

УДК 669.041:621.365

**И.А. ТРУСОВА**, д-р техн. наук (БНТУ),  
**М.Л. ГЕРМАН**, канд. физ.-мат. наук (БелТЭИ),  
**Д.В. МЕНДЕЛЕВ**, канд. техн. наук,  
**С.М. КАБИШОВ**, канд. техн. наук,  
**П.Э. РАТНИКОВ**, канд. техн. наук (БНТУ)

### **ТЕПЛОВАЯ РАБОТА КУЗНЕЧНЫХ ИНДУКЦИОННЫХ НАГРЕВАТЕЛЕЙ. СООБЩЕНИЕ 1. ОСНОВЫ ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Индукционный нагрев является одним из наиболее сложных электротермических процессов и при математическом моделировании тепловой работы индукционных установок в строгой постановке требует рассмотрения взаимосвязанных явлений разной физической природы [1], включая электромагнитные и тепловые процессы. Известны публикации по проведению изучения двух или нескольких взаимосвязанных явлений методами математического моделирования с целью оптимизации конструкций и режимов работы индукционных устройств. В свою очередь, задачи проектирования устройств прямого и косвенного нагрева существенно различаются. При прямом нагреве материал, форма и размеры нагреваемых тел заданы и, как правило, не могут быть изменены. Проектирование таких устройств сводится к разработке конструкции индукторов и выбору режима нагрева. При косвенном нагреве существует возможность выбора конструкции и материала нагревателя.

В работе [1] отмечается, что при разработке комбинированных программных моделей электротепловых процессов целесообразно использовать модульный принцип, что предполагает создание специализированной библиотеки стандартных подпрограмм для решения задач индукционного нагрева. На базе этой библиотеки можно легко расширять указанные модели, учитывающие те или иные особенности технологического процесса, различные режимы нагрева,

возможность нагрева других материалов. Связь электромагнитного поля с температурным полем в системе «индуктор – заготовка» обусловлена зависимостью удельного сопротивления и магнитной проницаемости заготовки от температуры.

В работе [2] авторами рассмотрены некоторые методы расчета двухмерных электромагнитных полей в устройствах индукционного нагрева. Интегральные численные методы электрического расчета индукционных устройств основаны на введении вторичных источников поля, которые характеризуют реакцию тел, составляющих систему, на воздействие сторонних (первичных) источников. При этом сами тела замещаются вакуумом, что упрощает расчет. Введение вторичных источников не является однозначным, что позволяет создавать различные расчетные модели, наиболее отвечающие конкретным целям. Целью расчета является определение вторичных источников, после чего легко найти любые параметры системы. Вторичные источники определяются решением интегральных уравнений, описывающих их взаимодействие друг с другом и с первичными источниками. Уравнения учитывают взаимодействие всех источников рассматриваемой системы, а не только соседних, поэтому интегральные методы наиболее удобны для расчета квазистационарных систем, то есть таких устройств, в которых можно пренебречь запаздыванием сигнала. Это означает, что размеры устройства должны быть значительно меньше длины электромагнитной волны в воздухе.

Конечно-разностные методы расчета тепловых и электромагнитных полей являются наиболее универсальными и пригодными для расчета полей любой природы, если известно поведение их потенциалов или напряженностей в малом объеме. Электромагнитные поля описываются уравнениями Максвелла, связывающими одни параметры поля с другими с помощью операторов пространственного и временного дифференцирования. Эти уравнения представляют собой дивергентную форму описания поля. Другой формой описания являются дифференциальные уравнения второго порядка, характеризующие распределение какого-либо параметра (потенциала, напряженности) в пространственно-временной области. Обе формы описания полей могут быть использованы для построения конечно-разностных схем расчета. При этом область непрерывного изменения аргументов (пространственных координат, времени) за-

меняется областью дискретного изменения (сеткой), непрерывные функции заменяются дискретными (сеточными), определенными только в узлах сетки, вместо дифференциальных операторов вводятся разностные.

Комбинированные модели индукционных нагревателей являются наиболее высокой степенью их математического моделирования. Такие модели могут быть двух- и более компонентными в зависимости от числа процессов, учитываемых при их построении. При наличии модели процесса или индукционной установки роль натуральных экспериментов сводится к проверке ее (модели) адекватности процессу в отдельных точках области, уточнению параметров модели и отработке принятых конструкций с целью их коррекции и выявления влияния параметров, не учтенных при построении модели. Комбинированные модели могут базироваться на различных расчетных методах – приближенных, аналитических и численных. Выбор метода зависит от конкретных условий и во многом определяет эффективность модели. Тепловой расчет выполняется, как правило, аналитическим или конечно-разностным численным методом, а электромагнитные процессы рассчитываются как аналитическими, так и численными методами.

