МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

РЯДЫ ФУРЬЕ

Методические указания
по дисциплине «Математика»
для студентов строительных специальностей

Минск
БНТУ
2013

УДК 517.518.45
ББК 27.23.23
Р98

С о с т а в и т е л и :
Л. Я. Глушанкова, *И. А. Голубева*

Р е ц е н з е н т ы :
Л. Н. Гайшун, *О. А. Мороз*

Методические указания составлены в соответствии с дисциплиной «Математика» для студентов строительных специальностей.

Издание предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения с целью помочь усвоить теоретический материал и закрепить его при решении задач.

Содержание

Ряд Фурье 2π-периодической функции

В науке и технике часто приходится иметь дело с процессами, повторяющимися через определенный промежуток времени, который называется периодом. Описываются такие периодические процессы периодическими функциями, составленными либо из конечного, либо из бесконечного числа слагаемых вида $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\,, \tag{1}$$

где числа a_0, a_n, b_n $\left(n=\overline{1,\infty}\right)$ называются **коэффициентами ряда**.

Тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,; \tag{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n=\overline{1,\infty}\,; \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=\overline{1,\infty}\,, \tag{4}$$

называется **рядом Фурье периодической функции с периодом** 2π.

Для интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и говорят: функции $f(x)$ поставлен в соответствие ее ряд Фурье.

Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначают через $S(x)$.

Сформулируем одну из теорем, представляющую достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема I. Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна;

2) $f(x)$ ограничена.

Тогда ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится на этом отрезке, причем

1) в точках x непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией $f(x)$: $S(x) = f(x)$;

2) в точке x_0 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому пределов слева и справа функции $f(x)$ в точке разрыва x_0, т. е.

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

3) на концах отрезка, то есть в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$, сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким образом, для функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям сформулированной выше теоремы, в каждой точке непрерывности отрезка $[-\pi, \pi]$ имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

а в точках x разрыва функции

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты вычисляются по формулам (2), (3), (4).

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье указанное разложение может быть получено во всей области определения функции.

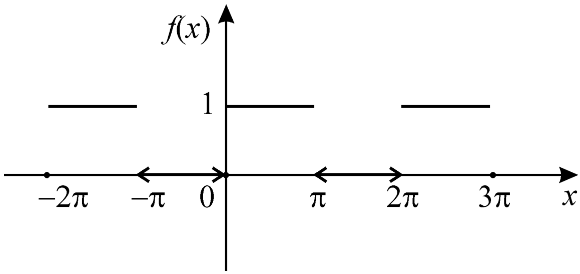
Замечание. Выше речь шла о функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$, но можно было говорить и о функции $f(x)$, заданной на интервале $(-\pi, \pi)$, поскольку значения функции в точках $-\pi, \pi$ на величину фигурирующих интервалов в формулах для коэффициентов Фурье влияния не оказывают.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение.

Изобразим график функции $f(x)$.



Эта функция удовлетворяет условиям теоремы, значит, может быть разложена в ряд Фурье.

Применяя формулы (2), (3), (4), найдем коэффициенты ряда Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0\cdot \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} 1\cdot \mathrm{d}x\right) = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int\limits_{0}^{\pi} 1\cdot \cos nx\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int\limits_{0}^{\pi} 1\cdot \sin nx\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\cos nx\Big| = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = -\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Здесь мы учли, что $\sin 0 = \sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$.

Следовательно, исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi, \pi]$, кроме $x = 0$. Поэтому для всех точек $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right).$$

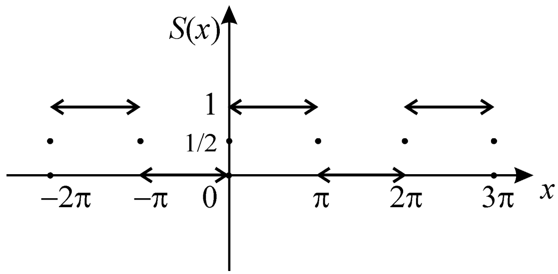
В точке разрыва $x = 0$

$$S(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

На концах отрезка

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}.$$

График суммы $S(x)$ ряда имеет вид



Замечание. Так как $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2π, то отрезок интегрирования в формулах (2), (3) может быть заменен произвольным отрезком $[a, a+2\pi]$ длиной 2π. В частности, если функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет условиям приведенной выше теоремы на отрезок $[0; 2\pi]$, то для нее имеет место разложение (1) с коэффициентами, вычисленными по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x, \tag{5}$$

