Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 2, с. 40–47 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

И.Н. МЕЛЕШКО, П.Г. ЛАСЫЙ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Аннотация. В данной работе на основе квадратурной формулы с неотрицательными коэффициентами для интеграла с логарифмическим ядром специального вида сконструирована и обоснована вычислительная схема решения интегрального уравнения, к которому приводит краевая задача для гармонической в единичном круге функции при граничном условии третьего рода. Получены равномерные оценки погрешности квадратурной формулы и приближенного решения интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, логарифмическое ядро, приближенное решение, квадратурная формула.

УДК: 517.968 : 519.6

Введение. Краевая задача для гармонической в единичном круге функции $u = u(r, \varphi)$ при граничном условии

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + q(\varphi)u\right)\Big|_{r=1} = f(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \tag{1}$$

где $q(\varphi)$ и $f(\varphi)$ — заданные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, приводит к интегральному уравнению ([1], с. 613) для граничных значений искомой функции

$$u(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q(\tau)u(\tau)\ln\left|t - e^{i\varphi}\right| d\tau - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln\left|t - e^{i\varphi}\right| d\tau + C, \tag{2}$$

в котором $t = e^{i\tau}$, а C — постоянная, равная значению функции u в центре круга.

Решение уравнения (2) при условии

$$\int_{-\pi}^{\pi} q(\varphi)u(\varphi)d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi \tag{3}$$

эквивалентно решению краевой задачи.

Одним из наиболее эффективных методов приближенного решения интегральных уравнений является приведение интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений. Для практической реализации такого метода важное значение имеет доказательство разрешимости этой системы и ее устойчивости.

1. Исследование интегрального уравнения. Преобразуем уравнение (2). Заметив, что $\left|t - e^{i\varphi}\right| = 2\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|$, а по теореме о среднем

$$C = u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)d\varphi,$$

Поступила 09.07.2014

из (2) при условии (3) получаем интегральное уравнение

$$u(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q(\tau)u(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Известно (например, [2], с. 280), что если в граничном условии (1) $q(\varphi) > 0$, $\varphi \in [-\pi,\pi]$, то краевая задача имеет единственное решение. Будем предполагать, что это условие выполняется.

Ядро интегрального уравнения (2) имеет логарифмическую особенность. Как известно, к таким уравнениям применима теория Фредгольма.

Запишем уравнение (4) в виде

$$v(\varphi)-\frac{q(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau-\frac{q(\varphi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\tau)\frac{d\tau}{q(\tau)}=F(\varphi), \quad (5)$$

где $v(\varphi)=q(\varphi)u(\varphi)$, $F(\varphi)=-\frac{q(\varphi)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau$.

Установив, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|\right|d\tau=2\ln 2, \quad (6)$$

получаем неравенство

$$\left|\frac{q(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau+\frac{q(\varphi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\tau)\frac{d\tau}{q(\tau)}\right|\le(2\ln 2+I)q\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|v(\varphi)|,$$

где $I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\tau}{q(\tau)}$, $q=\max\limits_{\varphi\in[-\pi,\pi]} q(\varphi)$, которое согласно теории метода последовательных приближений позволяет утверждать, что справедлива

Теорема 1. *Пусть функции $q(\varphi)$ и $f(\varphi)$ непрерывны на $[-\pi,\pi]$, причем $q(\varphi)$ такова, что интеграл I сходится и выполняется условие*

$$(2\ln 2+I)q<1. \quad (7)$$

Тогда интегральное уравнение (5) имеет единственное решение в пространстве $C[-\pi,\pi]$.

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что если решение краевой задачи искать при условии $u(0,\varphi)=0$, то уравнение (5) примет вид

$$v(\varphi)-\frac{q(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau=F(\varphi), \quad (8)$$

а неравенство (7) заменяется неравенством

$$2q\ln 2<1. \quad (9)$$

Так, например, если в граничном соотношении (1) $q(\varphi)$ — четная функция, а $f(\varphi)$ — нечетная функция, то упомянутое условие $u(0,\varphi)=0$ будет выполнено.

