

ISSN 0134-9635

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 35

*Сборник включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук*

Минск
БНТУ
2020

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

Т 35

РЕДАКЦИЯ СБОРНИКА

Главный редактор сборника:

Василевич Юрий Владимирович – кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика и механика материалов» БНТУ

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (председатель), В.А. Чигарев (зам. председателя, уч. секретарь), Т.Н. Микулик (редактор), И.С. Куликов, В.С. Вихренко, В.А. Акимов, А.В. Савицкая (электронный макет, компьютерная верстка)

Адрес редакции:

220013, Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 292 22 63, 299 92 52
E-mail: tmech@bntu.by

В сборнике представляются научные статьи по механике, прикладной механике, механике деформируемого твердого тела и смежным вопросам, научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и исследовательских учреждений.

Тематика статей охватывает широкий круг вопросов: общая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа, мехатроника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, конструирование деталей машин и др. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Мехатроника», «Механика деформируемых тел», «Техническая механика» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов в высшей и средней школе.

Взгляды отдельных авторов могут не совпадать с позицией редакции научного издания.

Научно-технический сборник полезен преподавателям высших учебных заведений, научно-инженерным работникам, аспирантам, магистрантам и студентам старших курсов технических вузов.

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

¹Плескачевский Ю.М., ²Журавков М.А., ³Старовойтов Э.И.

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный университет

³Белорусский государственный университет транспорта

Введение. В последнее время значительно возросло использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в машиностроении, добыче и транспортировке энергоносителей, строительстве. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Монографии [1–5] содержат различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, включая стержни, пластины и оболочки. В них изложены методы решения соответствующих краевых задач. Изотермическое динамическое деформирование трехслойных круговых пластин при импульсных и резонансных непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в статьях [6–9]. Постановки и методики решения краевых задач об изотермическом квазистатическом деформировании, в том числе циклическом, упругопластических слоистых стержней и пластин приведены в [10–13]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и оболочек исследовалось в работах [14–18]. Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках изучены в статье [19].

Здесь построено аналитическое решение краевой задачи об определении перемещений в упругой трехслойной круговой металлополимерной пластине при параболических по форме нагрузках, с учетом воздействия температурного поля. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного пакета пластины.

1. Общее решение краевой задачи. Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина (рис.1). К наружной поверхности первого несущего слоя приложены осесимметричные распределенные нагрузки $q(r)$, $p(r)$, и пластина находится в температурном поле $T = \text{const}$. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z перпендикулярна ей и направлена вверх. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя ($h_3 = 2c$), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

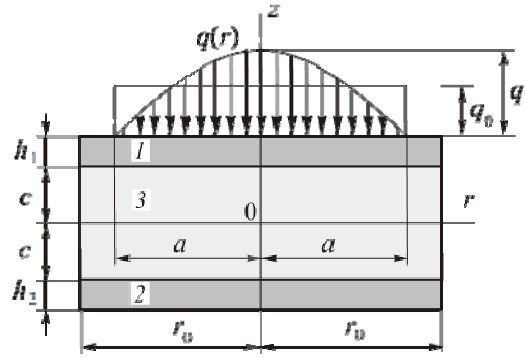


Рис. 1 Схема нагружения

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя следует, что

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi.$$

После интегрирования этого выражения с учетом принятых гипотез получим формулы, выражающие радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши, напряжения – из термоупругих соотношений закона Гука:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (k=1,2,3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned}$$

где $s_{\alpha}^{(k)}, \varepsilon_{\alpha}^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T), K_k(T)$ – модули сдвига и объемного деформирования, зависимость которых от температуры описывается формулой Белла [1]; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получены вариационным методом. Их общее решение приведено в [19]:

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r, \\ w &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q) dr + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4, \\ u &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi - \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p) + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\psi_r = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr,$$

$$f(r) = \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\frac{p(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{a_1 b_3} + \frac{b_2}{b_3 r} \left(\int q r dr - C_1 \right) \right]$$

где $I_1(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка; $K_1(\beta r)$ – функция Макдональда; L_2^{-1} , L_3^{-1} – линейные интегральные операторы

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f dr dr dr;$$

C_1, \dots, C_8 – константы интегрирования, определяемые из условий ограниченности решения в центре пластины и граничных условий закрепления контура; a_i , b_i , β – коэффициенты, определяемые через геометрические и термомеханические характеристики материалов слоев [19].

В качестве граничных принимаются следующие кинематические условия:

- при заделке контура пластины

$$(u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1), \quad (3)$$

- при шарнирном опирании

$$(u = \psi = w = M_r = 0 \quad \text{при } r = 1). \quad (4)$$

2. Изгиб параболической нагрузкой, распределенной по кругу [0, a]. Пусть на рассматриваемую круговую трехслойную пластину действует локальная вертикальная поверхностная нагрузка параболической формы, распределенная по кругу относительного радиуса $r \leq a$ (см. рисунок 1). Для нее можно принять аналитический вид

$$q(r) = q_0 H_0(a-r) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right), \quad (5)$$

где $q_0 = \text{const}$, $H_0(r)$ – функция Хевисайда.

Интегральный оператор третьей степени от нагрузки (5), функция $f(r)$ и интегралы от нее, входящие в решение (2), следующие:

$$\begin{aligned} L_3^{-1}(q) dr &= q_0 H_0(a-r) \left(\frac{3r^4 - a^4}{48r} - \frac{r^5}{96a^2} - \frac{a^2 r}{8} \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{a^2 r^2}{32} \right), \\ f(r) &= \frac{\gamma_1}{r} \left(\int q_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) H_0(a-r) r dr - C_1 \right) = \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0}{4} \left(2r^2 - a^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) H_0(a-r) - C_1 \right), \\ \int I_1(\beta r) f(r) r dr &= \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^2} H_0(a-r) \left[I_0(\beta r) \left(2r^2 \beta - \frac{r^4 \beta}{a^2} - \frac{8r^2}{a^2 \beta} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{8I_0(\beta a)}{\beta} - \frac{16I_1(\beta a)}{\beta^2 a} - 4I_1(\beta r) \left(r - \frac{r^3}{a^2} - \frac{4}{a^2 \beta^2} \right) \right] - \frac{C_1 \gamma_1}{\beta} I_0(\beta r), \\ \int K_1(\beta r) f(r) r dr &= \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^2} H_0(a-r) \left[-K_0(\beta r) \left(2r^2 \beta - \frac{r^4 \beta}{a^2} - \frac{8r^2}{a^2 \beta} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{8K_0(\beta a)}{\beta} - \frac{16K_1(\beta a)}{\beta^2 a} - 4K_1(\beta r) \left(r - \frac{r^3}{a^2} - \frac{4}{a^2 \beta^2} \right) \left] \frac{C_1 \gamma_1}{\beta} I_0(\beta r) \right.$$

После чего частное решение ψ_r можно выписать в виде

$$\begin{aligned} \psi_r = & \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^4 a^2} H_0(a-r) \left[\beta^2 r^3 + \frac{\beta^2 a^4}{r} + r(8-2\beta^2 a^2) - 8\beta a^2 (K_1(\beta r) I_0(\beta a) + \right. \\ & \left. + I_1(\beta r) K_0(\beta a)) + 16a (K_1(\beta r) I_1(\beta a) - I_1(\beta r) K_1(\beta a)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r} \end{aligned} \quad (6)$$

Общий вид решения (2) остается в данном случае без изменения, если учесть выражение (6) и следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int L_3^{-1}(q(r)) = & H_0(a-r) \left(\frac{r^4}{64} - \frac{r^6}{576a^2} + \frac{a^2 r^2}{64} - \frac{a^2 r^2}{16} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{a^4}{48} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{17a^4}{576} \right), \\ \int \psi \, dr = & \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^4 a^2} H_0(a-r) \times \\ & \times \left[\beta^2 a^4 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{16a}{\beta} (K_1(\beta a) I_0(\beta r) + I_1(\beta a) K_0(\beta r)) + \frac{16}{\beta^2} + 4(r^2 - a^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2 r^4}{4} + \frac{3\beta^2 a^4}{4} - \beta^2 a^2 r^2 - 8a^2 (K_0(\beta a) I_0(\beta r) - I_0(\beta a) K_0(\beta r)) \right]. \end{aligned}$$

Константы интегрирования определяем из условия заделки контура пластины (3) и условия гладкости решения в ее центре. В результате

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{q_0 a^2}{4}, \quad C_2 = \frac{2\gamma_1 q_0}{\beta^3 I_1(\beta)} \left(\frac{\beta a^2}{8} - K_1(\beta) \left(I_0(\beta a) - \frac{2}{\beta a} I_1(\beta a) \right) \right), \\ C_3 = & \frac{2q_0 \gamma_1}{\beta^3} \left(I_0(\beta a) - \frac{2}{\beta a} I_1(\beta a) \right), \\ C_4 = & -\frac{\gamma_1 b_2 q_0}{\beta^3 b_3 I_1(\beta)} \left(\frac{a^2 I_0(\beta)}{4} + \frac{2}{\beta^2} \left(I_0(\beta a) - \frac{2}{\beta a} I_1(\beta a) \right) \right) + \frac{q_0 a^4}{96b_3} + \frac{q_0 a^2}{32b_3}, \\ C_5 = & \frac{q_0 a^2}{24} (3+a^2), \quad C_6 = \frac{q_0 a^4}{48b_3}, \quad C_7 = 0, \quad C_8 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При шарнирно-опертом контуре из (4) получим:

$$C_4 = \frac{b_2}{b_3} \left(-\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (C_1 + C_5), \quad (8)$$

$$C_5 = \frac{q_0 a^2}{8} \left(1 - \frac{a^2}{3}\right) \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{a_1 (a_6 + a_7)} \frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz,$$

$$C_7 = \frac{2a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + \frac{q_0 a^2}{8} \left(1 - \frac{a^2}{3}\right)\right).$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_6, C_8 сохраняют вид (7).

3. Изгиб нагрузкой, равномерно распределенной по кругу $[0, a]$. Если на рассматриваемую трехслойную пластину действует локальная поверхностная нагрузка цилиндрической формы, равномерно распределенная по кругу относительного радиуса $r \leq b$, то ее можно записать в виде

$$q(r) = q_0 H_0(b-r), \quad p=0. \quad (9)$$

Интегральный оператор третьей степени от нагрузки (9), функция $f(r)$ и интегралы от нее, входящие в решение (2), следующие:

$$L_3^{-1}(q(r)) = q_0 \left(\frac{r^3}{16} - \frac{b^4}{16r} - \frac{b^2 r}{4} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right) H_0(b-r).$$

$$f(r) = \frac{b_2}{(b_1 b_3 - b_2^2) r} \left(\int q_0 H_0(b-r) r dr - C_1 \right) = \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0 (r^2 - b^2)}{2} H_0(b-r) - C_1 \right), \quad \gamma_1 = \frac{b_2}{(b_1 b_3 - b_2^2)}.$$

Внося функцию $f(r)$ в интегралы, входящие в частное решение ψ_r , получим

$$\int I_1(\beta r) f(r) r dr = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta} (r^2 I_2(\beta r) - b^2 I_2(\beta b)) H_0(b-r) -$$

$$- \frac{\gamma_1 q_0 b^2}{2\beta} (I_0(\beta r) - I_0(\beta b)) H_0(b-r) - \frac{C_1 \gamma_1}{\beta} I_0(\beta r) =$$

$$= \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta} H_0(b-r) \left[(r^2 - b^2) I_0(\beta r) + \frac{2}{\beta} (b I_1(\beta b) - r I_1(\beta r)) \right] - \frac{C_1 \gamma_1}{\beta} I_0(\beta r), \quad (10)$$

$$\int K_1(\beta r) f(r) r dr = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta} H_0(b-r) \left[(b^2 - r^2) K_0(\beta r) + \frac{2}{\beta} (b K_1(\beta b) - r K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta} K_0(\beta r).$$

В результате частное решение ψ_r принимает вид

$$\psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b (K_1(\beta b) I_1(\beta r) - I_1(\beta b) K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r} \quad (11)$$

Подставляя (10) в решение (2), с учетом (11) получим искомые перемещения в трехслойной круговой пластине при действии равномерно распределенной круговой нагрузки, где

$$\int L_3^{-1}(q)dr = q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r),$$

$$\int \Psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times$$

$$\times \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right].$$

Константы интегрирования определяем из условия закрепления пластины и условия гладкости решения в ее центре. Из условия гладкости следует

$$C_1 = -\frac{q_0 b^2}{2}, \quad C_3 = \frac{q_0 \gamma_1 b I_1(\beta b)}{\beta^2}, \quad C_6 = \frac{q_0 b^4}{16 b_3}, \quad C_8 = 0.$$

В случае заделки контура пластины остальные константы интегрирования будут:

$$C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right), \quad C_4 = -\frac{b_2 \gamma_1 q_0}{b_3 \beta^4 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2} - b I_1(\beta b) \right) + \frac{q_0 b^4}{32 b_3} + \frac{q_0 b^2}{16 b_3},$$

$$C_5 = \frac{q_0 b^2}{8} (2 - b^2), \quad C_7 = 0.$$

При шарнирном опирании контура из условий (4) получим:

$$C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right), \quad C_4 = \frac{b_2}{b_3} \left(-\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4 b_3} (C_1 + C_5),$$

$$C_5 = \frac{q_0 b^2}{4} \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{a_1 (a_6 + a_7)} - \frac{6 b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz, \quad (12)$$

$$C_7 = \frac{2 a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + \frac{q_0 b^2}{4} \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) \right)$$

Следует отметить, что при шарнирном опирании контура пластины решения явно зависят от температуры через константы интегрирования (9), (12).

Численные результаты получены для упругой круговой трехслойной пластины, шарнирно опертой по контуру слою которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, соответствующие механические характеристики материалов приведены в [2]. Величина интенсивности распределенной нагрузки $q_0 = 1$ МПа, относительные толщины слоев $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,06$; $h_3 = 0,4$.

На рис. 2 а, б показано изменение относительного сдвига в заполнителе и прогиба пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при различных значениях радиуса b пятна локальной параболической поверхностной нагрузки: 1 – $b = 0,5$; 2 – $b = 0,75$; без штриха – $T = 293$ К, со штрихом – $T = 323$ К.

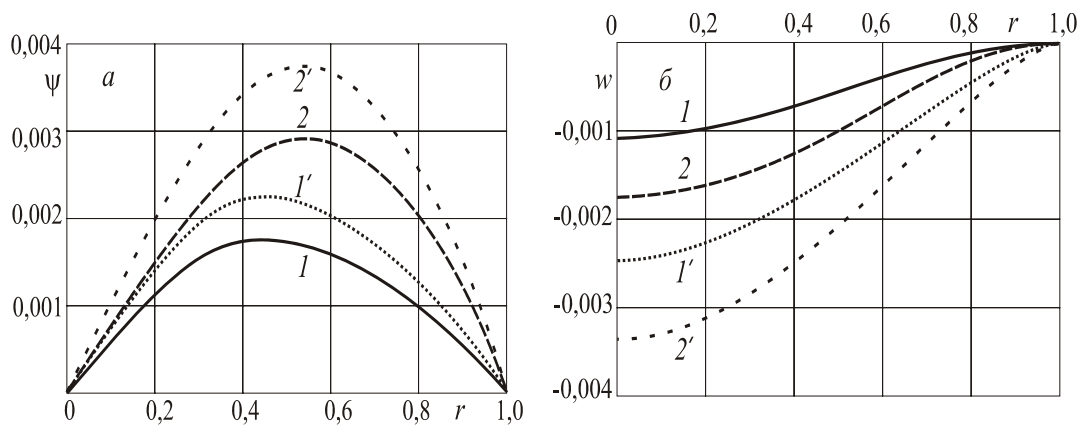


Рис. 2. Изменение относительно сдвига

На рисунке 3 показана зависимость прогиба круговой трехслойной пластины в центре от радиуса силового пятна различных по форме и величине нагрузок: 1 – параболическая амплитуды q_0 ; 2 – прямоугольная q_0 ; 3 – параболической амплитуды $q_1 = 2q_0$. Без штриха – комнатная температура, со штрихом – $T = 323$ К. Параболическая нагрузка с амплитудой q_1 статически эквивалентна прямоугольной q_0 , т.к.

$$q_1 \int_A \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) H_0(a-r) r dr d\varphi = q_0 \int_A H_0(a-r) r dr d\varphi,$$

отсюда $q_1 = 2q_0$.

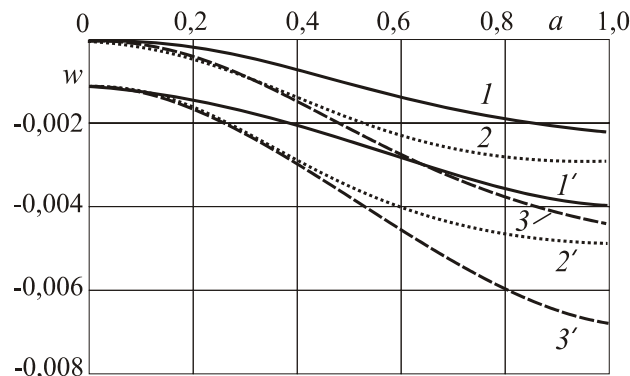


Рис. 3. Прогиб трехслойной пластины

С ростом радиуса пятна нагрузки прогиб увеличивается нелинейно, достигая максимума при нагрузке, распределенной по всей поверхности пластины. При одинаковой амплитуде (1, 2) прямоугольная нагрузка вызывает больший прогиб. В случае статически эквивалентных нагрузок (2, 3) прогиб от параболической больше на 47 %, при нагревании разница уменьшается до 40 %.

Выводы. Таким образом, приведенные в этой статье результаты показали, что напряженно-деформированное состояние несимметричных по толщине упругих круговых трехслойных пластин существенно зависит от воздействия температурного поля, вида и формы нагрузки, граничных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T18P-090).

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. наука. 200, – 342 с.
2. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
3. Журавков, М. А. Математические модели сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011.– 540 с.
4. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.V. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey. – 2012.– 346 p.
5. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiaционных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // – Минск: Бел. наука, 2017. –275 с.
6. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. –Vol. 39, № 8. – P. 945–952.
7. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonant loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.
8. Starovoitov, Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation/ E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.
9. Starovoitov, E.I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // *Mechanics of Composite Materials*. – 2015. – Vol. 51, № 5. – P. 561–570.
10. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 267–273. doi.org/10.1007/BF00611609
11. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
12. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2018. – № 33. – С. 363–369.
13. Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании Пастернака / А.Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2018. – № 33. – С. 318–323.
14. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
15. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1989.– № 5.– С. 114–119.
16. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А.В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–60.
17. Плескачевский, Ю.М. Локальные нагружения трехслойной балки со сжимаемым наполнителем в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник*.– Мн.: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 12–17.

18. Старовойтов, Э.И. Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с нелинейно вязкоупругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, И.И. Протуро, Д.В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика. Мн.: БНТУ, 2012 г. – № 27. с. 64–69.

19. Плескачевский, Ю.М. Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках / Ю.М. Плескачевский, М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. – Минск: БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 3–9.

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА СПОРТИВНЫХ ЛЫЖ ИЗ СЛОИСТЫХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

¹Шилько С.В., ¹Рябченко Т.В., ¹Петроковец Е.М., ¹Черноус Д.А., ²Целуева С.Н.

¹Государственное научное учреждение «Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого Национальной академии наук Беларуси», Гомель, Беларусь

²УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

Введение. Технические характеристики спортивного снаряжения во многом определяют результативность тренировок спортсменов и их выступлений на соревнованиях, а также коммерческие преимущества соответствующих товаров для массового использования. При обилии публикаций в области биомеханики и эргономики [1] единичными являются исследования по формулировке критериев оптимального проектирования технических средств для физкультуры и спорта [2]. В частности, имеет место весьма субъективная оценка качества спортивных лыж, что мотивирует выработку достаточно строгого обобщенного критерия оптимальности указанных изделий, учитывающего наиболее значимые факторы.

Оптимально спроектированная лыжа рассматривается авторами как бионически адекватная структура, физико-механические характеристики которой соответствуют индивидуальным антропометрическим, силовым и энергетическим возможностям пользователя (спортсмена).

Целью исследования является анализ изгибной жесткости спортивной лыжи из полимерных композиционных материалов, как одной из важнейших характеристик ее бионической адекватности.

Анализ нагружения, деформирования и движения лыжи. Конструкция и материалы. Потребительские качества спортивных лыж во многом определяются их деформационными характеристиками. Сам принцип функционирования лыжи как средства передвижения реализуется при определенной изгибной жесткости, обеспечивающей подвижность зон опирания и «механическое переключение» режима трения (чередование этапов сцепления и скольжения), схематически показанного на рис. 1. В ненагруженном состоянии зоны опирания лыжи вблизи носка и задника относительно малы. Эти зоны увеличиваются при действии нагрузки (веса человека), примерно поровну распределенной по обеим лыжам, так что на каждую из них действует нормальное усилие $P_{st} = 0,5P_s$, где P_s – вес спортсмена. На этапе толчка при действии суммарной (статической и динамической) нагрузки P_{sum} в момент кратковременной остановки лыжи протяженность зон опирания значительно возрастает, что обеспечивает сцепление со снежным основанием и реализацию максимального значения силы трения покоя. После частичной разгрузки лыжи до статического значения P_{st} , сила трения уменьшается и, благодаря накопленной на стадии толчка кинетической энергии, начинается скольжение.

Отсюда следует, что изгибная жесткость и линия прогиба лыжи определяют пространственное распределение зон ее контакта с основанием, изменение силы трения во времени и, соответственно, энергозатраты и управляемость в процессе движения.

Ранее основным материалом лыжи служила древесина, обладающая достаточно высокой прочностью, являясь при этом экологически безупречным и возобновляемым сырьем. Однако конкурентоспособность деревянных лыж ограничена повышенной массой и инерционностью, невысокой прочностью тонких концевых частей (носка и задника), нестабильным и довольно высоким коэффициентом трения. Общей тенденци-

ей в производстве массовых спортивных лыж стало применение несущих конструктивных элементов из направленно-армированных полимерных композитов (слоев) с наполнителем в виде недорогой и доступной стеклоткани. Эффективным является размещение направленно-армированного слоя на нижней и верхней поверхности внутренней части (сердечника) лыжи для восприятия достаточно высоких растягивающих и сжимающих напряжений, возникающих при изгибе. Во многих случаях сердечник лыжи по-прежнему изготавливается из древесных материалов, обладающих рядом вышеуказанных достоинств при относительно низкой стоимости, но с модификациями, направленными на снижение массы (фрезерование пазов, формирование сотовой структуры и т. д.).

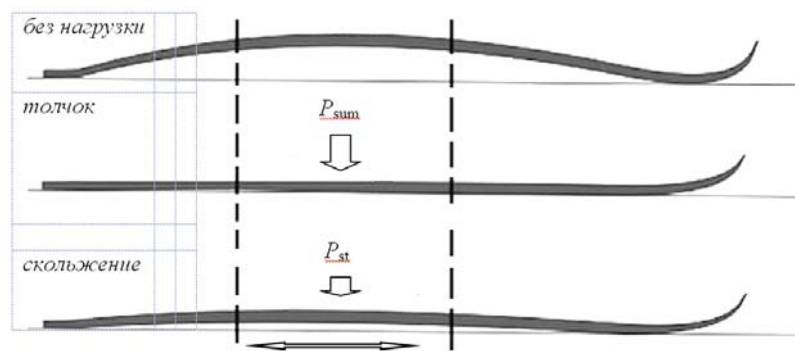


Рис. 1. Схема функционирования лыжи с подвижными границами зон контакта

Таким образом, с позиций механики композитов современные спортивные лыжи представляют собой многослойный «сэндвич» (рис. 2). Относительно тонкие, но весьма жесткие армирующие слои высокомодульного направленно-армированного стеклопластика 1 дистанцированы толстым промежуточным слоем легкого (сотового или микропористого) заполнителя 2. При изгибе «сэндвича» армирующие слои «работают» на растяжение и сжатие и, тем самым, при небольшой массе композитной лыжи обеспечивают ее высокую жесткость и прочность при изгибе. Дополнительный вклад в изгибную жесткость лыжи вносит слой скольжения из антифрикционного полимерного материала 3 и декоративное покрытие 4.

