заданной прямой m опустить перпендикуляр на вспомогательную прямую; основание перпендикуляра – точка O_1 – первый центр сопряжения;

3) второй центр сопряжения точка O_2 – расположен на вспомогательной прямой t на расстоянии, равном $R_1 + R_2$ от точки O_1;

4) из точки O_2 опустить перпендикуляр на вторую заданную прямую n – определить вторую точку сопряжения B;

5) провести дуги сопряжения заданным радиусом R_c.

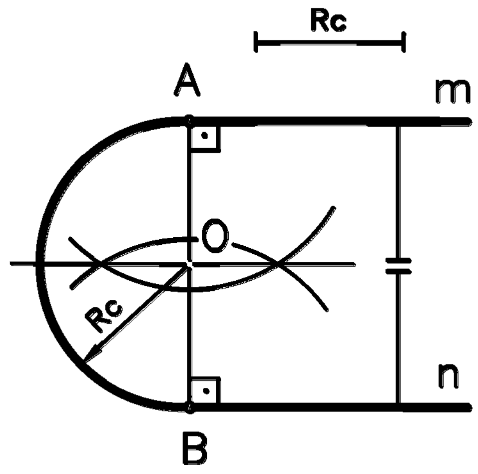


Рис. 57

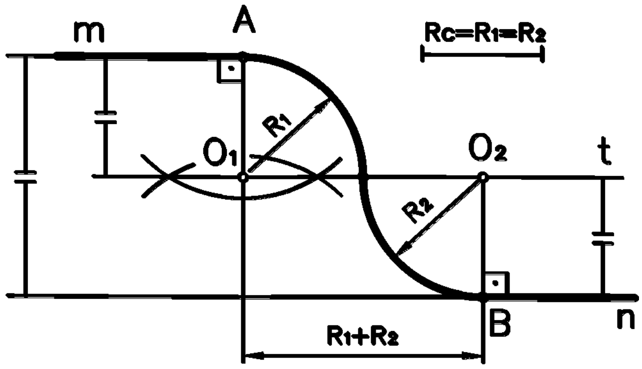


Рис. 58

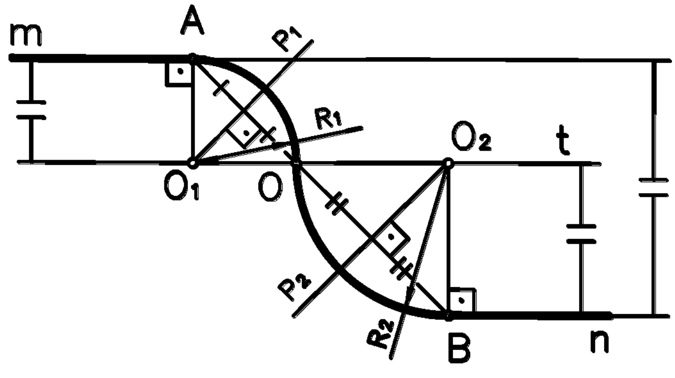


Рис. 59

Если даны точки сопряжения A *и* B *на двух параллельных прямых* m *и* n *и радиусы сопряжений не равны, т.е.* $R_1 \neq R_2$ (рис. 59), необходимо:

1) на отрезке AB, соединяющем заданные точки сопряжения, выбрать произвольно положение вспомогательной точки O и провести через эту точку вспомогательную линию t, параллельно заданным прямым;

2) провести перпендикуляры к заданным прямым из точек A и B;

3) провести серединные перпендикуляры p_1 и p_2 к отрезкам AO и OB;

4) на пересечении построенных перпендикуляров со вспомогательной прямой t определить центры сопряжения прямых O_1 и O_2;

5) построить дуги сопряжения: из центра O_1 – дугой $R_1 = O_1A = O_1O$;

из центра O_2 – дугой $R_2 = O_2B = O_2O$.

11. ДЕЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

При выполнении изображений предметов правильных призматических форм требуются знания графических способов деления окружностей, в которые вписываются основания этих форм на различное количество равных частей. Такое деление окружностей на равные части и построение правильных вписанных многоугольников можно выполнять графически. На рис. 60 показаны примеры деления окружности на 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 частей. Особый интерес представляет деление окружности на 5 и 7 равных частей.

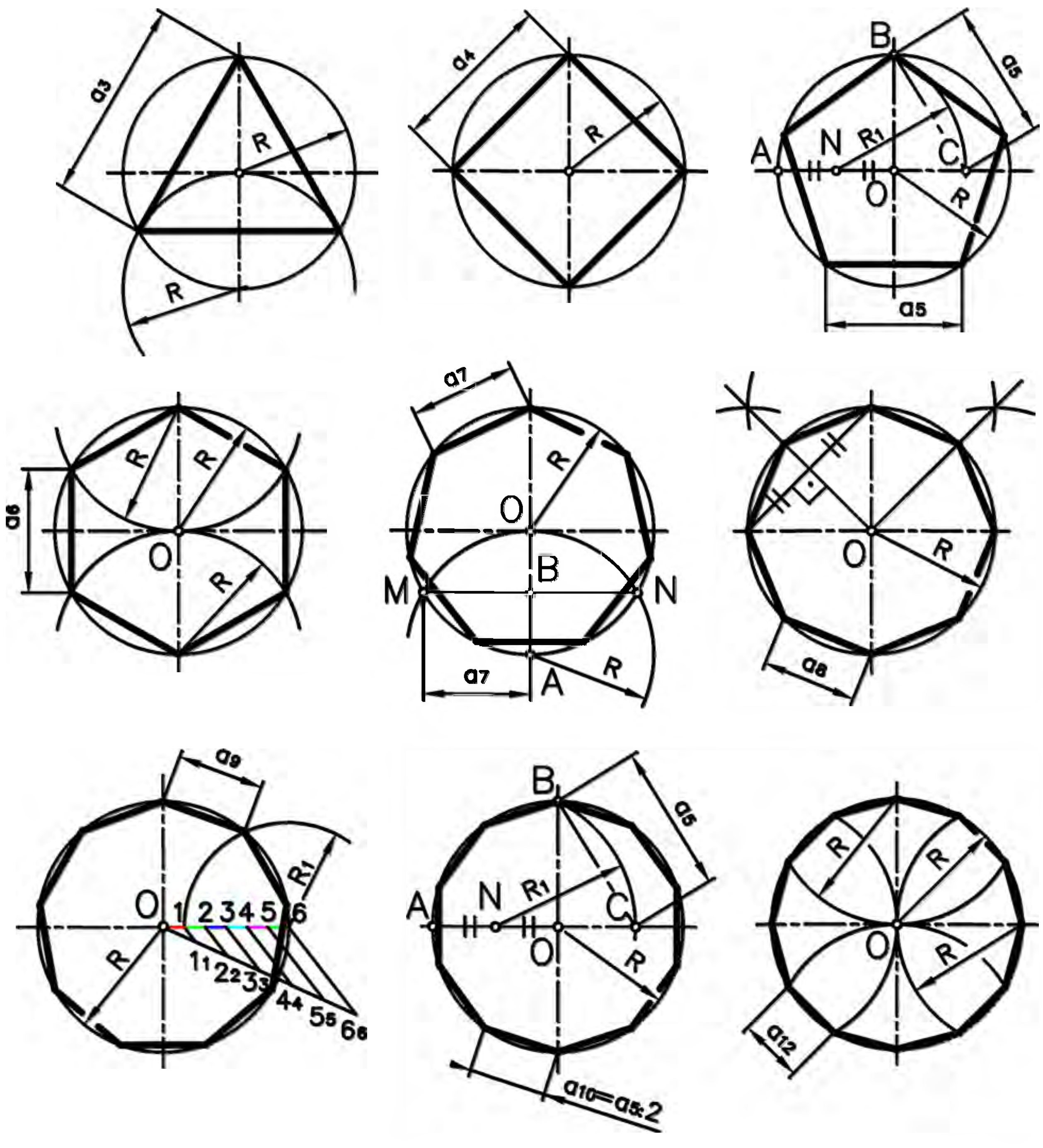


Рис. 60

Деление окружности на 5 частей

1. Из точки N – середины радиуса OA заданной окружности радиуса R провести дугу радиусом R_1 = NB.
2. Хорда построенной дуги BC – сторона правильного вписанного пятиугольника.
3. Величиной отрезка BC заданную окружность делят на 5 равных частей.
4. Отрезок BC/2 – сторона правильного вписанного десятиугольника.

Деление окружности на 7 частей

5. Из любой точки на заданной окружности, например точки A, провести вспомогательную дугу радиусом R = AO.

6. На пересечении заданной окружности и проведенной дуги отметить точки M и N.

7. Половина отрезка MN – сторона правильного вписанного семиугольника.

8. Величиной отрезка MB = BN заданную окружность делят на 7 равных частей.

12. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ «КУЛАЧОК» ПО ТЕМЕ «КРИВЫЕ ЛИНИИ И СОПРЯЖЕНИЯ»

12.1. Порядок графических действий для построения очертания кулачка и образец выполнения задания «Кулачок»

Образец выполнения задания «Кулачок» показан на рис. 61. Данные для всех вариантов приведены в табл. 1–7. Графическую работу выполнить на листе чертежной бумаги формата А3. Основную надпись выполнить упрощенно (120 × 26 мм) (см. стенд «Задания по инженерной графике и образцы их выполнения»).

Во всех вариантах задания очертание кулачка включает две лекальные кривые и дугу радиуса R, которая определяет время «выстоя» механизма, получающего движение от кулачка.

В каждом варианте одна из лекальных кривых – ***эллипс***, а вид второй лекальной кривой необходимо определить самостоятельно по графическому условию. В зависимости от варианта это может быть *синусоида, эвольвента, циклоида, спираль Архимеда, гипербола* или *парабола.*

Перед выполнением задания необходимо изучить графические способы построения вышеперечисленных лекальных кривых, а также способы построения касательных к этим кривым в заданной точке, принадлежащей кривой. Необходимо также проработать тему «Сопряжения».

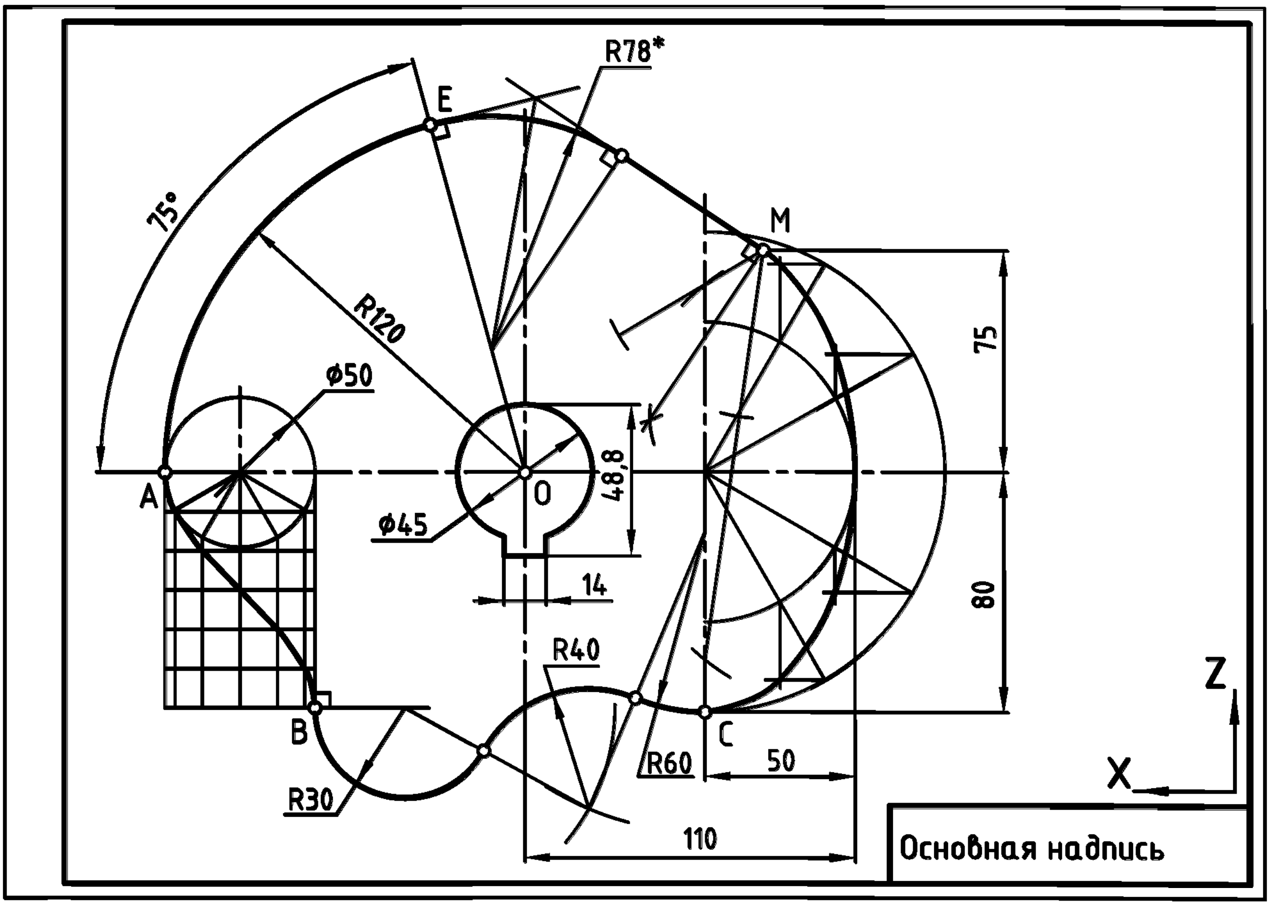


Рис. 61

Построение кулачка в каждом варианте следует начинать с определения точки O (x,z) – центра кулачка. Для этого в правом нижнем углу листа на расстояниях 5 мм от основной надписи и правого поля внутренней рамки чертежа (см. рис. 61) необходимо вычертить пиктограмму системы координат.

Далее надо построить точку O (x,z). С целью оптимального расположения кулачка на листе координаты точки O заданы в условии каждого варианта.

