

В.Ю. ШАШКИН¹, канд. техн. наук
(Южно-Уральский государственный университет)

РЕАКЦИЯ НА ВНЕШНЕЕ ВОЗМУЩЕНИЕ КАМЕРЫ СГОРАНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Реакция на внешнее возмущение камеры сгорания с распределенными параметрами как колебательной системы зависит от характеристик возмущающего воздействия и собственных свойств камеры.

В работе определяется реакция камеры сгорания с распределенными параметрами на периодическое возмущение произвольной формы, которая связана с кривой выгорания топлива по длине камеры, при наличии акустического трения в канале.

Свободные колебания давления ($W \equiv \delta P$) и объемной скорости потока газов ($W \equiv \delta V$) в распределенной системе описываются уравнением

$$m_a \partial^2 W / \partial \tau^2 + z_a \partial W / \partial \tau - (1/c_a) (\partial^2 W / \partial x^2) = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями для $W \equiv \delta P$:

$$\partial W / \partial x|_{x=0} = 0, \quad \tau > 0; \quad W|_{x=l} = 0, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

для $W \equiv \delta V$:

$$\partial W / \partial x|_{x=l} = 0, \quad \tau > 0; \quad W|_{x=0} = 0, \quad \tau > 0. \quad (3)$$

Краевая задача для колебаний скорости может быть приведена к задаче (1) – (3) формальной заменой переменной x на $l-x$. Вводя безразмерные независимые переменные $\xi = x/l$, $\zeta = \alpha\tau/l$ и новую искомого функцию

¹ Под научным руководством проф., д-ра техн. наук Торопова Е.В.

$$w(\xi, \zeta) = W_1 \exp(-b\zeta), \quad (4)$$

получим краевую задачу

$$\partial^2 w / \partial \zeta^2 - b^2 w = \partial^2 w / \partial \xi^2, \quad 0 < \xi < 1, \quad \zeta > 0; \quad (5)$$

$$\partial w / \partial \xi|_{\xi=0} = 0, \quad \zeta > 0; \quad (6)$$

$$w|_{\xi=1} = 0, \quad \zeta > 0, \quad (7)$$

где $b = -0,5z_a l / (am_a)$; $a = (m_a c_a)^{-0,5}$ – скорость звука, м/с; распределенные акустические параметры – масса m_a , кг/м⁵, емкость c_a , м³·с²/кг, трение z_a , Н·с/м⁶; колебания давления δP , Па, и объемной скорости δV , м³/с, отсчитываются от соответствующих величин усредненного течения.

Используя метод Фурье, получим решение краевой задачи (5)–(7) в виде

$$W_1(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\zeta) V_n(\xi), \quad (8)$$

где $V_n(\xi) = \cos \lambda_n \xi$ – собственные функции краевой задачи (5)–(7); $\lambda_n = (n - 0,5)\pi$ – ее собственные значения.

Формально заменяя ξ на $1 - \xi$, получим собственные функции краевой задачи для колебаний скорости $V_n(\xi) = \sin \lambda_n \xi$, где λ_n определены выше.

Функции $U_n(\zeta)$ являются решениями уравнения

$$d^2 U_n / d\zeta^2 + (\lambda_n^2 - b^2) U_n = 0, \quad (9)$$

вид которых зависит от знака выражения $(\lambda_n^2 - b^2)$:

при $(\lambda_n^2 - b^2) < 0$, т. е. $n < (0,5 + b/\pi)$ имеем

$$U_n(\zeta) = C_n \exp(-\omega_n \zeta) + D_n \exp(\omega_n \zeta), \quad (10)$$

где $\omega_n = (b^2 - \lambda_n^2)^{0,5}$;

при $(\lambda_n^2 - b^2) = 0$, т. е. $n = (0,5 + b/\pi)$,

$$U_n(\zeta) = C\zeta + D_n; \quad (11)$$

при $(\lambda_n^2 - b^2) > 0$, т. е. $n > (0,5 + b/\pi)$,

$$U_n(\zeta) = C_n \cos \omega_n \zeta + D_n \sin \omega_n \zeta, \quad (12)$$

где $\omega_n = (\lambda_n^2 - b^2)^{0,5}$.