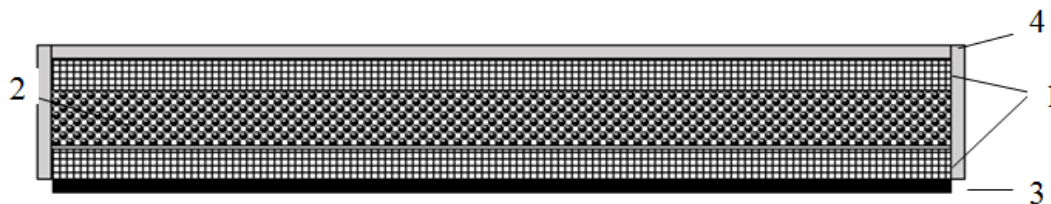


Рис. 2. Поперечное сечение композитной лыжи:

1 – армирующие слои; 2 – сердечник;

3 – слой скольжения; 4 – декоративное покрытие

Следовательно, лыжи представляют собой геометрически сложные композитные конструкции с выраженным градиентом упругих и прочностных характеристик по толщине. Регулирование модулей упругости материала и толщины слоев позволяет добиться изгибной жесткости лыжи, обеспечивающей наилучшее выполнение движительной функции за счет оптимального распределения зон опирания во времени при толчке и последующем скольжении (рис. 1).

Оптимальные размеры и размещение конструктивных композитных элементов могут быть найдены из механических испытаний образцов лыж и проектировочных расчетов.

Методы исследования. Для изучения деформационно-прочностных свойств спортивных лыж авторами применялись статические механические испытания, аналитические и численные методы решения задач теории упругости о деформировании слоистых стержней и пластин из изотропных и анизотропных материалов. Общая схема исследований показана на рис. 3. В настоящей публикации изложены результаты статических механических испытаний по определению изгибной жесткости и линии прогиба спортивных лыж известных производителей. Выполнялись также испытания и расчеты призматических фрагментов разрабатываемых композитных лыж в виде слоистых «сэндвичей» из различных материалов (полиэтилена, стеклопластика, древесины, пенополистирола) в условиях трехточечного изгиба с базой (расстоянием между опорами) 205 и 600 мм.

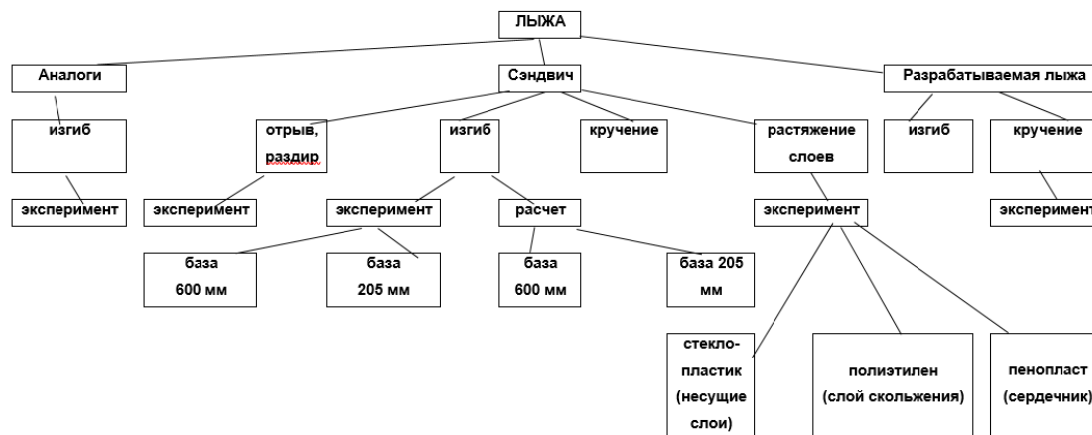


Рис. 3. Схема экспериментальных и расчетных исследования лыжи и ее фрагментов

Определение деформационных характеристик при изгибе пластиковых лыж известных производителей. На начальном этапе исследования определяли изгибную жесткость и линию прогиба существующих массовых спортивных лыж. По соответствующим стандартам [3, 4] на машине Инстрон 5567, оснащенной специальным приспособлением, были проведены статические механические испытания массовых спортивно-беговых лыж в условиях трехточечного изгиба (рис. 4).

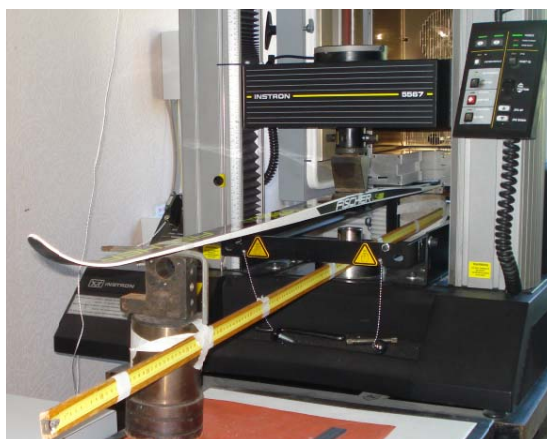


Рис. 4. Размещение спортивной лыжи при испытании на изгиб

На поверхность лыжи в центре тяжести прикладывалась вертикальная нагрузка 30 Н и производилось измерение вертикальных перемещений в 19-ти равноудаленных точках по всей длине лыжи. Линии прогиба трех импортных аналогов (Fisher LS Combi (а), Brados Pro Skate (б), Active Classic STC) показаны на рис. 5.

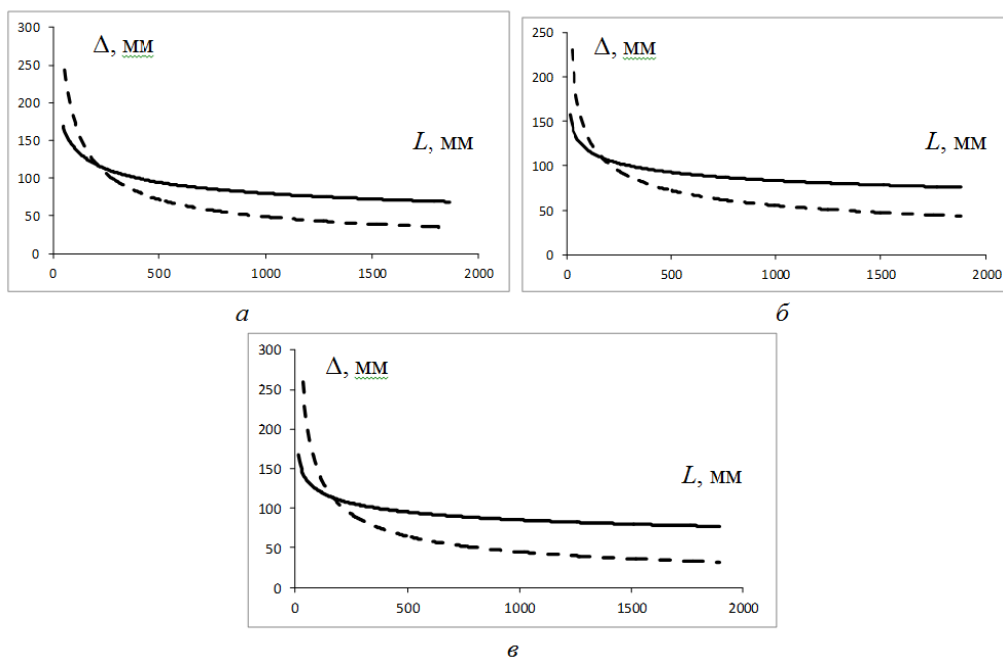


Рис. 5. Координаты профиля лыж до (прямая линия) и после (пунктирная линия) приложения нагрузки: лыжа Fisher LS Combi (а), Brados Pro Skate (б), Active Classic STC (в)

Механические испытания материалов разрабатываемой лыжи. В условиях трехточечного изгиба на машине Инстрон 5567 (рис. 6) по стандартам [5, 6] были также испытаны призматические фрагменты пластиковых лыж в виде «сэндвичей» из различных материалов, включая полиэтилен (ПЭ), стеклопластик (С) и пенополистирол (П).



Рис. 6. Измерение прогиба трехслойного ПЭ-С-П образца от усилия, примененного в центре при верхнем положении антифрикционного слоя полиэтилена

На рис. 7 показаны полученные практически линейные экспериментальные зависимости силы от прогиба для четырех- и трехслойных образцов (выполнялось по 3 нагружения каждого образца), позволяющие определить их жесткость $H = F/\Delta$.

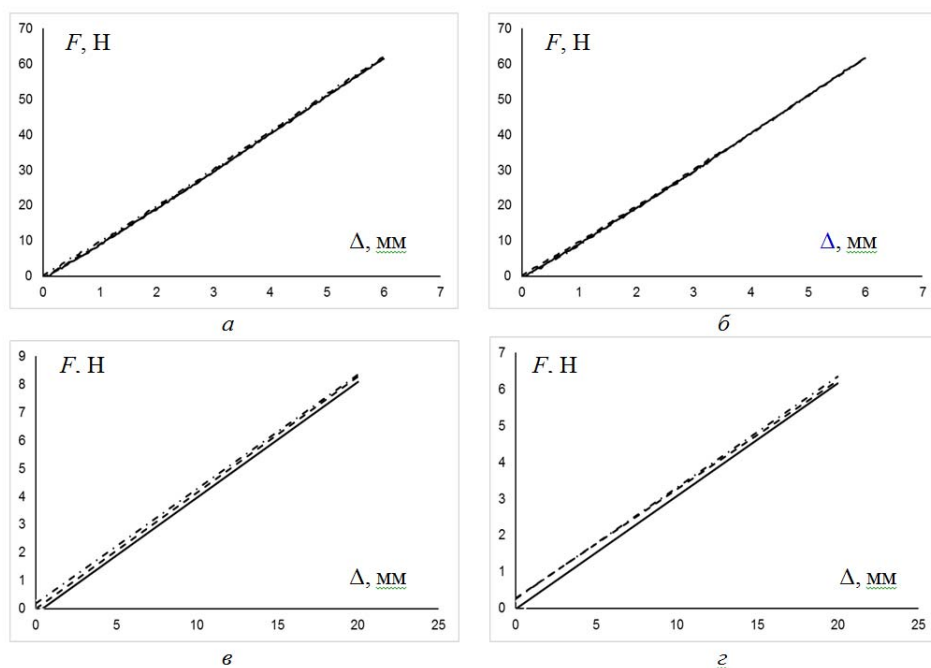


Рис. 7. Зависимости прогиба от усилия, приложенного в центре четырехслойного ПЭ-С-П-С образца при верхнем положении антифрикционного слоя полиэтилена (а) и его нижнем положении (б), трехслойного ПЭ-С-П образца при верхнем положении антифрикционного слоя полиэтилена (в) и его нижнем положении (г)

Можно заметить, что деформации всех «сэндвичей» являются упругими, а изгибная жесткость четырехслойного образца превышает жесткость трехслойного образца почти на порядок. Установлено также, что по этому параметру четырехслойный вариант сопоставим с аналогичным по размерам фрагментом лыжи из древесины. Расположение образца на опорах (антифрикционный слой вверху или внизу) незначительно влияет на величину изгибной жесткости образцов.

Расчетное определение изгибных перемещений. Помимо статических испытаний, позволивших экспериментально определить изгибную жесткость H слоистых фрагментов лыжи, практический интерес представляет оптимизация их структурных параметров с использованием аналитических и конечноэлементных расчетов.

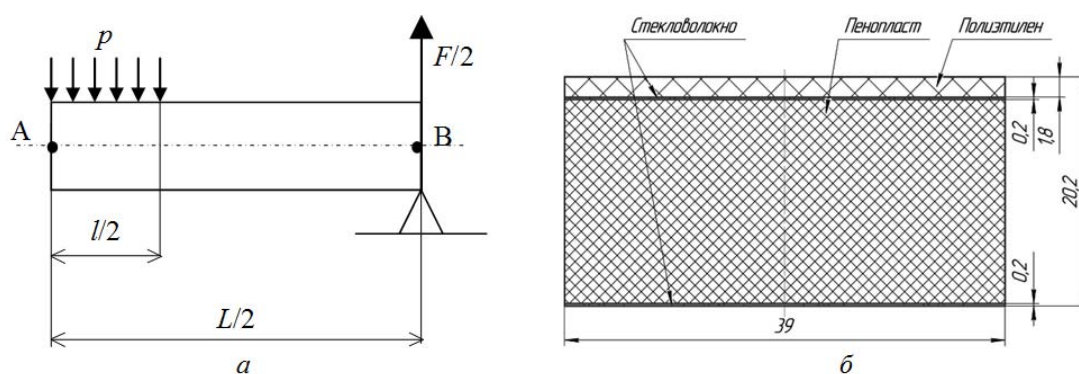


Рис. 8. Расчетная схема изгиба (а) и размеры поперечного сечения (б) четырехслойной балки

В качестве примера рассматривался изгиб четырехслойной балки «полиэтилен-стеклопластик-пенополистирол-стеклопластик», размещенной на двух опорах, под действием давления p , равномерно распределенного в средней части верхней поверхности (на рис. 8 показана правая половина симметричной конструкции).

В точке A вследствие симметрии нагрузки относительно середины балки угол поворота поперечного сечения равен нулю. В точке B равен нулю изгибающий момент. Используя стандартные соотношения сопротивления материалов [7], для относительного смещения точек A и B получим

$$u = u_F - u_p = \frac{1}{3EJ} \left(\frac{F}{2} \right) \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{pb}{EJ} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \left[\frac{1}{8} \frac{l}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{L}{2} - \frac{l}{2} \right) \right]$$

Здесь u_F , u_p – относительные смещения, вызванные силой $F/2$ и давлением p соответственно; E , J – эффективные значения модуля Юнга и момента инерции поперечного сечения балки, произведение которых связано с эффективной изгибной жесткостью.

Рассмотрим трехточечный изгиб однородного линейно упругого стержня с моментом инерции поперечного сечения J_0 . Механические свойства материала стержня характеризуются модулем Юнга E_0 . Расстояние между опорами L_0 . Изгибная жесткость такого стержня, равная отношению вертикальной силы, приложенной в средней точке, к максимальному прогибу, будет определяться соотношением

$$H_0 = \frac{F}{u} = \frac{48E_0J_0}{L_0^3} \quad (1)$$

По аналогии с характеристиками однородного стержня E_0 и J_0 , введем соответствующие эффективные характеристики слоистого стержня E , J для которых выполняется соотношение

$$EJ = \frac{1}{48} HL^3 \quad (2)$$

В последнем равенстве изгибная жесткость образца H определяется экспериментально при испытаниях на трехточечный изгиб или вычисляется аналитически по формулам (1) и (2).

Используя соотношения (1) и (2), для максимального прогиба при действии распределенной нагрузки получим

$$u = \frac{F}{8H} (8 - 4q^2 + q^3) \quad (3)$$

$q = l/L$ – отношение длины зоны нагружения к расстоянию между опорами L .

На рис. 9 и в табл. 1 выполнено сопоставление результатов расчета по формуле (3) с оценками, полученными методом конечных элементов в программном продукте ANSYS при различном уровне дискретизации. Расстояние между опорами $L = 60$ см. Давление p равномерно распределено по ширине балки $b = 39$ мм. Длина участка нагружения l варьировалась от нуля (сосредоточенная сила) до L . При этом давление p корректировалось по условию сохранения величины нагрузки $F = pbl$.

Были заданы следующие значения характеристик упругости и толщины слоев: стеклопластик $E = 22,0$ ГПа, $\nu = 0,2$, $h = 0,2$ мм; пенополистирол $E = 28,1$ МПа, $\nu = 0,05$, $h = 18$ мм; полиэтилен $E = 400$ МПа, $\nu = 0,45$, $h = 1,8$ мм. Определялся максимальный прогиб балки в зависимости от значений F и l .

Можно отметить, что аналитическое решение (3) с приемлемой точностью соответствует конечноэлементному моделированию (расхождение результатов не превышает 12 %). Несколько заниженные значения перемещения обусловлены использованием при выводе соотношения (3) допущений элементарной теории изгиба.

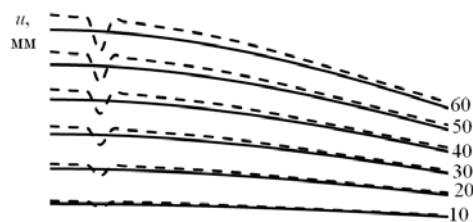


Рис. 9. Зависимость прогиба четырехслойной балки от относительной длины участка нагружения. Сплошные кривые – соотношение (3); пунктирные – метод конечных элементов. Числа у кривых соответствуют значению силы, H

Таблица 1 – Результаты расчета четырехслойной конструкции «полиэтилен-стеклопластик-пенопласт-стеклопластик»

F, H	Максимальная величина прогиба балки для размера ячейки сетки, мм				
	1	2	5	10	15
10	1,703	1,7	1,7	1,703	1,72
20	3,407	3,4	3,4	3,406	3,439
30	5,11	5,1	5,1	5,109	5,159
40	6,813	6,8	6,8	6,812	6,878
50	8,516	8,498	8,5	8,516	8,598
60	10,22	10,197	10,201	10,219	10,318

Можно видеть, что увеличение размера ячеек сетки дискретизации от 1 до 10 мм не влияет на коэффициент жесткости, значение которого составляет 5,8 Н/мм.

В таблице 2 сопоставлены значения прогибов всех испытанных образцов, полученные расчетными методами с экспериментальными значениями. Конечноэлементное моделирование контактных деформаций, возникающих при действии клинового индентора при испытании на трехточечный изгиб), не приводит к существенному повышению точности расчета перемещений.

Таблица 2 – Значения прогиба, от величины нормальной нагрузки, мм

F, H	Эксп.	Плоская деформация		Плоское напряженное состояние		3D	Аналит. решение
		1	2	1	2		
1	2,5	2,1	2,1	2,1	2,1	2,2	2,1
2	5,0	4,2	4,2	4,2	4,2	4,4	4,2
3	7,5	6,3	6,3	6,4	6,3	6,5	6,3
4	10,0	8,3	8,3	8,5	8,5	8,7	8,4
5	12,5	10,4	10,4	10,6	10,6	10,9	10,5
6	14,2	12,5	12,5	12,7	12,7	13,1	12,6

Э – эксперимент, 1 – сосредоточенная сила, 2 – учет контактных деформаций.

Таким образом, упрощающие предположения о состоянии плоской деформации или плоского напряженного состояния, а также изотропии армирующих слоев приводят к завышенной оценке изгибной жесткости. Так, экспериментальному значению изгибной жесткости трехслойного образца «полиэтилен – стеклопластик – пенопласт»

$H_{\text{exp}} = 0,4$ Н/мм соответствует расчетное значение $H_{\text{anal}} = 0,443$ Н/мм, найденное по формуле (1).

Заключение. Проведенные статические механические испытания на трехточечный изгиб показали, что деформационно-прочностные расчеты спортивных лыж в первом приближении могут базироваться на упрощенных (одномерных и двумерных) аналитических и конечноэлементных моделях трехслойных и четырехслойных «сэндвичей» с постоянной толщиной слоев в предположении изотропии и линейной упругости материалов. Для уточненного расчета изгибной жесткости спортивной лыжи следует использовать трехмерные конечноэлементные модели, описывающие упругую анизотропию несущих слоев и сложную геометрическую форму конструкции. При оптимизации конструкции рассматриваемого спортивного снаряжения следует использовать комплексный критерий бионической адекватности, включающий как деформационно-прочностные, трибологические, массогабаритные и транспортно-энергетические параметры лыж, так и антропометрические и скоростно-силовые показатели спортсмена.

Благодарности. Работа выполнена по заданию ПМТ 6.09 и при поддержке БРФФИ (Т18КОРГ-004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Норман, Д.А. *Дизайн вещей будущего* /Д.А. Норман Пер. с англ. – М.: Strelka Press, 2013. – 224 с.
2. Jinsu Gim, I. *Quantification and Design of Jumping-Ski Characteristics // Proc. of the Inst. of Mech. Eng., Part P: J. of Sports Eng. and Technology.* – 2018. – Vol. 232, №. 2. – P. 150–159.
3. *ГОСТ 30045-93 Лыжи спортивно-беговые. Методы испытаний.* – М.: Издательство стандартов, 1990. – 12 с.
4. *ГОСТ 17043-90. Лыжи. Технические условия.* М.: Издательство стандартов, 1990. – 21 с.
5. *ASTM D 3039/D 3039M-08. Standard Test Method for Polymer Matrix Composite Materials.* – 2008. – 13 p.
6. *ГОСТ 25.604-82. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний композиционных материалов с полимерной матрицей (композитов). Метод испытания на изгиб при нормальной, повышенной пониженной температурах.* – М.: Стандартинформ. – 2005. – 17 с.
7. *An Introduction to Sandwich Construction / Edited by Professor Dan Zenkert.* – London, Chameleon Press. – 1995. – 277 p.
8. *Старовойтов, Э.И. Механика материалов / Э.И. Старовойтов – Гомель: БелГУТ, 2011. – 380 с.*

ДИНАМИКА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АМОРТИЗАЦИОННЫХ ПРУЖИН В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

¹Василевич Ю.В., ¹Шелег В.К., ²Неумержицкая Е.Ю., ¹Москалев С.А.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Академия последипломного образования, Минск

Существует широкий спектр пружин, предназначенных для выполнения разнообразных функций, регламентированных функциональными требованиями инженерной практики, к числу которых относятся механические системы для гашения колебаний, смягчения динамической нагрузки, регулирования работы предохранительных клапанов и др. При конструировании амортизационных пружин в основу положены: расчеты на прочность и жесткость конструктивных изделий, определение геометрических размеров и механических характеристик материала; результаты экспериментальных исследований, подтверждающие надежность работы пружин в заданных эксплуатационных условиях.

В работе выполнен анализ методик по расчету винтовых и тарельчатых пружин, подверженных как статической так и динамической нагрузкам. Разработаны рекомендации конструирования амортизационных пружин с учетом использования механических свойств рекомендуемого материала для их изготовления и функциональных требований, предъявляемых при действии ударной нагрузки.