Затем строятся лекальные кривые по заданным параметрам и выделяются участки кривых, входящие в очертание кулачка. Далее надо вычертить плавные переходы между лекальными кривыми. При этом следует учесть, что в вариантах 1–10 и 16–30 через заданную точку M необходимо построить касательную к эллипсу. В вариантах 1–5 и 27–30 участок этой касательной входит в очертание кулачка. В вариантах 23–26 касательная к эллипсу строится в точке C и участок этой касательной также входит в очертание кулачка. В вариантах 16–19 и 23–30 в очертание кулачка входят участки касательных, проведенных в точках A и B к лекальным кривым (к спирали Архимеда, параболе, гиперболе). В вариантах 6–15 и 20–22 в очертание кулачка входят участки касательных, проведенных в точке B к лекальным кривым (к циклоиде, эвольвенте, параболе).

Обозначение R_x показывает, что величина радиуса скругления определяется построением. На чертеже кулачка вместо R_x надо проставить соответствующее размерное число (измерить линейкой) со знаком «*» звездочка).

На рис. 62 показан пример построения сопряжения двух пересекающихся прямых, если известна одна точка касания К. Алгоритм построений:

1) построить биссектрису угла BAC;

2) из заданной точки К восстановить перпендикуляр к прямой AC;

3) на пересечении этого перпендикуляра и биссектрисы отметить точку О – центр радиуса сопряжения;

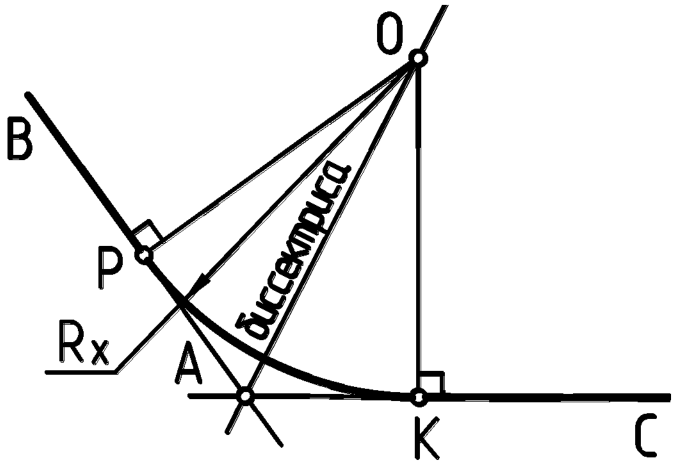


Рис. 62

4) опустить перпендикуляр из точки О на прямую AB и отметить точку P – вторую точку касания;

5) провести циркулем дугу R_x = OK = OP от точки К до точки P.

Отверстие для вала и шпоночный паз выполнить по размерам своего варианта, указанным в табл. 1–7.

При оформлении выполненной работы руководствоваться приложением.

12.2. **Варианты индивидуальных заданий «Кулачок»**

Варианты 1–5 Координаты точки O (x, z) = O (215, 110)

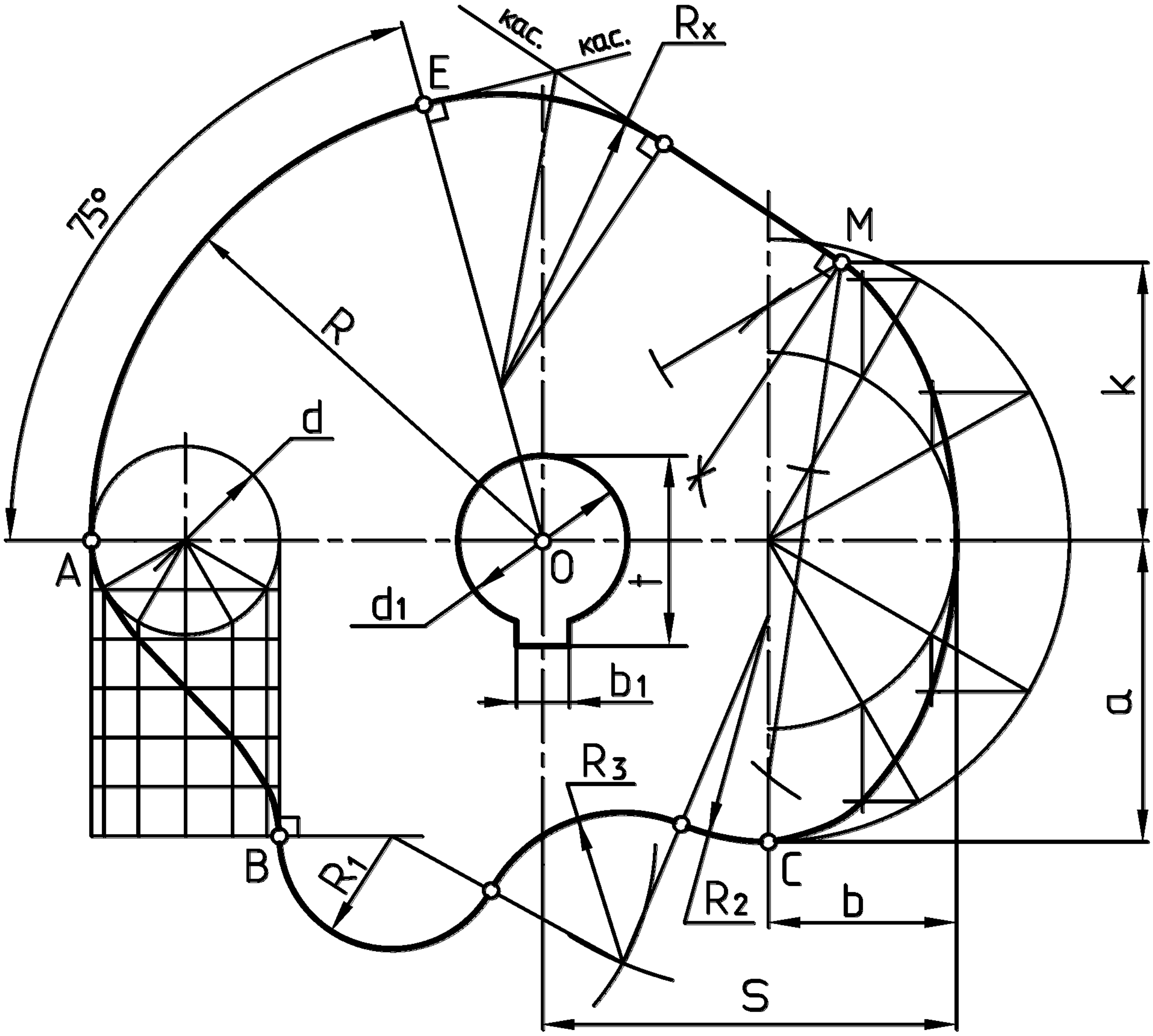


Таблица 1

№ вар.	R	R_1	R_2	R_3	d	a	b	S	k	d_1	b_1	t
1	110	35	50	50	50	70	40	120	60	35	10	38,3
2	115	25	55	45	55	75	45	115	70	40	12	43,3
3	105	35	65	50	50	80	45	120	75	45	14	48,8
4	110	30	60	55	45	75	40	110	65	50	16	54,3
5	120	30	60	45	50	80	50	110	70	45	14	48,8

Варианты 6–10 Координаты точки O (x, z) = O (200, 120)

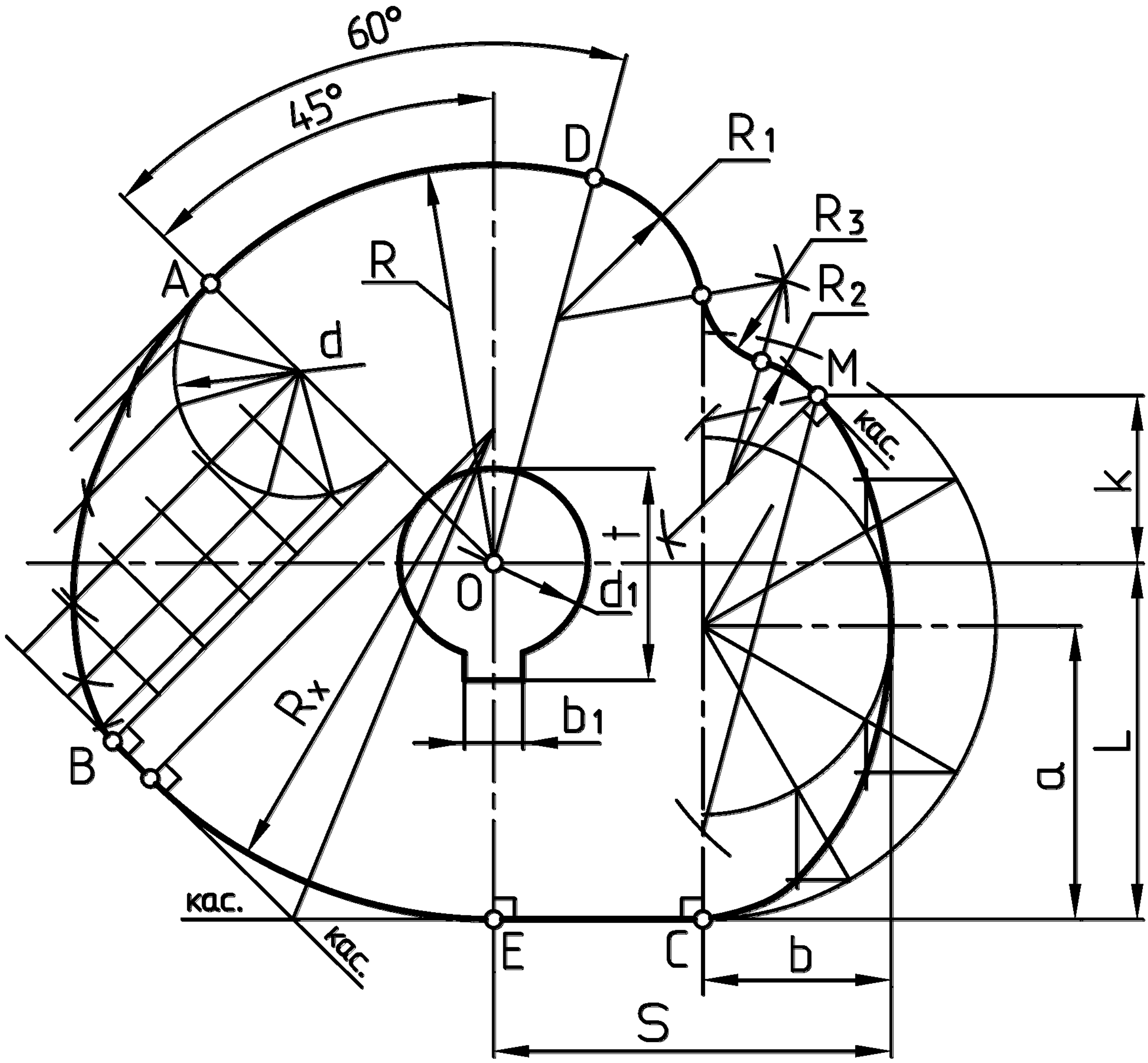


Таблица 2

№ вар.	R	R_1	R_2	R_3	d	a	b	S	k	L	d_1	b_1	t
6	95	35	35	25	60	70	50	100	40	85	40	12	43,3
7	100	55	55	30	65	85	55	120	45	95	45	14	48,8
8	90	40	40	25	60	75	45	100	35	90	40	12	43,3
9	80	40	60	20	45	60	40	100	30	70	35	10	38,3
10	85	45	65	30	50	70	45	110	35	80	45	14	48,8

Варианты 11–15 Координаты точки О (х, z) = О (200, 125)

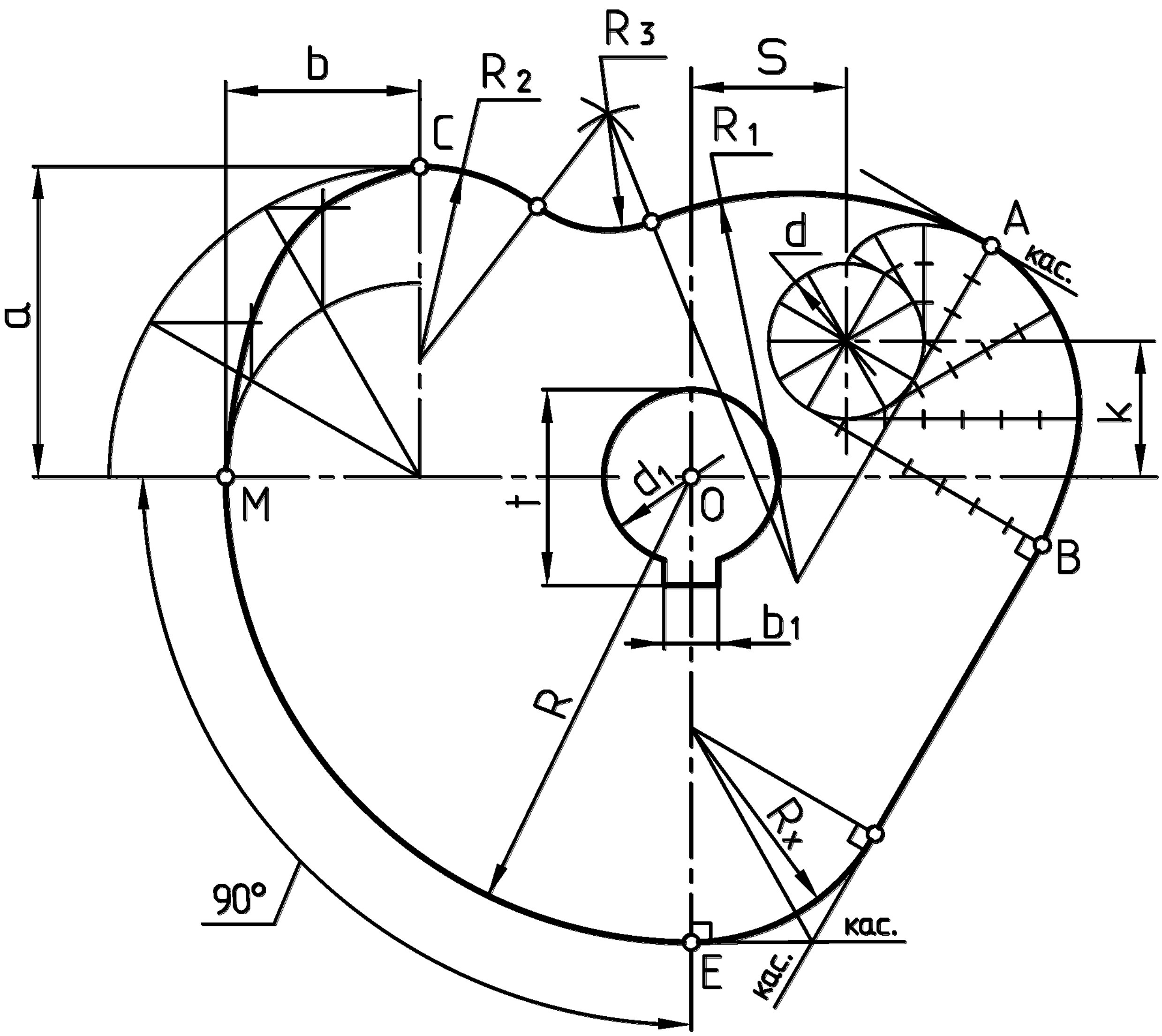


Таблица 3

№ вар.	R	R_1	R_2	R_3	d	a	b	S	k	d_1	b_1	t
11	120	100	50	30	40	80	50	40	35	45	14	48,8
12	115	110	75	40	45	90	55	50	40	50	16	54,3
13	125	90	65	30	45	75	50	40	45	50	16	54,3
14	110	105	60	35	50	85	45	40	40	40	12	43,3
15	110	95	55	20	40	85	60	50	35	35	10	38,3