В 2006 году в ГНУ «Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси» выполнена научно-исследовательская работа, посвященная изучению процессов индукционного нагрева стальных заготовок при использовании метода конечных элементов (руководитель НИР – кандидат физико-математических наук Герман М.Л., исполнители работы кандидат физико-математических наук Файн И.В., инженер-программист Менделев Д.В.). В рамках выполнения этой работы исполнителями было осуществлено математическое моделирование и численный расчет процесса индукционного нагрева стальных заготовок цилиндрической формы. Основные результаты этой работы приведены в публикации [3].

Индукционные токи, возникающие в заготовке и приводящие к ее нагреву, находятся из решения уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (4)$$

Материальные уравнения исследуемой системы имеют вид:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad (6)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (7)$$

Общее представление ротора векторного поля  $\vec{V}(M)$  в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z. \quad (8)$$

С учетом (5)–(7), можно преобразовать уравнения (1), (2) следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}; \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (10)$$

В случае осевой симметрии напряженность электрического поля имеет только тангенциальную компоненту, а магнитного – только осевую и радиальную. В силу этого можно считать, что от угла  $\varphi$  векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не зависят. С учетом этого можно применить (8) к уравнениям (9), (10):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi = \left( \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \cdot (E_r \vec{e}_r + E_\varphi \vec{e}_\varphi + E_z \vec{e}_z) \Rightarrow \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) = \left( \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) E_\varphi;$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} \vec{e}_z = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (H_r \vec{e}_r + H_\varphi \vec{e}_\varphi + H_z \vec{e}_z) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= \mu \mu_0 \frac{\partial H_r}{\partial t}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = -\mu \mu_0 r \frac{\partial H_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Воспользовавшись методом разделения переменных,  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}(t, x_1, \dots, x_n) &= \dot{\vec{H}}(x_1, \dots, x_n) e^{i\omega t}; \\ \vec{E}(t, x_1, \dots, x_n) &= \dot{\vec{E}}(x_1, \dots, x_n) e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} (13)$$

С учетом (13) для (11), (12) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} -i \frac{1}{\mu \mu_0 \omega} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= H_r; \\ i \frac{1}{\mu \mu_0 r \omega} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} &= H_z; \\ \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) &= (i \cdot \varepsilon \varepsilon_0 \omega + \sigma) E_\varphi. \end{aligned} \right\} (14)$$

Продифференцировав первое и второе уравнения системы (14) по переменным  $z$  и  $r$ , запишем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial z} &= -i \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu\mu_0\omega} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} &= i \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu\mu_0 r\omega} \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Полученные уравнения необходимо подставить в третье уравнение системы (14):

$$-i \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu\mu_0\omega} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu\mu_0 r\omega} \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} \right) \right) = (i \cdot \epsilon\epsilon_0\omega + \sigma) E_\varphi. \quad (16)$$

Уравнение (16) является уравнением второго порядка. Путем введения функции потенциала  $U = 2\pi r E_\varphi$ , можно привести (16) к каноническому уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} k^2 U = 0. \quad (17)$$

Выражение для характеристического значения уравнения (17) имеет вид:

$$k^2 = -i\omega\mu_0(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0). \quad (18)$$

Уравнение (17) с соответствующими граничными условиями может быть решено известными численными методами, например, конечно-разностным методом или методом конечных элементов. Следует отметить, что в этом уравнении коэффициенты являются комплексными, и не приводятся к действительным величинам в случае их зависимости от координат, так что получаемое решение также будет комплексным.

Для последующего численного решения уравнение (17) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial z} (r E_\varphi) \right) - \kappa^2 (E_\varphi - E_{\varphi 0}) = 0. \quad (19)$$

Здесь функция  $E_{\varphi 0}(r, z)$  является функцией источника (вне обмоток индуктора равна нулю, внутри области обмотки – напряжению на единицу длины).

Представление уравнения электромагнитного поля (19) хотя и не является каноническим, вместе с тем оказывается наиболее приемлемым для последующего решения методом конечных элементов.