Расчет на прочность винтовых пружин круглого поперечного сечения. Расчет на прочность винтовых пружин осложняется сложным напряженным состоянием, возникающим одновременно при кручении, сдвиге и изгибе стальной проволоки, круглого поперечного сечения, из которой изготавливаются пружины. В процессе эксплуатации они подвергаются действию растягивающих или сжимающих сил. Полагая, что угол наклона витков мал в расчетной схеме деформационным изгибом пренебрегают, упрощая решение задачи. Пусть к пружине со средним диаметром D , имеющей n витков с диаметром d поперечного сечения проволоки, приложена центральная растягивающая сила F . Используя метод сечений, определим поперечную силу $Q = F$ и крутящий момент $M_k = F \cdot D/2 = F \cdot R$. Поперечная сила вызывает равномерно распределенные по сечению среза касательные напряжения $\tau_1 = 4F/\pi d^2$, а момент M_k – напряжения $\tau_2 = 16FR/\pi d^3$. Поскольку направления действия τ_1 и τ_2 на внутреннем радиусе пружины совпадают, то максимальное касательное напряжение τ_{max} в поперечном сечении будет равно сумме τ_1 и τ_2

$$\tau_{max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \cdot \left(1 + \frac{d}{4R}\right) \quad (1)$$

Из (1) следует, что если $d/4R \ll 1$, то

$$\tau_{max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \quad (2)$$

Формулой (2) следует пользоваться для пружин, изготовленных из тонкой проволоки и имеющих большой средний радиус R . В этом случае пренебрегают касательным напряжением τ_1 по сравнению с τ_2 , т.к. касательное напряжение при кручении больше

аналогичной величины при срезе. Для мощных пружин, характеризующихся большой величиной отношения d/R , касательные напряжения на срез значительны и ими при расчете на прочность не пренебрегают. Как отмечено в [1], «исходя из опыта эксплуатации пружин первые трещины при разрушении, как правило, появляются с внутренней стороны витка, где действуют наибольшие касательные напряжения».

При выводе формулы (1) не принимались во внимание разные радиусы кривизны на внутренней и внешней поверхностях витков пружины. В [1] приведена формула, по которой можно получить более точные расчетные результаты на основе учета изложенного замечания

$$\tau_{max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \cdot \left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad \text{где } m = \frac{D}{d} \quad (3)$$

Поправочный коэффициент, фигурирующий в круглых скобках (3), показывает, что его значение увеличивается с уменьшением m .

Расчет перемещения винтовой цилиндрической пружины (растяжения или осадки). При расчете перемещения пружины рассматривают кручение витков. Для этого методом сечений из витка пружины выделяется элементарный элемент длиной ds . Вне выделенного элемента материал пружины считается жестким. В плоскости, перпендикулярной оси пружины, в которой находится выделенный элемент ds , боковые сечения элемента жесткими стержнями (являющимися радиусами пружины) соединяем с осью пружины и к их концам прикладываем растягивающие силы F . Считая, что одно из сечений элемента неподвижно, второе сечение повернется на угол $d\varphi$, определяемый по формуле

$$d\varphi = \frac{M_k ds}{GI_p},$$

где $M_k = F \cdot R$, $I_p = \pi d^4 / 32$, G – модуль сдвига.

В процессе описанной деформации кручения одна из растягивающих сил F переместится вертикально на расстояние λ , определяющее удлинение (или осадку) цилиндрической витой пружины.

$$\lambda = \frac{M_k R}{GI_p} 2\pi R n = \frac{64FR^3 n}{Gd^4} = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}, \quad (4)$$

Особое внимание заслуживает расчет пружин, подвергающихся удару, когда необходимо учитывать их амортизационные свойства, т.е. поглощение материалом пружины деформационной энергии при ее функционировании. В основу расчета положена прямо пропорциональная зависимость между перемещением пружины λ и действующей на нее силой F . Известно, что потенциальная энергия U деформации пружины определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} F \lambda = \frac{32F^2 R^3 n}{Gd^4}. \quad (5)$$

Выразив из (2) крутящий момент M_k и подставив его выражение в формулу (5) получим нелинейную зависимость потенциальной энергии от максимального касательного напряжения

$$U = \frac{2\pi Rn}{4G} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tau_{\max}^2 \quad (6)$$

Формулу (6) преобразуем к виду

$$U = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V, \quad (7)$$

учитывая, что $2\pi Rn$ – длина пружины; $\pi d^2/4$ – площадь поперечного сечения проволоки; произведение учтенных величин – это объем V материала пружины.

Приравнявая τ_{\max} к значению предельно допустимой величины $[\tau]$ касательного напряжения из формулы (7) найдем

$$U = \frac{[\tau]^2}{4G} V. \quad (8)$$

Из (8) следует, что объем материала винтовой цилиндрической пружины, обеспечивающий ее заданную конструкционную прочность, рассчитывается по формуле

$$V = 4GU/[\tau]^2. \quad (9)$$

Из изложенной методики по расчету прочностных и деформационных свойств цилиндрической пружины следует, что для конструирования, надежной работы и удовлетворения заданным эксплуатационным условиям описанного изделия, необходимо оперировать его геометрическими размерами, числом витков и механическими характеристиками материала на сдвиг, учитывая зависимость между постоянными упругости для однородного изотропного материала

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

При сжатии пружины ее осадка должна быть такой, чтобы зазоры между витками не закрывались.

Методика расчета напряжения и деформаций в пружинах некруглого сечения. К наиболее распространенным поперечным сечениям пружин с некруглой формой относятся изделия с прямоугольным, эллиптическим, треугольным и другими типами поперечных сечений. В этом случае гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений) не приемлема из-за действия касательных напряжений, вызывающих искривление поперечных сечений. Задачи такого типа сложны и в основном рассматриваются в математической теории упругости. Здесь мы ограничимся инженерными методами расчета пружин прямоугольного и эллиптического поперечного сечения, наиболее часто применяемых на практике. Как и для витых цилиндрических пружин круглого поперечного сечения принимается, что касательные напряжения при кручении направлены по касательной к контуру сечения.

Напряжения и деформация при кручении пружин некруглого сечения рассчитываются по тем же формулам, что и для пружин с круглым сечением:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (10)$$

$$\varphi = \frac{M_k l}{GI_k}, \quad (11)$$

$$\theta = \frac{M_k}{GI_k}, \quad (12)$$

где I_k – момент инерции поперечного сечения, см^4 ; W_k – момент сопротивления при кручении, см^3 ; θ – относительный или погонный угол закручивания, его размерность см^{-1} .

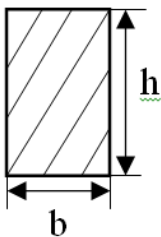
Для пружин с прямоугольным поперечным сечением, для которого h и b – соответственно длинная и короткая стороны прямоугольника, максимальное касательное напряжение рассчитывается по формуле (10) с учетом того, что

$$W_k = \alpha hb^2. \quad (13)$$

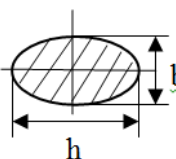
Максимальные касательные напряжения возникают у поверхности посредине длинных сторон прямоугольника; меньшие напряжения $\tau = \gamma\tau_{\max}$, наблюдаются посредине у поверхности коротких сторон.

Угол закручивания φ прямоугольного сечения рассчитывается по формуле (11), в которой $I_k = \beta hb^3$, где величины α , β , γ зависят от отношения сторон прямоугольника h/b , табл. 1.

Таблица 1 – Исходные данные для расчета напряжений и деформаций витых цилиндрических пружин прямоугольного и эллиптического поперечных сечений [1]

Форма сечения	Момент инерции при кручении $I_k, \text{см}^4$	Момент сопротивления при кручении $W_k, \text{см}^3$	Исходные параметры				
			1	2	3	4	
1.	 <p>$I_k = \beta h b^3, \text{см}^4$ $W_k = \alpha h b^2, \text{см}^3$</p>	<p>Точки с наибольшими касательными напряжениями</p> $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}$ <p>Посредине длинных сторон</p> $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k},$ <p>Посредине коротких сторон</p> $\tau = \gamma \tau_{\max};$ <p>в углах напряжения равны нулю</p>	$W_k = \alpha h b^2$	h/b	α	β	γ
1				0,208	0,141	1	
1,5				0,231	0,196	0,859	
1,75				0,239	0,214	-	
2,0				0,246	0,229	0,795	
2,5				0,256	0,249	-	
3,0				0,267	0,263	0,753	
4,0				0,282	0,281	0,745	
6,0				0,299	0,299	0,743	
8,0				0,307	0,307	0,743	
10,0				0,313	0,313	0,743	
∞				0,333	0,333	0,743	

Окончание таблицы 1

1	2	3	4
<p>2.</p>  <p>$I_k = \frac{\pi hb}{64} (h^2 + b^2)$ – условный момент инерции при кручении для эллипса;</p> <p>$W_k = \frac{\pi b^2 h}{16}$ – момент сопротивления при кручении.</p>	<p>В наружных точках малых полуосей</p> <p>$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k}$</p> <p>В наружных точках больших полуосей</p> <p>$\tau = \tau_{\max}/m$</p>	<p>$W_k = \frac{\pi b^2 h}{16}$</p>	<p>$\frac{h}{b} = m > 1$</p>

Условия прочности и жесткости для пружин прямоугольного поперечного сечения запишем в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\alpha hb^2} \leq [\tau], \quad \theta = \frac{M_k}{\beta hb^3 G} \leq [\theta], \quad (14)$$

где $[\tau]$ и $[\theta]$ – допускаемое касательное напряжение при кручении (чистом сдвиге) и допускаемый погонный угол закручивания.

Для пружин с эллиптическим поперечным сечением максимальное касательное напряжение при кручении возникает в крайних точках малых полуосей:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_k}{\pi b^2 h}, \quad (15)$$

поскольку $W_k = \pi b^2 h / 16$; b и h – размеры малой и большой осей эллипса.

Наибольшее напряжение в наружных точках сечения на большой полуоси

$$\tau_1 = \tau_{\max} / m, \text{ где } m = h/b > 1.$$

Назначение, характеристики и материал тарельчатых пружин

Тарельчатые пружины представляют собой весьма жесткие пружины, применяются преимущественно в буферных устройствах амортизаторов для восприятия больших динамических усилий, а также и в других устройствах, где требуются значительные усилия нажатия при малых осадках пружин [2].

Тарельчатая пружина является упругим элементом, имеющим вид усеченного конуса с углом подъема $\theta = 2 - 6^\circ$, соотношением наружного и внутреннего диаметров $m = D_1 / D_2 = 2 - 3$ [2]. На рис. 1 изображена тарельчатая пружина.

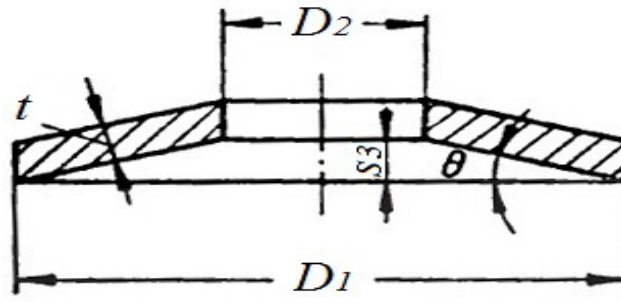


Рис. 1. Тарельчатая пружина

Осевая нагрузка распределяется в процессе работы пружины равномерно по периметру внутренней и наружной кромок каждого кольца. В результате действия силы стенка пружины деформируется и угол подъема уменьшается. При наличии определенного числа секций можно получить необходимую величину осевой деформации тарельчатых пружин.

Тарельчатые пружины изготавливаются методом холодного или горячего штампования из листовой стали толщиной 0,5–10 мм. Первоначально вырубается шайба, которые в последующей операции на специальных штампах выгибаются. Высота конуса обычно находится в пределах 0,6–9 мм, угол подъема не превышает $2-6^\circ$, соотношение наружного и внутреннего диаметров лежит в диапазоне 2–3. После соответствующей термической обработки (закалка и отпуск) до твердости HRC 40–47 поверхности тарелок очищаются от окалины и шлифуются по периметру. Иногда для повышения несущей способности тарельчатых пружин их подвергают заневоливанию путем обжатия до полного сплющивания.

Тарельчатые пружины изготавливаются по ГОСТ 3057-90 [2] или DIN 2093 [3]. Пружины по ГОСТ 3057-90 изготавливают из листового, полосового проката или пружинной ленты из стали марки 60С2А ГОСТ 14959. По согласованию между потребителем и изготовителем допускается изготовление пружин из сталей марок 60С2, 51ХФА, 60С2ХА, 60С2Н2А, 65С2ВА, 70С2ХА по ГОСТ 14959.

Расчетные формулы и методика выбора тарельчатых пружин

Обозначения параметров и расчетные формулы для пружин без опорной плоскости [2] приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Расчетные формулы для тарельчатых пружин без опорной плоскости

Наименование параметра	Расчетная формула или значение
1	2
Сила пружины при рабочей деформации, Н	$F = \frac{4Es}{(1 - \mu^2)YD_1^2} \left[(s_3 - s) \left(s_3 - \frac{s}{2} \right) t + t^3 \right]$
Сила пружины при максимальной деформации, Н	$F_3 = \frac{4Es_3 t}{(1 - \mu^2)YD_1^2}$

Окончание таблицы 2

Напряжение сжатия в кромке I, МПа	$\sigma_I = \frac{4Es}{(1-\mu^2)YD_1^2} \left[-\left(s_3 - \frac{s}{2}\right) C_1 - C_2 t \right]$
Напряжение растяжения в кромке II, МПа	$\sigma_{II} = \frac{4Es}{(1-\mu^2)YD_1^2} \left[-\left(s_3 - \frac{s}{2}\right) C_1 \pm C_2 t \right]$
Напряжение растяжения в кромке III, МПа	$\sigma_{III} = \frac{4Es}{(1-\mu^2)YD_1^2} \frac{D_2}{D_1} \left[(2C_2 - C_1) \left(s_3 - \frac{s}{2}\right) + C_2 t \right]$
Модуль упругости, МПа	$E = 2,06 \cdot 10^5$
Предварительная деформация пружины, мм	$s_1 = (0,2 \dots 0,4)s_3$
Рабочая деформация пружины, мм	$s_2 = (0,3 \dots 0,6)s_3 - \text{для пружин I класса,}$ $s_2 = (0,6 \dots 0,8)s_3 - \text{для пружин II класса}$
Максимальная деформация пружины, мм	s_3
Толщина пружины, мм	t
Наружный диаметр пружины, мм	D_1
Внутренний диаметр пружины, мм	D_2
Коэффициент Пуассона	$\mu = 0,3$
Жесткость пружины, Н/мм	$c = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{s^3}{YD_1^2} \left[\left(\frac{s_3}{t}\right)^2 - 3\frac{s_3}{t} \cdot \frac{s}{t} + \frac{3}{2}\left(\frac{s}{t}\right)^2 + 1 \right]$
Расчетный коэффициент Y	$Y = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{\ln A} \cdot \left[\frac{A-1}{A} \right]^2$
Расчетный коэффициент C ₁	$C_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{\ln A} \cdot \left[\frac{A-1}{\ln A} - 1 \right]$
Расчетный коэффициент C ₂	$C_2 = \frac{3(A-1)}{\pi \ln A}$
Расчетный коэффициент A	$A = \frac{D_1}{D_2}$

Расчетные коэффициенты Y, C₁, C₂ допускается определять по таблице в зависимости от величины A [2]. На рис. 2 показано расположение напряженных кромок тательчатой пружины.



Рис. 2. Напряженные кромки тарельчатой пружины

Напряжение сжатия в кромке I [σ_1] является определяющим для пружин статического нагружения (II класс пружин). Напряжения растяжения в кромках II и III являются определяющими при циклическом нагружении пружин (I класс пружин).

Вид характеристики «сила-деформация» определяют отношением $\frac{s_3}{t}$. При отношении $\frac{s_3}{t} < 0,6$ зависимость «сила-деформация» практически линейна. При отношении $\frac{s_3}{t} \geq 0,6$ зависимость «сила-деформация» нелинейна.

При циклическом нагружении пружин средством регулирования выносливости служит изменение разности между напряжением растяжения при максимальной деформации и напряжением при рабочей деформации. Возрастание разности обуславливает увеличение выносливости и стойкости пружин при одновременном возрастании размеров узла.

Пример выбора пружин класса I (циклический вид нагружения):

1. Исходными величинами для определения размеров пружин являются силы F_1 и F_2 , величины предварительной S_1 и рабочей деформации S_2 . Ориентировочно задают габариты пружинного узла.
2. Определить силу, соответствующую максимальной деформации $F_3 = \frac{F_2}{0,6}$.
3. В таблицах с параметрами и размерами тарельчатых пружин найти силу, ближайшую к значению F_3 и выбрать геометрические размеры, наиболее удовлетворяющие заданным условиям.
4. По силе F_1 и F_2 из таблицы определить деформации s_1 и s_2 .
5. Определить количество пружин в пакете. Определить свободную высоту пакета, высоту при рабочей, предварительной и максимальной деформации.

Схемы сборки тарельчатых пружин в пакеты


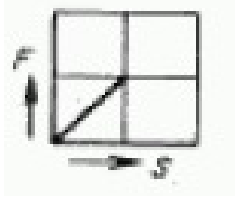
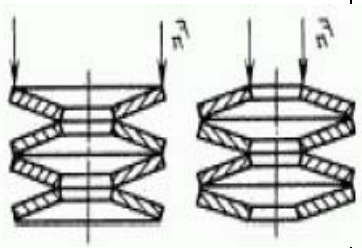
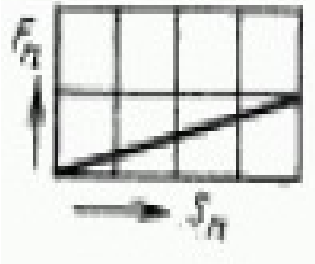
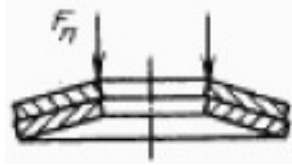
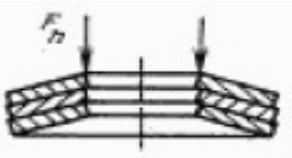

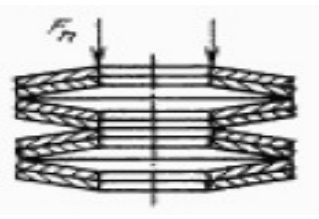
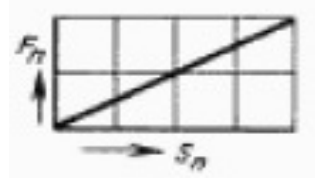
В зависимости от необходимого хода сжатия тарельчатые пружины могут использоваться поодиночке или собираться в пакеты. Сборку пружин в пакете осуществляют при помощи направляющего стержня или фиксирующих разделительных колец. Значительным преимуществом изделий такого вида является возможность варьирования силовых и геометрических параметров пакета пружин в зависимости от схемы сборки.

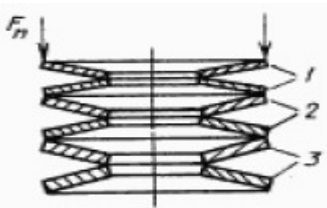
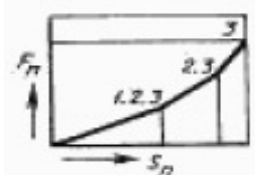
Основные схемы сборки пакета изделий следующие:

- одиночная;
- последовательная;
- параллельная;
- параллельно-последовательная;
- пакет с пружинами различной толщины.

Изменение характеристики «сила-деформация» в зависимости от схемы сборки пружин показано в табл. 3.

Таблица 3 – Схемы сборки тарельчатых пружин

Схема сборки	Параметр пакета пружин	Вид характеристики
<p>1</p> <p>Одиночная</p> 	<p>2</p> F_3 s_3 l_0	<p>3</p> 
<p>Последовательная</p> 	$F_{\text{пак}} = F_3$ $S_{\text{пак}} = ns_3$ $L_0 = nl_0$ $\Delta L_0 = n\Delta l_0$	
<p>Параллельная</p> <p>1. Двухпараллельная</p>  <p>2. Трехпараллельная</p> 	$F_{\text{пак}} = KF_3n_1$ $S_{\text{пак}} = s_3$ $L_0 = l_0 + (n_1 - 1)t$	
<p>Параллельно-последовательная</p> 	$F_{\text{пак}} = KF_3n_1$ $S_{\text{пак}} = ns_3$ $L_0 = n[l_0 + (n_1 - 1)t]$	

<p>Пружины различной толщины</p> 	$F_{\text{пак}} = F_3$ $S_{\text{пак}} = \sum_{i=1}^n s_{3i}$ $L_0 = \sum_{i=1}^n l_{0i}$	
--	---	---

Параметры пакета пружин в табл. 3 обозначены:

- $F_{\text{пак}}$ – сила при максимальной деформации пакета;
- n – количество пружин при последовательной сборке;
- n_1 – количество пружин при параллельной сборке;
- K – коэффициент, учитывающий сухое трение при параллельной сборке:
- $K = 1,06$ при двухпараллельной сборке;
- $K = 1,09$ при трехпараллельной сборке;
- $K = 1,12$ при четырехпараллельной сборке;
- $S_{\text{пак}}$ – максимальная деформация пакета пружин;
- L_0 – высота пакета в свободном состоянии.

При ударных нагрузках (для погашения энергии) между тарелками иногда устанавливают шайбы, которые способствуют увеличению жесткости за счет сил трения, развиваемых при скольжении кромок тарелок по шайбам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко, Г.С. *Сопротивление материалов: учебник* / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка [и др.] . – Киев: “Вища школа”, 1986. – 755 с.
2. ГОСТ 3057-90. *Пружины тарельчатые. Общие технические условия. Введен 01.07.91.* – М: Изд-во стандартов, 1990. – 37с.
3. DIN 2093. *Disksprings. 1992-01.* – 19p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКЕ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

¹Василевич Ю.В., ²Неумержицкая Е.Ю., ¹Беляцкая Л.Н., ³Скворцов К.Г.,
³Федотов Д.А

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Академия последипломного образования, Минск

³ОАО «Авангард», Сафоново, РФ

Пусть процесс изготовления изделия в форме тела вращения начинается с момента, когда наполнитель в виде ленты или ткани, пропитанный жидким связующим, наматывается с натяжением на оправку. Пропитка ткани может быть осуществлена предварительно или в процессе намотки. Если пропитка ткани осуществляется в процессе намотки, то одновременно с намоткой следует рассматривать процесс фильтрации связующего через наполнитель. При условии предварительной пропитки ткани обогрев ее осуществляется только через обогревающий ролик. Это недостаточно, чтобы связующее проявляло массовую миграцию по толщине полуфабриката. Процесс фильтрации следует рассматривать после окончания намотки при разогреве, когда полимерные смолы приобретают свойство текучести.

Полагаем, что материал полуфабриката состоит из двух фаз – упругого цилиндрически анизотропного наполнителя и связующего, способного фильтроваться в жидком состоянии через наполнитель. Кроме того, принимаются следующие допущения:

- 1) наполнитель и оправка предварительно нагреты до одной и той же температуры, неизменной до конца намотки и не влияющей на приобретение связующим свойства текучести;
- 2) рассматривается плоская осесимметричная задача;
- 3) изменение объема среды за счет сжимаемости связующего пренебрежимо мало по сравнению с изменением объема за счет его фильтрации через наполнитель;
- 4) изменение объема среды за счет сжатия материала наполнителя пренебрежимо мало по сравнению с изменением объема за счет более плотной упаковки его каркаса;
- 5) оправка непроницаема для связующего;
- 6) жесткость оправки существенно превышает жесткость полуфабриката.

Намотка нитью или тканью является одним из наиболее распространенных способов изготовления деталей (особенно имеющих форму тел вращения) из армированных пластиков. Рост толщины изделий и существенная анизотропия материала в состоянии переработки привлекли внимание к силовой стороне процесса и определяемым ею эффектам [1–3]. Эксперименты свидетельствуют о том, что система начальных напряжений окружных и радиальных во многом определяется величиной усилия натяжения и законом изменения этого усилия в процессе намотки. Путем изменения натяжения в процессе намотки можно в значительной степени регулировать величину и характер распределения этих напряжений [1, 4]. Рассматриваемый технологический прием представляется полезным, так как начальные напряжения могут быть весьма опасными. Особенно это относится к радиальным напряжениям: из-за малой прочности стеклопластиков на растяжение перпендикулярно волокнам они могут стать источником трещин в композиционном материале.