Варианты 16–19 Координаты точки O (x, z) = O (215, 110)

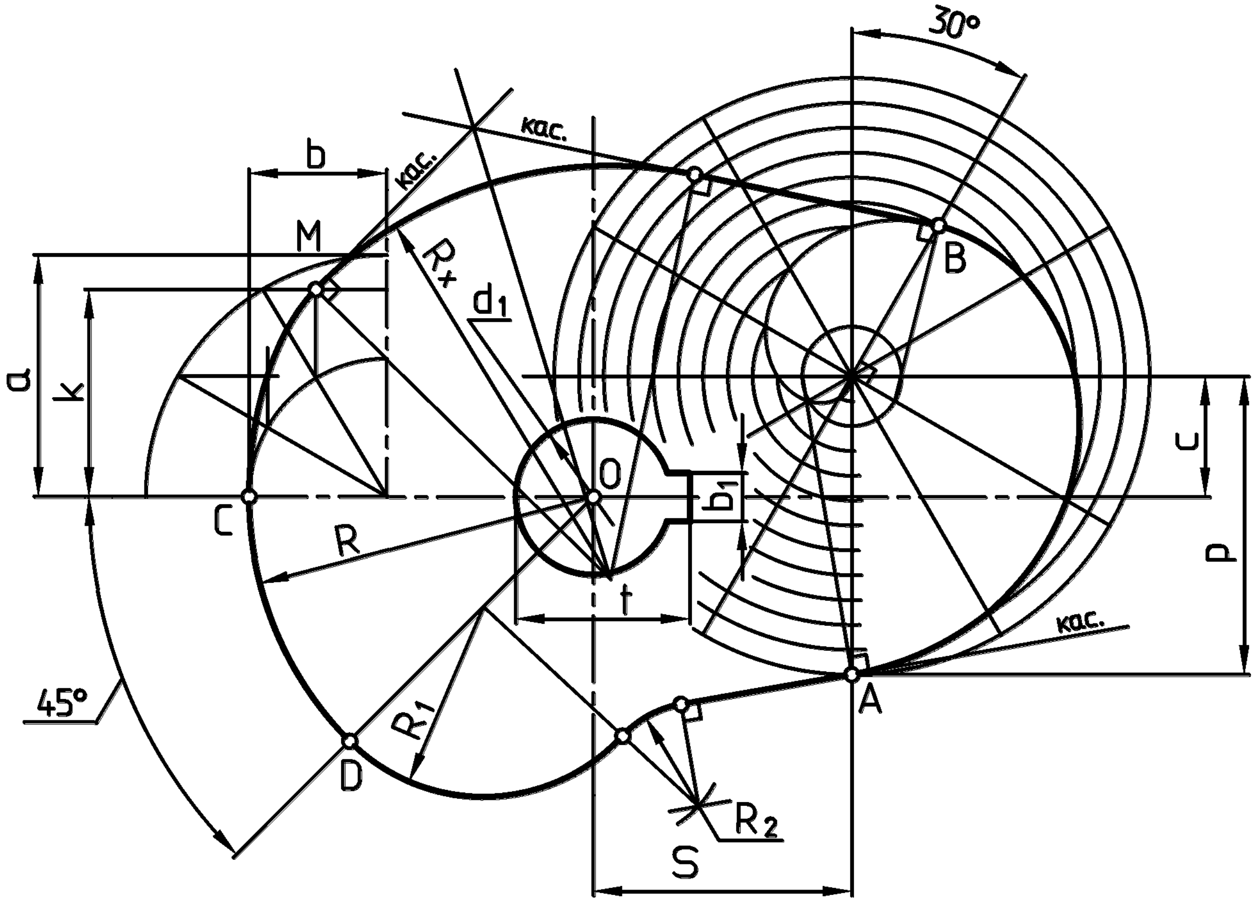


Таблица 4

№ вар.	R	R_1	R_2	a	b	S	k	c	p	d_1	b_1	t
16	100	55	30	70	40	75	60	35	90	40	12	43,3
17	90	40	50	60	40	85	45	45	72	35	10	38,3
18	110	45	25	90	55	70	85	30	84	50	16	54,3
19	105	50	35	80	50	80	65	40	95	45	14	48,8

Варианты 20–22 Координаты точки O (x, z) = O (215, 110)

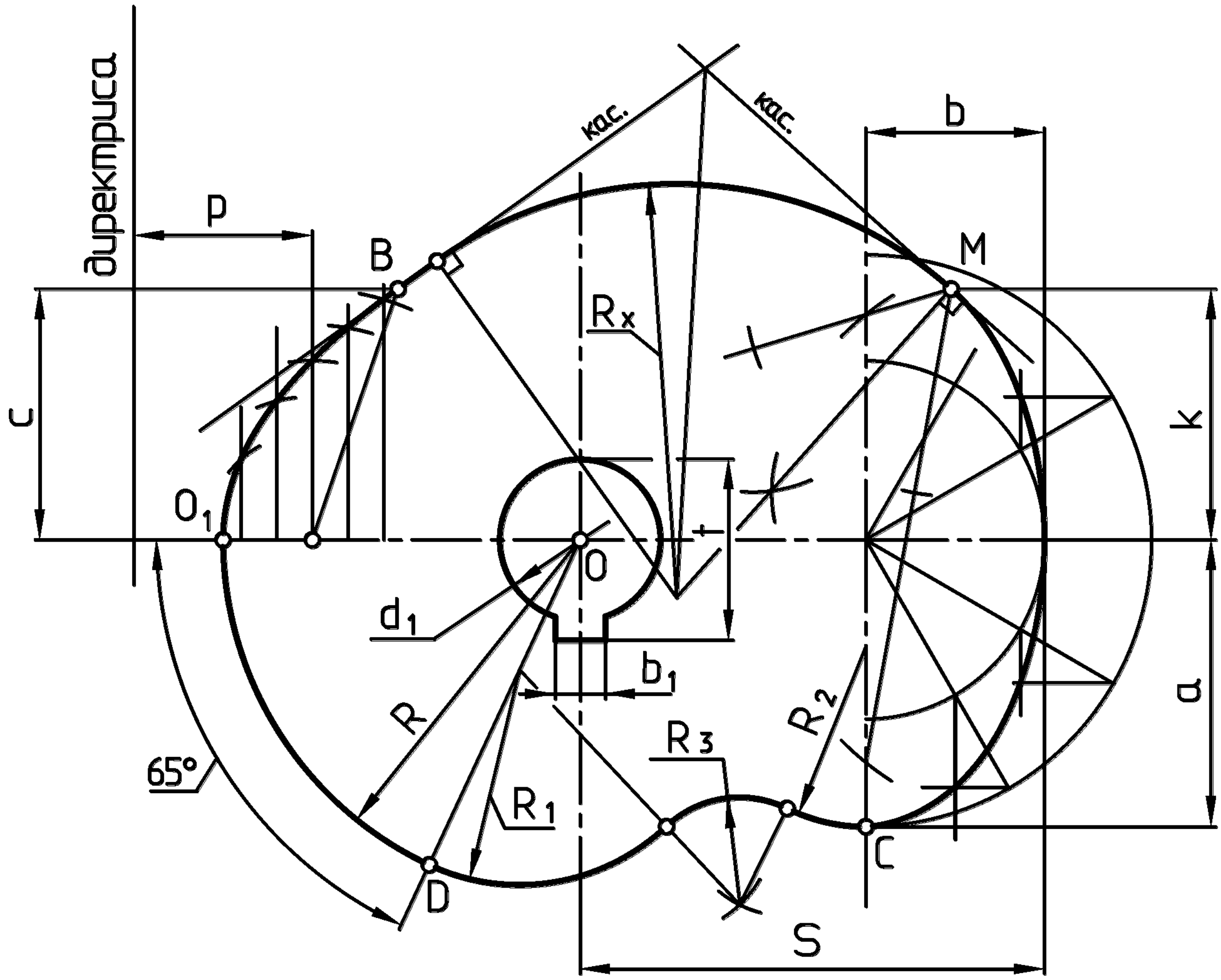


Таблица 5

№ вар.	R	R_1	R_2	R_3	a	b	S	k	p	c	d_1	b_1	t
20	110	50	45	35	75	45	110	65	30	50	40	12	43,3
21	100	60	50	30	80	50	130	70	50	70	50	16	54,3
22	120	70	60	40	70	40	120	60	40	65	45	14	48,8

Варианты 23–26 Координаты точки O (x, z) = O (215, 110)

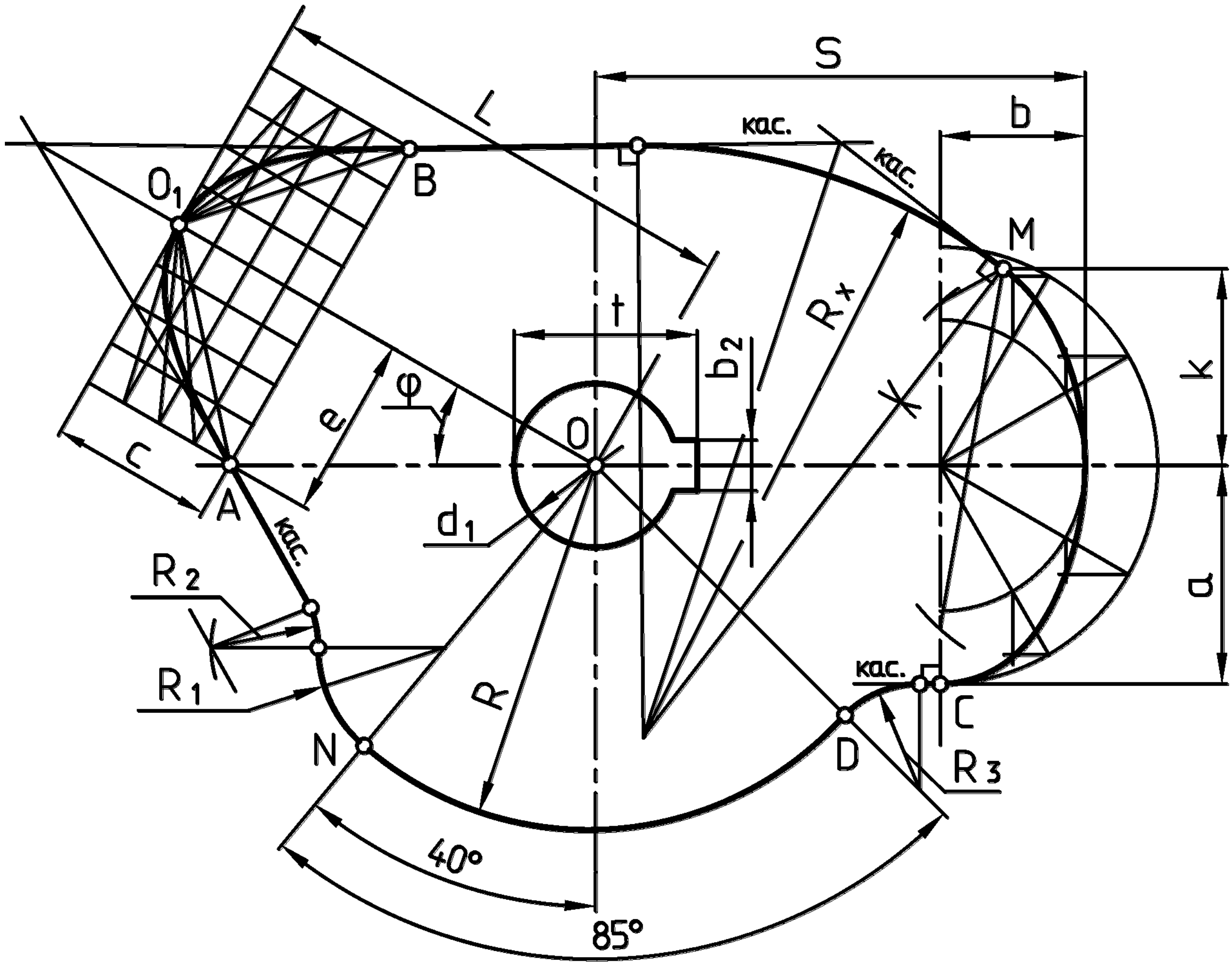


Таблица 6

№ вар.	R	R_1	R_2	R_3	φ (градус)	a	b	S	k	c	e	L	d_1	b_1	t
23	100	35	20	20	30	60	40	135	55	45	50	105	45	14	48,8
24	100	30	20	10	30	55	35	130	45	40	52	120	50	16	54,3
25	85	25	25	15	25	45	35	130	40	50	45	110	40	12	43,3
26	95	20	15	40	15	50	30	140	35	35	55	105	35	10	38,3