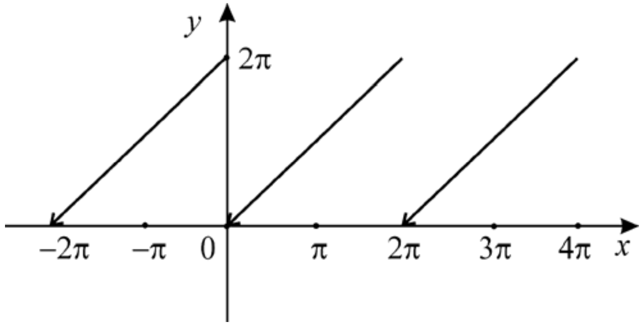
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = \overline{1,\infty}, \tag{6}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{7}$$

<u>**Пример 2**</u>. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $0 < x \le 2\pi$ равенством $f(x) = x$.

Решение.

График функции $f(x) = x$



Функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям теоремы на отрезке $[0;\, 2\pi]$. В силу замечания коэффициенты этого разложения находим по формулам (5), (6), (7):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = \left|\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ \cos nx\mathrm{d}x = dv \Rightarrow v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right| =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ \sin nx\mathrm{d}x = dv \Rightarrow v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{n}\,.$$

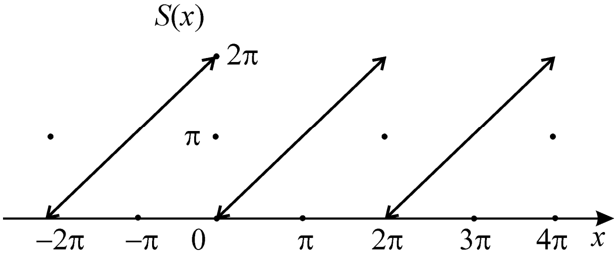
Значит, во всех точках непрерывности

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\,,$$

а в точках разрыва $(0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots)$

$$S(2n\pi) = \pi, \quad n = 0, \pm 1, 2, \ldots$$

График суммы $S(x)$ ряда



<u>Задание 1</u>.

Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$.

1.1 $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 0 & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$	Ответ: $-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=-\pi$
1.2 $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 4x & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$	Ответ: $\pi-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=2\pi$
1.3 $f(x)=\begin{cases} -3x & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 0 & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$	Ответ: $\frac{3}{4}\pi-\frac{6}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=\frac{3}{2}\pi$
1.4 $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ -5x & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$	Ответ: $-\frac{5}{4}\pi+\frac{10}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}-5\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=-\frac{5}{2}\pi$

1.5 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+\pi}{2} & \text{при } -\pi<x\le 0\\ 0 & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$	Ответ: $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k}$ $S(0)=S(\pm\pi)=\dfrac{\pi}{4}$
1.6 $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\pi<x\le 0\\ \dfrac{\pi-x}{2} & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$	Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k}$ $S(0)=S(\pm\pi)=\dfrac{\pi}{4}$
1.7 $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi<x\le 0\\ 2x & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$	Ответ: $\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=\dfrac{3}{2}\pi$
1.8 $f(x)=\begin{cases}2x & \text{при } -\pi<x\le 0\\ -x & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$	Ответ: $-\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=-\dfrac{3}{2}\pi$
1.9 $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } -\pi<x\le 0\\ 3x & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$	Ответ: $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=\pi$
1.10 $f(x)=\begin{cases}-3x & \text{при } -\pi<x\le 0\\ -x & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$	Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin nx}{n}$ $S(\pm\pi)=-\pi$

Ряды Фурье для четных и нечетных 2π-периодических функций

В некоторых случаях формулы (2)–(4) для вычисления коэффициентов Фурье могут быть упрощены. Это имеет место для четных и нечетных функций. Известно, что если функция $f(x)$ интегрируема на симметричном относительно нуля отрезке $[-a;\ a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{если } f(x) - \text{четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases} \tag{8}$$

Пусть надо разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x)$. Тогда $f(x)\cos nx -$ четная функция, а $f(x)\sin nx -$ нечетная функция, и на основании свойства (8) формулы (2), (3), (4) примут вид

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = 0, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{9}$$

Таким образом, ряд Фурье для четной функции, удовлетворяющей условиям теоремы I на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, в точках ее непрерывности будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,. \tag{10}$$

Итак, четная 2π-периодическая функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам.