Можно выделить три наиболее важные группы намоточных изделий: тонкостенные оболочки (их толщина пренебрежимо мала по сравнению с радиусом), составные изделия и толстостенные элементы конструкций. Для тонкостенных оболочек важно

найти оптимальную схему армирования; для составных изделий определяющим является контактное давление на границе раздела, для толстостенных элементов конструкции кроме перечисленных проблем возникает проблема монолитности, тесно связанная с задачей управления эпюрами начальных радиальных σ_r^0 и окружных σ_θ^0 напряжений. Необходимо отметить, что полуфабрикат обладает очень низкой прочностью и жесткостью в радиальном направлении. Так, отношение модулей упругости вдоль и поперек волокон E_θ/E_r может быть больше 10^3 [5]. Создание «растущего тела» из такого материала путем послойной намотки связано с заметной сжимаемостью витков и, как следствие, неизбежной потерей и перераспределением предварительно заданного усилия натяжения N_0 .

Исследование изменения усилия натяжения материала при намотке требует решения вспомогательных задач: необходимо знать падение натяжения в витках на этапах намотки и в результате разогрева связующего перед полимеризацией. Для описания падения натяжения в витках в процессе намотки воспользуемся решением, полученным в [1, 2]. При рассмотрении этого этапа витки ленты, последовательно наматываемые друг на друга, заменены тонкими кольцами. Таким образом, задача рассматривается как осесимметричная и сводится к исследованию напряженного состояния системы из большого числа анизотропных тонких колец толщиной c , посаженных на оправку, а затем друг на друга, с натягом, равным натяжению ленты T при намотке.

Выражения для напряжений при намотке полуфабриката любой толщины с произвольным изменением усилия натяжения ленты можно записать в виде [2]

$$\sigma_r^* = \frac{1}{R_B} (\rho^{\beta_*-1} + \rho^{\beta_*+1}) \sum_{j=0}^n \frac{T(\rho_j)}{\rho_j^{\beta_*} + \rho_j^{-\beta_*}},$$

$$\sigma_\theta^* = \frac{T(\rho)}{c} - \frac{1}{R_B} (\rho^{\beta_*-1} + \rho^{\beta_*+1}) \sum_{j=0}^n \frac{T(\rho_j)}{\rho_j^{\beta_*} + \rho_j^{-\beta_*}}.$$
(1)

Здесь

$$\rho = \frac{r}{R_B}; \quad \rho_j = \frac{R_B + jc}{R_B}; \quad \beta_* = \sqrt{\frac{E_\theta^*}{E_r^*}}; \quad k = \frac{R_H}{R_B}; \quad R_H = R_B + nc,$$

r – текущий радиус; R_H, R_B – наружный и внутренний радиусы намотанного кольца; c – толщина ленты; E_θ^*, E_r^* – окружной и радиальный модули упругости кольца.

Учитывая, что толщина ткани c имеет достаточно малую величину, можно положить

$$c = dr \quad \text{и} \quad dp = \frac{dr}{R_B}.$$

С учетом этого зависимость (1) записывается следующим образом

$$\sigma_r^* = -(\rho^{\beta_*-1} + \rho^{\beta_*+1}) \frac{1}{c} \int_{\rho}^k \frac{T(\rho) d\rho}{(\rho^{\beta_*} + \rho^{-\beta_*})},$$

$$\sigma_\theta^* = \frac{T(\rho)}{c} - (\rho^{\beta_*-1} - \rho^{\beta_*+1}) \frac{1}{c} \int_{\rho}^k \frac{T(\rho) d\rho}{(\rho^{\beta_*} + \rho^{-\beta_*})}.$$
(2)

На втором этапе технологического процесса (при термообработке) полимерное связующее перед полимеризацией размягчается и фильтруется между волокнами. Это приводит к дополнительным перемещениям витков u^{**} . В работе [6] предложено рассматривать указанный процесс как уменьшение модуля в радиальном направлении (с E_r^* до E_r^{**}). Окружной модуль считается постоянным, т. е. $E_\theta^{**} = E_\theta^*$. При таком предпо-

ложении напряжения $\sigma_r^{**}, \sigma_\theta^{**}$ в кольце после разогрева и размягчения связующего можно связать с напряжениями в кольце после намотки (до размягчения связующего) $\sigma_r^*, \sigma_\theta^*$ следующим образом [7]

$$\begin{aligned}\sigma_r^{**} &= \sigma_r^* \frac{E_r^{**}}{E_r^*} + \frac{E_r^{**}}{R_B} \frac{du^{**}}{d\rho}, \\ \sigma_\theta^{**} &= \sigma_\theta^* + \frac{E_\theta^{**}}{R_B} \frac{u^{**}}{\rho}.\end{aligned}\quad (3)$$

Из условий равновесия под действием сил $\sigma_r^{**}, \sigma_\theta^{**}$ и сил $\sigma_r^*, \sigma_\theta^*$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_r^{**}}{d\rho} + \frac{\sigma_r^{**} - \sigma_\theta^{**}}{\rho} &= 0, \\ \frac{d\sigma_r^*}{d\rho} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\theta^*}{\rho} &= 0.\end{aligned}$$

следует уравнение для определения u^{**}

$$\frac{d^2 u^{**}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du^{**}}{d\rho} - \beta_{**} \frac{u^{**}}{\rho^2} = f(\rho) \psi R_B, \quad (4)$$

где

$$f(\rho) = \frac{\sigma_\theta^*}{\rho E_r^{**}}, \quad \beta_{**} = \sqrt{\frac{E_\theta^*}{E_r^{**}}}, \quad \psi = \frac{\beta_{**}^2 - \beta_*^2}{\beta_{**}^2}.$$

Выражая из второго уравнения (3) неизвестную функцию u^{**} , через σ_θ^{**} и σ_θ^*

$$u^{**} = (\sigma_\theta^{**} - \sigma_\theta^*) \frac{R_B \rho}{E_\theta^*}, \quad (5)$$

и используя (1), получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \sigma_\theta^*}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\sigma_\theta^*}{d\rho} + \frac{\sigma_\theta^*}{\rho^2} (1 - \beta_*^2) &= \\ = \frac{d^2 \sigma_\theta^{**}}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\sigma_\theta^{**}}{d\rho} + \frac{\sigma_\theta^{**}}{\rho^2} (1 - \beta_{**}^2).\end{aligned}\quad (6)$$

Теперь, если задан закон распределения напряжений σ_θ^{**} перед полимеризацией, можно найти соответствующее ему распределение напряжения до размягчения связующего σ_θ^* , а затем закон изменения натяжения $T(\rho)$ в процессе намотки, обеспечивающий заданное распределение напряжений σ_θ^* после ее окончания.

Процедура получения $T(\rho)$ такова: решается неоднородное дифференциальное уравнение (6) при граничных условиях $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^{**}$ при $\rho = 1$ и

$$\frac{\sigma_\theta^{**} - \sigma_\theta^*}{k} + \frac{d\sigma_\theta^{**}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^*}{d\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = k.$$

Второе граничное условие получено из того, что на наружной $\sigma_r^{**} = \sigma_r^* = 0$ поверхности должно быть. Отсюда из первого уравнения следует

$$\frac{du^{**}}{d\rho} = 0,$$

а из (5), дифференцируя его по ρ , получим второе граничное условие. Затем для найденного σ_θ^* из (13) решается второе уравнение из (2) с учетом граничного условия $T = \sigma_\theta^* \cdot c$ при $\rho = k$. Такое представление решения предусматривает отсутствие паде-

ния напряжения в последнем витке в результате намотки.

Уравнение (6) является уравнением Эйлера. Его решение представляется в виде суммы частного решения $\overline{\sigma_\theta^*}$ и общего решения $\widetilde{\sigma_\theta^*}$, соответствующего однородному уравнению. Последнее имеет вид

$$\widetilde{\sigma_\theta^*} = c_1 \cdot \rho^{\beta_*-1} + c_2 \cdot \rho^{-(\beta_*+1)}.$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий. Частное решение уравнения (6) можно найти методом вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим пример. Пусть в изделии, не снятом с оправки, все витки напряжены равномерно. Это означает, что $\sigma_\theta^{**} = A = const$. В этом случае частное решение уравнения (6) представляется следующим образом

$$\overline{\sigma_\theta^*} = A \cdot \frac{1 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2}.$$

Отсюда находим, что

$$\sigma_\theta^* = c_1 \cdot \rho^{\beta_*-1} + c_2 \cdot \rho^{-(\beta_*+1)} + A \cdot \frac{1 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2}.$$

Коэффициенты c_1 и c_2 найдены путем удовлетворения функции σ_θ^* граничным условиям. В итоге они равны

$$c_1 = \frac{A}{k^{\beta_*} + k^{-\beta_*}} \left(\frac{k}{\beta_*} + \frac{\beta_*^2 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2} \cdot e^{-\beta_*} \right),$$

$$c_2 = \frac{A}{k^{\beta_*} + k^{-\beta_*}} \left(\frac{\beta_*^2 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2} \cdot e^{-\beta_*} - \frac{k}{\beta_*} \right).$$

Решение второго уравнения (2) осуществляется следующим образом. Выполним дифференцирование правой и левой частей по ρ . В результате получим

$$\frac{dT(\rho)}{d\rho} - T(\rho) \left[\frac{(\beta_* - 1)\rho^{-2} - (\beta_* + 1)}{\rho^{-1} - \rho} - \frac{\rho^{-1} - \rho}{1 + \rho^{-2\beta_*}} \right] =$$

$$= c \cdot \frac{d\sigma_\theta^*}{d\rho} - \sigma_\theta^* \left[\frac{(\beta_* - 1)\rho^{-2} - (\beta_* + 1)}{\rho^{-1} - \rho} \right] = \Psi(\rho). \quad (7)$$

Решение уравнения (7) следует искать в виде суммы общего решения $\overline{T(\rho)}$ однородного уравнения и частного решения $\widetilde{T(\rho)}$. Для получения общего решения рассмотрим неопределенные интегралы вида

$$I_1 = \int \frac{\rho^{-2} dp}{\rho^{-1} - \rho} = \ln \rho \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$I_2 = \int \frac{dp}{\rho^{-1} - \rho} = \ln(\rho^2 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

$$I_4 = \int \frac{dp}{1 + \rho^{-2\beta_*}}, I_3 = \int \frac{\rho^{-1}}{1 + \rho^{-2\beta_*}} = \ln(\rho^{2\beta_*} + 1)^{\frac{1}{2\beta_*}}.$$

Последний интеграл является “неберущимся” интегралом. Однако его можно вычислить довольно точно приближенным методом. Для этого подынтегральное выраже-

ние представим в виде приближенной зависимости

$$\frac{\rho}{1 + \rho^{-2\beta_*}} \approx \frac{\rho^{-1}}{B + D\rho^{-2\beta_*}}. \quad (8)$$

Коэффициенты B и D найдем из условий того, что зависимость (8) превращается в равенство в точках $\rho = 1$ и $\rho = k$. В таком случае коэффициенты B и D будут равны

$$B = \frac{1 - (2n^2 - 1)n^{-2\beta_*}}{n^2(1 - n^{-2\beta_*})}; \quad D = \frac{2n^2 - 1 - n^{-2\beta_*}}{n^2(1 - n^{-2\beta_*})}.$$

В реальных конструкциях параметры n и β_* лежат в пределах:

$$1,01 < \frac{R_H}{R_B} = k < 1,1 \text{ и } 10 < \beta_* < 80.$$

Для оценки вносимой погрешности построены графики левой и правой частей соотношения (8). Оказалось, что разность точного и приближенного значений не превышает 8 %, причем β_* в указанных пределах изменения параметров практически не влияет на точность приближения. Только для сравнительно толстых колец ошибка достигает 8 %. После интегрирования ошибка приближения уменьшается примерно вдвое.

В результате с учетом зависимости (8) решение уравнения (7) можно представить в виде

$$T(\rho) = G \cdot \varphi(\rho) - \int_{\rho}^k \frac{\psi(\rho) d\rho}{\varphi(\rho)}, \quad (9)$$

Где

$$\varphi(\rho) = \left[\rho \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right]^{(\beta_* - 1)} (\rho^2 - 1)^{\frac{(\beta_* + 1)}{2}} (\rho^{2\beta_*} + 1)^{\frac{1}{2\beta_*}} \left(\rho^{\beta_*} + \frac{D}{B} \right)^{\frac{1}{2\beta_* B}}.$$

Здесь в (9) первое слагаемое представляет общее решение однородного уравнения, а второе слагаемое – частное решение, которое получено методом вариации произвольной постоянной. Постоянная G определяется из граничного условия и равна

$$G = c \cdot \left. \frac{\sigma_{\theta}^*(\rho)}{\varphi(\rho)} \right|_{\rho=k}.$$

Рассматриваемый технологический прием – введение программированной намотки, представляется полезным, так как начальные напряжения могут быть весьма опасными. Особенно это относится к радиальным напряжениям из-за малой прочности стеклопластиков на растяжение перпендикулярно волокнам, так как они могут стать источником трещин.

Выводы

Разработанная теория для создания программы намотки получена в предположении линейной упругости композиционного материала на всех этапах намотки. Такая постановка задачи учитывает важнейший фактор – существенную анизотропию стеклопластиков в состоянии переработки. Это позволяет использовать полученные зависимости в качестве первого приближения при расчете и изготовлении толстостенных осесимметричных намоточных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарнопольский, Ю.М. Изменение усилия натяжения при намотке изделий из стеклопластиков / Ю.М.Тарнопольский, Г.Г. Портнов // *Мех. полимеров.* – 1966. – № 2. – С. 27.
2. Портнов, Г.Г. Особенности механики намотки стеклопластиков. – Кандидатская диссертация. – Рига, 1967. – С. 143.
3. Болотин, В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов / В.В. Болотин // *Механика полимерных материалов.* – 1984. – № 2. – С. 18.
4. Тарнопольский, Ю.М. Проблемы механики намотки толстостенных конструкций из композитов / Ю.М.Тарнопольский // *Механика композитных материалов.* – 1992. – №5. – С. 61.
5. Бейль, А.И. Устранение начальных термических напряжений в намоточных изделиях из композитов изменением узла намотки по толщине / А.И.Бейль [и др.] // *Механика композит. материалов.* – 1980. – № 6.– С. 10.
6. Тарнопольский, Ю.М. Программированная намотка стеклопластиков / Ю.М. Тарнопольский, Г.Г. Портнов // *Механика полимеров.* – 1970. – № 1. – С. 48.
7. Бидерман, В.Л. Определение остаточных напряжений при изготовлении колец из стеклопластиков / В.Л. Бидерман [и др.] // *Механика полимеров.* – 1969. – № 5. – С. 89.

**РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
МАШИН И ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

¹Можаровский В.В., ¹Кузьменков Д.С., ¹Коляскин И.И.,

²Василевич Ю.В., ¹Москалева М.В.

¹ УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. На современном этапе исследований необходимо сосредоточиться в направлении расчета элементов деталей машин с покрытиями из композита, считая, что зона контакта дискретная и давление в модели «шина–дорожное покрытие» будет дискретным, а напряженное состояние покрытия будет изменяться в зависимости от толщины покрытия, свойств материалов, анизотропии и т.д. Необходимо разработать численно-аналитическую модель, с помощью которой можно определять напряженно-деформированное состояние как в дорожном покрытии и основании, но и в контактирующей шине колеса.

Для построения теоретических зависимостей и алгоритмов расчета необходимо рассматривать контактные взаимодействия цилиндрического тела (моделирующие шину) и слоистого основания (моделирующего дорожное покрытие), анализировать и сравнивать механизм трения, качения и скольжения по идеализированным элементам текстуры материала поверхности, учесть основные, геометрические и физические параметры материала дорожного покрытия. Так, имеется большой опыт решения задач подобного класса [1–12]. В монографии [5] приведены результаты расчета НДС слоистых систем из композиционных материалов. Получены аналитические решения плоских граничных задач для изотропной и ортотропной однородной полосы. Наличие большого опыта в проведении научных работ в данной области свидетельствует предлагаемый список публикации за последние годы [7–12].

Настоящая работа продолжает перечень начатых работ в области фундаментальных и прикладных исследований в направлении создания новых армированных материалов на основе современных полимеров и резин, работающих в сложных эксплуатационных условиях, в основном, касаясь применительно к движению автомобильных шин [7–13].

В данном случае, представлена методика дальнейшего расчета контактного взаимодействия армированных материалов с учетом явления дискретности контакта для резины, армированной кордом.

Актуальность исследуемой проблемы в научном и техническом мире очевидна. Ежегодно десятки статей и книг, а также диссертаций посвящены вопросам по этой проблеме. Так, например, в работе [8] представлен расчет полосы с дискретным контактом на основе МКЭ. Нами были проведены экспериментальные исследования контактного взаимодействия шины колеса [9] (см. рисунок 1), получены размеры зоны контакта «шина колеса – плоское основание» и деформативности шины (в ИММС НАН Беларуси). Как видно из рисунка отпечатка, область контакта является дискретной и давление в зоне контакта распределено неравномерно, что подтверждается численными расчетами, проведенными в работе [8, 9] и представленного на рис. 1.

Поэтому возникла необходимость построения алгоритма численной реализации контактного взаимодействия с учетом различных факторов.

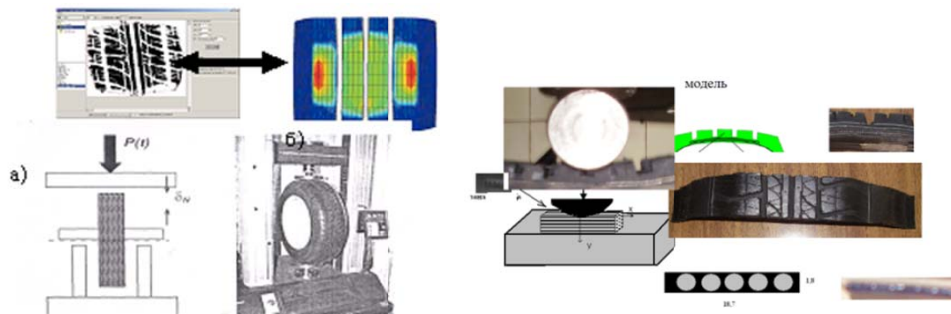


Рис. 1. Схемы и образцы испытаний, экспериментальные результаты, реализация численного исследования

Постановка задачи: рассмотрим процесс математического моделирования контактного взаимодействия цилиндрической модели шины колеса с основанием, которое имеет ортотропные упругие характеристики. Необходимо построить математическую модель для нахождения величины зоны контакта колеса, давление, и определить какие возникают напряжения в основании колеса, а также найти давление в зоне дискретизации и напряжение в каждом элементе и по всей зоне контакта (см. рис. 2).

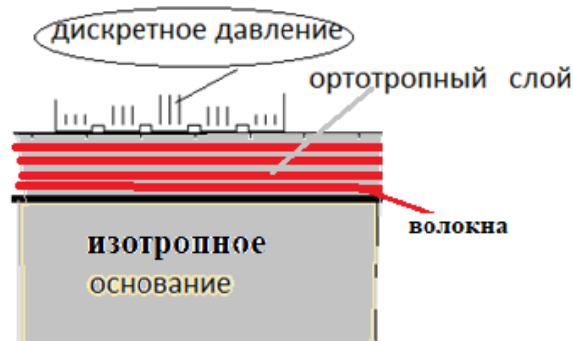


Рис.2. Дискретная численно-аналитическая модель расчета контакта шины колеса

1. Математическая модель расчета НДС ортотропной полосы. Основные зависимости расчета. Рассмотрим задачу о контакте ортотропной полосы с упругой полуплоскостью. Необходимо определить напряженно-деформированное состояние как в ортотропной полосе, так и в упругой полуплоскости. В дальнейшем индекс “I” будет относиться к полосе, а индекс “II” к упругой полуплоскости. Для создания алгоритма расчета используем подход, представленный в работе [5], где выведены основные теоретические зависимости определения напряжений и перемещений, как в полосе, так и в основании.

Примем физические соотношения для плоского ортотропного композита в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций. S_{ij}, E, ν , $(i, j=1,2)$ – технические постоянные материала [5]. Решение ищем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_I} &= -\int_0^{\infty} [A \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + B \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y) + N \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + K \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y)] \cos \alpha x d\alpha \\ \sigma_{x_I} &= \int_0^{\infty} [A \gamma_1^2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + B \gamma_2^2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y) + N \gamma_1^2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + K \gamma_2^2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y)] \cos \alpha x d\alpha \\ \tau_{xy_I} &= \int_0^{\infty} [A \gamma_1 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + B \gamma_2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y) + N \gamma_1 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + K \gamma_2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y)] \sin \alpha x d\alpha \\ v_I &= \int_0^{\infty} [A Q_1 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + B Q_2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y) + N Q_1 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + K Q_2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y)] \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha + d; \\ u_I &= \int_0^{\infty} [A R_1 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + B R_2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y) + N R_1 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + K R_2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y)] \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha + d; \end{aligned} \quad (1)$$

где $Q = S_{12} \gamma_i - \frac{S_{22}}{\gamma_i}$; $R_i = S_{11} \gamma_i^2 - S_{12}$; $i = 1, 2$; d – произвольная константа.

Соответственно, определяем компоненты напряжений и перемещений для основания

$$\begin{aligned} \sigma_{y_{II}} &= -\int_0^{\infty} (C + D_{\alpha y}) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha; \\ \sigma_{x_{II}} &= \int_0^{\infty} [C + D(\alpha y - 2)] e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha; \\ \tau_{xy} &= -\int_0^{\infty} [C + D(\alpha y - 1)] e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha; \\ v_{II} &= \int_0^{\infty} [C \delta + D(\alpha y \delta + \delta - \nu \rho)] e^{-\alpha y} \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha + d; \\ u_{II} &= \int_0^{\infty} [C \delta + D(\alpha y \delta - \rho)] e^{-\alpha y} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha + d, \end{aligned} \quad (2)$$

где при плоской деформации: $\delta = \frac{1+\nu}{E}$; $\rho = \frac{2(1-\nu^2)}{E}$; при плоском напряженном состоянии: $\delta = \frac{1+\nu}{E}$; $\rho = \frac{2}{E}$. Входящие в уравнение коэффициенты при плоской деформации равны

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}; S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2};$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии: $\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0, j = \overline{1,2}$;

$$E_x = E_1, E_y = E_2; \nu_{xy} = \nu_{12};$$

Здесь $E_j, j = \overline{1,2}; G_{12}, \nu$ – технические постоянные материала.

Примем граничные условия на верхней границе полосы, давление на элементе

$$\sigma_{y_1}(y=0) = \begin{cases} p(x), & -a \leq x \leq a; \\ 0, & a < |x|; \end{cases} \quad \tau_{xy}(y=0) = 0. \quad (3)$$

Граничные условия на нижней границе $y = h$:

$$\sigma_{y_1}(y=h) = \sigma_{y_{II}}(y=h); \quad \frac{\partial u_1(y=h)}{\partial x} = \frac{\partial u_{II}(y=h)}{\partial x};$$

$$\tau_{xy_1}(y=h) = \tau_{xy_{II}}(y=h); \quad \frac{\partial v_1(y=h)}{\partial x} = \frac{\partial v_{II}(y=h)}{\partial x}; \quad (4)$$

Согласно [5] из граничных условий получаем систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными коэффициентами A, B, N, K, C, D , где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y$ – компоненты тензора напряжений и деформаций для полосы и основания, h – ширина полосы.