Варианты 27–30 Координаты точки O (x, z) = O (210, 120)

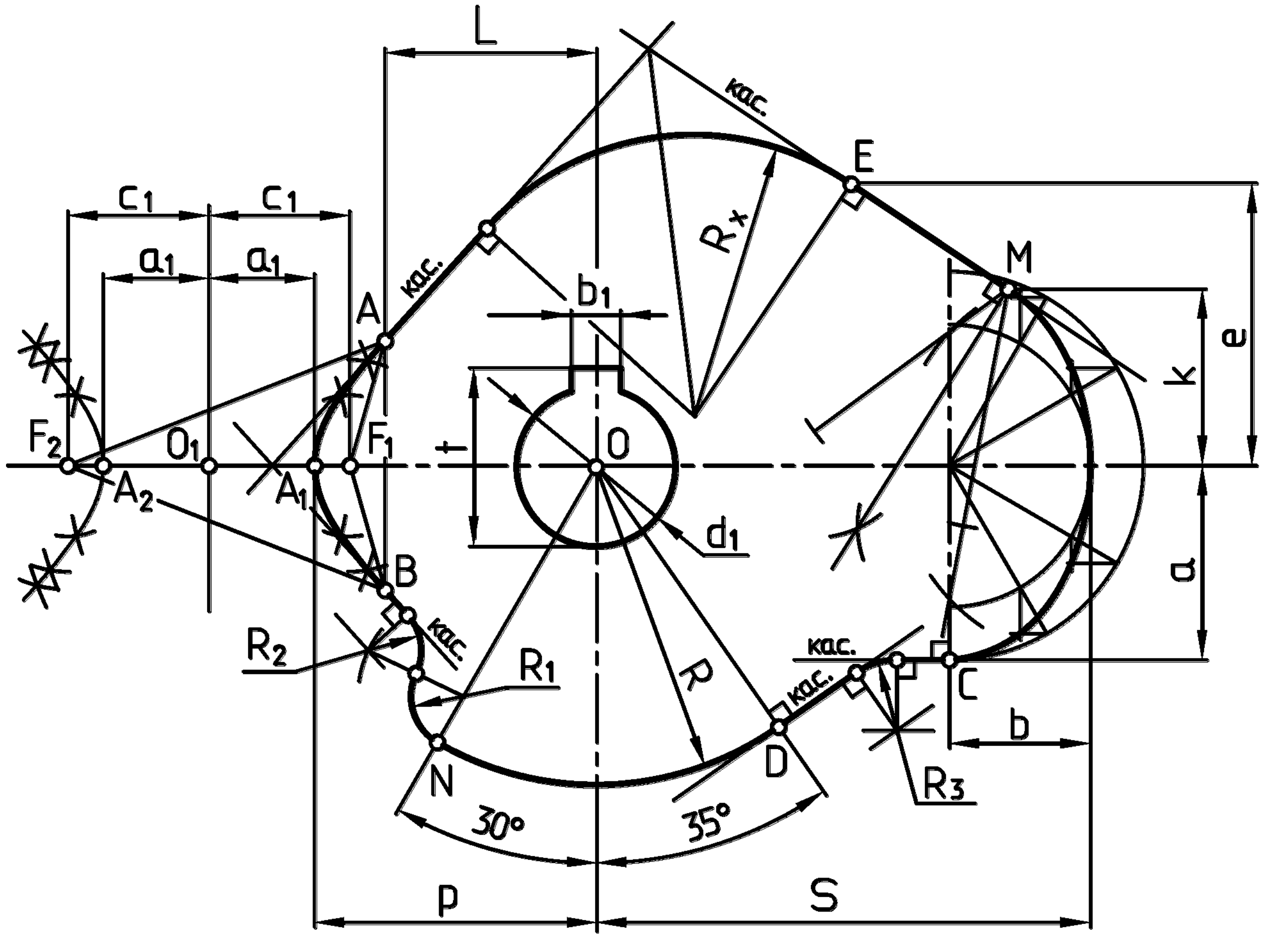
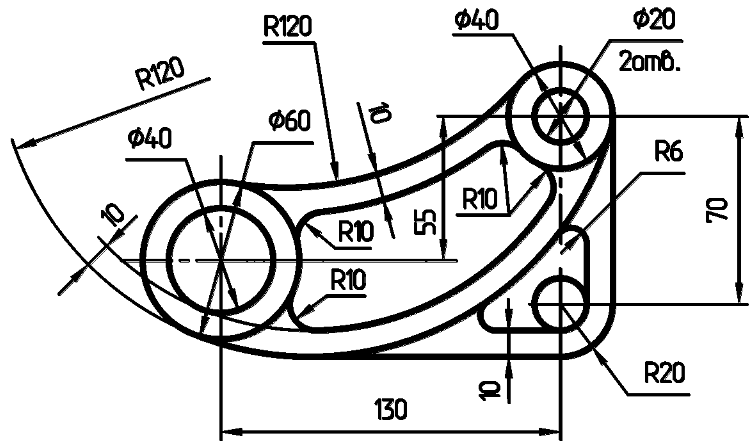


Таблица 7

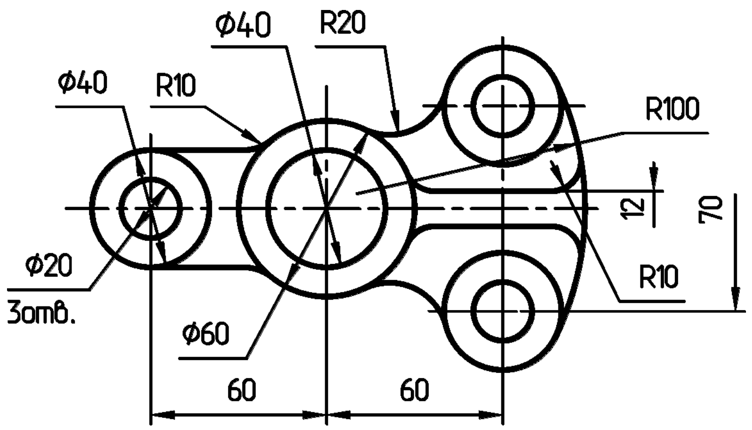
№ вар.	R	R_1	R_2	R_3	a	b	S	k	e	a_1	c_1	p	L	d_1	b_1	t
27	90	20	15	20	55	40	140	50	80	30	40	80	60	40	12	43,3
28	100	20	10	25	65	45	145	60	80	25	35	85	65	35	10	38,3
29	95	15	15	25	70	50	145	65	85	20	30	90	70	50	16	54,3
30	105	25	20	30	75	50	150	70	95	15	25	95	75	45	14	48,8

13. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ К ТЕМЕ «СОПРЯЖЕНИЯ»