Замечание 2. Пусть в интегральном уравнении (8) $q(\varphi)=1$. Тогда в силу

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau=\frac{\cos m\varphi}{m},\quad m=1,2,\ldots,$$

устанавливаем, что собственным значениям $\lambda=-m$ линейного оператора

$$v(\varphi)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau$$

отвечают собственные функции $\cos m\varphi$.

2. Квадратурная формула с неотрицательными коэффициентами. При построении вычислительной схемы решения интегрального уравнения главную роль играет способ аппроксимации интеграла квадратурной суммой.

Зададим на отрезке $[-\pi,\pi]$ систему точек

$$\varphi_k = kh, \quad k=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n, \quad h=\frac{2\pi}{2n+1}, \tag{10}$$

и приблизим функции $v(\varphi), f(\varphi)$ на этом отрезке по формулам

$$v(\varphi)\approx\widetilde{v}(\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}\Theta_k(\varphi)v(\varphi_k), \quad f(\varphi)\approx\widetilde{f}(\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}\Theta_k(\varphi)f(\varphi_k), \tag{11}$$

в которых $\Theta_k(\varphi)=1$, если $\varphi\in\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\varphi_k+\frac{h}{2}\right]$, и $\Theta_k(\varphi)=0$, если $\varphi\notin\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\varphi_k+\frac{h}{2}\right]$. В результате для интегралов в уравнении (5) получаются квадратурные формулы

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau=\sum_{k=-n}^{n}A_k(\varphi)v(\varphi_k)+E_1(\varphi), \tag{12}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(\tau)\frac{d\tau}{q(\tau)}=\sum_{k=-n}^{n}B_kv(\varphi_k)+E_2, \tag{13}$$

$$F(\varphi)=-\frac{q(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau=$$
$$=q(\varphi)\sum_{k=-n}^{n}A_k(\varphi)f(\varphi_k)+q(\varphi)E_3(\varphi)=\widetilde{F}(\varphi)+q(\varphi)E_3(\varphi), \tag{14}$$

где

$$A_k(\varphi)=-\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau, \quad B_k=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\frac{d\tau}{q(\tau)}. \tag{15}$$

Для вычисления коэффициентов $A_k(\varphi)$ воспользуемся известным разложением (например, [3], с. 122)

$$\ln|\sin t|=-\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{k}, \ -\pi<t<\pi.$$

Тогда

$$\int_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau=2\int_{(\varphi_k-h/2-\varphi)/2}^{(\varphi_k+h/2-\varphi)/2}\ln|\sin t|\,dt=$$
$$=-2\left(t\ln 2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kt}{k^2}\right)\Bigg|_{(\varphi_k-h/2-\varphi)/2}^{(\varphi_k+h/2-\varphi)/2}.$$

В результате после простых преобразований получаем формулу

$$A_k(\varphi)=\frac{1}{\pi}\left(h\ln 2+N^2\left(\varphi-\varphi_k+h/2\right)-N^2\left(\varphi-\varphi_k-h/2\right)\right),$$

в которой $N^2(\Theta)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\Theta}{k^2}$ — значение мнимой части дилогарифма Эйлера на единичной окружности.

Из представлений коэффициентов формулами (15) и равенства (6) следует, что все коэффициенты $A_k(\varphi)$, B_k, $k=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$, неотрицательны и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=-n}^{n} A_k(\varphi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right| d\tau = 2\ln 2, \quad \sum_{k=-n}^{n} B_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\tau}{q(\tau)} = I. \tag{16}$$

Оценим остатки квадратурных формул (12)–(14). Если функции $v(\varphi)$ и $f(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$, то остатки приближенных формул (11) можно оценить неравенствами

$$|v(\varphi)-\widetilde{v}(\varphi)| \le \omega(v,h), \quad |f(\varphi)-\widetilde{f}(\varphi)| \le \omega(f,h), \quad \varphi\in[-\pi,\pi], \tag{17}$$