Определение напряжений и перемещений в ортотропной полосе на жестком основании. Соответственно рассматривается случай, когда нагрузка распределяется неравномерно по всей ширине ортотропной полосы (см. рис. 2). Это часто встречается на практике, например, при контакте шины с дорожным покрытием.

Данную задачу можно свести к случаю, рассмотренному ранее, если решить задачу для нагрузки с противоположным знаком на отрезках, а потом результаты просуммировать с результатами, полученными при сплошной нагрузке.

2. Алгоритм решения задачи и программная реализация. Разработан алгоритм, реализующий расчет напряжений и перемещений в ортотропной полосе при ее контакте с упругой полуплоскостью. Его краткое описание приведено ниже.

1) Вводим исходные данные: a, h, p и физико-технические постоянные материалов.

2) Для определения напряжений и перемещений в ортотропной полосе необходимо найти неизвестные коэффициенты A, B, N, K, C, D . Она определяются как решения системы из граничных условий [5].

3) Далее напряжения и перемещения в ортотропной полосе определяются по формулам (1), (2). В данном случае будем использовать численное интегрирование по формуле Симпсона.

4) При использовании тонких композиционных покрытий важно знать напряжения, возникающие на границе раздела покрытие-основание. В этом случае напряжения перемещения определяются также, будем использовать численное интегрирование по формуле Симпсона.

5) Для определения полной картины напряжений и перемещений во всей ортотропной полосе шаги 1)–4) проделываем для каждого x , $-a \leq x \leq a$ для каждого элемента длиной a и для каждого y , $0 \leq y \leq h$.

6) Строим графики распределения напряжений на границе раздела покрытие-основание и внутри ортотропной полосы.

Разработаны программы расчета контактного взаимодействия для полосы (дискретной) и ее основания, при этом строится такой алгоритм, который учитывал свойства волокнистого композита (анизотропию) как для основания, так и для полосы.

Разработан алгоритм и создана программа (см. рис. 3), реализующая определение напряжений и перемещений в ортотропной полосе на жестком основании.

Программа по вышеописанному алгоритму определяет напряжения и перемещения, появляется новое окно, в котором можно выбрать вид результата и конкретную точку по x или по y для вывода. При выборе результата по одной переменной, при выборе фиксированной точки по x или y , при выборе конкретной функции появляются результаты расчетов в виде таблицы и в графическом виде (рис. 4).

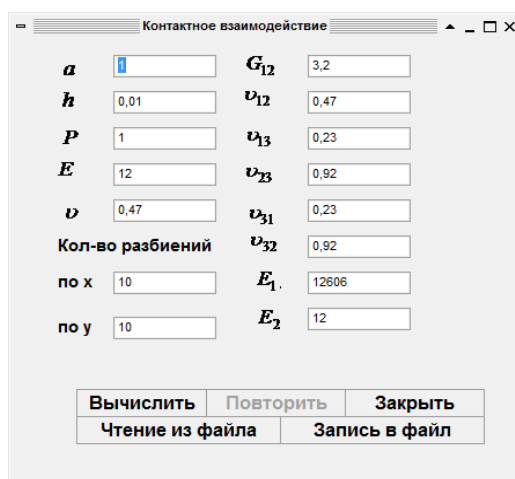


Рис. 3. Главное окно программы, реализующей определение напряжений

При выборе результата по переменным x , y появляются результаты расчетов в виде таблицы для конкретного выбранного напряжения или перемещения.

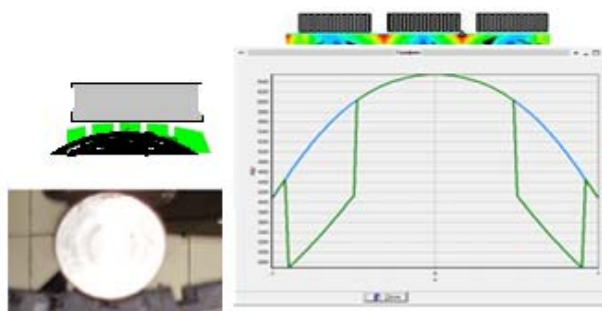


Рис. 4. Расчет напряжений при дискретном контакте. Графики зависимости σ_y от x при $y = 3$

3. Реализация численного расчета напряженно-деформированного состояния в упругом теле под воздействием шины колеса. Перспективы прогресса в машиностро-

нии и строительстве в основном связываются с разработкой и широким применением композиционных материалов (композитов).

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта с массивными шинами (автомобильные, электропогрузчики, подвесные канатные дороги, эскалаторы метро и др.), а также новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии на напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия при силовом квазистатическом воздействии не позволяет обосновать практику их проектирования; не существует сравнимых по эффективности методов расчета поведения конструкций из композитов при контакте по ним внешними объектами. В связи с этим есть необходимость в разработке математической модели и компьютерных программ расчета напряжений при статическом контакте штампа (моделирующего шину колеса) с телом (или покрытием) из композита при различных физических параметрах взаимодействия.

В данном случае особенно важно исследовать механические свойства армированных материалов, работающих в процессе статического контактного взаимодействия цилиндрического тела (моделирующего шину) и слоистого основания и зависимость напряженного состояния упругих тел из композитов (при статическом контакте) от типа ориентации волокон материала, например, армированного кордом.

Анализ применения анизотропных композиционных материалов нельзя производить без учета их взаимодействия с другими телами сопряжения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры, и расположению компонентов, а сути важно учитывать также и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей.

В связи с этим возникает цель исследований – создание математических моделей и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем при силовом статическом воздействии. Создать методику, реализующую определение напряжений и перемещений в объемном теле при заданных областях контакта и действующего давления.

На основании работ [1, 8, 9] представлен алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле, заданной формы [14]. Как и ранее для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Применялись прямоугольные конечные элементы. Данная программа позволяет находить напряженно-деформированное состояние в упругом теле при изменяющейся зоне контакта и действующем давлении во времени. Метод основан на считывании цвета в зоне контакта (каждому давлению в точке соответствует свой цвет). Например, экспериментально полученные результаты можно обработать и получить картину изменения НДС.

Ведется работа по распознаванию цветов загруженного из файла изображения. Загружаем изображение, его разбиваем на КЭ и определяем средний цвет в КЭ и соотносим его к одному из выбранных в программе цветов, которому соответствует определенное значение нагрузки.

Разработанный программный пакет расчета позволяет строить объемные графики напряжений и перемещений, как на поверхности основания (см. рис. 5, 6), так и внутри его, а также изменения компонент напряжений или перемещений с течением времени.

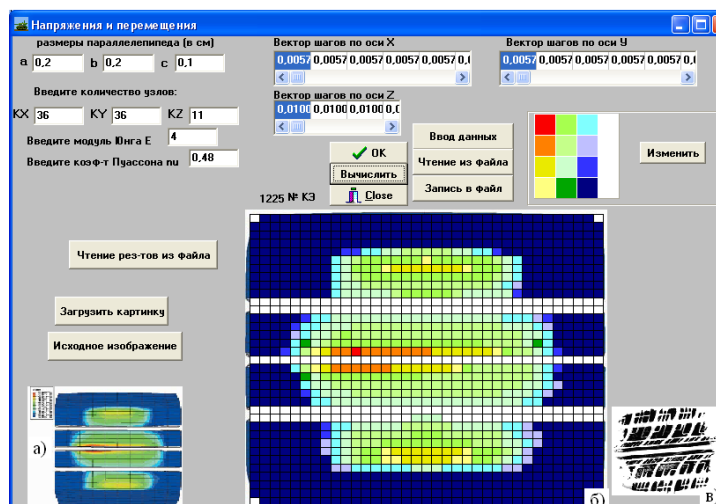


Рис. 5. Схема расчета при действии нагрузки (шины колеса) на основание:
 а) – численный расчет [8, 11]; б) – программная реализация;
 в) – эксперимент в черно-белом свете [9]

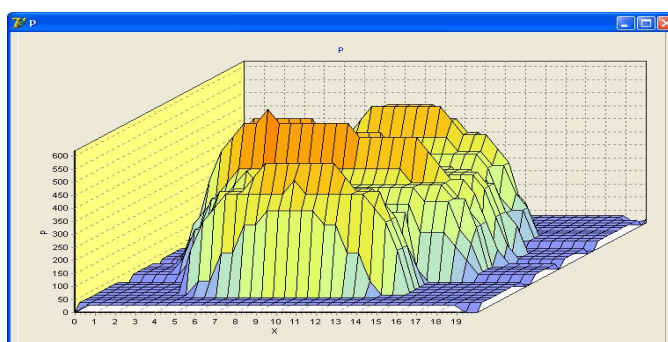


Рис. 6. Качественная картина, показывающая расчет изменения давления на верхней границе при контакте шины колеса

В перспективе исследования будут касаться построения методик определения напряженного и деформированного состояния покрытий дорог, механические свойства которых изменяются по глубине.

Проведено численное исследование напряженно-деформированного состояния слоистой системы, на поверхности которой расположена лунка радиуса r , при действии распределенной нормальной нагрузки (см. рис. 4). На основании предложенного алгоритма строится программа о деформативности элементов деталей машин из композитов на примере расчета зубьев зубчатых колес, а также разработано приложение для расчета напряжений и перемещений в объемном теле заданной формы при действующем давлении и заданных областях контакта «массивная шина-дорожное покрытие».

Выводы. Приведенные в этой статье подход и результаты показали, возможность определения напряженно-деформированное состояние для слоистых тел применительно к дискретному контакту, что дает возможность инженерного расчета взаимодействия «шина-дорожное покрытие».

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргатов, И.И. Основы теории упругого дискретного контакта / И.И. Аргатов, Н.Н. Дмитриев. – СПб.: Политехника, 2003. – 233 с.
2. Аргатов, И.И. Асимптотические модели упругого контакта / И.И. Аргатов. – СПб.: Наука, 2005. – 448 с.
3. Willis, J.R. Hertzian contact of anisotropic bodies / J.R. Willis // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. – 1966. – Vol. 14. – P. 163–176.
4. Свекло, В.А. Действие штампа на упругое полупространство / В.А. Свекло // *Прикладная математика и механика*. – 1970. – Т. 34, вып. 1. – С. 72–178.
5. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука, 1988. – 280 с.
6. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский [и др.] // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22. – № 4. – С. 379–385.
7. Argatov, I.I., Sabina, F.J., 2014. Small-scale indentation of an elastic coated half-space: influence of poisson's ratios on the substrate effect. *Int. J. Eng. Sci.* 8. – P. 33–40.
8. Рыжов, С.А. Проектирование шин с использованием программного комплекса ABAQUS / С.А. Рыжов, К.А. Ильин, А.Н. Варюхин // *САПР и графика*. – 2006. – №1. – С. 20–40.
9. Можаровский, В.В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский [и др.] // *Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов*. – Минск, 2007 – С. 135–142.
10. Можаровский, В.В. О контактном взаимодействии жесткого индентора с армированным резиновым слоем с учетом явлений вязкоупругости / В.В. Можаровский // *Полимерные материалы и технологии*. – 2017. – № 2. – С. 70–79.
11. Можаровский, В.В. Реализация численного расчета напряженно-деформированного состояния в упругом теле под воздействием шины колеса / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // *Проблемы безопасности на транспорте: матер. VIII-ой междунар. научно-практ. конф., 23 – 24 ноября 2017 г.: в 2 ч. Ч. 2*. Бел. гос. ун-т транспорта; под общ. ред.: Ю.И. Кулаженко. – Гомель, 2017. – С. 200.
12. Можаровский, В.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния массивных шин из армированных материалов / В.В. Можаровский // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2008. – № 3. – С. 14–21.
13. Можаровский, В.В. Исследование напряженного состояния волокнистого композиционного материала с однородным покрытием при контакте с цилиндрическим индентором / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2000. – № 2. – С. 5–10.
14. Коляскин, И.И. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого тела при действующем давлении и заданных областях контакта / И.И. Коляскин // *Сборник «Творчество молодых» Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*. – Гомель, 2018. – ч.1 – С. 93–94.

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СВОЙСТВ ПРЕПРЕГОВ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ИЗДЕЛИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

¹Василевич Ю.В., ¹Сафонов А.И., ²Можаровский В.В., ³Неумержицкая Е.Ю.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

³Академия последипломного образования, Минск

Одним из ключевых компонентов создаваемых композиционных материалов является препрег. Техническое изделие, изготовленное из препрега и обладающее большой податливостью, позволяет проводить с ним необходимую переработку. В результате уже сформированное изделие может приобрести новые формы с измененными размерами. При этом, если соблюдать заранее рассчитанные и заданные технологические параметры, то в процессе переработки в армирующем материале препрега не будут возникать остаточные напряжения, что позволит создать качественное и долговечное изделие. Основные характеристики препрегов, исследованные в процессе изготовления изделий из композита, рекомендованы для использования при разработке новых конструкционных материалов, а также изделий с заданными эксплуатационными свойствами.

Композит, препрег, полимер, связующее, стеклопластик, анизотропия, прочность, ткань, волокно, каркас.

Цель работы – дать анализ основных научных результатов, полученных при изготовлении конструкционных изделий на основе препрегов.

Препреги – это полимерно-волоконистая композиционная среда, находящаяся в неотвержденном состоянии полимеров. Композиты можно охарактеризовать как определенную комбинацию разнородных материалов, обладающую специфической структурой и геометрической формой. При проектировании композита стремятся реализовать наивысшие эксплуатационные характеристики материала, недостижимые при использовании каждого из компонентов в отдельности. Довольно часто удается получать композиты с уникальными структурами, формой и свойствами, которые значительно превосходят свойства компонентов [1].

Оптимизация текстильного армирования. Текстильные композиты можно определить, как комбинацию полимерного связующего с системой волокон или нитей, либо с тканью, полученной текстильными методами. Непропитанные волоконистые материалы (волокно, нити или ткани), образующие определенную плоскую или пространственную структуру, называют текстильными армирующими каркасами. Текстильные каркасы различаются ориентацией волокон, видом переплетения и геометрическими параметрами. Варьирование структуры (топологии переплетения) ткани – эффективный путь оптимизации текстильного армирования. Исходными данными для моделирования являются: линейная плотность нитей, их поперечное сечение в свободном состоянии, диаграммы сжатия и изгиба, топология переплетения, плотность ткани. Если ткань деформирована, то модель расчета может быть реализована в новой системе координат. Сравнивая натяжение, изгиб и сжатие нитей в исходной и деформированной конфигурации, можно рассчитать усилия, вызвавшие деформации. Такой подход че-

рез известные деформации наиболее соответствует технологиям трансформации, когда известны начальная и конечная конфигурации.

Элементы конструкций из композиционных материалов, воспринимающие основные и второстепенные нагрузки, должны изготавливаться из высокомодульных волокон и нитей. С коммерческой точки зрения к числу основных высокомодульных волокон относятся стеклянные, углеродные, органические, керамические и стальные волокна. Каждый из видов волокон обладает своими характерными преимуществами и недостатками по сравнению с другими. Например, углеродные волокна самые жесткие и упругие. Органические волокна хорошо сопротивляются разрыву, но плохо переносят сжимающие нагрузки. Стеклянные волокна самые дешевые и доступные, обладают наиболее высокой вязкостью разрушения, но не имеют прочности и жесткости присущих другим волокнам.

Важнейшую роль в пластике играет характер и ориентация расположения наполнителя в матрице, приводящие к анизотропии свойств композита. Анизотропия стеклопластиков (конструктивная анизотропия) оказывается еще одним регулируемым параметром, дополнительной «степенью» свободы при конструировании полимерных материалов и конструкций на их основе. Другим преимуществом перед обычными изотропными материалами является эффективное управление анизотропией их механических, теплофизических и других свойств в плоскости армирования. Это дает дополнительные резервы в повышении надежности конструкций, снижении их массы и расширении области применения. Управление анизотропией свойств осуществляется варьированием укладки арматуры. Появляется возможность формировать свойства материала под конкретную деталь под ее напряженно-деформированное состояние, что обеспечивает повышение несущей способности изделия и приводит к существенному снижению его массы. При этом использование композиционного материала предоставляет возможность широкого выбора исходных компонентов и структурных схем армирования, технологических способов формообразования изделия и получения требуемой геометрии поверхности конструкции, что дает большую степень свободы разработчику при проектировании изделия.

Полимерное связующее. Неотъемлемой частью при разработке композиционного материала является связующее, которое представляет собой двухкомпонентную или многокомпонентную систему, состоящую из синтетической смолы (полимерной или олигомерной составляющей) и отвердителей (или инициаторов и ускорителей отверждения). Она может включать пассивные и активные растворители (разбавители), пигменты и красители, пластификаторы, стабилизаторы и другие материалы, вводимые с целью придания связующим и стеклопластикам необходимых технологических и эксплуатационных свойств.

К основным требованиям, предъявляемым к связующим в производстве стеклопластиков, относятся: высокая когезионная прочность, смачивающая способность и адгезия к поверхности стеклянного волокна, технологичность при переработке и малая объемная усадка при отверждении, низкая токсичность и невысокая стоимость. Кроме того, в зависимости от эксплуатационных требований к изделиям, могут возникать специфические требования к связующим. Например, устойчивость к действию агрессивных сред, термостойкость и др. Выбор связующего определяется условиями изготовления и эксплуатации стеклопластиков. Основная роль полимерного связующего заключается в обеспечении монолитности материала и фиксации армирующих компонентов в

заданном положении или ориентации. Требования к величине вязкости полимерной системы зависят от структуры армирующего каркаса и используемого для пропитки технологического приема. В свою очередь поверхность волокон, контактирующих со связующим, должна иметь возможность быть смачиваемой и совмещаться с полимерной системой.

Пропитанный связующим армирующий текстильный каркас при формовании обычно подвергается действию значительного давления, позволяющего удалить пузырьки воздуха или технологического газа— носителя связующего. Для достижения высоких механических характеристик объемное соотношение армирующего каркаса и полимерной матрицы в текстильных композитах должно составлять примерно 70:30. Важно иметь способ удаления избытка связующего введенного при пропитке. После получения требуемой степени пропитки полимерное связующее отверждается. Отверждение происходит при нормальной или повышенной температуре в одну или несколько стадий в зависимости от вида текстильного материала, типа связующего, способа изготовления композита, необходимой скорости отверждения, степени отверждения и требований к свойствам конечного продукта. Обычно глубокое отверждение полимерной системы в результате высокотемпературной обработки после отверждения увеличивает термостойкость матрицы и композита, однако при этом возрастает и их хрупкость.

Основным видом смол для изготовления текстильных композитов, от которых не требуется высокой термостойкости, являются полиэфирные смолы, которые относительно дешевы, обладают хорошей текучестью, хорошо смачивают поверхность волокон и отверждаются при умеренных температурах. В то же время из-за высокой чувствительности к тепловому воздействию отвержденные полиэфирные смолы имеют низкую прочность, плохо сопротивляются удару и проявляют значительную усадку при повышенных температурах. Полиэфирные смолы с успехом применяются для изготовления текстильных композитов самого разного назначения, что позволило накопить значительный опыт в этой области технологии композитов. Таким образом, можно ожидать, что полиэфирные смолы окажутся вне конкуренции для изготовления текстильных конструктивных композитов, работающих в диапазоне умеренных температур.

Для высокотемпературных областей применения основным связующим для текстильных композитов являются эпоксидные смолы. Они обладают высокой прочностью и отверждаются при сравнительно невысоких температурах (до 160 °С). Вследствие меньшей температурной чувствительности эти системы характеризуются меньшей усадкой и меньшей склонностью к ползучести, чем полиэфирные. К отрицательным свойствам эпоксидных смол относятся высокая стоимость и токсичность, чрезмерная твердость, а также пониженная прочность при высоких температурах. В целом, по существу им комплексу свойств, эпоксидные смолы являются наилучшими из доступных полимерных систем для изготовления композитов, работающих при повышенных температурах, когда их высокой жесткостью можно пренебречь. Сильные ударные воздействия или высокие удельные напряжения при высоких температурах эксплуатации требуют от композита повышенной ударной вязкости. В этом случае необходимо применять рецептуры эпоксидных смол, обладающих большей эластичностью. Такие рецептуры существуют, однако их применение связано с необходимостью выбора между улучшенной ударной вязкостью и снижениями термостойкости, прочности и жесткости.

Оптимальная вязкость связующих для «мокрой» намотки изделий и для изготовления препрегов на практике составляет по вискозиметру ВЗ-1 (1÷3) °Е в градусах Энглера. Именно такие значения вязкости связующих эффективны для пропитки тканей различной структуры при изготовлении препрегов. В этом случае связующее легко проникает в межленточное пространство тканевых наполнителей и хорошо смачивает волокна.

Монолитность композиционных материалов напрямую зависит от степени пропитки связующим. В работе [2] время, необходимое для полной пропитки композита, определяется по формуле

$$t = \frac{\mu f(\delta) k^2 \ln k}{\rho g h + \frac{2\delta \cos \theta}{r_b} \frac{1-\delta}{\delta^2}},$$

где $f(\delta) = 16(1-\delta)^{1,5} [1 + 56(1-\delta)^3]$, $k = r_0 / r_b$, r_0 – наружный радиус макронити; r_b – радиус элементарного волокна; h – высота поднятия жидкости в капилляре; σ – пористость; μ – вязкость связующего; θ – угол наклона арматуры к горизонту.

Анализ приведенного соотношения выше показывает, что скорость капиллярного течения связующего весьма низка (2–8 см/мин), а для того, чтобы скорость пропитки была приемлемой с точки зрения производительности процесса, необходимо протягивать ткань со скоростью 2–80 м/мин, т.е. на два-три порядка выше. Это не обеспечивает полную пропитку армирующего материала в ванне, поэтому процесс пропитки на микроуровне начинается только при выходе из ванны, когда под действием гравитационных сил в капиллярах образуются капли, раздвигающие волокна и способствующие образованию радиальных и продольных щелей, куда устремляется связующее. При этом волокна могут быть раздвинуты настолько, что перестают действовать капиллярные силы. В результате процесс пропитки замедляется. Поэтому необходимо иметь такое натяжение волокон, которое сохранило бы стабильную капиллярную структуру наполнителя. В случае стабильности структуры значительно улучшается качество пропитки и, следовательно, увеличивается количество работающих волокон, что в конечном итоге приводит к повышению прочности композита. Кроме того, для улучшения качества пропитки и, следовательно, для повышения прочности композита намотку следует вести с минимально возможным значением вязкости.

Натяжение арматуры. Роль технологического натяжения арматуры при намотке очень велика. Натяжение определяет коэффициент наполнения композиционного материала арматурой, решающим образом влияет на прочность и другие свойства материала даже при не слишком хороших упругих и адгезионных свойствах применяемого связующего. Однако превышение некоторого максимума технологического натяжения приводит к дополнительным повреждениям армирующих волокон при движении по пропиточно-формирующему тракту станка и к появлению участков, не смоченных связующим и создающих неоднородность свойств материала по толщине наматываемой оболочки.

Оптимальное давление контактного формования при намотке, определяемое натяжением наполнителя, позволяет получать максимальную прочность, минимальную пористость и наилучшие сочетания других свойств материала. Оно зависит от типа армирующего полуфабриката и характеристик полимерного связующего. Но-

минальное значение технологического натяжения армирующего материала, выражаемое в долях разрывной нагрузки применяемой арматуры (P_p), для стеклянных нитей варьируется в пределах 0,12–0,5 от (P_p) [3]. Для стеклоткани натяжение обычно составляет 0,1–0,4 (P_p). При этом уровень применяемых натяжений органоластиков в 2 раза выше, а при намотке углепластиков и боропластиков в 2 раза ниже, чем при намотке стеклопластиков. Таким образом, следует заметить, что оптимальное давление контактного формования при намотке композиционного материала имеет свои определенные границы.