С учетом равенства (4) решение уравнения (1) приводится к виду

$$w(\xi, \zeta) = \exp(-b\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\zeta) Y_n(\xi) \xi. \quad (13)$$

Распределенные акустические параметры среды в канале камеры сгорания проявляются при распространении упругих волн сжатия и расширения (акустических возмущений); акустическая масса m_a и акустическая емкость c_a , отнесенные к единице длины канала, определяются соотношениями $m_a = \rho/f$; $c_a = f/\rho a^2$, где f — площадь поперечного сечения канала, m^2 ; ρ и a — плотность среды и скорость звука в ней при рабочей температуре и давлении.

Фрикционно-диссипативные свойства среды в канале камеры сгорания определены в уравнении (1) коэффициентом z_a , который в общем случае является комплексным. Комплексное акустическое сопротивление или акустический импеданс канала радиусом r (м) оп-

ределяется с учетом свойств поперечной волны, называемой стоковой волной.

Рассмотрим случай, когда внешнее возмущение процесса горения (изменение расходов компонентов горения или их соотношения) приводит к синхронному и синфазному изменению температуры по длине камеры сгорания; колебания температуры приводят к изменению давления в канале камеры сгорания, т. е. на систему воздействует внешнее распределенное возмущение. При этом вынужденные колебания описываются уравнением

$$m_a \partial^2 W / \partial \tau^2 + z_a \partial W / \partial \tau - (1/c_a) (\partial^2 W / \partial x^2) = f(x, \tau), \quad (14)$$

где $f(x, \tau)$ – функция распределения в пространстве и во времени возмущающих воздействий на поток газов в канале камеры сгорания.

В дальнейшем полагаем, что $f(x, \tau)$ допускает мультипликативное представление $f(x, \tau) = r(x)q(\tau)$.

В случае, если вынуждающее воздействие изменяется во времени по гармоническому закону с частотой $\omega_{\text{вн}}$,

$$Q(\zeta) = \exp(i\Omega\zeta), \quad (15)$$

где $Q\zeta = q(i\zeta/a)$, $\Omega = \omega_{\text{вн}}l/a$, $\zeta = a\tau/l$ – безразмерные параметры, то в зависимости от величины параметра b функции $U_n(\tau)$ для больших значений ζ определяются формулами:

a – при $(\lambda_n^2 - b^2) < 0$, т. е. $n < (0,5 + b/\pi)$ имеем

$$U_n(\zeta) = \frac{R_n}{\omega_n} \left\{ \frac{\exp[i(\Omega\zeta + \varphi_n)]}{[(b - \omega_n)^2 + \Omega^2]^{0,5}} + \frac{\exp[i(\Omega\zeta + \psi_n)]}{[(b + \omega_n)^2 + \Omega^2]^{0,5}} \right\}, \quad (16)$$

где $\varphi_n = -\arctg \Omega / (b - \omega_n)$; $\psi_n = -\arctg \Omega / (b + \omega_n) + \pi$;
 $\omega_n^2 = b^2 - \lambda_n^2$;

$$\begin{aligned} \delta - \text{при } (\lambda_n^2 - b^2) = 0, \text{ т. е. } n = (0,5 + b/\pi), \\ U_n(\tau) = \frac{R_n \exp[i(\Omega\zeta + \varphi_n)]}{[b^2 + \Omega^2]^{0,5}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\varphi_n = -\arctg \Omega/b$;

$\epsilon - \text{при } (\lambda_n^2 - b^2) > 0, \text{ т. е. } n > (0,5 + b/\pi),$

$$U_n(\zeta) = \frac{R_n \exp[i(\Omega\zeta + \varphi_n)]}{[(\omega_n^2 - \Omega^2 + b^2) + 4b^2\Omega^2]^{0,5}}, \quad (18)$$

где $\varphi_n = \arctg 2b\Omega/(\omega_n^2 - \Omega^2 + b^2)^{0,5}$; $\omega_n^2 = \lambda_n^2 - b^2$; $i = (-1)^{0,5}$.