Для применения МКЭ нужно преобразовать уравнение (19), используя метод Галеркина. Умножив (19) на произвольную функцию  $\Psi(r, z)$  и проинтегрировав по всей расчетной области  $\Omega$ , получаем

$$\iint \Psi \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial r E}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial r E}{\partial z} \right) - \kappa^2 (E - E_0) \right] d\Omega = 0. \quad (20)$$

Первые два члена в уравнении (20) являются дивергенцией, поэтому, используя теорему Грина и Остроградского-Гаусса, можно записать:

$$\begin{aligned} - \oint \left( \Psi \frac{1}{\mu r} \frac{\partial r E}{\partial r} e_r + \Psi \frac{1}{\mu r} \frac{\partial r E}{\partial z} e_z \right) dn + \iint \frac{1}{\mu r} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r E}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial r E}{\partial z} \right) d\Omega + \\ + \iint \Psi \kappa^2 E d\Omega = \iint \Psi \kappa^2 E_0 d\Omega \end{aligned} \quad (21)$$

На следующем этапе осуществляется переход к решению поставленной задачи. Пусть вся область  $\Omega$  состоит из отдельных элементов,  $\Omega_e$ ,  $e = 1 \dots N_{el}$ . Тогда интегрирование по области можно заменить на сумму интегралов по элементам. Затем представим, что искомая функция  $E(r, z)$  и произвольная функция  $\Psi(r, z)$  являются кусочно-линейными непрерывными функциями координат

$$\left. \begin{aligned} E(r, z) &= \sum_{i=1}^{N_p} E_i N_i(r, z); \\ \Psi(r, z) &= \sum_{i=1}^{N_p} \Psi_i N_i(r, z), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где  $N_i(r, z)$  – кусочно-линейная функция, равная нулю на всех элементах, не содержащих узел;  $i, N_p$  – число узлов. Поскольку  $\Psi(r, z)$  – произвольная функция, соответствующая сеточная переменная  $\Psi_i$  также может быть произвольной. Выберем  $N_p$  различных функций  $\Psi_i = \delta_{ik}$ , и тогда вместо одного уравнения (21) можно записать  $N_p$  уравнений для нахождения  $N_p$  неизвестных значений  $E_i$ :

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{e=1}^{N_{el}} \int \frac{1}{\mu_e} E_i N_k \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{1}{r} N_i \right) e_r + \frac{\partial N_i}{\partial z} e_z \, d\Omega + \\ & + \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{e=1}^{N_{el}} \iint \frac{E_i}{\mu_e} \left( \frac{\partial N_k}{\partial r} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{\partial N_k}{\partial r} \frac{N_i}{r} + \frac{\partial N_k}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) d\Omega + \quad (23) \\ & + \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{e=1}^{N_{el}} \iint \kappa^2 E_i N_k N_i d\Omega = \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{e=1}^{N_{el}} \iint \kappa^2 E_{0i} N_k N_i d\Omega. \end{aligned}$$

В уравнении (23) первый член отвечает граничным условиям. На оси цилиндра напряженность электрического поля должна обращаться в нуль. Боковые потоки также обращаются в нуль на достаточно большом удалении от источника. Поэтому (23) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{e=1}^{N_{el}} \iint \frac{E_i}{\mu_e} \left( \frac{\partial N_k}{\partial r} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{\partial N_k}{\partial r} \frac{N_i}{r} + \frac{\partial N_k}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) d\Omega + \quad (24) \\ & + \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{e=1}^{N_{el}} \iint \kappa^2 E_i N_k N_i d\Omega = \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{e=1}^{N_{el}} \iint \kappa^2 E_{0i} N_k N_i d\Omega. \end{aligned}$$



Для численного решения (24) необходимо вычислить следующие 4 типа интегралов:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1^{i,k} &= \iint N_k N_i d\Omega; \\
 I_2^{i,k} &= \iint \frac{\partial N_k}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} d\Omega; \\
 I_3^{i,k} &= \iint \frac{\partial N_k}{\partial r} \frac{\partial N_i}{\partial r} d\Omega; \\
 I_4^{i,k} &= \iint \frac{\partial N_k}{\partial r} \frac{N_i}{r} d\Omega
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Хотя последний интеграл в (25) имеет особенность при  $r = 0$ , эта особенность является мнимой, так как вследствие обнуления функции при  $r = 0$  соответствующая часть интеграла в (25) не участвует в составлении матричных уравнений.

Ниже приведено подробное вычисление интегралов (25). Для треугольных элементов с вершинами  $(i, j, m)$  (рисунок 1) соответствующие интегралы будут иметь вид

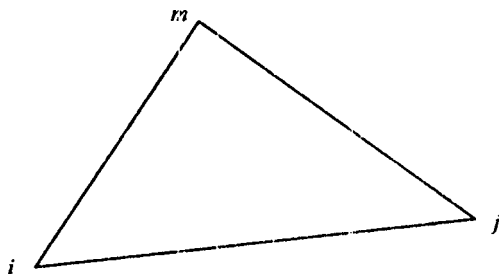


Рисунок 1 – Треугольный конечный элемент

$$N_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\Delta}(b_i z + c_i r);$$

$$N_j = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\Delta}(b_j z + c_j r);$$

$$N_m = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\Delta}(b_m z + c_m r),$$