Без обеспечения герметичности стеклопластиков немислимо их применение в ряде отраслей промышленности и новой техники. Поэтому проблема формирования условий, которым должны удовлетворять как исходные элементы композита, так и условия его эксплуатации, для создания герметичной системы весьма актуальна. Между тем при создании изделия или применяется эмпирический подход, или за основу расчета принимаются рекомендации автора работы [4], которые полагают, во-первых, что герметичность системы является функцией лишь деформации ее элементов и, во-вторых, даже при такой постановке анализ основан на простейших плоских моделях. Такой подход к созданию герметичного материала приводит, с одной стороны, к явно завышенным требованиям к деформации связующего, а с другой – не учитывает когезионной и адгезионной прочности композита, что приводит к значительным ошибкам, ибо разгерметизация материала может произойти и вследствие потери сплошности связующего или границы раздела армирующая матрица.

Далее, и это главное, как правило, элементы конструкции должны быть одновременно и герметичными, и несущими, т.е. условия герметичности должны быть построены с учетом требований, предъявляемым к прочностным свойствам материала. В противном случае происходит утяжеление и удорожание конструкции, что связано с необходимостью предусматривать наличие как герметичных, так и несущих слоев.

Сформулируем требования к элементам стеклопластика и к условиям его эксплуатации в аспекте создания герметичной и одновременно достаточно прочной структуры. Нарушение сплошности композита происходит вследствие либо нарушения сплошности связующего или из-за нарушения связи по границе раздела волокно-смола. Условия сплошности описываются системой неравенств [2]

$$\frac{E_c}{E_a} \geq 0,06, \quad \frac{\tau_{адг}}{\sigma_a} \geq 0,04, \quad \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_a} \geq 1,5, \quad \frac{\sigma_c}{\sigma_a} \geq 0,06, \quad \frac{\tau_c}{\sigma_a} \geq 0,04.$$

Из-за существенного различия свойств компоненты стеклопластика разрушаются не одновременно. Поэтому при формулировании условий герметичности необходимо учитывать, какой из компонентов (или контактный слой) разрушается первым. В композитах даже при простых видах нагружения отвердевшее связующее находится в плоском (или объемном) напряженном состоянии, и для оценки его прочности и, следовательно, сплошности совершенно необходимо применение тех гипотез прочности, которые учитывают реальное напряженное состояние.

Как известно, упруго-прочностные свойства композиционных материалов определяются не только упруго-прочностными свойствами их элементов, но и грани-

цами раздела волокно-матрица, которые существенно влияют на равнозагруженность и одновременность работы всех волокон.

При работе композита на сжатие (например, в месте прокола круглого отверстия; при трансформации цилиндрической оболочки в торовую) разрушение материала начинается с потери устойчивости армирующих элементов. Поэтому их жесткость должна оказывать значительное влияние на прочность композита при сжатии. Известно, что жесткость волокон является степенной функцией их диаметра. Можно предположить, что прочность при сжатии существенным образом зависит от диаметра. Действительно, имеет место следующее уравнение регрессии [5, 6]

$$\sigma_{сж} = 115 + 11,5d + 46E_a E_c + 7,75\tau_{адг},$$

т. е. прочность композита линейно связана с диаметром. Здесь E_a и E_c – модули упругости арматуры и связующего; d – диаметр волокна.

Это было подтверждено результатами исследования устойчивости модели стеклопластика, в которой нагрузка непосредственно прикладывается лишь к среднему элементу, а крайние вовлекаются в работу через связующее. Была получена линейная связь между $\sigma_{сж}$ и d .

Изложенный научный материал носит методическую направленность по разработке инженерно-технических изделий из композиционных материалов. Объектом исследования является препрег, физико-механические характеристики которого изучены в процессе формования изготавливаемого изделия, проведения экспериментальных исследований, моделирования технологических и механических процессов. Особое внимание уделено изложению ключевых этапов создания изделий из композита и полученных формул, описывающих количественные показатели результатов исследований. Дополнительным информационным источником по теме работы может служить литература, содержащаяся в приведенном списке литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василевич, Ю.В. Применение свойств препрегов в технических процессах изготовления изделий из композиционных материалов / Ю.В. Василевич и др. // Научное издание. Москва, 2017. – 153 с.
2. Xue, P. Integrated micro/macro-mechanical model of woven fabric composites under large deformation//Composite Structures v.70. – 2005. – P. 69–80.
3. Трофимов, Н.Н. Основы создания полимерных композитов / Н.Н. Трофимов, М.З. Канович. – М.: Наука, 1999. – 539 с.
4. Калинин, В.А. Намотанные стеклопластики / В.А. Калинин, М.С. Макаров. – Москва: Химия, 1986. – 272 с.
5. Кортен, Х.Т. Разрушение армированных пластиков / Х.Т. Кортен; Пер. с англ., под ред. Р.М. Тарнопольского. – М.: Химия, 1967.
6. Рогинский, С.Л. / Основные принципы создания высокопрочных ориентированных стеклопластиков / С.Л. Рогинский, М.З. Канович // Технология, физико-технические свойства и применение стеклопластиков. – М., 1975.– с. 3–17.

СТЕРЖЕНЬ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Дудяк А.И., Хвасько В.М., Марченко И.С.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Поперечным изгибом называется такой вид деформации, когда в поперечных сечениях стержня возникает не только изгибающий момент $M(z)$, но и поперечная сила $Q(z)$. Изгибающий момент в сечении представляет собой равнодействующую элементарных моментов от действия нормальных напряжений σ , а поперечная сила – равнодействующую касательных напряжений τ , действующих в плоскости сечения [1].

Стержнем равного сопротивления будем называть стержень, у которого во всех поперечных сечениях нормальные напряжения будут одинаковы и равны допусжаемому напряжению. Установим закон изменения площади поперечного сечения стержня по его длине. Для этого рассмотрим стержень с зашпеленным концом прямоугольного поперечного сечения, нагруженного сосредоточенной силой F (рис. 1).

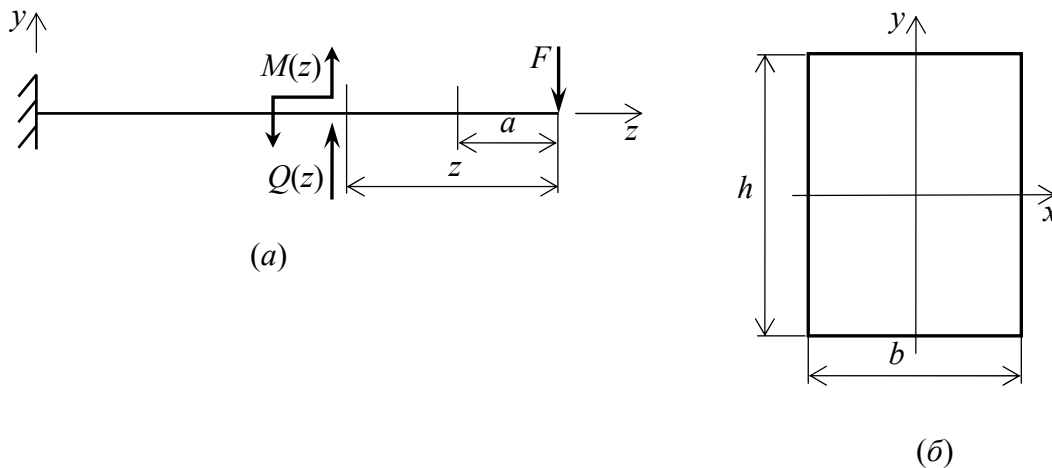


Рис. 1. Схема нагружения стержня (а) и поперечное сечение (б)

Для первого случая примем, что ширина сечения b является постоянной величиной по всей длине стержня, а высота сечения h может изменяться по его длине. Изгибающий момент в сечении на расстоянии z от точки приложения силы F :

$$M(z) = F \cdot z.$$

Согласно [1–3] условие прочности для такого стержня можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M(z)}{W(x)} = \frac{F \cdot z}{W(x)} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где $W(x) = \frac{b(h(z))^2}{6}$ – момент сопротивления сечения;

$h(z)$ – высота сечения в рассматриваемой области, которая является функцией длины.

Подставив значение $W(x)$ в формулу (1) получим

$$\sigma_{\max} = \frac{6F \cdot z}{b(h(z))^2} \leq [\sigma]. \quad (2)$$

Из формулы (2) получаем значение высоты сечения стержня в зависимости от перемещений z :

$$h(z) = \sqrt{\frac{6F \cdot z}{b \cdot [\sigma]}}. \quad (3)$$

Анализируя формулу (3), приходим к выводу, если z стремится к нулю, то и высота сечения $h(z)$ также стремится к нулю. Однако при незначительной высоте сечения стержня в зоне приложения силы F может происходить смятие или сдвиг материала стержня в результате действия касательных напряжений [2].

Условие прочности на сдвиг можно представить, используя формулу Журавского [1–3]:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{b \cdot I_x} \leq [\tau], \quad (4)$$

где $Q = F$ – поперечная сила в окрестностях приложения силы F ;

$S_x^{\text{отс}} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$ – статический момент площади сечения, лежащей выше нейтральной линии Ox ;

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции сечения.

Подставив выражения $S_x^{\text{отс}}$ и I_x в формулу (4), получим:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} \leq [\tau]. \quad (5)$$

Из формулы (5) определим высоту сечения в зоне приложения сосредоточенной силы F :

$$h \geq \frac{3Q}{2b \cdot [\tau]}. \quad (6)$$

Очевидно, что с удалением сечения от точки приложения силы F , нормальные напряжения возрастают и достигают допустимого значения на некоторой длине $z = a$ при постоянной высоте сечения. В этом случае условие прочности (2) можно представить в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{6F \cdot a}{b \cdot h^2} \leq [\sigma]. \quad (7)$$

Из неравенства (7) определяют длину части стержня, когда в сечении нормальные напряжения достигают допустимых значений:

$$a = \frac{b \cdot h^2 \cdot [\sigma]}{6F}. \quad (8)$$

Когда длина участка стержня становится $z > a$, то высота поперечного сечения $h(z)$ увеличивается и определяется по формуле (3).

Во втором случае примем, что высота сечения h является постоянной величиной по всей длине стержня, а ширина сечения b может изменяться в зависимости от длины участка такого стержня. Тогда условие прочности представим в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{6F \cdot z}{b(z) \cdot h^2} \leq [\sigma]. \quad (9)$$

Из формулы (9) получим выражение для определения ширины сечения стержня в зависимости от переменной z :

$$b(z) = \frac{6F \cdot z}{h^2 \cdot [\sigma]}. \quad (10)$$

Из условия прочности на сдвиг (5) ширина сечения стержня в окрестности приложения силы F будет

$$b = \frac{3Q}{2h \cdot [\tau]}. \quad (11)$$

Длина участка стержня $z = a$, где нормальные напряжения достигают допускаемого значения, определяется из формулы (8). Когда длина участка становится $z > a$, то ширина сечения $b(z)$ определяется из формулы (10).

Пример. На двухопорную балку действует сосредоточенная нагрузка $F = 20$ кН (рис. 2). Материал балки – Сталь 3, $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа. Требуется подобрать изменяющиеся поперечные сечения по длине балки таким образом, чтобы она была равнопрочной.

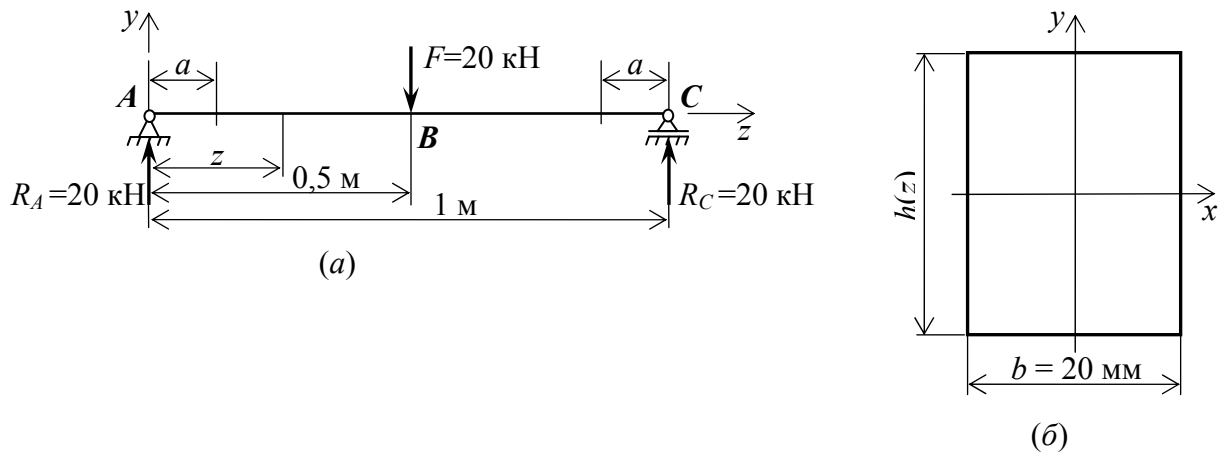


Рис. 2. Схема нагружения балки (а) и ее прямоугольное поперечное сечение (б)

При решении задачи принимаем, что ширина сечения $b = 20$ мм является величиной постоянной по всей длине балки. Следует подобрать размеры высоты сечения в зависимости от длины рассмотренного сечения.

По формуле (6) определяем высоту сечения в зонах опор A и C :

$$h = \frac{3Q}{2b \cdot [\tau]} = \frac{3R_A}{2b \cdot [\tau]} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 100} = 7,5 \text{ мм.}$$

В соответствии с формулой (8) горизонтальный участок длиной $z = a$, где напряжения будут достигать допускаемых значений, будет равен:

$$a = \frac{b \cdot h^2 \cdot [\sigma]}{6R_A} = \frac{20 \cdot 7,5^2 \cdot 160}{6 \cdot 10 \cdot 10^3} = 3 \text{ мм.}$$

При длине участка от зоны A до зона B (при $z > a$) высоты сечения определяются из выражения (3):

$$h(z) = \sqrt{\frac{6R_A \cdot z}{b \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10 \cdot 10^3}{20 \cdot 160} \cdot z}.$$

Используя последнее выражение для $h(z)$ были получены числовые значения для $5 \leq z \leq 50$. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Результаты расчетов высоты сечения в зависимости от длины балки

z , мм	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$h(z)$, мм	9,68	13,69	16,77	19,36	21,65	23,71	25,62	27,39	29,05	30,62

В связи с симметричностью нагрузки высота сечения $h(z)$ от зоны C до зоны A будет изменяться аналогично расчетам, приведенным в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. *Сопротивление материалов: учеб. для вузов* / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – С. 157–187.
2. Писаренко, Г.С. *Справочник по сопротивлению материалов* / Г.С. Писаренко [и др.]; отв. ред. Г.С. Писаренко. – 2-е изд., перераб и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – С. 249–257.
3. Подскребко, М.Д. *Сопротивление материалов: учеб.* / М.Д. Подскребко. – Минск: Высшая школа, 2007. – С. 296–318.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

А.В. Яровая

Белорусский государственный университет транспорта

Введение. Слоистые элементы конструкций широко применяются в инженерной практике, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета при динамических и квазистатических воздействиях. В монографиях [1–5] приведены общие подходы к постановке краевых и начально краевых задач о деформировании трехслойных стержней, пластин и оболочек, разработаны методы их решения. Применение инженерных методов расчета подобных конструкций содержится в работах [6, 7]. Колебания трехслойных вязкоупругих оболочек и круговых пластин, геометрия и движение которых описываются с помощью тех или иных гипотез, исследовались в [8–11]. Локальные динамические воздействия равномерно распределенных нагрузок на круговые трехслойные пластины и контактное взаимодействие тел рассмотрено в статьях [12–15], резонансные эффекты – в публикациях [16–18].

Здесь исследованы малые осесимметричные поперечные колебания упругой круглой трехслойной пластины связанной с упругим основанием, под действием параболических поверхностных нагрузок.

1. Общее решение начально-краевой задачи. Для описания кинематики не-симметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Используется цилиндрическая система координат r, φ, z , координатная плоскость связывается со срединной поверхностью заполнителя. Заполнитель считается легким, т.е. пренебрегается его работа в тангенциальном направлении. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , т. е. $w(r, t), \psi(r, t), u(r, t)$. Далее эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , через G_k, K_k обозначены модули сдвига и объемной деформации k -го слоя ($k = 1, 2, 3$). Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой $q_R = \kappa_0 w$, κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круглой трехслойной пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, получена в [1] из вариационного принципа Гамильтона.

$$\left. \begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0; \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w &= -q, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$; ρ_k – плотность материала; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+; \\ a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \quad a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Задача определения функций $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластины следует из (1) при $q = 0$. Ее решение рассмотрено в [1]. В результате построения система собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n, r)$, которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n(\beta_n, r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right] \quad (3)$$

где J_0, I_0, J_1, I_1 – функции Бесселя;
 d_n – нормировочные коэффициенты

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \int_0^1 \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right]^2 r dr = \frac{1}{2} [J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)] - \\ &- \frac{J_0(\beta_n)}{\beta_n I_0(\beta_n)} [J_1(\beta_n) I_0(\beta_n) + J_0(\beta_n) I_1(\beta_n)] + \frac{J_0^2(\beta_n)}{2I_0^2(\beta_n)} [I_0^2(\beta_n) - I_1^2(\beta_n)], \end{aligned}$$

Для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомые перемещения $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ представляются в виде разложений в ряд:

$$\begin{aligned} q(r, t) &= M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \\ u(r, t) &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $T_n(t)$ – неизвестная функция времени;
 $q_n(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям;
 β_n – собственные числа; φ_n – система функций

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n) r - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (I_1(\beta_n) r - I_1(\beta_n r)) \right]; \\ b_1 &= \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}. \end{aligned}$$

Алгебраические уравнения для определения собственных чисел β_n следуют из граничных условий. При заделке или шарнирном опирании контура пластины при $r = 1$ должны выполняться требования:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0; \quad \text{или} \quad u = \psi = w = M_r = 0.$$

Первые три равенства выполняются тождественно в каждом случае, а последние приводят к следующим трансцендентным уравнениям:

$$\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} = -\frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)};$$

$$\frac{J_0(\beta)}{a_7(\beta J_0(\beta) - J_1(\beta)) + a_8 J_1(\beta)} = -\frac{I_0(\beta)}{a_7(\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)) + a_8 I_1(\beta)}. \quad (5)$$

После вычисления собственных чисел частоты колебаний ω_n определяются так:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4, \quad (6)$$

где

$$a_{60} = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^-;$$

$$K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k; \quad a_7 = a_6 - a_2 b_1 - a_5 b_2, \quad a_8 = a_{60} + a_2 b_1 + a_5 b_2.$$

$$M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D.$$

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений (4) на v_n и проинтегрировав его по площади пластины. В силу ортонормированности системы собственных функций v_n имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr \quad (7)$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (4) и использования линейной связи функций v_n, φ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8) будет

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) q_n(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий (2):

$$A_n = \int_0^1 f(r) v_n r dr; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 g(r) v_n r dr. \quad (10)$$

2. Вынужденные колебания параболической нагрузкой.

1. Пусть на пластину действует локально приложенная выпуклая параболическая нагрузка (рис. 1, а)

$$q(r) = q_0 H_0(a-r) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right), \quad (11)$$

где $H_0(r)$ – единичная функция Хевисайда; $q_0 = \text{const}$.

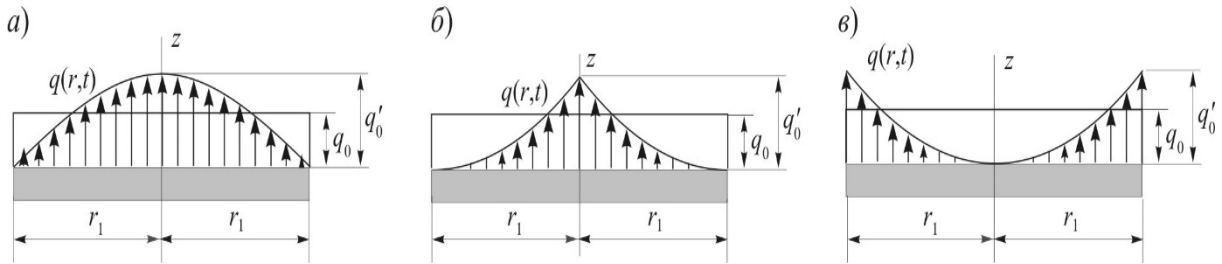


Рис. 1. Расчетная схема

Подставив (11) в формулу (4)₁, получим следующее интегральное выражение для параметров разложения нагрузки в ряд по системе собственных ортонормированных функций:

$$q_n(t) = \frac{q_0}{M_0 d_n a^2} \int_0^{r_1} H_0(a-r) \left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right) (a^2 - r^2) r dr.$$

После вычисления определенных интегралов, содержащих произведения степенных, бесселевых функций и функций Хевисайда, получим

$$q_n(t) = \frac{2q_0}{M_0 d_n \lambda_n^2} \left[J_2(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n)}{I_0(\lambda_n)} I_2(\lambda_n a) \right] \quad (12)$$

2. Пусть вогнутая параболическая нагрузка распределена по кругу радиуса $r = a$ (рис. 1, б). Ее аналитический вид

$$q(r, t) = q_0 H_0(a-r) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right). \quad (13)$$

Подставив (13) в формулу (4)₁, имеем

$$q_n(t) = \frac{4q_0}{M_0 d_n \lambda_n^3 a} \left[\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(\lambda_n a) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(\lambda_n a) \right] \quad (14)$$

3. Пусть внезапно приложенная нагрузка распределена по кругу $r \leq a$, обращаясь в нуль в центре пластины и достигая максимума на контуре силовой окружности (рис. 1, в):

$$q(r, t) = \frac{q_0 r^2}{a^2} H_0(a-r). \quad (15)$$

В этом случае выражение для параметров разложения нагрузки в ряд будет

$$q_n(t) = \frac{q_0}{M_0 d_n \lambda_n} \left[a J_1(\lambda_n a) - \frac{2}{\beta_n} J_2(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \left(a I_1(\lambda_n a) - \frac{2}{\beta_n} I_2(\lambda_n a) \right) \right] \quad (16)$$

4. Для случая равномерно распределенной локальной прямоугольной нагрузки

$$q(r, t) = q_0 H_0(a - r) \quad (17)$$

параметры разложения в ряды (3) будут

$$q_n(t) = \frac{q_0 a}{M_0 d_n \lambda_n} \left(J_1(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n a) \right) \quad (18)$$

Теперь перемещения в рассматриваемой задаче о вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины определяются соотношениями (4), а функция $T_n(t)$ вычисляется по формуле (9) с учетом параметров нагрузок (12), (14), (16), (18).

3. Численные результаты получены для защемленной по контуру круговой трехслойной пластины, несвязанной и связанной с основанием средней жесткости $k_0 = 10^8$ Па/м. Линейные размеры отнесены к радиусу пластины. Слои набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т с относительной толщиной $h_1 = h_2 = 0,01$, $c = 0,05$. Начальные условия движения нулевые, что позволяет положить в (9) константы интегрирования $A_n = B_n = 0$. Анализ сходимости суммируемых рядов при вычислении перемещений показал, что достаточно удерживать первые 14 слагаемых, так как добавление последующих на результат практически не влияет.