где $\omega(v,h)$, $\omega(f,h)$ — модули непрерывности этих функций. Если же $v(\varphi)$ и $f(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции, то с помощью формулы Тейлора легко установить, что

$$|v(\varphi)-\widetilde{v}(\varphi)| \le \frac{M_v}{2}h, \;\; M_v = \max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|v'(\varphi)|; \;\; |f(\varphi)-\widetilde{f}(\varphi)| \le \frac{M_f}{2}h, \;\; M_f = \max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|f'(\varphi)|. \tag{18}$$

Представим остаточные члены квадратурных формул (12)–(14) равенствами

$$E_1(\varphi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(v(\tau)-\widetilde{v}(\tau))\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right| d\tau, \quad E_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(v(\tau)-\widetilde{v}(\tau))\frac{d\tau}{q(\tau)},$$
$$E_3(\varphi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\tau)-\widetilde{f}(\varphi))\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right| d\tau.$$

Оценивая $E_1(\varphi)$, E_2, $E_3(\varphi)$ по модулю, с учетом равенства (6) получаем неравенства

$$\begin{gathered} |E_1(\varphi)| \le 2\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|v(\varphi)-\widetilde{v}(\varphi)|\ln 2, \quad |E_2| \le I\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|v(\varphi)-\widetilde{v}(\varphi)|, \\ |E_3(\varphi)| \le 2\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|f(\varphi)-\widetilde{f}(\varphi)|\ln 2. \end{gathered} \tag{19}$$

Из неравенств (17)–(19) вытекает

Теорема 2. *Если функции $v(\varphi)$ и $f(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$, то*

$$|E_1(\varphi)| \le 2\omega(v,h)\ln 2, \quad |E_2| \le I\omega(v,h), \quad |E_3(\varphi)| \le 2\omega(f,h)\ln 2. \tag{20}$$

Если же функции $v(\varphi)$ и $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируемы на этом отрезке, то

$$|E_1(\varphi)| \le M_v h\ln 2, \quad |E_2| \le \frac{M_v}{2}Ih, \quad |E_3(\varphi)| \le M_f h\ln 2. \tag{21}$$

3. Вычислительная схема решения уравнения (2). Займемся конструированием вычислительной схемы решения интегрального уравнения. Заменим интегралы в уравнении (5) соответствующими квадратурными суммами с остаточными членами. После этого приходим к равенству

$$v(\varphi)+q(\varphi)\sum_{k=-n}^{n}A_k(\varphi)v(\varphi_k) - q(\varphi)\sum_{k=-n}^{n}B_k v(\varphi_k) = \widetilde{F}(\varphi)+q(\varphi)(-E_1(\varphi)+E_2+E_3(\varphi)). \tag{22}$$

Подставив в равенство (22) точки φ_j системы (10), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & v(\varphi_j)+q(\varphi_j)\sum_{k=-n}^{n}A_k(\varphi_j)v(\varphi_k) - q(\varphi_j)\sum_{k=-n}^{n}B_k v(\varphi_k) = \\ & \qquad = \widetilde{F}(\varphi_j)+q(\varphi_j)(-E_1(\varphi_j)+E_2+E_3(\varphi_j)), \quad j=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n. \end{aligned} \tag{23}$$

Отбросив в правой части (23) остаточные члены, запишем систему линейных алгебраических уравнений

$$v_j + q(\varphi_j) \sum_{k=-n}^{n} (A_k(\varphi_j) - B_k) v_k = \widetilde{F}(\varphi_j), \quad j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \tag{24}$$

в которой v_j — приближенные значения $v(\varphi_j)$, входящие в уравнения (23).

Проведем исследование системы (24) методами теории разностных схем.