Если в ряд Фурье разлагается нечетная функция, то произведение $f(x)\cos nx$ – есть функция нечетная, а $f(x)\sin nx$ – четная. Следовательно,

$$a_n = 0, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = \overline{1,\infty}. \qquad (11)$$

и ряд Фурье для 2π-периодической нечетной функции, удовлетворяющей условиям теоремы I на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеет вид

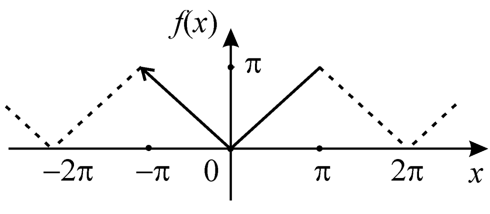
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ (в точках непрерывности).} \qquad (12)$$

Значит, нечетная 2π-периодическая функция разлагается в ряд Фурье только по синусам.

Ряды (10) и (12) называются еще неполными рядами Фурье.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную в интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой $f(x) = |x|$. Найти с помощью полученного разложения сумму ряда $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

Решение.



Функция $f(x) = |x|$ является четной, она удовлетворяет условиям теоремы I. Поэтому она разлагается в ряд по косинусам, коэффициенты Фурье которого определяются по формулам (9):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = u & dx = du \\ \cos nx = \mathrm{d}v & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right] = \frac{2}{\pi n^2}\cos n\,x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n = 2k; \\ -\dfrac{4}{nk^2} & \text{при} \quad n = 2k+1,\, k = \overline{0,\infty}, \end{cases}$$

$$b_n = 0, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Ее ряд Фурье

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Функция $f(x) = |x|$ после 2π-периодического продолжения непрерывна на всей оси. Поэтому для $\forall x \in R$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

При $x = 0$ получаем

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Откуда

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

<u>Задание 2</u>.

Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$ (четную или нечетную), заданную на $[-\pi, \pi]$.

2.1. $f(x) = \lvert\sin x\rvert$	Ответ: $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}$
2.2. $f(x) = e^{-\lvert x\rvert}$	Ответ: $\frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx$
2.3. $f(x) = 2^{\lvert x\rvert}$	Ответ: $\frac{2^{\pi}-1}{\pi\ln 2} + \frac{2\ln 2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2 + \ln^2 2}\cos nx$
2.4. $f(x) = x^2$	Ответ: $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos x}{n^2}$
2.5. $f(x) = e^{\lvert x\rvert}$	Ответ: $\frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((-1)^n e^{-\pi} - 1\right)}{1+n^2}\cos nx$
2.6. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0;\pi) \\ -1, & x \in (-\pi;0) \end{cases}$	Ответ: $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

2.7. $f(x)$ = x	Ответ: $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$
2.8. $f(x) = \sin ax$, где a – нецелое число	Ответ: $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin nx$
2.9. $f(x) = x^3$	Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin x$
2.10. $f(x) = \frac{\pi-x}{2}, x\in(0;2\pi)$	Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, \pi]$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,\pi]$. Чтобы разложить ее на этом отрезке в ряд Фурье, надо доопределить ее на отрезке $[-\pi,0]$. В результате получим функцию, которую можно уже разложить в ряд Фурье, и получившийся ряд будет зависеть от характера продолжения первоначальной функции на отрезок $[-\pi,0]$.

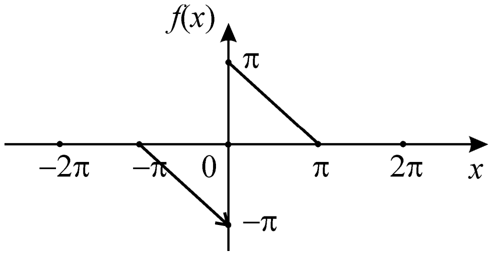
Если продолжить на отрезке $[-\pi,0]$ функцию $f(x)$ четным образом, то есть положить $f(-x) = f(x)$, $\forall x\in[-\pi,0]$, то получим разложение в ряд Фурье по косинусам (10) с коэффициентами, определяемыми по формулам (9). А при нечетном продолжении, то есть $f(-x) = -f(x)$ $\forall x\in[-\pi,0]$, получаем нечетную функцию, разлагающуюся в ряд Фурье по синусам (12) с коэффициентами (11).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0,\pi]$, имеют одну и ту же сумму. В точке x_0 разрыва функции сумма как одного, так и другого ряда равна одному и тому же числу $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Пример 4.