Примем, что равнодействующая параболической (16) и прямоугольной (17) нагрузок одинакова. Для этого потребуем равенство интегралов по объему, занимаемому соответствующей нагрузкой в фиксированный момент времени. В результате получим соответствующую амплитуду параболической нагрузки

$$q'_0 = q_0 \int_V H_0(a - r) dV \Big/ \int_V H_0(a - r) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) dV = 2q_0 \quad (19)$$

Рис. 2, а демонстрирует изменение во времени прогибов в центре рассматриваемой пластины, связанной с упругим основанием, при воздействии на внешнюю поверхность верхнего слоя нагрузки параболической (кривая 1, $= 70$ кПа) и прямоугольной (кривая 2, $q'_0 = 2q_0$) форм с одинаковой равнодействующей. На рис. 2, б показано изменение прогиба в зависимости от радиуса пятна локальной распределенной динамической нагрузки в момент времени $t = \pi/\omega_0$ при одинаковой по величине равнодействующей. Максимальный прогиб от выпуклой параболической нагрузки в момент $t = 0,0355$ с превосходит по величине прогиб от прямоугольной нагрузки в 1,35 раз. Следовательно, при одинаковой по величине равнодействующей выпуклая параболическая нагрузка более опасна, чем прямоугольная, как вызывающая в пластине бóльшие прогибы.

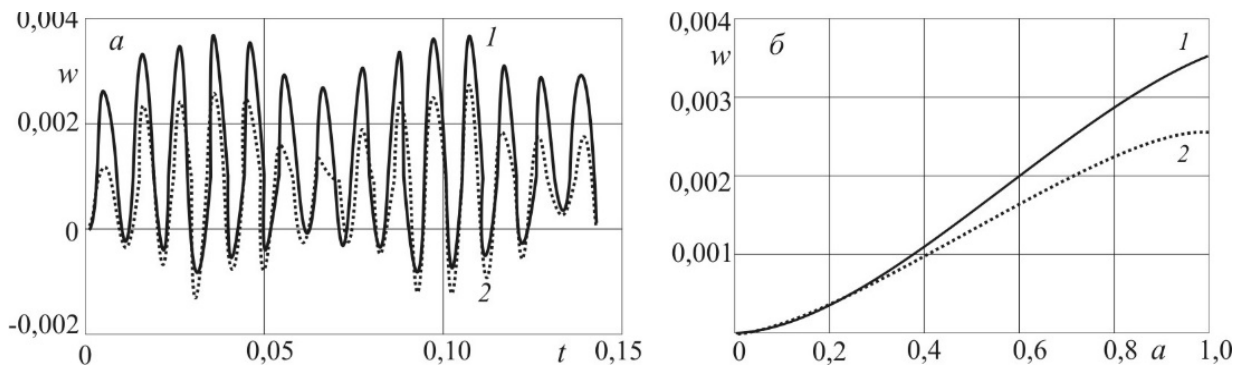


Рис. 2. Зависимость прогибов от вида нагрузки

На рис. 3 показано изменение прогибов пластины во времени при воздействии локальной распределенной нагрузки вогнутой параболической формы (18): 1 – $a = 0,5$; 2 – $a = 1$ (a – без основания, \bar{b} – на основании средней жесткости). В этом случае амплитуда вогнутой параболической нагрузки, рассчитанная по формуле аналогичной (19), превосходит интенсивность принятой прямоугольной нагрузки $q_0 = 60$ кПа в 6 раз: $q_0' = 6q_0$. При наличии основания максимальный прогиб уменьшается примерно в 27 раз. Распространение нагрузки на всю поверхность пластины увеличивает прогиб в 2,7 раза пластины несвязанной с упругим основанием, и в 1,6 раза при наличии основания. Подобный результат наблюдается и для относительно сдвига в заполнителе.

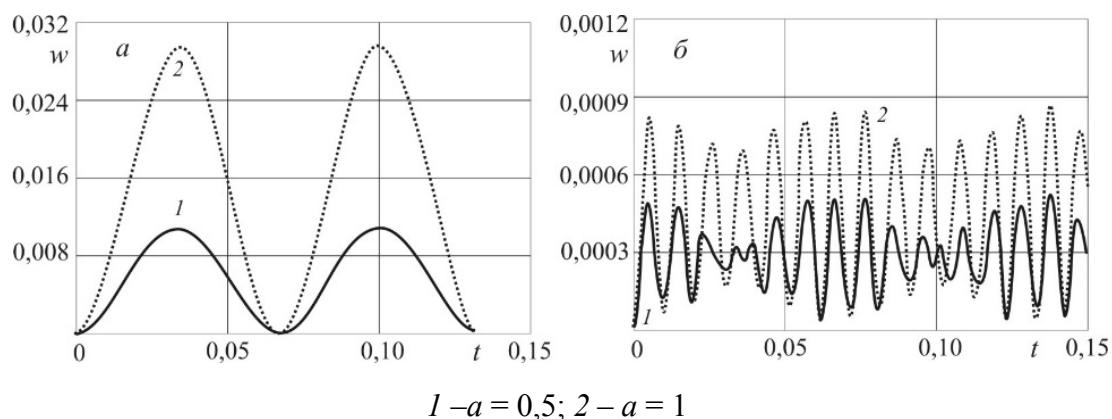


Рис. 3. Изменение прогибов при воздействии нагрузки вогнутой параболической формы при отсутствии основания (а) и на основании средней жесткости (б)

Заключение. Таким образом, рассмотрена методика исследования вынужденных колебаний круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием и находящихся под действием локальных поверхностных параболических нагрузок. Получены аналитические решения ряда начально-краевых задач для пластин с легким заполнителем и проведена их численная апробация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука, 2004. – 386 с.
2. Журавков, М.А. Математические модели сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
3. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.B. Nagiyev. – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, 2012. – 346 p.
4. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiaционных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Бел. наука, 2017. – 275 с.
5. Яровая, А.В. Изгиб трехслойной ортотропной пластины с усиливающей накладкой / А.В. Яровая // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – Вып. 33. – С. 112–116.
6. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А.В. Яровая – УО БелГУТ Гомель, 2013.
7. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

8. Старовойтов, Э.И. Исследование решения системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей колебания трехслойной вязкоупругой оболочки / Э.И. Старовойтов, С.А. Воробьев // Известия Академии наук Белорусской ССР. Серия физико-математических наук. – 1990. № 1. – С. 19–24.
9. Горшков, А. Г. Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2001. – № 3. – С. 100–107.
10. Gorshkov, A.G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, N 9. – P. 1196–1203.
11. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.
12. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, N 8. – P. 945–952.
13. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34. № 5. – С. 70–79.
14. Fedotenkov, G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – P. 246–253.
15. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.
16. Starovoitov, E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, N 12. – P. 1458–1463.
17. Starovoitov, Resonant local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation/ E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, N 1. – P. 86–93.
18. Starovoitov, E.I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, N 5. – P. 561–570.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Захарчук Ю.В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Известно, что при изгибе тонкостенных элементов конструкций, таких как пластины, балки, оболочки, наиболее рациональными являются композитные трехслойные структуры. Исследованию их деформирования и колебаний посвящены многочисленные работы. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографиях [1, 2]. Деформирование пластин и оболочек под действием квазистатических нагрузок исследовалось в работах [3, 4], динамических – в статьях [5–8].

Достаточно распространенной расчетной моделью трехслойных конструкций является круглая пластина с несжимаемым наполнителем. Учет сжимаемости наполнителя позволяет более адекватно описать деформирование [9–11]. Следует отметить, что деформирование трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем исследовалось при квадратичном изменении радиальных перемещений и линейном изменении прогиба по толщине наполнителя [12–14]. Это приводит к определенным математическим трудностям при постановке и решении соответствующих краевых задач. Здесь вводится новая модель деформирования наполнителя, в которой радиальные перемещения и прогиб изменяются по толщине линейно.

1. Постановка краевой задачи. К наружной поверхности упругой круговой трехслойной пластины (рис. 1) приложена осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка $q = q(r)$. Легкий срединный слой пластины перераспределяет усилия между внешними несущими слоями и сжимается по толщине. Принята гипотеза о линейном распределении перемещений по толщине наполнителя. Его нормаль к срединной плоскости изменяет свою длину и поворачивается на дополнительный угол $\psi(r)$, причем на контуре пластины ($r = r_0$) $\psi = 0$. Для несущих слоев с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа. Деформации считаем малыми.

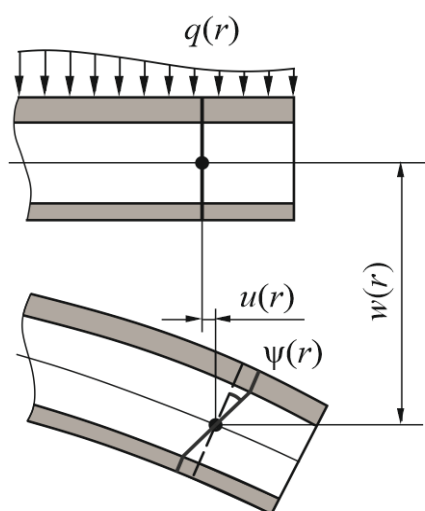


Рис. 1. Расчетная схема круговой трехслойной пластины

Цилиндрическая система координат r, φ, z связана со срединной плоскостью наполнителя. Индекс $k = 1; 2$ обозначает номер несущего слоя; 3 – наполнитель ($h_3 = 2c$).

Через $w(r)$ обозначен прогиб нижнего несущего слоя, $u(r)$ – продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция обжатия заполнителя, которая принимается постоянной по толщине.

Радиальные перемещения $u^{(k)}(r, z)$ и прогибы $w^{(k)}(r, z)$ в слоях выражаются через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

- в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \quad w^{(1)} = w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}, \quad w^{(2)} = w(r) \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

- в заполнителе 3

$$u_r^{(3)}(r, z) = u + z\psi - z\left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2}\right] - \frac{c}{2}v_{,r}, \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z + c) \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

С помощью соотношений Коши и перемещений (1) получены деформации в слоях:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c),$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - z\left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2}\right] - \frac{c}{2}v_{,rr},$$

$$\varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r}\left[u + z\psi - z\left(w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2}\right) - \frac{c}{2}v_{,r}\right], \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\psi + \frac{z}{2c}v_{,r}\right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c} \quad (-c \leq z \leq c). \quad (2)$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ выражены перемещения (1) и деформации (2) в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем. Радиальные $\varepsilon_r^{(k)}$, окружные $\varepsilon_\phi^{(k)}$ и сдвиговые $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ деформации изменяются линейно по толщине слоев. Деформация обжатия $\varepsilon_z^{(3)}$ по толщине не изменяется.

С помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \phi$) введены интенсивности обобщенных внутренних силовых факторов в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}),$$

$$D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}M_\alpha^{(3)} + \frac{c}{2}T_\alpha^{(3)}, \quad (3)$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – суммарная вариация работы внешних сил δA_1 и контурных усилий δA_2 ; δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет ($dS = r dr d\varphi$)

$$\delta A_1 = \iint_S q \delta w_r r dr d\varphi = \iint_S q(\delta w + \delta v) r dr d\varphi. \quad (4)$$

Вариация работы приложенных к торцам пластины контурных усилий:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + D_r^0 \delta v_{,r}) d\varphi. \quad (5)$$

Вариация работы сил упругости не учитывает в случае легкого заполнителя пластины работу нормальных $\sigma_z^{(3)}$ и касательных $\sigma_{rz}^{(3)}$ напряжений:

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi, \quad (6)$$

где двойной интеграл берется по всей срединной поверхности заполнителя S .

Вариации перемещений в слоях следуют из (1), деформаций – из (2). Используя их можно преобразовать интегралы по толщине слоев, входящие в виртуальную работу сил упругости (6). Для радиальных составляющих получим

$$\int_{h_1} \sigma_r^{(1)} \delta \varepsilon_r^{(1)} dz = \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} [\delta u_{,r} + c \delta \psi_{,r} - z(\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr})] dz = T_r^{(1)} \delta u_{,r} + c T_r^{(1)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(1)} \delta w_{,rr} - M_r^{(1)} \delta v_{,rr}.$$

Аналогично

$$\int_{h_2} \sigma_r^{(2)} \delta \varepsilon_r^{(2)} dz = T_r^{(2)} \delta u_{,r} - c T_r^{(2)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(2)} \delta w_{,rr},$$

$$\int_{h_3} \sigma_r^{(3)} \delta \varepsilon_r^{(3)} dz = T_r^{(3)} \delta u_{,r} + M_r^{(3)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(3)} \delta w_{,rr} - \frac{1}{2} M_r^{(3)} \delta v_{,rr} - \frac{c}{2} T_r^{(3)} \delta v_{,rr},$$

$$\int_{h_1} \sigma_\varphi^{(1)} \delta \varepsilon_\varphi^{(1)} dz = \frac{1}{r} (T_\varphi^{(1)} \delta u + c T_\varphi^{(1)} \delta \psi - M_\varphi^{(1)} \delta w_{,r} - M_\varphi^{(1)} \delta v_{,r}),$$

$$\int_{h_2} \sigma_\varphi^{(2)} \delta \varepsilon_\varphi^{(2)} dz = \frac{1}{r} (T_\varphi^{(2)} \delta u - c T_\varphi^{(2)} \delta \psi - M_\varphi^{(2)} \delta w_{,r}),$$

$$\int_{h_3} \sigma_\varphi^{(3)} \delta \varepsilon_\varphi^{(3)} dz = \frac{1}{r} \left(T_\varphi^{(3)} \delta u + M_\varphi^{(3)} \delta \psi - M_\varphi^{(3)} \delta w_{,r} - \frac{1}{2} M_\varphi^{(3)} \delta v_{,r} - \frac{c}{2} T_\varphi^{(3)} \delta v_{,r} \right).$$

После необходимых преобразований имеем

$$\delta W = \iint_S \left[T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} - D_r \delta v_{,rr} + \frac{1}{r} (T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \psi - M_\varphi \delta w_{,r} - D_\varphi \delta v_{,r}) \right] r dr d\varphi, \quad (7)$$

где интенсивности обобщенных силовых факторов $T_\alpha, M_\alpha, H_\alpha, D_\alpha$ ($\alpha = r, \varphi$) введены соотношениями (3).

Полученное выражение вариации потенциальной энергии деформации (7) проинтегрировано в полярной системе координат. Для этого подынтегральное выражение было предварительно разбито на два интеграла: в первом вынесена за скобку операция дифференцирования, во втором сгруппированы слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях.

$$\begin{aligned} \delta W = \int_0^{2\pi} \left\{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi + \left[(r M_r)_{,r} - M_\varphi \right] \delta w + \left[(r D_r)_{,r} - D_\varphi \right] \delta v - r M_r \delta w_{,r} - \right. \\ \left. - r D_r \delta v_{,r} \right\} d\varphi - \int \int_{r, \varphi} \left\{ \left[(r T_r)_{,r} - T_\varphi \right] \delta u + \left[(r H_r)_{,r} - H_\varphi \right] \delta \psi + \left[(r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r} \right] \delta w + \right. \\ \left. + \left[(r D_r)_{,rr} - D_{\varphi,r} \right] \delta v \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

В соответствии с принципом Лагранжа должно выполняться равенство полученного выражения и работы внешних и контурных усилий (4), (5) при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда получена система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q. \end{cases} \quad (8)$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = 0, \quad D_r = D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) = 0.$$

Для выражения обобщенных внутренних усилий (3) через перемещения использован закон Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = s_\alpha^{(k)} + \sigma^{(k)}, \quad (9)$$

где $s_\alpha^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)}$, $\vartheta_\alpha^{(k)} = \varepsilon_\alpha^{(k)} - \varepsilon^{(k)}$, $\sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)})$, ($\alpha = r, \varphi$; $k = 1, 2, 3$); G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев ($k = 1, 2, 3$).

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в (9) будут

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(k)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}), \quad \vartheta_r^{(k)} = \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)}, \\ \vartheta_\varphi^{(k)} &= \varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)} \quad (k = 1, 2); \\ \varepsilon^{(3)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \vartheta_r^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \quad \vartheta_\varphi^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}.\end{aligned}\quad (10)$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через деформации (10) следующим образом:

$$\sigma_r^{(k)} = 2G_k \vartheta_r^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = \left(K_k + \frac{4}{3}G_k\right) \varepsilon_r^{(k)} + \left(K_k - \frac{2}{3}G_k\right) \varepsilon_\varphi^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_r^{(k)} + K_k^- \varepsilon_\varphi^{(k)}, \quad (11)$$

$$\sigma_\varphi^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_\varphi^{(k)} + K_k^- \varepsilon_r^{(k)} \quad (k = 1, 2); \quad \sigma_r^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_r^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \sigma_\varphi^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_\varphi^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}),$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.$$

С помощью соотношений (9), (10), (11) были выражены обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$. После подстановки их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (8), была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая перемещения в круглой трехслойной пластине с легким сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned}L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_3 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &= -q,\end{aligned}\quad (12)$$

$$L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{2} K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) = -q.$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 (оператор Бесселя), L_3 определены соотношениями:

$$\begin{aligned}a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+, \quad a_4 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + c^2 K_3^+, \\ a_5 &= c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad a_6 = c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_7 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+ \right], \quad a_8 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_9 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{c^3}{3} K_3^+, \quad a_{10} = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,\end{aligned}$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача замыкается добавлением к (12) силовых или кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (13)$$

2. Решение краевой задачи. Проведя необходимые преобразования в системе (12), приходим к следующей системе уравнений

$$\psi = -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q) - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) + \frac{C_1 r}{4a_6} (2 \ln r - 1) + C_3 \frac{r}{2} + C_4 \frac{1}{r},$$

$$u = b_1 v_{,r} + (b_2 + b_3) L_3^{-1}(q) - \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) (b_2 C_1 + b_3 C_2) + C_5 \frac{r}{2} + C_6 \frac{1}{r},$$

$$w = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u \, dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_3^{-1}(q) \, dr + \\ + \frac{C_1 a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12},$$

$$L_2(v_{,r}) + \beta^2 v_{,r} = q_1. \quad (14)$$

Здесь L_3^{-1} – линейный интегральный оператор, обратный соответствующему дифференциальному оператору (12)

$$L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f \, dr \, dr \, dr;$$

коэффициенты

$$b_1 = \frac{d_2 d_7 - d_3 d_6}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \quad b_2 = \frac{d_4 d_7 - d_3 d_8}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \quad b_3 = \frac{d_3 d_9}{d_1 d_7 - d_3 d_5},$$

$$d_1 = (a_1 a_6 - a_2 a_3) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_2 a_6 - a_3 a_5) (a_3 a_6 - a_2 a_8),$$

$$d_2 = (a_4 a_6 - a_2 a_9) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_6 a_7 - a_5 a_9) (a_3 a_6 - a_2 a_8), \quad d_3 = a_6 (a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-,$$

$$d_4 = a_2 (a_6^2 - a_5 a_8) - a_5 (a_3 a_6 - a_2 a_8), \quad d_5 = (a_4 a_6 - a_3 a_7) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_2 a_6 - a_3 a_5) (a_6 a_9 - a_7 a_8),$$

$$d_6 = (a_6 a_{10} - a_7 a_9) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_6 a_7 - a_5 a_9) (a_6 a_9 - a_7 a_8), \quad d_7 = \frac{a_6 c}{2} (a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-,$$

$$d_8 = a_7(a_6^2 - a_5a_8) - a_5(a_6a_9 - a_7a_8), \quad d_9 = a_6(a_6^2 - a_5a_8), \quad \beta^2 = \frac{d_3d_5 - d_1d_7}{d_2d_5 - d_1d_6};$$

приведенная нагрузка

$$q_1 = \frac{1}{r} \frac{d_4d_5 - d_1d_8 + d_1d_9}{d_1d_6 - d_2d_5} \int q r dr - \frac{1}{r} (p_1C_1 + p_2C_2), \quad p_1 = \frac{d_4d_5 - d_1d_8}{d_1d_6 - d_2d_5}, \quad p_2 = \frac{d_1d_9}{d_1d_6 - d_2d_5}.$$

Таким образом, функция сжимаемости должна удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка (14)₄. Уравнение сводится к неоднородному уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 v_{,r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{,r}}{dr} - \frac{1}{r^2} v_{,r} + \beta^2 v_{,r} = q_1. \quad (15)$$

Рассмотрим процедуру решения полученного уравнения. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (15), имеет вид

$$r^2 \frac{d^2 v_{,r}}{dr^2} + r \frac{dv_{,r}}{dr} + (r^2 \beta^2 - 1) v_{,r} = 0. \quad (16)$$

Его решение $v_{0,r}$ будет [15]

$$v_{0,r} = C_7 J_1(\beta r) + C_8 Y_1(\beta r), \quad (17)$$

где $J_1(\beta r)$, $Y_1(\beta r)$ – функции Бесселя первого и второго рода (функция Неймана) первого порядка соответственно.

Частное решение $v_{p,r}$ уравнения (15) можно построить, используя два независимых решения из (17):

$$v_{p,r} = Y_1(\beta r) \int \frac{J_1(\beta r) q_1(r)}{W} dr - J_1(\beta r) \int \frac{Y_1(\beta r) q_1(r)}{W} dr,$$

где W – определитель Вронского, который в нашем случае

$$W \{J_1, Y_1\} = Y_{1,r} J_1 - J_{1,r} Y_1 = \frac{2}{\pi r}.$$

В результате частное решение будет

$$v_{p,r}(r) = \frac{\pi}{2} \left(Y_1(\beta r) \int_0^r J_1(\beta r) q_1(r) r dr - J_1(\beta r) \int_0^r Y_1(\beta r) q_1(r) r dr \right), \quad (18)$$

причем $v_{p,r}(0) = 0$, что обеспечивается вырождающимся переменным верхним пределом ($r = 0$) в интегралах.

Искомое решение уравнения (15) выпишем в виде суммы общего решения однородного уравнения (16) и частного решения (18). В результате

$$v_{,r} = C_7 J_1(\beta r) + C_8 Y_1(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr - J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr \right).$$

Проинтегрировав, получим выражение для функции сжимаемости $v(r)$:

$$v = -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9.$$

Остальные перемещения вычисляются последовательно по формулам (14).

Следует отметить, что для сплошных круглых пластин из условия ограниченности решения в начале координат следует положить $C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{11} = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T19PM-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
2. Hohe, J. Nonlinear Sandwich Shell Theory Accounting for Transverse Core Compressibility / J. Hohe, L. Librescu // PAMM, the Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2003. – Vol. 2. – P. 158–159. org/DOI: 10.1002/pamm.200310064
3. Бадриев, И.Б. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем / И.Б. Бадриев, М.В. Макаров, В.Н. Паймушин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
4. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 8. – P. 945–952.
5. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonant loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.
6. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation/ E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, N 1. – P. 86–93.
7. Starovoitov, E.I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, N 5. – P. 561–570.
8. Кондратов, Д.В. Гидроупругие колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости / Д. В. Кондратов, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXV Международного симпозиума имени А. Г. Горшкова, Вятчи, 18–22 марта 2019 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – М. : ООО «ТРП», 2019. – Т.1 – С. 129–130.
9. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4(33). – С. 53–57.
10. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации : сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т транспорта. – Гомель, 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.
11. Захарчук, Ю.В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27; URL: mathmod.esrae.ru/18-69 (дата обращения: 24.10.2019).

12. Старовойтов, Э.И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.