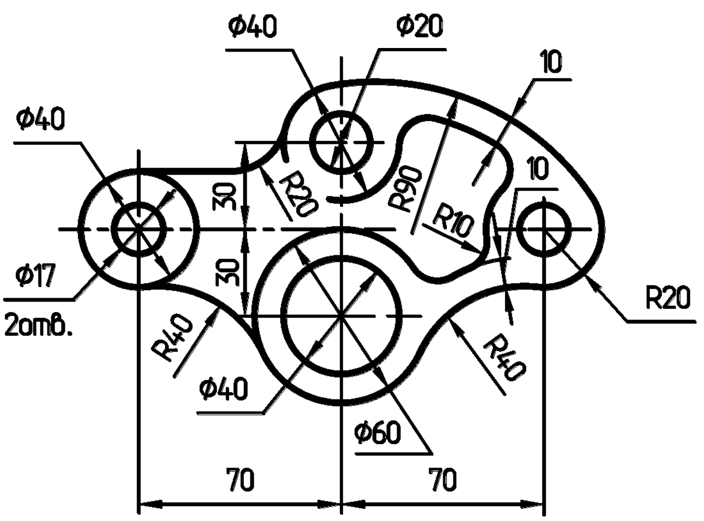
Вариант № 1



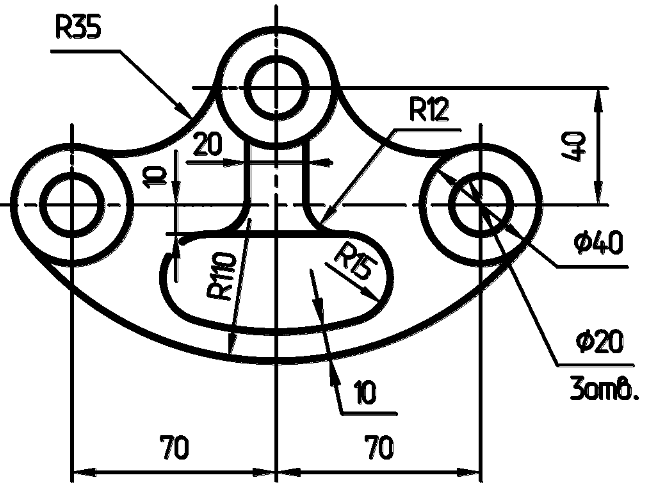
Вариант № 2



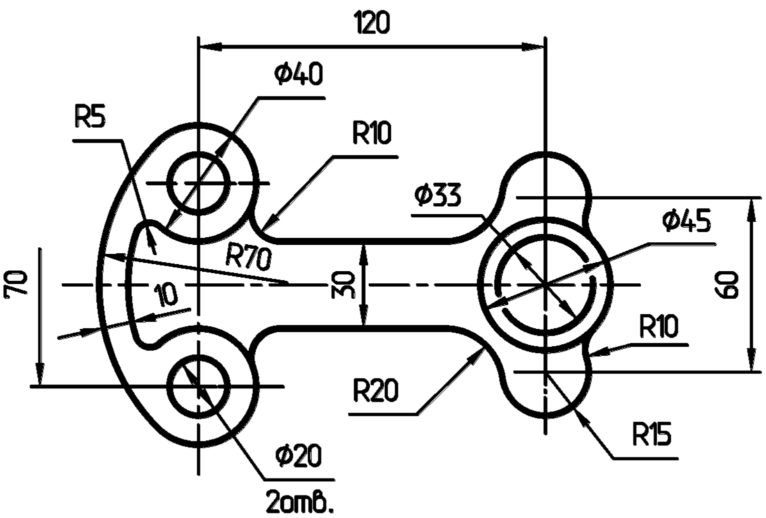
Вариант № 3



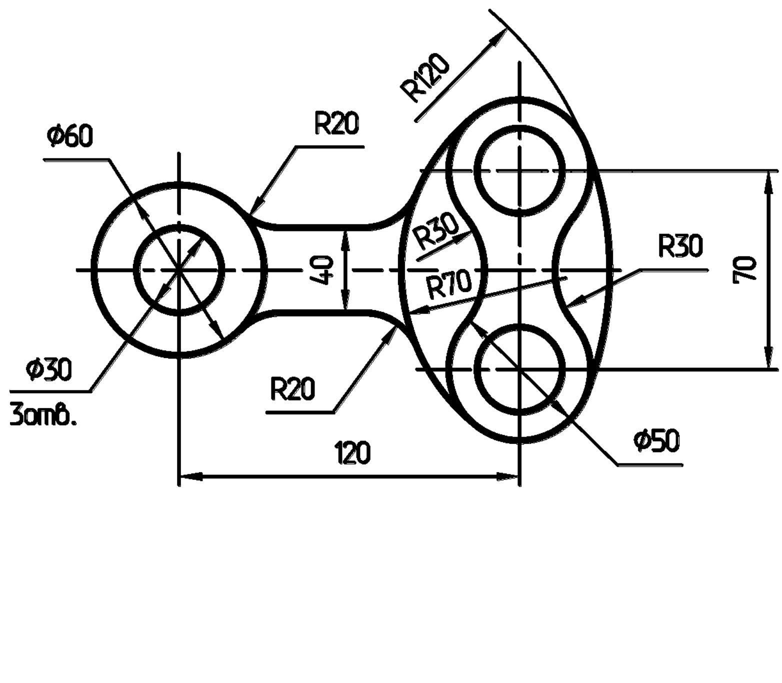
Вариант № 4



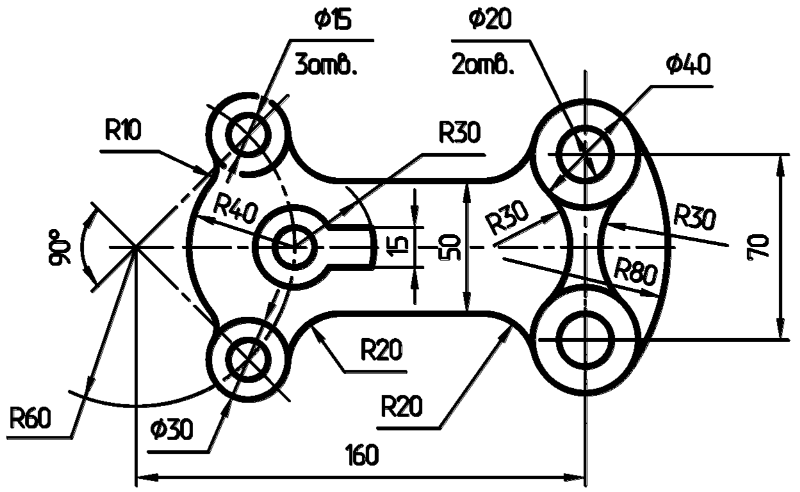
Вариант № 5



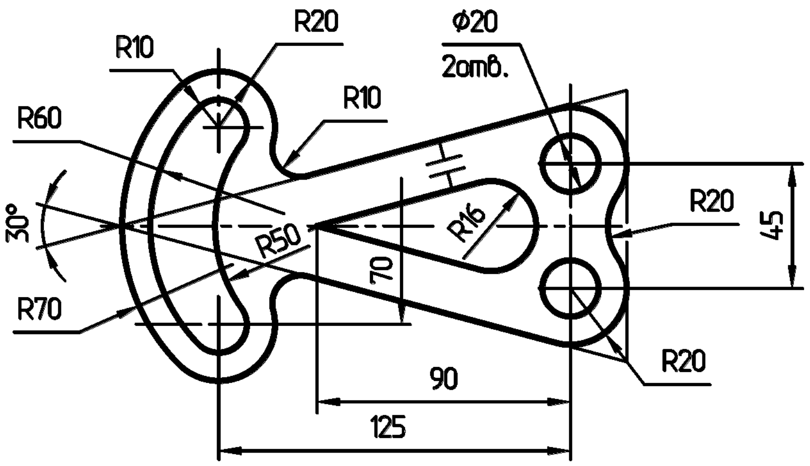
Вариант № 6



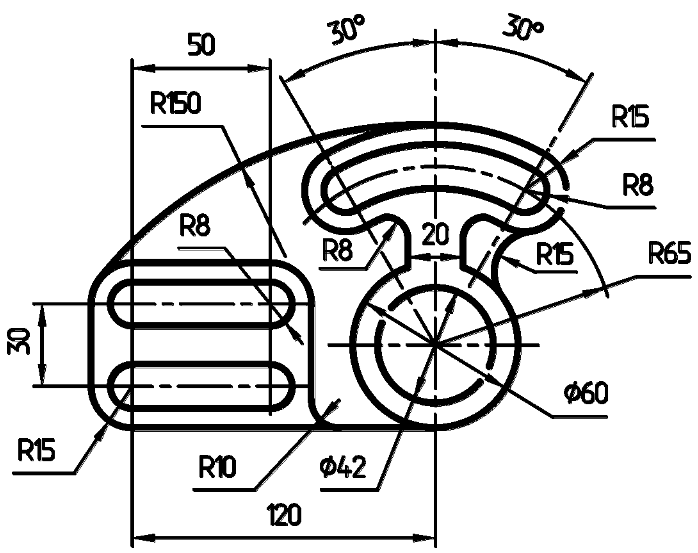
Вариант № 7



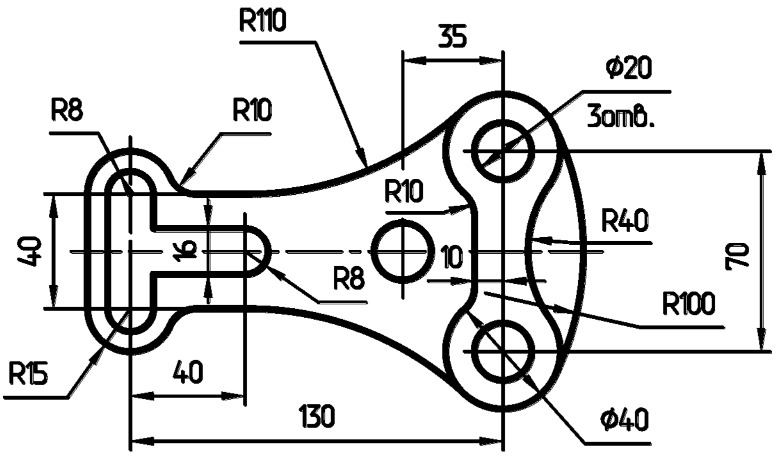
Вариант № 8



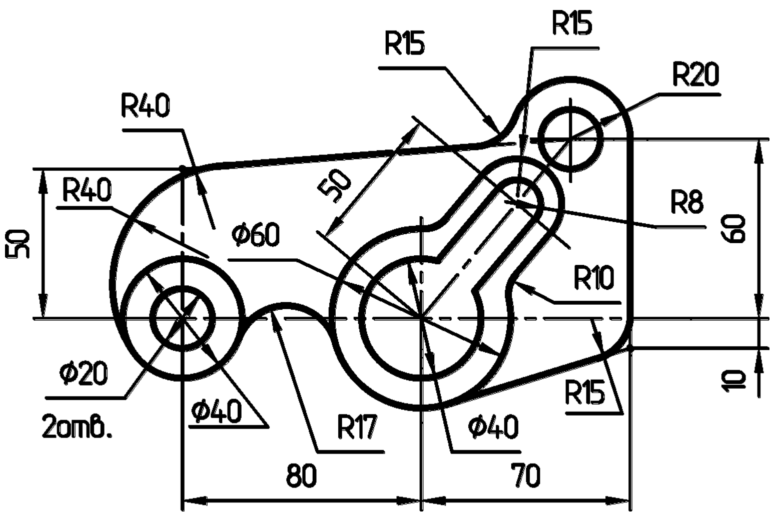
Вариант № 9



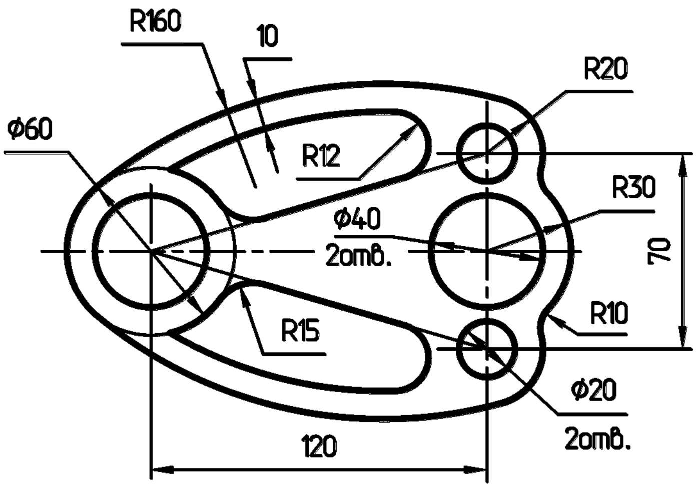
Вариант № 10



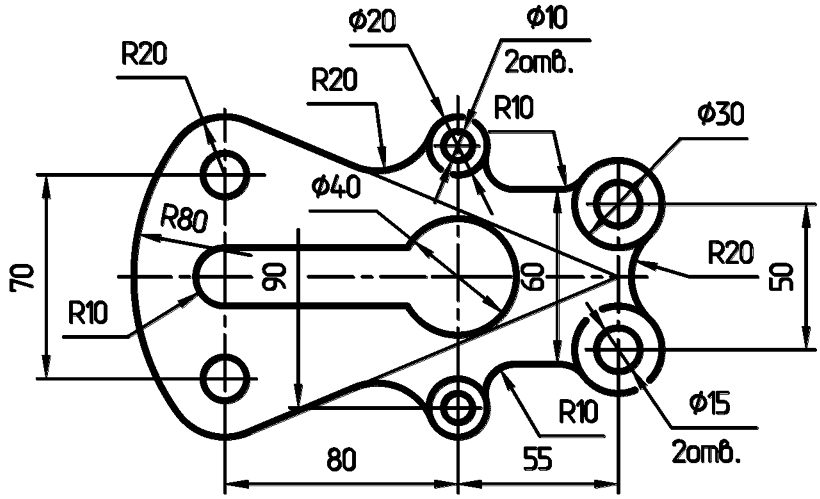
Вариант № 11



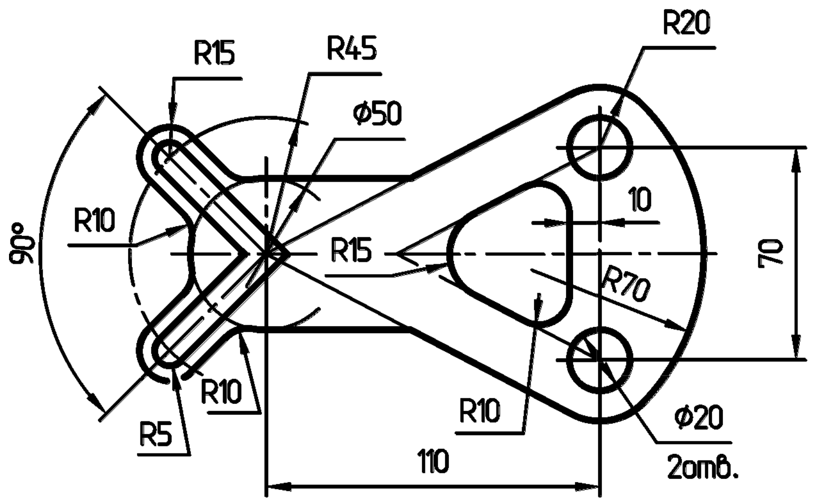
Вариант № 12



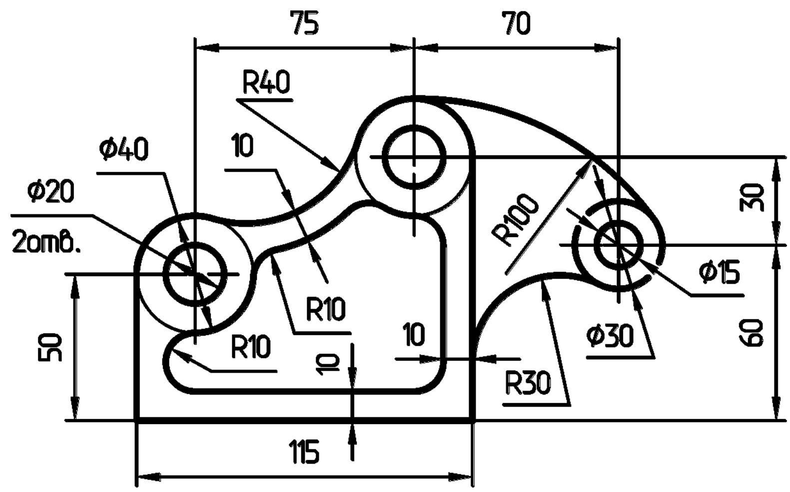
Вариант № 13



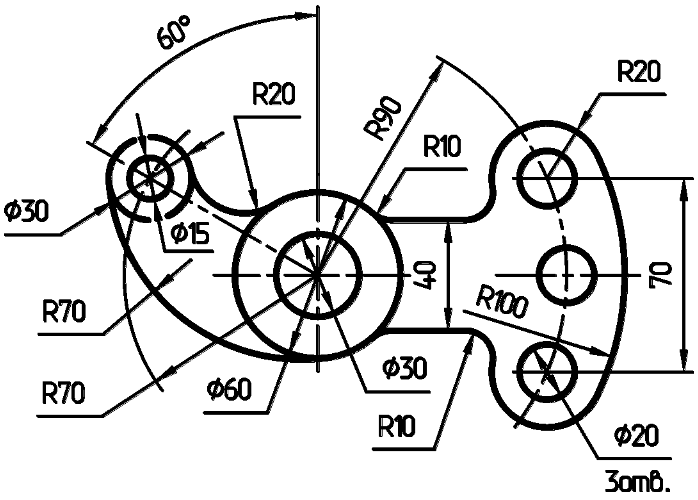
Вариант № 14



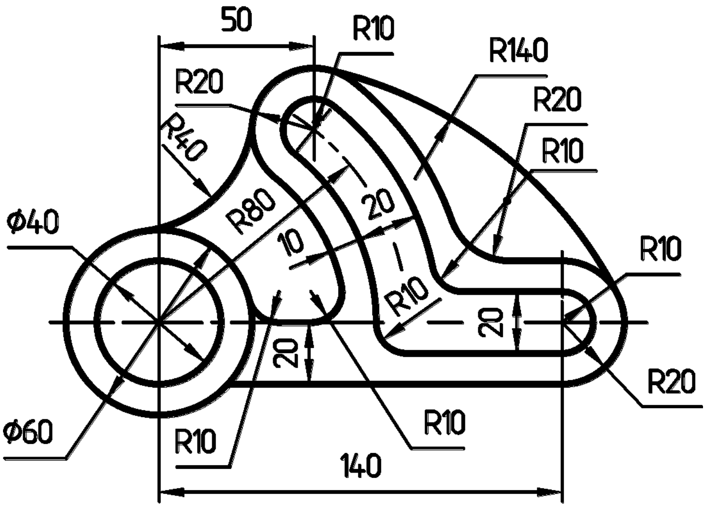
Вариант № 15