Разложить на отрезке $[0,\pi]$ функцию $f(x) = \pi - x$ в ряд Фурье по синусам.

Решение. Продолжим функцию $f(x) = \pi - x$ на отрезок $[-\pi,0]$ нечетным образом:



Тогда для любого $x \in (0,\pi)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$\text{где } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} \pi - x = u & -dx = du \\ \sin nx\mathrm{d}x = \mathrm{d}v & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| = -\frac{2(\pi - x)}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)(-\mathrm{d}x) = \frac{2\pi}{n\pi} - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}.$$

Итак, $\pi - x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad \forall x \in (0, \pi).$

$$S(0) = S(\pi) = 0.$$

Ряд Фурье для функций с произвольным периодом 2*l*

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции, период которых отличен от 2π.

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, имеет период 2*l*, то есть $f(x \pm 2l) = f(x)$, $l \neq \pi$, и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы I. Можно показать, что ряд Фурье для такой функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{13}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x, \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Заметим, что формулы (14) совпадают с формулами (2)–(4) при $l = \pi$. Это значит, что все вышеизложенные рассуждения можно повторить и для 2*l*-периодических функций с заменой π на *l*. В частности, для функции $f(x)$ с периодом 2*l* имеет место теорема I, замечание о возможности вычислять коэффициенты ряда, интегрируя по любому отрезку, длина которого равна периоду $2l$, а также утверждение о возможности упрощения вычисления коэффициентов ряда, если функция является четной или нечетной. Для четной $2l$-периодической функции ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n=\overline{1,\infty},$$

а для нечетной

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n=\overline{1,\infty}.$$

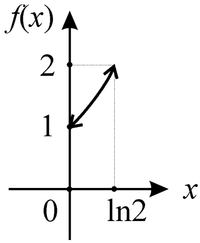
Последний факт дает возможность разложить в ряд Фурье по косинусам или синусам функцию, заданную на отрезке $[0, l]$.

Замечание. Непериодическая функция, заданная на всей оси, не может быть разложена в ряд Фурье, ибо его сумма, будучи периодической функцией, не может быть равна $f(x)$ для всех x. Однако непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке $[a, b]$, на котором она удовлетворяет условиям теоремы I.

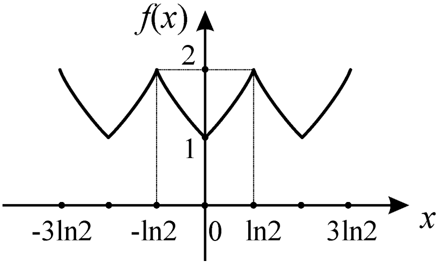
<u>Пример 5</u>.

Функция $f(x) = e^x$ задана в промежутке $(0; \ln 2)$. Получить разложение этой функции в ряд Фурье по косинусам и по синусам.

Решение. Функция $f(x) = e^x$ непрерывна в промежутке $(0; \ln 2)$.



Для того чтобы написать разложение этой функции в ряд по косинусам, надо доопределить функцию $f(x)$ на промежутке $(-\ln 2; 0]$ четным образом, а затем продолжить на всю ось $(e = \ln 2)$.



Ряд Фурье в этом случае будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ln 2}x,$$

где $a_0 = \frac{2}{\ln 2}\int\limits_0^{\ln 2} e^x \mathrm{d}x = \frac{2}{\ln 2} e^x\Big|_0^{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}\left(e^{\ln 2} - e^0\right) = \frac{2}{\ln 2}(2-1) = \frac{2}{\ln 2};$

$$a_n = \frac{2}{\ln 2}\int\limits_0^{\ln 2} e^x \cos\frac{\pi n}{\ln 2}x\mathrm{d}x.$$

Используя формулу

$$\int\limits_0^{\ln 2} e^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\cdot e^{\alpha x}\Big|_0^{\ln 2},$$