Теорема 3. *Если выполняется условие* (7), *то система уравнений* (24) *однозначно разрешима, устойчива и имеет место оценка*

$$\max_j |v(\varphi_j) - v_j| \leq \frac{q((2\ln 2 + I)\varepsilon_1 + 2\ln 2\, \varepsilon_2)}{1 - (2\ln 2 + I)q}, \tag{25}$$

где ε_1 *и* ε_2 *— такие положительные величины, что* $|v(\varphi) - \widetilde{v}(\varphi)| \leq \varepsilon_1$, $|f(\varphi) - \widetilde{f}(\varphi)| \leq \varepsilon_2$ *на промежутке* $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Сравнивая системы уравнений (23) и (24) с учетом неравенств (19), находим, что аппроксимация интегрального уравнения (8) системой (24) определяется неравенством

$$|q(\varphi)(-E_1(\varphi) + E_2 + E_3(\varphi))| \leq q((2\ln 2 + I)\varepsilon_1 + 2\ln 2\, \varepsilon_2). \tag{26}$$

Проверим разрешимость и устойчивость системы (24). Пусть v_s — одна из тех компонент решения системы (24), которая по модулю не меньше каждой из остальных: $|v_s| = \max\limits_j |v_j|$. Из уравнения с номером s системы (24) при условии (7) следует

$$|\widetilde{F}(\varphi_s)| = \left| v_s + q(\varphi_s) \sum_{k=-n}^{n} (A_k(\varphi_s) - B_k) v_k \right| \geq |v_s| - |q(\varphi_s)| \sum_{k=-n}^{n} (A_k(\varphi_s) + B_k) |v_k|.$$

Принимая во внимание соотношения (16), получаем неравенство

$$|\widetilde{F}(\varphi_s)| \geq (1 - (2\ln 2 + I)q)|v_s|.$$

Тогда

$$|v_s| \leq \frac{|\widetilde{F}(\varphi_s)|}{1 - (2\ln 2 + I)q}. \tag{27}$$

Из последнего неравенства, в частности, при $\widetilde{F}(\varphi_j) = 0$, $j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$, следует, что система (24) не имеет нетривиальных решений и, следовательно, однозначно разрешима при любых правых частях. Неравенство (27) означает также устойчивость этой системы. Согласно теории разностных схем ([4], с. 106) из неравенств (26), (27) вытекает (25). □

Заменим в правой части (4) интегралы соответствующими квадратурными суммами из (12)–(14). Учитывая связь функций $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$, получаем приближенное решение интегрального уравнения (4) в виде

$$\widetilde{u}(\varphi) = -\sum_{k=-n}^{n} A_k(\varphi) v_k + \sum_{k=-n}^{n} B_k v_k + \sum_{k=-n}^{n} A_k(\varphi) f(\varphi_k). \tag{28}$$

Здесь вместо $v(\varphi_k)$ взяты их приближенные значения v_k, полученные при решении системы (24).

По найденным контурным значениям гармонической функции легко восстановить эту функцию в круге.

Оценим погрешность приближенного решения (28). Из (4) и (28) следует

$$u(\varphi)-\widetilde{u}(\varphi)=-\sum_{k=-n}^{n}A_k(\varphi)(v(\varphi_k)-v_k)+\sum_{k=-n}^{n}B_k(v(\varphi_k)-v_k)+E_1(\varphi)+E_2+E_3(\varphi).$$

Оценим эту разность по модулю

$$|u(\varphi)-\widetilde{u}(\varphi)|\le\sum_{k=-n}^{n}A_k(\varphi)|v(\varphi_k)-v_k|+\sum_{k=-n}^{n}B_k|v(\varphi_k)-v_k|+|E_1(\varphi)|+|E_2|+|E_3(\varphi)|.$$

Последнее неравенство, равенство (16), а также неравенства (19), (25) позволяют записать общую равномерную оценку погрешности приближенного решения (28)

$$|u(\varphi)-\widetilde{u}(\varphi)|\le\frac{(2\ln2+I)q((2\ln2+I)\varepsilon_1+2\ln2\,\varepsilon_2)}{1-(2\ln2+I)q}+(2\ln2+I)\varepsilon_1+2\ln2\,\varepsilon_2 \qquad (29)$$