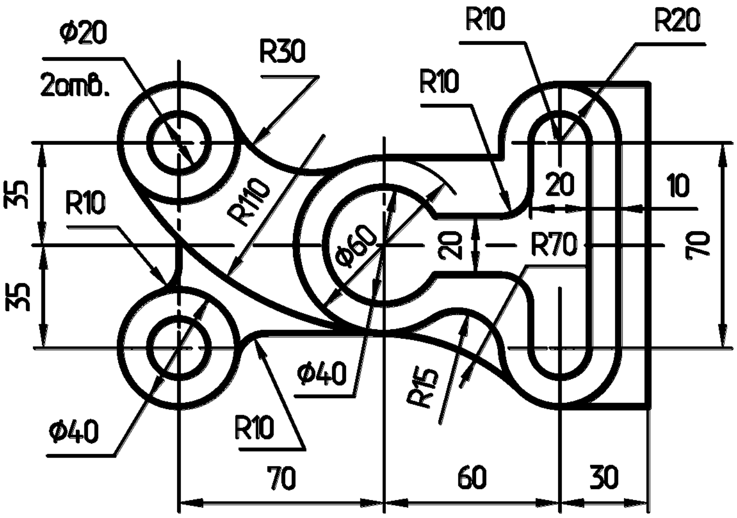
Вариант № 16



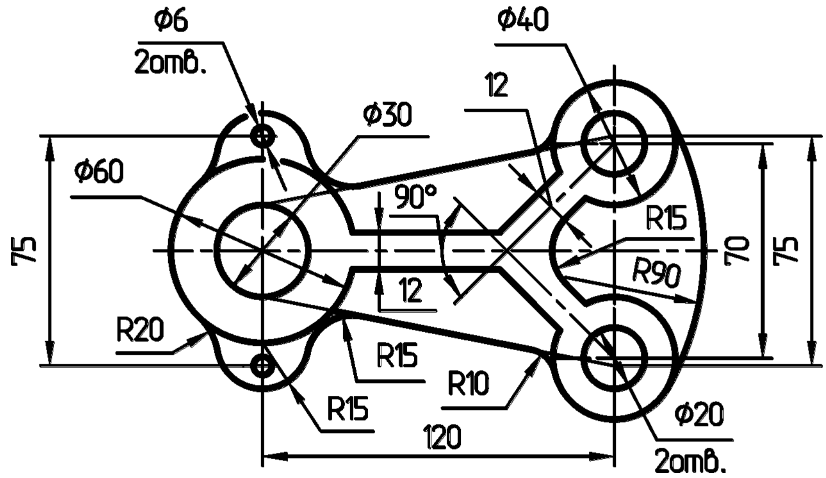
Вариант № 17



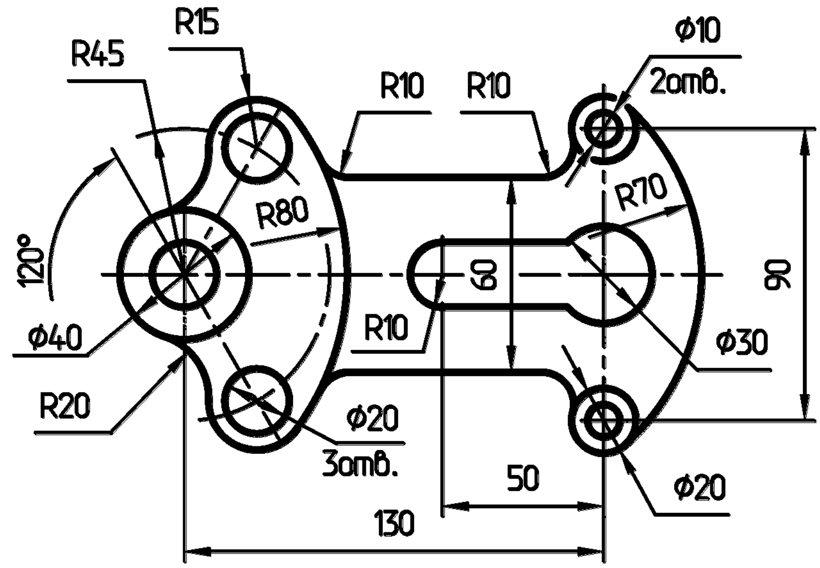
Вариант № 18



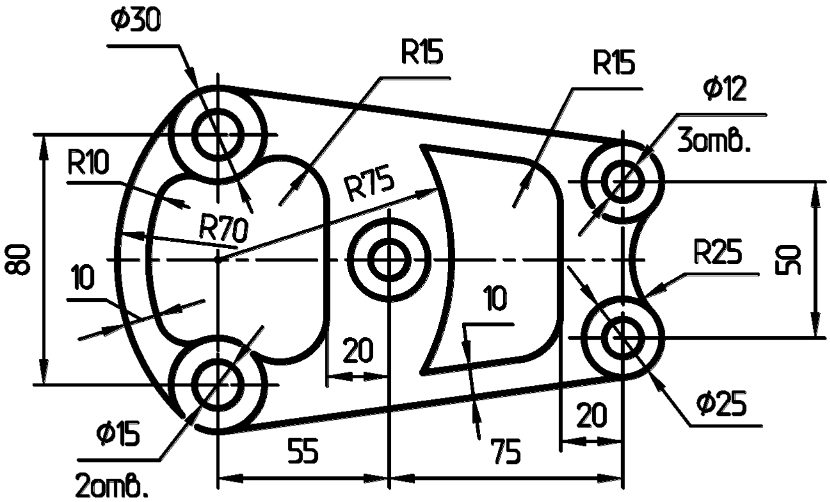
Вариант № 19



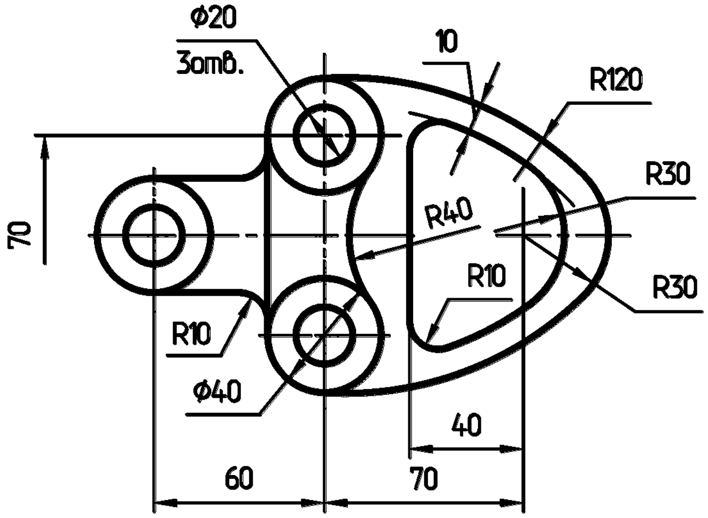
Вариант № 20



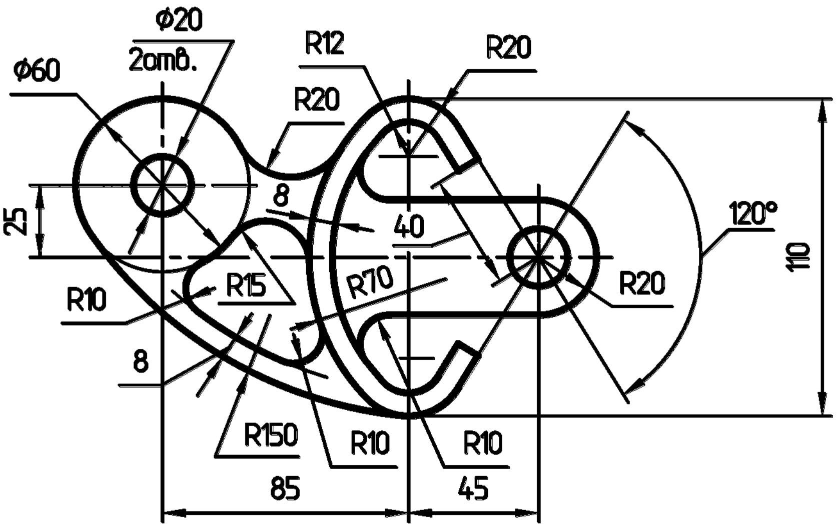
Вариант № 21



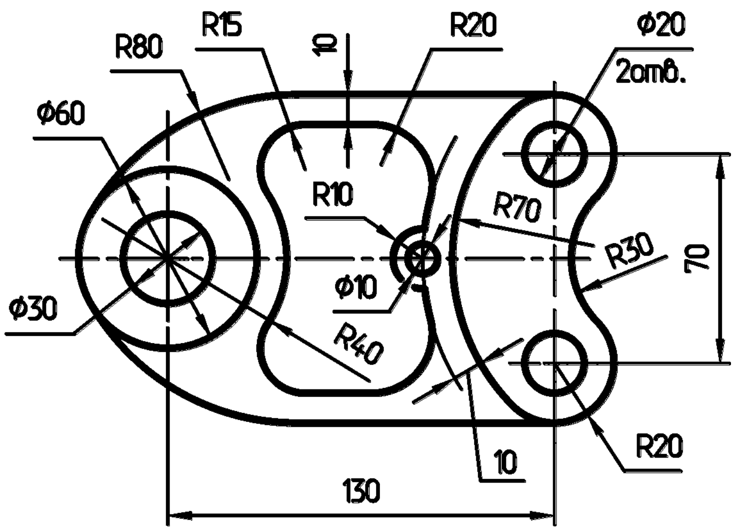
Вариант № 22



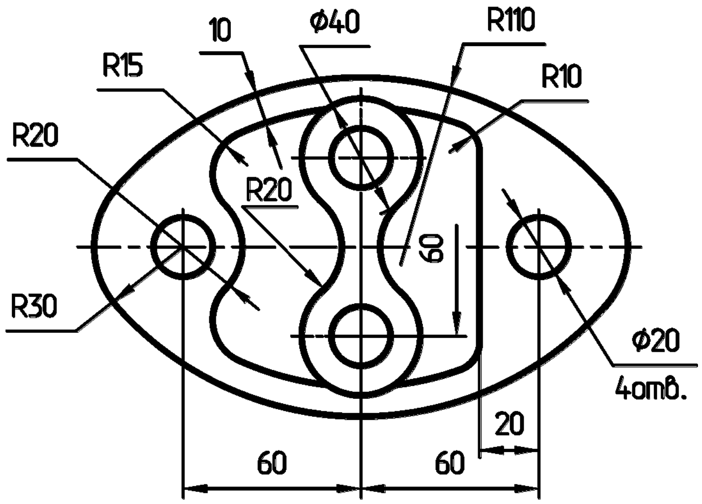
Вариант № 23



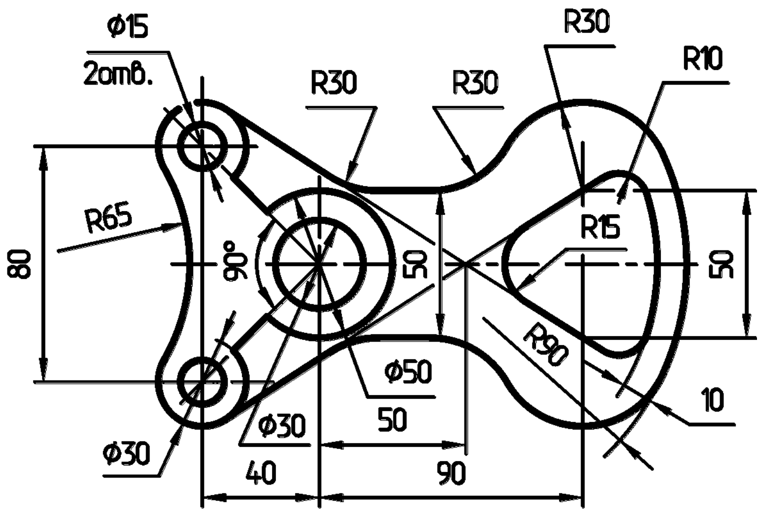
Вариант № 24



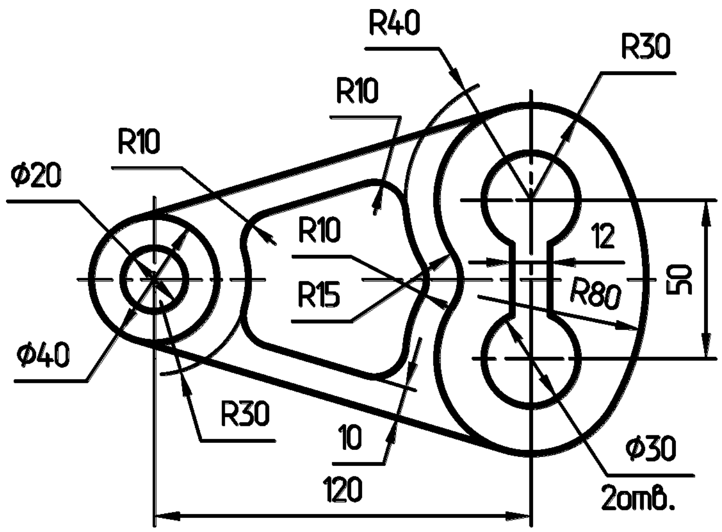
Вариант № 25



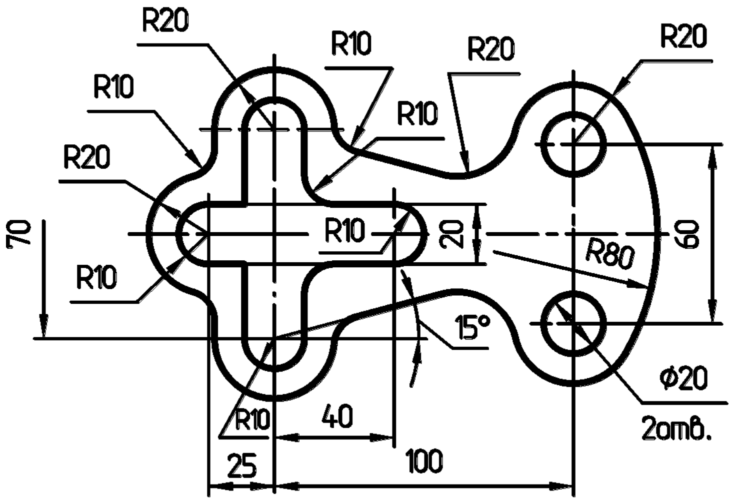
Вариант № 26



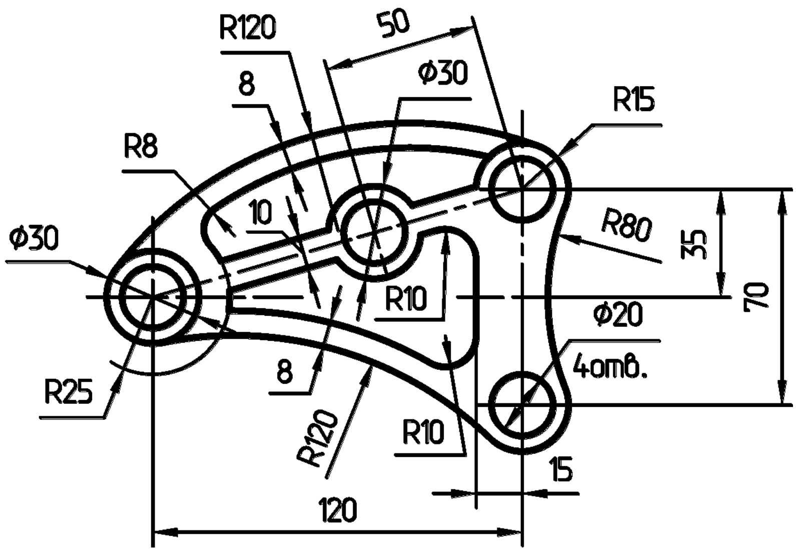
Вариант № 27



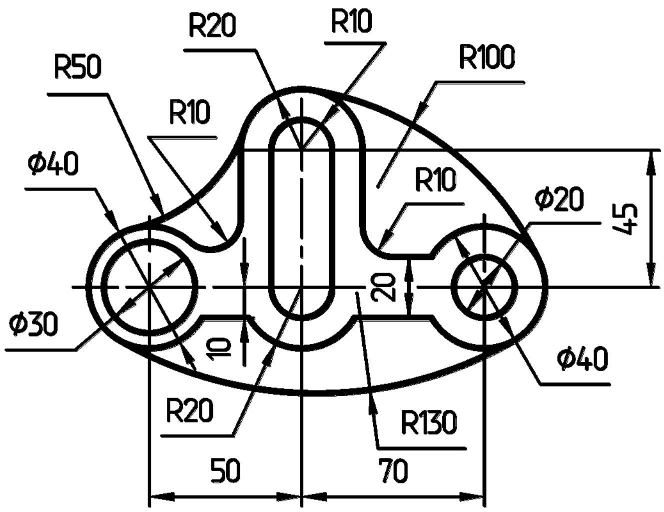
Вариант № 28



Вариант № 29



Вариант № 30



На рис. 63 представлен образец выполнения индивидуального задания по теме «Сопряжения».