где координаты  $r, z$  рассчитываются от центра треугольника, а коэффициенты равны:

$$b_i = r_j - r_m; \quad b_j = r_m - r_i; \quad b_m = r_i - r_j;$$

$$c_i = z_m - z_j; \quad c_j = z_i - z_m; \quad c_m = z_j - z_i;$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(z_j r_m - z_m r_j + z_m r_i - z_i r_m + z_m r_i - z_i r_m) - \text{площадь треугольника.}$$

Тогда интегралы (25) будут равны:

$$I_1^{i,j} = \frac{\Delta}{9} + \frac{1}{48\Delta} [b_i b_j \sum_{k=1}^3 z_k^2 + c_i c_j \sum_{k=1}^3 r_k^2 + (b_i c_j + b_j c_i) \sum_{k=1}^3 z_k r_k];$$

$$I_2^{i,j} = \frac{1}{4\Delta} b_i b_j;$$

$$I_3^{i,j} = \frac{1}{4\Delta} c_i c_j.$$

Постановка тепловой задачи при индукционном нагреве не отличается от традиционных задач нагрева, за исключением явного присутствия теплового источника в правой части уравнений. Следует учесть зависимость свойств нагреваемого изделия, а также мощности тепловых источников от температуры нагрева

Уравнение переноса тепла в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = q, \quad (26)$$

где  $T$  – температура;  $v_z$  – скорость движения заготовки;  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  – соответственно плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности;  $q_J = |E_\phi|^2 / \gamma$  – удельные тепловыделения.

Для решения уравнения теплопроводности могут быть использованы те же методы, что и для решения электромагнитной задачи. Обе задачи (17) и (19) должны решаться совместно. Следует отметить, что изменение мощности нагрева (путем изменений напряжений индуктора) не влияет на характер начальных уравнений, так как эти изменения слишком медленные, и использование гармонически меняющихся функций электрического и магнитного полей вполне допустимо.

При разработке программы расчета индукционного нагрева, физико-математическая основа которой описана в [3], были допущены определенные упрощения, а именно: рассмотрен нагрев цилиндрических заготовок; не учитывалась зависимость магнитной проницаемости от магнитной напряженности магнитного поля (не учитывались потери на гистерезис). Однако разработка основ моделирования даже с некоторыми упрощениями дала возможность продолжить эти работы с целью более широкого применения полученных результатов для решения конкретных технических задач применительно к промышленным установкам.

В работе [4] приводится выбор технических характеристик для различных видов применения индукционного нагрева в промышленности. В частности, для поверхностного нагрева выбор частоты индуктора определяется условием, что в массовом производстве недопустимы режимы, при которых удельные потери в индукторе превышают  $0,4 \text{ кВт/см}^2$ , так как при этом индуктор часто перегорает вследствие нестабильности охлаждения. Минимальная глубина нагреваемого слоя, при которой потери в индукторе не превышают указанной величины, связана с частотой соотношением

$$x_{k \min} \approx 0,25 \Delta_k.$$

Диапазон частот, обеспечивающий глубинный тип нагрева и допустимые потери в индукторе, определяется неравенством

$$0,015/x_k^2 < f < 0,25/x_k^2.$$

Экспериментальные исследования, проведенные в лаборатории В.П. Вологодина (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»), показывают, что максимум полного КПД, включая термический, достигается при выполнении одного из двух соотношений

$$x_k \approx (0,4 \div 0,5)\Delta_k;$$

$$f_{\text{опт}} \approx 0,06/x_k^2.$$

В дальнейшем будут рассмотрены зависимости удельной тепловой мощности индуцированных тепловых источников в заготовке от частоты индуктора, а также от поля напряженности на поверхности заготовки. Поэтому основными техническими характеристиками, влияющими на индукционный нагрев заготовок, являются частота переменного тока в обмотке индуктора, а также величина тока в индукторе, которая, в свою очередь, влияет на напряженность магнитного поля на поверхности заготовки.

### Литература

1. Немков, В.С. Теория и расчет индукционного нагрева / В.С. Немков, В.Б. Демидович. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 280 с.
2. Установки индукционного нагрева: учебное пособие для вузов / А.Е. Слухоцкий [и др.]; под ред. А.Е. Слухоцкого. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 328 с.
3. Математическое моделирование работы установки индукционного нагрева стальных заготовок и оптимизация ее электрической намотки / Файн, И.В. [и др.] // Тепло- и массоперенос-2007: сб. науч. тр. – Минск: Институт тепло-и массообмена им. А.В. Лыкова, 2007. – С. 362–368.
4. Кувалдин, А.Б. Индукционный нагрев ферромагнитной стали / А.Б. Кувалдин. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 200 с.