и легко доказывается

Теорема 4. *Пусть функции $q(\varphi)$ и $f(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$ и выполняется условие* (7)*. Тогда*

$$|u(\varphi)-\widetilde{u}(\varphi)|\le\frac{(2\ln2+I)q((2\ln2+I)\omega(v,h)+2\ln2\,\omega(f,h))}{1-(2\ln2+I)q}+\\+(2\ln2+I)\omega(v,h)+2\ln2\,\omega(f,h). \qquad (30)$$

Если же функции $v(\varphi)$ и $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируемы на этом отрезке и v' и f' — такие положительные числа, что $|v'(\varphi)|\le v'$, $|f'(\varphi)|\le f'$ для всех $\varphi\in[-\pi,\pi]$, то

$$|u(\varphi)-\widetilde{u}(\varphi)|\le\frac{(2\ln2+I)q((2\ln2+I)v'h+2f'h\ln2)}{2(1-(2\ln2+I)q)}+\frac{(2\ln2+I)v'h}{2}+f'h\ln2. \qquad (31)$$

Доказательство. Если функции $q(\varphi)$ и $f(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$, то решение $v(\varphi)$ интегрального уравнения (5) также будет непрерывной функцией на этом отрезке и неравенство (30) следует из (17) и (29). Неравенство (31) вытекает из (18) и (29). □

Замечание 3. Если функции $q(\varphi)$ и $f(\varphi)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[-\pi,\pi]$, то величину v' можно выразить через известные величины. Продифференцируем почленно уравнение (5), а затем применим к интегралам с ядром Гильберта формулу интегрирования по частям ([3], с. 65). Последовательно имеем

$$v'(\varphi)-\frac{q'(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(\tau)\ln K(\tau,\varphi)d\tau+\frac{q(\varphi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-\varphi}{2}d\tau-\frac{q'(\varphi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(\tau)\frac{d\tau}{q(\tau)}=\\=-\frac{q'(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)K(\tau,\varphi)d\tau+\frac{q(\varphi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-\varphi}{2}d\tau,\quad K(\tau,\varphi)=\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|,$$

$$v'(\varphi)-\frac{q'(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(\tau)K(\tau,\varphi)d\tau+\frac{q(\varphi)}{\pi}(v(\pi)-v(-\pi))\ln\cos\frac{\varphi}{2}-\\-\frac{q(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v'(\tau)K(\tau,\varphi)d\tau-\frac{q'(\varphi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(\tau)\frac{d\tau}{q(\tau)}=\\=-\frac{q'(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)K(\tau,\varphi)d\tau+\frac{q(\varphi)}{\pi}(f(\pi)-f(-\pi))\ln\cos\frac{\varphi}{2}-\frac{q(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(\tau)K(\tau,\varphi)d\tau. \qquad (32)$$

Из уравнения (5) следует, что при выполнении условия (7)

$$|v(\varphi)| \leq \frac{2qf\ln 2}{1-(2\ln 2+I)q}, \quad \varphi \in [-\pi,\pi], \tag{33}$$

где $f = \max\limits_{\varphi\in[-\pi,\pi]} |f(\varphi)|$. Пусть функция $q(\varphi)$ такова, что выполняется условие (7) и

$$\left|\frac{q(\varphi)}{\pi}(f(\pi)-f(-\pi)) + (v(-\pi)-v(\pi))\ln\cos\frac{\varphi}{2}\right| \leq q^* < +\infty, \quad \varphi \in [-\pi,\pi].$$

Тогда из соотношения (32) с учетом неравенства (33) получаем оценку

$$|v'(\varphi)| \leq \frac{(2(q'f+qf')\ln 2+q^*)(1-(2\ln 2+I)q)+2qq'f(2\ln 2+I)\ln 2}{(1-2q\ln 2)(1-(2\ln 2+I)q)}, \quad \varphi \in [-\pi,\pi]. \tag{34}$$