где $\alpha = 1, \quad \beta = \frac{\pi n}{\ln 2},$

получаем

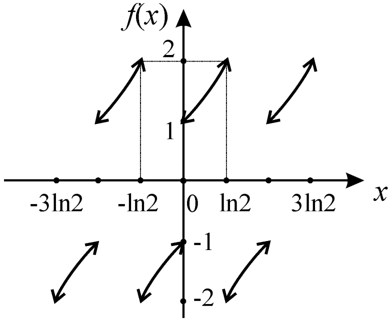
$$a_n = \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{\cos\pi n + \frac{\pi n}{\ln 2}\sin\pi n}{1+\frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 2}}\cdot 2 - \frac{\cos 0 + \frac{\pi n}{\ln 2}\sin 0}{1+\frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 2}}\cdot 1\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{(-1)^n 2\cdot\ln^2 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2} - \frac{1\cdot\ln^2 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}\right] = \frac{2\ln 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}\left(2\cdot(-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\ln 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}, & n = 2k, \\ -\dfrac{6\ln 2}{\pi^2 n^2 + \ln^2 2}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Итак, $e^x = \frac{1}{\ln 2} + \ln 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2k\pi}{\ln 2}x}{\pi^2(2k)^2+\ln^2 2} - \ln 64\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{\ln 2}x}{\pi^2(2k+1)^2+\ln^2 2};$ $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

Доопределяя теперь функцию $f(x) = e^x$ на промежутке $(-\ln 2; 0]$ нечетным образом, мы можем написать разложение этой функции в ряд по синусам:



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ln 2}x,$$

где
$$b_n = \frac{2}{\ln 2}\int_0^{\ln 2} e^x \sin\frac{\pi n}{\ln 2}x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{2}{\ln 2}\left[\frac{\sin\pi n + \frac{\pi n}{\ln 2}\cos\pi n}{1+\frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 2}}\cdot 2 - \frac{\sin 0 + \frac{\pi n}{\ln 2}\cos 0}{1+\frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{2(-1)^{n-1}n\pi\ln 2 + n\pi\ln 2}{\pi^2 n^2+\ln^2 2}\right) = \begin{cases} \dfrac{-2n\pi}{\pi^2 n^2+\ln^2 2}, & n = 2k, \\ \dfrac{6n\pi}{\pi^2 n^2+\ln^2 2}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\int\limits_0^{\ln 2} e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\cdot e^{\alpha x}\Bigg|_0^{\ln 2}.$$

В точках непрерывности

$$e^x = -4\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\cdot\sin\dfrac{2k\pi}{\ln 2}x}{\pi^2\left(2k\right)^2+\ln^2 2}+6\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\left(2k+1\right)\pi}{\ln 2}x}{\pi^2\left(2k+1\right)^2+\ln^2 2}.$$

В точках разрыва $x = n\ln 2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2,...,$ сумма ряда Фурье равна нулю: $S\left(n\ln 2\right) = 0,\ n = 0, \pm 1, \pm 2,...$

Задание 3.

Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f\left(x\right)$ с периодом $T = 2l$.

3.1. $f\left(x\right) = x-2,\ -1<x<1$	Ответ: $-2+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$
3.2. $f\left(x\right) = 4x+2,\ -1<x<1$	Ответ: $2+\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$
3.3. $f\left(x\right) = -7x+3,\ -2<x<2$	Ответ: $3+\dfrac{28}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n}}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}x$

3.4. $f(x) = -x-5,\ -2<x<2$	Ответ: $-5+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x$
3.5. $f(x) = 2x+1,\ -3<x<3$	Ответ: $1+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{3}x$
3.6. $f(x) = -2x+7,\ -3<x<3$	Ответ: $7+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{3}x$
3.7. $f(x) = 3x-1,\ -4<x<4$	Ответ: $-1+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{4}x$
3.8. $f(x) = -5x+4,\ -4<x<4$	Ответ: $4+\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}x$
3.9. $f(x) = -4x+3,\ -5<x<5$	Ответ: $3+\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x$
3.10. $f(x) = 2x-3,\ -5<x<5$	Ответ: $-3+\frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x$

Учебное издание

РЯДЫ ФУРЬЕ

Методические указания
по дисциплине «Математика»
для студентов строительных специальностей

Составители:
ГЛУШАНКОВА Лариса Яковлевна
ГОЛУБЕВА Ирина Анатольевна

Редактор *Л. Н. Шалаева*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 25.10.2013. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 1,18. Тираж 70. Заказ 1257.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.