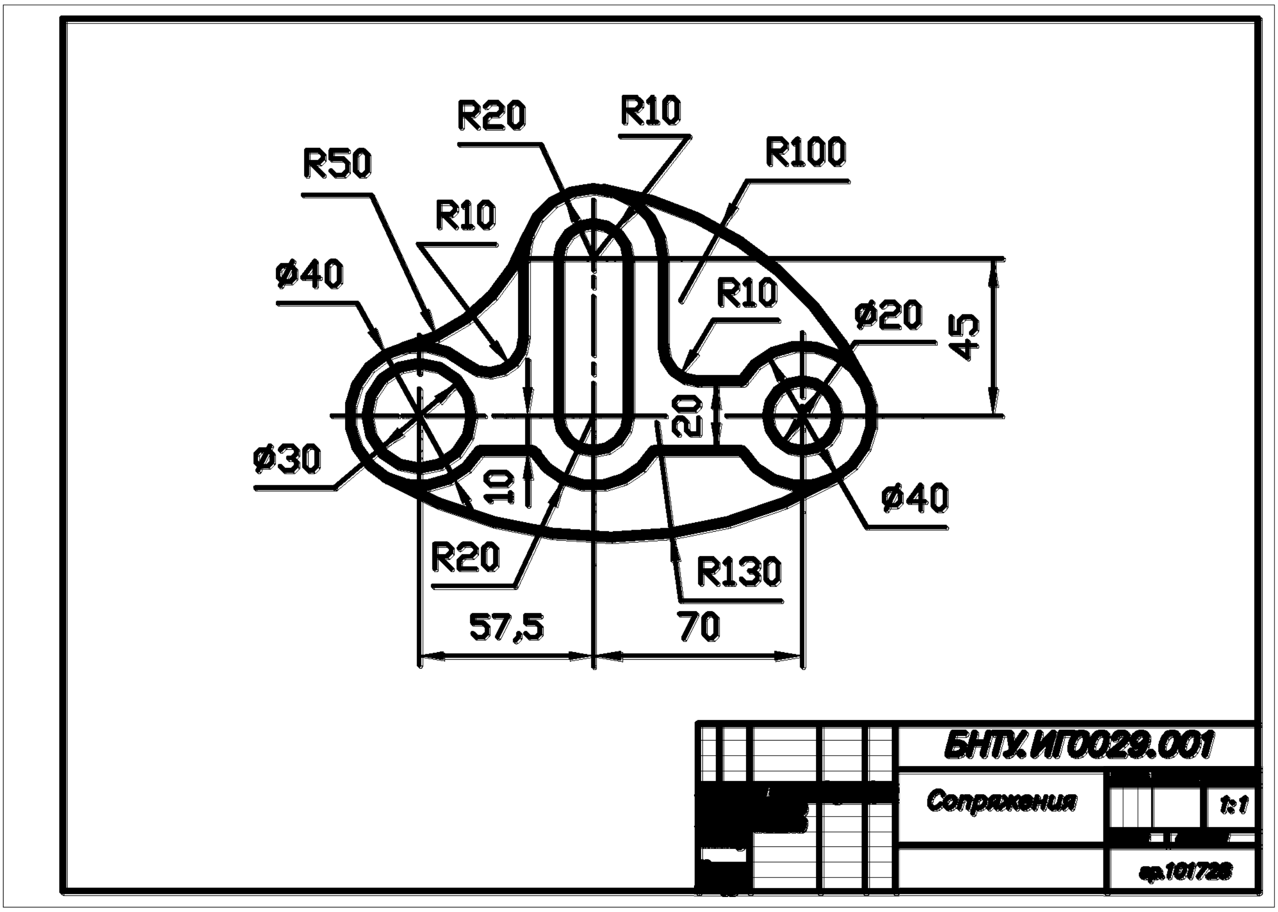


Рис. 63

ЛИТЕРАТУРА

1. Бубенников, А.В. Начертательная геометрия: учебник для втузов / А.В. Бубенников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1985. – 288 с.: ил.
2. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии: учебное пособие / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский; под ред. Ю.Б. Иванова. – 23-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 272 с.
3. Левицкий, В.С. Машиностроительное черчение: учебник для студентов высших технических учебных заведений / В.С. Левицкий. – М.: Высшая школа, 1988. – 351 с.: ил.
4. Миронов, Б.Г. Черчение: учебное пособие для машиностроительных специальностей средних специальных учебных заведений / Б.Г. Миронов, Р.С. Миронова. – М.: Машиностроение, 1991. – 288 с.: ил.
5. Начертательная геометрия и черчение: методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов / С.А. Фролов [и др.]. – М.: Высшая школа, 1982. – 88 с.: ил.
6. Новичихина, Л.И. Справочник по техническому черчению /Л.И. Новичихина. – Минск: Книжный дом, 2004. – 320 с.: ил.
7. Проекционное черчение с задачами: учебное пособие для технических специальностей вузов / И.В. Манцветова [и др.]. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйшая школа, 1978. – 344 с.: черт.
8. Федоренко, В.А. Справочник по машиностроительному черчению / В.А. Федоренко, А.И. Шошин. – 14-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983. – 416 с.: ил.
9. Якубенко, В.С. Техническое черчение с задачами / В.С. Якубенко. – Минск: Вышэйшая школа, 1971. – 360 с.: ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБЩИЕ ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЧЕРТЕЖЕЙ В СООТВЕТСВИИ СО СТАНДАРТАМИ ЕСКД

Для оформления чертежей пользуются Единой системой конструкторской документации (ЕСКД), стандарты которой устанавливают единые для всех предприятий правила разработки, оформления и обращения конструкторской документации. Рассмотрим кратко некоторые стандарты (ГОСТ – государственный стандарт) этой системы, знание которых необходимо для оформления любых чертежей, в том числе чертежей графических работ по начертательной геометрии.

Форматы – ГОСТ 2.301-68

Этот стандарт устанавливает форматы листов чертежей – размеры внешней рамки чертежа в миллиметрах (мм).

Формат с размерами сторон 1189×841 мм, площадь которого равна 1 м^2 с соотношением сторон 5/7, принят за самый большой основной формат.

Прочие основные форматы получают последовательным делением большей стороны предыдущего формата пополам параллельно его меньшей стороне (табл. П1).

Таблица П1

Основные стандартные форматы чертежей по ГОСТ 2.301-68

Обозначение	А0	А1	А2	А3	А4	А5
Размеры сторон	1189×841	594×841	594×420	297×420	297×210	148×210

Применяются для выполнения чертежей и дополнительные форматы, образование и размеры которых смотрите в указанном стандарте (здесь не приведены).

Чертежи индивидуальных заданий контрольной работы следует выполнять на форматах А3 с размерами сторон 297×420.

Титульный лист контрольной работы выполнять на формате А4 с размерами сторон 297×210.

Если размеры листа бумаги не соответствуют необходимому для выполнения чертежа формату по ГОСТ 2.301-68 (превышают его), на листе вычерчивается сплошной тонкой линией внешняя рамка чертежа (рамка формата). По ней формат должен быть вырезан из листа, желательно, после завершения работы над чертежом. Внутренняя рамка чертежа выполняется сплошными толстыми основными линиями.

Масштабы – ГОСТ 2.302-68

Этот стандарт устанавливает масштабы изображений и их обозначение на чертежах.

Масштабы изображений на чертежах должны выбираться из следующих рядов (табл. П2).

Таблица П2

Масштабы изображений на чертежах по ГОСТ 2.302-68

Масштаб уменьшения	1:2	1:4	1:5	1:10	…	1:1000
Натуральная величина	1:1					
Масштаб увеличения	2:1	4:1	5:1	…	…	100:1

Чертежи индивидуальных заданий выполнять в натуральную величину в М1:1.

Линии – ГОСТ 2.303-68

Этот стандарт устанавливает начертание и основные назначения линий на чертежах.

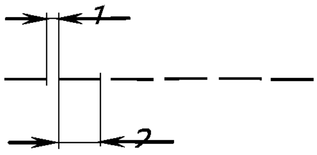
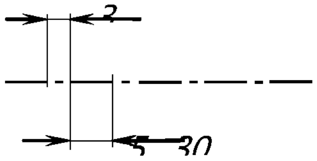
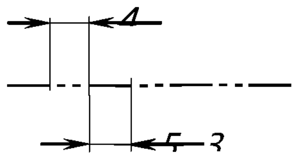
Толщина линий одного и того же типа должна быть одинакова для всех изображений на чертеже.

Толщина s сплошной толстой основной линии должна быть в пределах от 0,5 до 1,4 мм, а толщина всех прочих линий на чертеже берется в зависимости от выбранной для чертежа сплошной толстой основной линии.

Начертание, назначение и относительная толщина линий, применяемых при выполнении чертежей, приведены в табл. П3.

Таблица П3

Наименование	Начертание	Толщина линии, мм	Основное назначение
1	2	3	4
1. Сплошная толстая основная		s = 0,5…1,4	Линии видимого контура
2. Сплошная тонкая		От s/3 до s/2	Линии выносные и размерные
3. Сплошная волнистая		От s/3 до s/2	Линия обрыва изображения

1	2	3	4
4. Штриховая		От $s/3$ до $s/2$	Линии невидимого контура
5. Штрихпунктирная тонкая		От $s/3$ до $s/2$	Линии осевые и линии симметрии
6. Штрихпунктирная с двумя точками		От $s/3$ до $s/2$	Линии сгиба на развертках

Рекомендуемая толщина линий различного назначения и их начертание для выполнения графических работ по начертательной геометрии на формате А3:

а) сплошная толстая основная – s = 0,7–0,9 мм;

б) все тонкие линии – $s/3$;

в) начертание штриховой линии:

– длина штрихов – 4 мм;

– разрывы между штрихами – 1 мм.

При этом на чертеже:

– штрихи этой линии должны касаться линий видимого контура;

– на изгибах линии ее штрихи должны касаться друг друга;

г) начертание штрихпунктирной линии:

– длинные штрихи – 12 мм;

– между длинными штрихами под короткий пунктир расстояние 3 мм;

– длина пунктира – 1 мм.

При этом на чертеже:

– штрихпунктирные линии должны пересекаться длинными штрихами;

– за видимый контур изображения длинные штрихи этой линии выступают на 2 мм.

Шрифты чертежные – ГОСТ 2.3304-81

Этот стандарт устанавливает чертежные шрифты, т.е. размеры и начертание цифр и букв различных алфавитов.

Некоторые определения:

1. Размер шрифта h – высота прописных (больших) букв и цифр в миллиметрах.

Стандартом установлены следующие размеры шрифта: 1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40.

2. Высота строчных (маленьких) букв c (без отростков **k**) определяется по отношению $c = 7/10h$, т.е. в каждом размере шрифта высота строчных букв на размер меньше прописных.

3. Толщина линий шрифта **d** равна:

– для шрифта типа А (узкого) **d** $= 1/14h$;

– для шрифта типа **Б** (широкого) **d** $= 1/10h$.

Буквы шрифта любого типа можно выполнять с наклоном в 75° к одной из сторон рамки чертежа или без наклона.

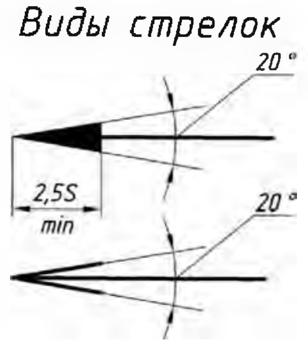


Рис. П1

Нанесение размеров – ГОСТ 2.307-68

В некоторых таблицах с вариантами графических работ на заданных условиях НАНЕСЕНЫ РАЗМЕРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, по которым на чертежах индивидуальных заданий нужно построить проекции изображений. Размеры нанесены в соответствии с рассматриваемым стандартом. Некоторые правила нанесения размеров и используемые при этом знаки, которые встречаются на заданных графических условиях задач, рассмотрены ниже.

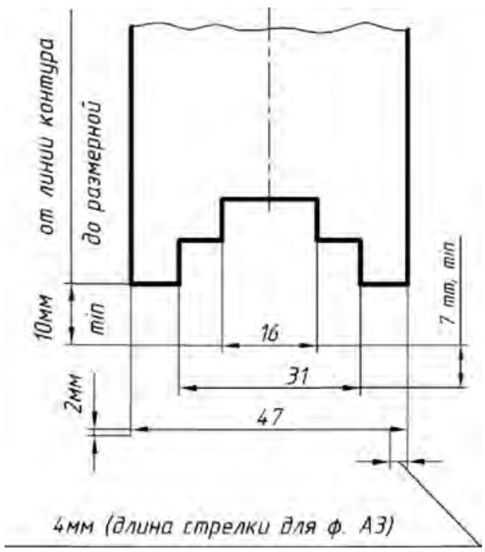


Рис. П2

Основанием для определения величины изображенного предмета служат размерные числа, нанесенные на чертеже. Для формата А3 размерные числа следует выполнять чертежным шрифтом № 5.