Здесь f, f', q, q' — такие положительные величины, что на отрезке $[-\pi,\pi]$

$$|f(\varphi)| \leq f, \quad |f'(\varphi)| \leq f', \quad |q(\varphi)| \leq q, \quad |q'(\varphi)| \leq q'.$$

Таким образом, в качестве v' в оценке (31) можно взять правую часть неравенства (34). Заметим, что $q^* = 0$, если $q(\pi) = q(-\pi)$ и $f(\pi) = f(-\pi)$.

4. Пример. В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\Delta u = 0, \quad r < 1,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\sqrt{2}}{3+\cos 2\varphi}u\right)\Big|_{r=1} = \frac{6\sin 2\varphi}{(3+\cos 2\varphi)^2}, \quad \varphi \in [-\pi,\pi],$$

которая приводит к интегральному уравнению

$$u(\varphi) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(\tau)}{3+\cos 2\tau}\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau = \frac{6}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin 2\tau}{(3+\cos 2\tau)^2}\ln\left|\sin\frac{\tau-\varphi}{2}\right|d\tau.$$

Точным решением этого уравнения является функция

$$u(\varphi) = \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{2}(3+\cos 2\varphi)}.$$

Формула (28) дает приближенное решение

$$\widetilde{u}(\varphi) = -\sum_{k=-n}^{n} A_k(\varphi)v_k + \frac{3\sin 2\varphi}{2\sqrt{2}(3+\cos 2\varphi)},$$

где значения v_k взяты из решения линейной системы (24). Для данного примера эта система имеет вид

$$v_j + \frac{2\sqrt{2}}{3+\cos 2\varphi_j}\sum_{k=-n}^{n} A_k(\varphi_j)v_k = \frac{3\sin 2\varphi_j}{(3+\cos 2\varphi_j)^2}, \quad j = -n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n.$$

Численный эксперимент, проведенный в среде компьютерной алгебры Mathematica 8, показывает, что уже при небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения данного уравнения. Например, при n, равных 40 и 80, максимальная абсолютная погрешность составляет $1.2\cdot 10^{-4}$ и $3.2\cdot 10^{-5}$ соответственно.

Литература

[1] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа* (Физматлит, М.–Л., 1962).
[2] Гюнтер Н.М. *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики* (ГИТТЛ, М., 1953).
[3] Пыхтеев Г.Н. *Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида* (Наука, Новосибирск, 1982).
[4] Годунов С.К., Рябенький В.С. *Разностные схемы* (Наука, М., 1977).

И.Н. Мелешко

профессор, кафедра высшей математики № 2,
Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, д. 65, г. Минск, 220013, Республика Беларусь,

`e-mail:` inmeleshko@tut.by

П.Г. Ласый

доцент, кафедра высшей математики № 2,
Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, д. 65, г. Минск, 220013, Республика Беларусь,

`e-mail:` pglasy@yandex.ru

I.N. Meleshko and P.G. Lasyi

Approximate solution to integral equation with logarithmic kernel of special form

Abstract. Based on the quadrature formula with non-negative coefficients for integral with a special logarithmic kernel, we construct and substantiate a computational pattern for solving integral equation derived from the boundary-value problem for a function, which is harmonic in the unit disk under the boundary condition of the third kind. We obtain uniform estimates of deviations of the quadrature formula and the approximate solution to integral equation.

Keywords: integral equation, logarithmic kernel, approximate solution, quadrature formula.

I.N. Meleshko

Professor, Chair of Higher Mathematics № 2,
Belarussian National Technical University,
65 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220013 Republic of Belarus,

`e-mail:` inmeleshko@tut.by

P.G. Lasyi

Associate Professor, Chair of Higher Mathematics № 2,
Belarussian National Technical University,
65 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220013 Republic of Belarus,

`e-mail:` pglasy@yandex.ru