В зависимостях (3) – (5) $R_n = \int R(\xi) \cos \lambda_n \xi d\xi$ – коэффициен-

ты разложения в ряд Фурье пространственной составляющей внешнего воздействия по собственным функциям краевой задачи для свободных колебаний.

Определим пространственную компоненту возмущения процесса горения в камере сгорания следующей зависимостью:

$$R(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \xi < \xi_0 \\ A\{1 - \exp[-\chi(\xi - \xi_0)]\} & \text{при } \xi > \xi_0 \end{cases}. \quad (19)$$

Это означает, что ввод компонентов горения и их воспламенение начинаются в плоскости поперечного сечения камеры сгорания с координатой ξ_0 ; закон изменения температуры вдоль канала камеры сгорания соответствует изменению химического недожога по формуле $q_x = k_1 \exp(-k_2 Y^m)$ из работы [1], где $m = 1$, $k_2 = \chi$, $Y = \xi - \xi_0$, k – входит в множитель A .

Найдем коэффициенты разложения в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи, представив их в экспоненциальном виде, и применив зависимость вида $(x - iy)\exp(i\varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi + i(x \sin \varphi - y \cos \varphi)$:

$$R_n = A(C_1 \cos \lambda_n \xi + C_2 \sin \lambda_n \xi)' \xi_0 + \\ + A(C_1 \sin \lambda_n \xi + C_2 \cos \lambda_n \xi)' \xi_0 = R_d + iR_m$$

где $C_1 = \frac{\tilde{B}\chi}{(\chi^2 + \lambda_n^2)}$; $C_2 = \frac{[\chi^2 + \lambda_n^2 - \tilde{B}\lambda_n^2]}{[(\chi^2 + \lambda_n^2)\lambda_n]}$; $\tilde{B} = \exp[-\chi(\xi - \xi_0)]$.

Действительная часть R_d выражения характеризует реакцию процесса в камере сгорания на распределенное периодическое возмущение с пространственной компонентой (19)

$$R_d = A \left\{ (-1)^{n+1} \frac{\chi^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n^2 \exp[-\chi(1 - \xi_0)]}{\lambda_n (\chi^2 + \lambda_n^2)} - \right. \\ \left. - \frac{\chi \cos \lambda_n \xi_0}{\chi^2 + \lambda_n^2} - \frac{\chi^2 \sin \lambda_n \xi_0}{\lambda_n (\chi^2 + \lambda_n^2)} \right\}. \quad (20)$$

Полученная зависимость (20) позволяет рассчитать реакцию процесса в камере сгорания, а именно, изменение пространственной части реакции с изменением χ и ξ_0 при наличии внешнего возмущения (19).

Мнимая часть R_m выражения характеризует реакцию процесса в камере сгорания, смещенную на $\pi/2$ относительно R_d ; таким образом, если R_d соответствует возмущениям давления, то R_m – возмущениям скорости, и наоборот. Следовательно, полная реакция процесса в камере сгорания на возмущения давления определяется суммированием R_d из разложения в ряд Фурье внешнего возмущения по собст-

венным функциям краевой задачи для колебаний давления с R_m , определенной для возмущений скорости, если таковые заданы.

Действительная часть реакции камеры сгорания на синусоидальный сигнал, распределенный по длине камеры сгорания по экспоненте, дает возможность определить воздействие на каждый элемент системы горения топлива и рассчитать динамические процессы во всей системе.

Литература

1. **Торопов, Е. В.** Динамика тепло-массообмена в слоевых процессах и камерах сгорания / Е. В. Торопов // Тр. XXIII Росс. шк. «Наука и технологии». – М.: Изд-во РАН, 2003. – С. 600 – 608.