Линейные размеры (длина, высота и ширина) геометрических элементов, размеры диаметров и радиусов указывают на чертежах в миллиметрах БЕЗ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ.

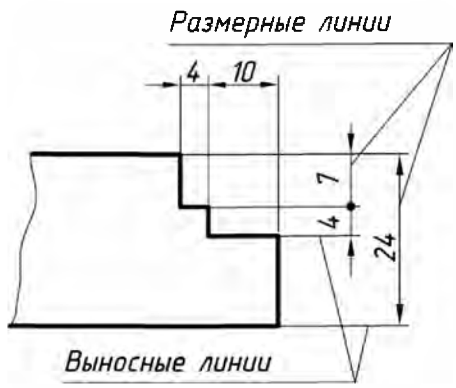


Рис. П3

1. Линейные размеры на чертежах указывают размерными числами и размерными линиями со стрелками на концах, ограниченными перпендикулярными к ним выносными линиями, выступающими на 1…5 мм за концы стрелок (желательно принимать 2 мм, см. образцы на рис. П1–П3).

Величины элементов стрелок размерных линий выбирают в зависимости от толщины линий видимого контура и вычерчивают их приблизительно одинаковыми на всем чертеже (см. рис. П1).

Размерное число наносить с небольшим зазором (примерно 0,5…1 мм) к размерной линии.

Минимальное расстояние между параллельными размерными линиями – 7 мм, а между размерной и линией контура – 10 мм (см. рис. П2).

Необходимо избегать пересечения размерных и выносных линий.

При нанесении нескольких параллельных размерных линий размерные числа над ними рекомендуется располагать в шахматном порядке (см. рис. П2).

При недостатке места для стрелок на размерных линиях, расположенных цепочкой, стрелки допускается заменять засечками, наносимыми под углом 45° к размерным линиям, или четко наносимыми точками (см. рис. П3).

2. Размеры окружностей поверхностей вращения (цилиндрических, конических, сферических, торовых) к их проекциям в виде окружностей или в виде очерковых образующих указывают размерной линией с двумя стрелками и размерным числом со знаком Ø, который заменяет слово «диаметр» и наносится перед размерным числом (см. рис. П4, справа) или раз-

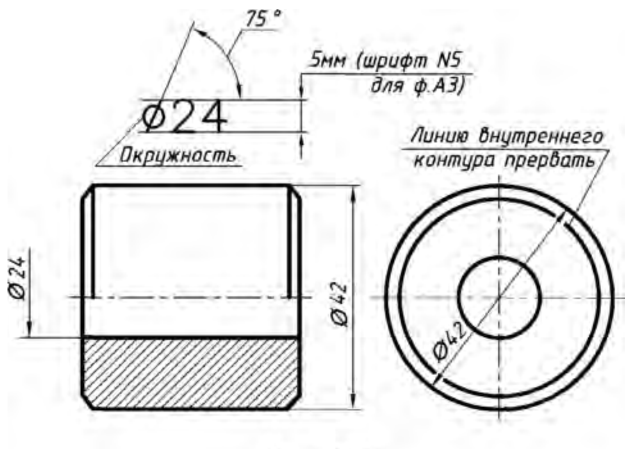


Рис. П4

R14 или *R14*

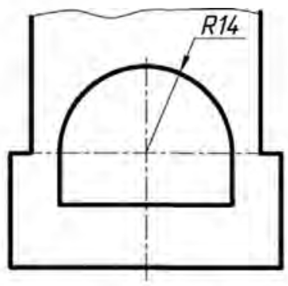


Рис. П5

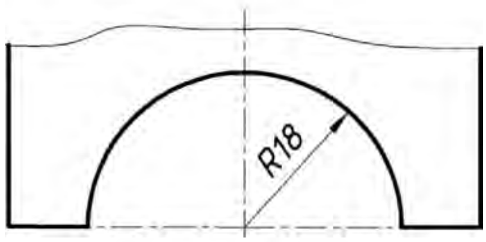


Рис. П6

Рис. 3.5.7

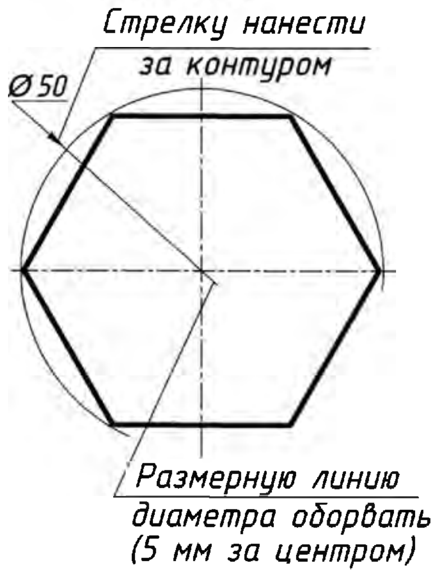


Рис. П7

мерная линия со стрелками ограничивается двумя выносными линиями (см. рис. П4, слева). Относительные размеры знака «Ø» представлены на этом же рисунке.

3. Р а з м е р ы д у г окружностей, равных 180° или менее 180°, указывают на чертеже размерной линией с одной стрелкой и прописной буквой *R* перед размерным числом, которая заменяет слово «радиус» (рис. П5 и П6).

Перед размерным числом диаметра или радиуса сферы наносят те же знаки Ø или *R*. Если на чертеже сферическая форма не читается, то перед указанными знаками допускается наносить слово или знак в форме окружности *О*, например, «*Сфера Ø18*», «О*R12*». Диаметр знака сферы равен высоте размерных чисел на чертеже.

Рис. П8
Рис. 3.5.8

При недостатке места для стрелок следует прервать линию внутри контура (см. рис. П4, справа) или нанести стрелку за контуром (рис. П7).

Размерные линии допускается проводить с обрывом при указании размера диаметра окружности, как это показано на рис. П6, причем независимо от того, изображена окружность полностью или частично. Обрыв размерной линии делают за центром окружности на расстоянии не менее 5 мм.

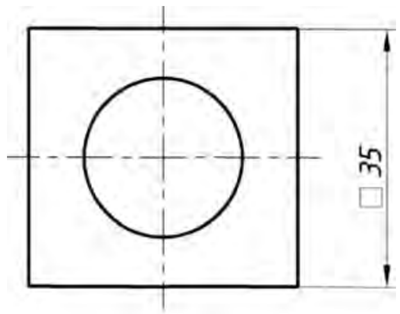


Рис. П9
Рис. 3.5.9

4. У г л о в ы е р а з м е р ы наносят на дуговых размерных линиях, ограниченных выносными линиями, выходящими из вершины угла, и размерное число сопровождается знаком «°», заменяющим слово «градус» (рис. П8).

5. Р а з м е р ы п р и з м а т и ч е с к и х поверхностей с равными сторонами (квадрат), параллельными оси предмета, наносятся как линейные размеры, но предваряются знаком «□», заменяющим на чертеже слово «квадрат» (рис. П9 и П10).

Р а з м е р н ы е ч и с л а не допускается разделять или пересекать какими бы то ни было линиями чертежа. Не допускается разрывать линию очеркового контура для нанесения размерного числа и наносить размерные числа в местах пересечения размерных, осевых или центровых линий. В месте нанесения размерного числа линии штриховки, осевые, центровые и другие линии прерывают (см. рис. П8 и П10).

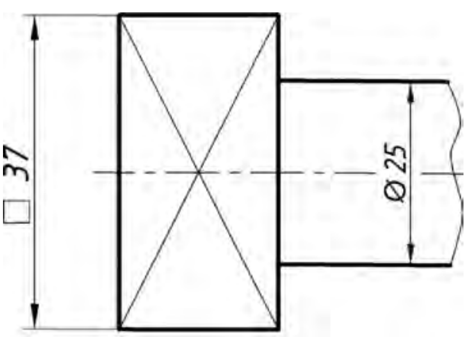


Рис. П10
Рис. 3.5.10

Размеры, относящиеся к одному и тому

же элементу (пазу, выступу, отверстию и т.п.), рекомендуется группировать в одном месте, на котором геометрическая форма данного элемента показана наиболее полно.

Чертежные материалы, принадлежности и инструменты

Чертежные материалы, принадлежности и инструменты для графического выполнения индивидуальных графических заданий существенно влияют на качество и трудоемкость выполнения чертежей.

Для облегчения выполнения и качественного графического оформления чертежей необходимо приобрести:

1. Чертежную белую бумагу – ватман формата А3 – хорошего качества без типографской рамки чертежа и основной надписи.

2. Чертежные линейки и угольники – желательно деревянные или из качественной прозрачной пластмассы (с выступающими опорными элементами во избежание размазывания вычерченных линий):

– линейка должна быть длиной не менее 400 мм (для вычерчивания рамки чертежа и нанесения горизонтальных линий связи);

– можно использовать роликовые линейки-рейсшины хорошего качества (длина 220…300 мм) для вычерчивания параллельных линий;

– прямоугольные треугольники (деревянные или пластмассовые с выступающими опорными элементами) должны иметь острые углы в 45° или 30° и 60° и прямолинейные гладкие кромки. При покупке желательно проверять качество изготовления треугольника, в частности, выдержан ли прямой угол.

3. Учебный набор чертежных инструментов (готовальня) с циркулем и измерителем. Можно приобрести циркуль отдельно – хорошего качества, удобный в пользовании, с возможностью легкой замены грифеля. В головку циркуля нужно вставить хороший грифель и заточить его.

4. Карандаши:

– рекомендуем карандаши чешской фирмы «KOH-I-NOOR» HARDVUTH твердости грифеля «НВ» (твердо-мягкий), «ВН» (мягко-твердый), «В» (мягкий) и «F» (более мягкий); грифель из карандаша твердостью «В» или «F» нужно вставлять в головку циркуля; при использовании обычных карандашей должна быть приобретена точилка с контейнером для сбора срезаемой при заточке части карандаша;

– рекомендуем автоматические цанговые карандаши с грифелями 0,9; 0,7 и 0,5 мм для выполнения толстых и тонких линий на чертежах (карандаши и грифели к ним приобретать качественные).

5. Немаловажное значение для качества выполнения графических работ имеет и ластик: он должен вытирать линию, а не размазывать ее, и не должен протирать бумагу (без абразивных включений – белого цвета, как правило).

Качественными являются чертежные принадлежности (карандаши, ластики, циркули, линейки и др.) также других известных фирм: Rotring, MAPED, Staedtler, Pelikan и др.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ... 3
1. Кривые линии. Основные понятия и определения ... 4
2. Плоские кривые линии. Касательные и нормали к плоской кривой ... 5
3. Кривизна плоской кривой. Эволюта и эвольвента кривой ... 7
4. Коробовые кривые линии ... 8
   4.1. Завиток ... 8
   4.2. Овал ... 9
   4.3. Овоид ... 9
5. Лекальные кривые ... 10
   5.1. Кривые конического сечения ... 10
      5.1.1. Эллипс ... 10
      5.1.2. Парабола ... 12
      5.1.3. Гипербола ... 14
   5.2. Циклические кривые ... 16
      5.2.1. Циклоида ... 16
      5.2.2. Эпициклоида ... 18
      5.2.3. Гипоциклоида ... 18
   5.3. Спирали ... 18
      5.3.1. Спираль Архимеда ... 18
      5.3.2. Эвольвента окружности ... 20
   5.4. Синусоидальные кривые ... 21
6. Соприкасание плоских кривых линий ... 22
7. Плоские составные кривые линии (обводы). Классификация точек плоской кривой ... 23
8. Вопросы аппроксимации и интерполяции кривых линий ... 24
9. Пространственные кривые линии ... 26
   9.1. Длина пространственной кривой ... 26
   9.2. Ортогональные проекции кривой линии ... 27
   9.3. Цилиндрические винтовые линии. Гелисы ... 28
   9.4. Конические винтовые линии ... 29
   9.5. Кривые линии на сфере ... 30
10. Сопряжения ... 31
   10.1. Построение касательной прямой t к окружности радиуса R в заданной точке А, принадлежащей окружности ... 31
   10.2. Построение касательной прямой t к окружности радиуса R из заданной точки А, лежащей вне окружности ... 32
   10.3. Построение касательной прямой t к двум окружностям радиусов R_1 и R_2 ... 32
   10.4. Сопряжение двух пересекающихся прямых m и n дугой окружности заданного радиуса сопряжения R ... 33
   10.5. Сопряжение дуги окружности радиуса R_1 с прямой n дугой сопряжения заданного радиуса R_c ... 34

10.6. Сопряжение двух дуг окружностей с радиусами R_1 и R_2 дугой сопряжения заданного радиуса R_c ... 35
10.7. Сопряжение двух неконцентричных дуг окружностей с радиусами R_1 и R_2 дугой сопряжения заданного радиуса R_c ... 36
10.8. Сопряжение двух параллельных прямых m и n дугой сопряжения заданного радиуса R_c ... 36
11. Деление окружности ... 38
12. Методические указания, варианты индивидуальных заданий и образец выполнения задания «Кулачок» по теме «Кривые линии и сопряжения» ... 39
12.1. Порядок графических действий для построения очертания кулачка и образец выполнения задания «Кулачок» ... 39
12.2. Варианты индивидуальных заданий «Кулачок» ... 42
13. Варианты индивидуальных заданий и образец выполнения задания к теме «Сопряжения» ... 49
Литература ... 60
Приложение ... 67

Учебное издание

МАРАМЫГИНА Татьяна Александровна
ГИЛЬ Светлана Валентиновна
БЕЛЯКОВА Евгения Ивановна
ЗЕЛЕНЫЙ Петр Васильевич

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ: КРИВЫЕ ЛИНИИ, СОПРЯЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по инженерной графике
с вариантами индивидуальных заданий
для студентов машиностроительных специальностей

Редактор Л.Н. Шалаева
Технический редактор О.В. Дубовик
Компьютерная верстка О.В. Дубовик

Подписано в печать 12.11.2009.
Формат 60×84 $^1/_8$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 8,14. Уч.-изд. л. 3,18. Тираж 100. Заказ 389.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65, 220013, Минск.