13. Захарчук, Ю. В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

14. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ И ОБЪЕМНОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СИСТЕМЫ «АВТОМОБИЛЬНАЯ ШИНА–АСФАЛЬТОБЕТОН» ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СООТНОШЕНИЯХ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ДИСК И ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ШИНЕ

Грибовский Г.В., д.ф.-м.н. Щербаков С.С.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В настоящее время в сфере машиностроения большое значение играет конечно-элементное моделирование сложных механических систем и их комплексного взаимодействия. Компьютерное моделирование позволяет рассмотреть различные ситуации и комбинации силовых воздействий на проектируемую систему и минимизировать количество натурных экспериментов. В частности, для производителей автомобильных шин и автодорожных служб большое значение имеют компьютерные модели, которые позволяют произвести комплексное моделирование трехмерного взаимодействия элементов системы «автомобильная шина–асфальтобетон». Конечно-элементное моделирование позволяет рассчитать трехмерное напряженно-деформированное состояние (НДС) системы, что необходимо для дальнейшего расчета повреждаемости и износа как протектора шины, так и асфальтобетонного покрытия, работающих в условиях контактной, механической и фрикционной усталости.

Большое количество исследований посвящено компьютерному или аналитическому моделированию НДС рассматриваемой системы, однако большинство из них сконцентрировано на отдельных элементах системы, не учитывая их взаимодействия во всей полноте. Так, например, в статье [1] проводится полное моделирование основных слоев шины, моделируется контактное взаимодействие между шиной и асфальтобетоном, однако не моделируется диск, и рассматривается только распределение контактного давления между протектором и дорожным покрытием. В работе [2] рассматривается НДС и контактное давление авиационной шины с влажным покрытием при различных скоростях, однако шина рассматривается как однородная с эффективными механическими характеристиками, покрытие является абсолютно жестким, а передача нагрузки от диска не учитывается. В статье [3], напротив, рассматривается только НДС автодорожного покрытия, учитывая его многослойность (покрытие асфальта, щебня, песчаное покрытие, грунтовое и т.д.), но нагрузки от колес моделируются обычным приложением сил на асфальтобетонное покрытие. В статьях [4,5] моделируется полное контактное взаимодействие многослойных шин с асфальтобетонным покрытием, однако в [4] рассматривается только НДС боковины шины, а в [5] рассматривается только распределение напряжений в грунте и перемещение оси шины при взаимодействии с простым видом протектора и не моделируется воздействие диска на шину.

Целью данной работы, по сравнению с предыдущими исследованиями, с помощью конечно-элементного моделирования комплексно, с учетом основных элементов системы, оценить трехмерное НДС и состояние объемной повреждаемости системы «автомобильная шина–асфальтобетон» при различных соотношениях значений радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине, в условиях контактного взаимодействия протектора шины и асфальтобетонного покрытия.

Конечно-элементная модель системы и ее механические характеристики. При моделировании была рассмотрена геометрическая модель стального диска и грузо-

вой шины с ромбовидным протектором радиусом 22,5 дюйма с учетом основных конструктивных элементов (таблица рис. 1, а), а также асфальтобетонное покрытие в виде прямоугольного параллелепипеда [6]. Для оптимизации расчетного времени и в силу осесимметричности модели была использована четвертая часть от полной модели.

Таблица 1 – Механические характеристики элементов системы

Элементы системы	Модуль упругости E , Па	Коэффициент Пуассона ν	Плотность ρ , кг м ⁻³
1. Стальной диск	$2 \cdot 10^{11}$	0,3	7850
2. Бортовое кольцо	$2 \cdot 10^{11}$	0,3	7850
3. Резина	$8 \cdot 10^6$	0,49	1100
4. Резиновый протектор	$4 \cdot 10^6$	0,49	1100
5. Нейлоновый каркас	$9 \cdot 10^{10}$	0,3	1500
6. Стальной брекер	$1,7 \cdot 10^{11}$	0,3	1100
7. Асфальтобетон	$14,77 \cdot 10^8$	0,1	2510

В области контакта шины и асфальтобетона была задана конечно-элементная сетка с меньшим шагом по пространству для получения гладких распределений компонент НДС и дальнейшего определения объемной повреждаемости. (рисунок 1,б). Более подробно о конечно-элементном разбиении модели написано в предыдущих работах [6–8].

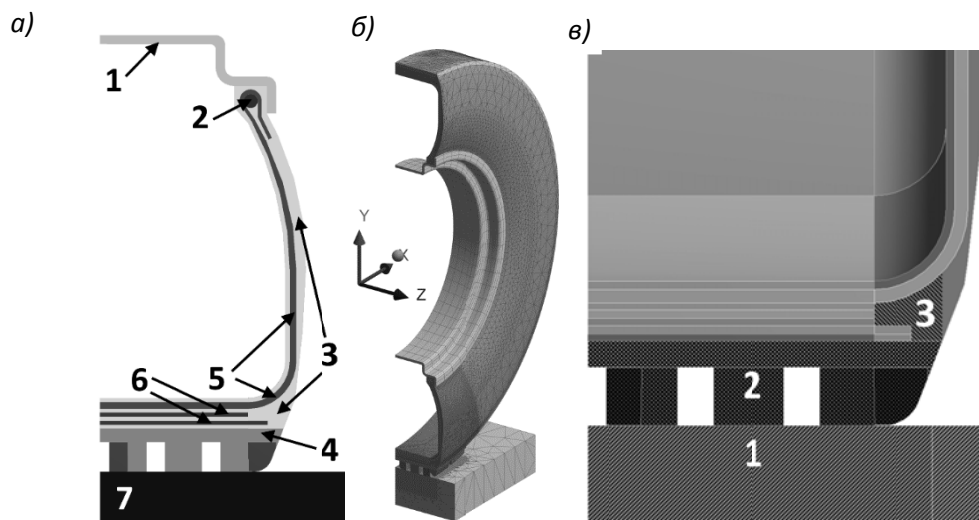


Рис. 1. Схематичное обозначение материалов (а), конечно-элементное разбиение всей модели (б), рассматриваемые области для анализа повреждаемости (в):

1 – резиновый протектор, 2 – асфальтобетон,
3 – резина в области изгиба нейлонового каркаса

Граничные условия. Более подробная информация об особенностях задания граничных условий в рассматриваемой модели приведено в работах [8, 9]. В общем, на систему были заданы следующие изменяющиеся нагрузки:

- внутреннее давление P_S в шине, которое изменялась от 0,65 до 0,85 МПа;
- радиальная нагрузка F_H на диск, которое изменялось от 6 до 10 кН.

Метод расчета объемной повреждаемости. Расчет интегральных показателей повреждаемости основан на использовании модели деформированного твердого тела с опасным объемом [10]. В соответствии с данной моделью, опасным объемом является пространственная область нагруженного тела, в которой действующие напряжения превышают предельные [10, 11]:

$$\Psi_{\text{int}} = \sigma_{\text{int}} / \sigma_{\text{int}}^{(\text{lim})}, \quad (1)$$

$$V_{\text{int}} = \{ \Psi_{\text{int}} \geq 1, dV \subset V_k \} \quad (2)$$

где σ_{int} – интенсивность напряжений, V_k – рабочий объем. Формулы для расчета опасных объемов и их интегральной повреждаемости имеют следующий вид:

$$V_{\text{int}} = \iiint_{\Psi_{\text{int}}(V) \geq 1} dV \quad (3)$$

$$\Psi_{\text{int}} = \iiint_{\Psi_{\text{int}}(V) \geq 1} \Psi_{\text{int}}(V) dV \quad (4)$$

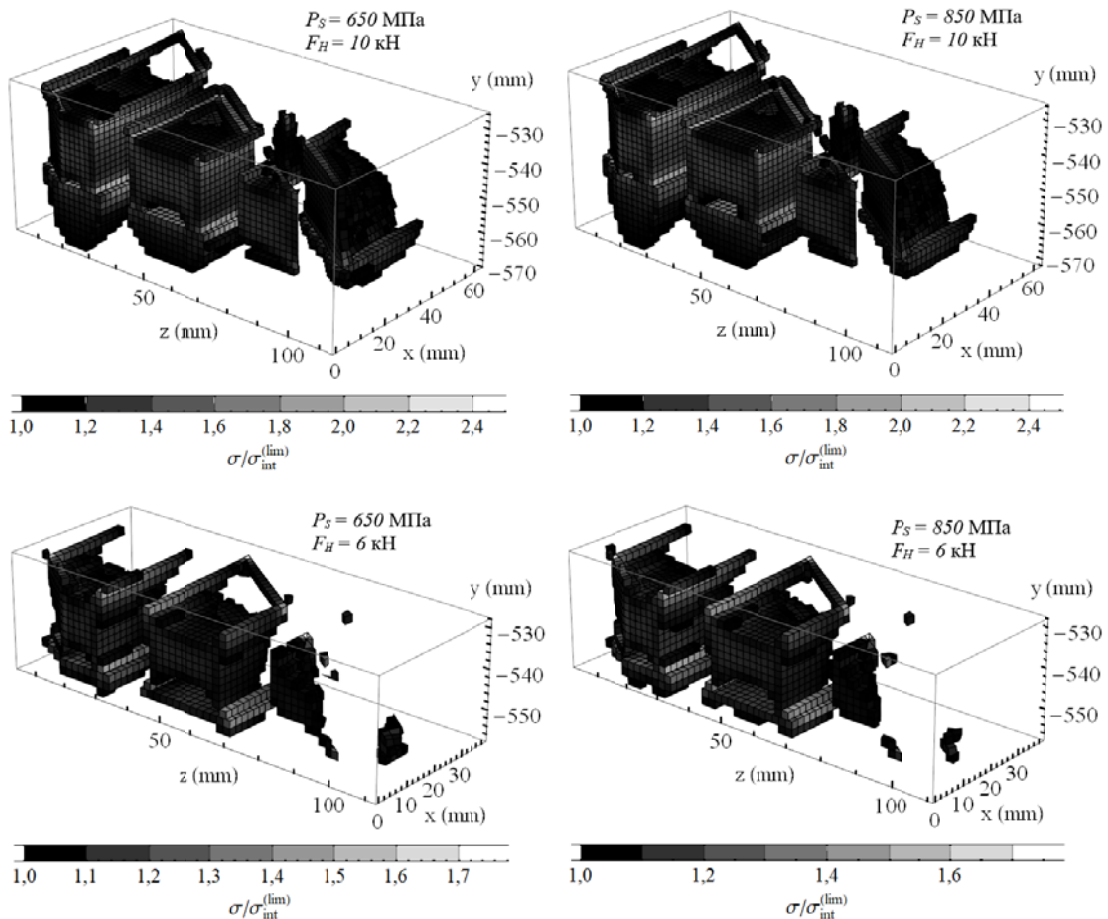


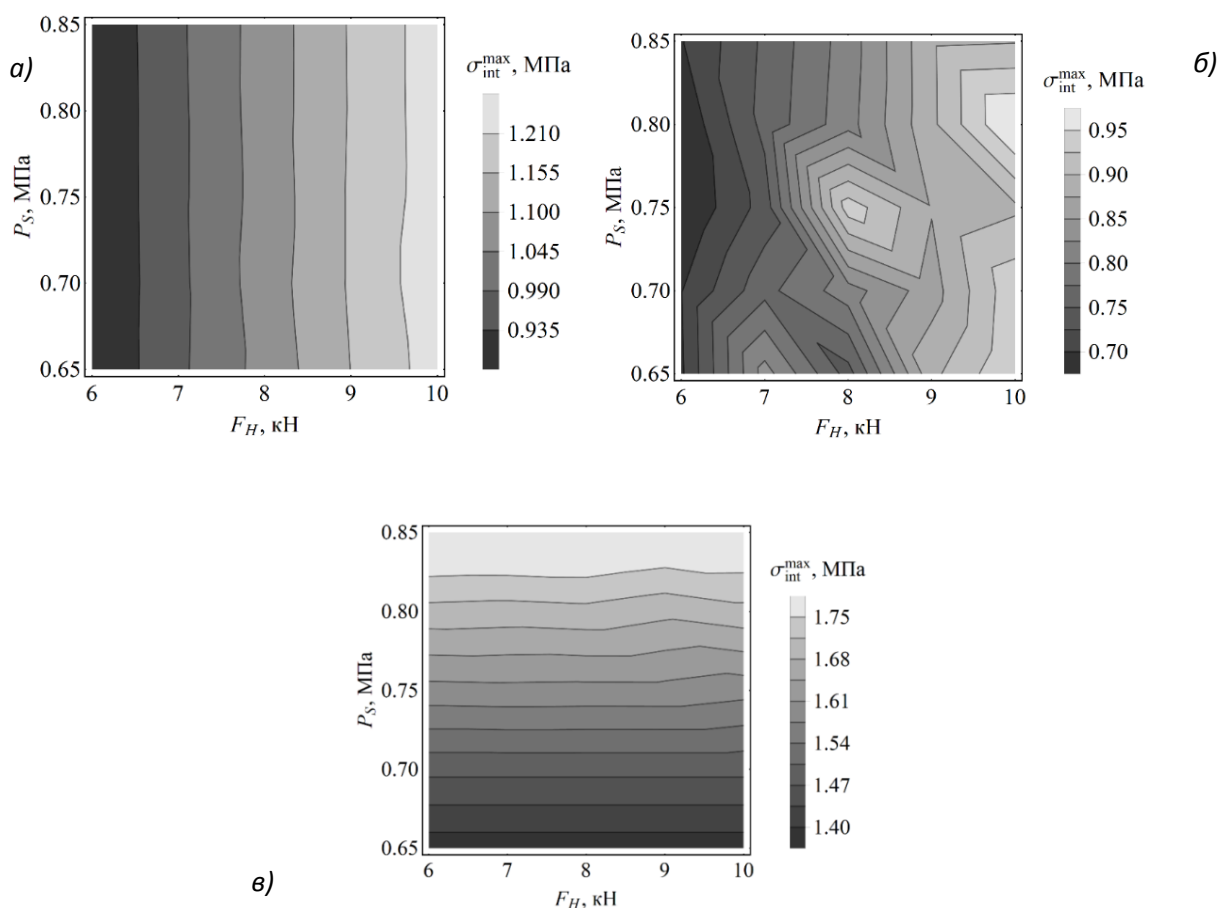
Рис. 2. Вид опасных объемов в протекторе шины и асфальтобетоне при минимальных и максимальных значениях радиальной нагрузки на диск F_H и внутреннего давления в шине P_S

В работе рассматриваются опасные объемы в области контакта шины и асфальтобетона, которые работают в условиях фрикционной усталости. Предел допускаемых

напряжений $\sigma_{\text{int}}^{(\text{lim})}$ для условий фрикционной усталости в зоне контакта был принят равным 0,5 МПа, а для остальных резиновых частей системы – 1 МПа. Пример опасных объемов при минимальных и максимальных значениях нагрузок представлен на рис. 2.

Протектор шины. В протекторе шины, с изменением радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН, максимальные напряжения увеличиваются в 1,4 раза (рис. 3 а). Опасные объемы в этом случае увеличиваются в 2,7–3 раза, а повреждаемость в 3,3–3,6 раза (рис. 4а). Зависимость рассматриваемых значений от радиальной нагрузки имеет характер близкий к линейному, несмотря на зубчатый вид протектора. Это может быть обусловлено тем, что модель поведения материалов является упругой и изотропной.

Увеличение внутренних давлений в шине в выбранном диапазоне нагрузок практически не влияет на изменения рассматриваемых значений в резиновом протекторе. В основном, при увеличении внутреннего давления с 0,65 до 0,85 МПа максимальные напряжения практически не изменяются, а опасные объемы и повреждаемость увеличиваются на 1–3%, и только при радиальной нагрузке на диск $F_H = 6$ кН рассматриваемые характеристики увеличиваются на 10–12%.

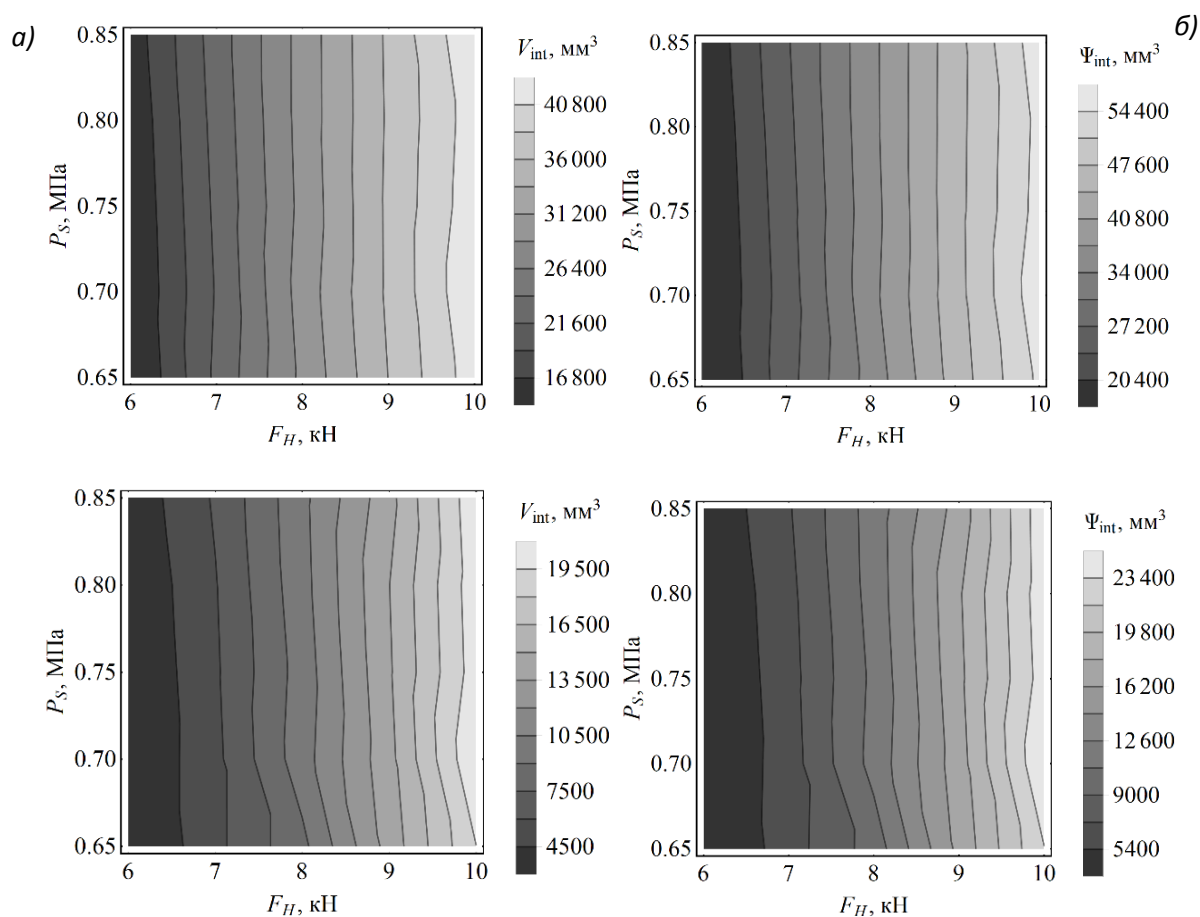


"Рис. 3. Максимальные значения интенсивности напряжений $\sigma_{\text{int}}^{\text{max}}$ в протекторе шины (а), фальтобетоне (б) и в резине в области изгиба нейлонового каркаса (в) при различных значениях радиальной нагрузки на диск F_H и внутреннего давления в шине P_S

Асфальтобетон. С изменением радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН максимальные значения интенсивности напряжений увеличиваются нелинейно, примерно на 28–46%, достигая максимума при $F_H = 10$ кН (рис. 2, б). Однако, исключе-

ние наблюдается при $P_S = 0,75$ МПа, где наибольшее значение максимальной интенсивности напряжений достигается при $F_H = 8$ кН. Опасные объемы и повреждаемость же в асфальтобетоне увеличивается нелинейно в 6–7,5 раз и в 6,6–8,2 раза соответственно (рис. 4, б). Значительно увеличение значений опасных объемов и повреждаемости может быть связано с тем, что контактное давление в асфальтобетоне концентрируется в малой области контактного взаимодействия с шиной, т.е. в зубцах протектора, через которые передается влияние радиальной нагрузки на диск.

При увеличении внутреннего давления с 0,65 до 0,85 МПа максимальная интенсивность напряжений изменяется нелинейно, в диапазоне 3–27%. Наибольшие изменения максимальных напряжений наблюдаются при $F_H = 8$ кН, а минимальные при 6 и 9 кН. Следует отметить, что отсутствуют явные зависимости максимальных значений интенсивности напряжений от увеличения внутреннего давления в шине. В то же время опасные объемы и повреждаемость в асфальтобетоне возрастают на 3–30 % в зависимости от значения радиальной нагрузки на диск. Наименьшие изменения наблюдаются при $F_H = 9$ кН, а максимальные при $F_H = 6$ кН.



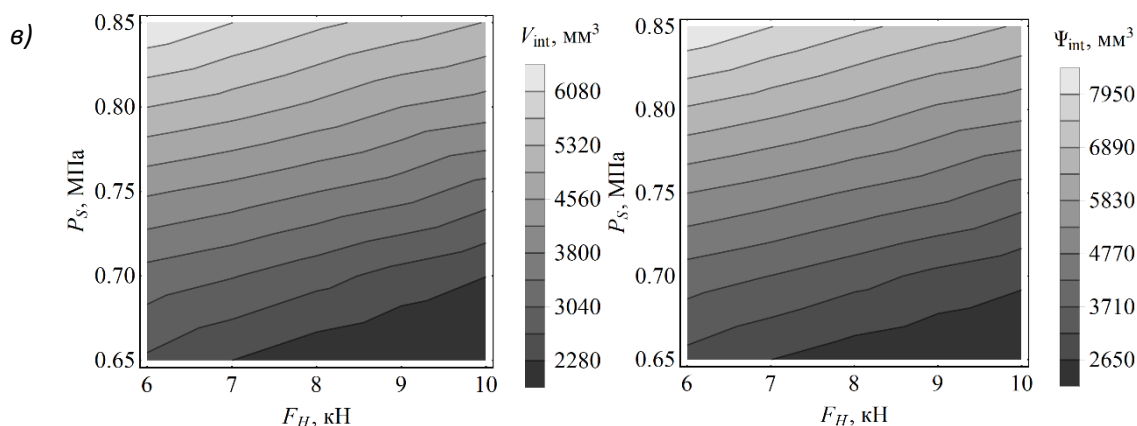


Рис. 4. Опасные объемы V_{int} и повреждаемость Ψ_{int} для протектора шины (а), асфальтобетона (б) и резины в области изгиба нейлоновым каркасом (в) при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск F_H и внутреннего давления в шине P_S

Резина в области изгиба нейлонового каркаса. С ростом радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН максимальные значения интенсивности напряжений практически остаются неизменными (рис. 3, в), а опасные объемы и повреждаемость уменьшаются примерно на 17–34 % (рис. 4, в). Это связано со сложным характером перераспределения напряжений в данной области и взаимодействием с другими элементами шины, такими, как нейлоновый каркас и стальной бреккер.

При увеличении внутреннего давления в шине с 0,65 до 0,85 МПа максимальные напряжения увеличиваются в 1,3 раза, а опасные объемы и повреждаемость примерно в 2,4–3,1 и 2,7–3,4 раза соответственно в зависимости от значения радиальной нагрузки на диск. По полученным значениям повреждаемости и опасным объемам видно гораздо большее влияние радиальной нагрузки на диск на напряженное состояние системы, чем по максимальным значениям интенсивности напряжений.

Заключение. В данной работе было проведено конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния системы «автомобильная шина–асфальтобетон» при различных комбинациях внутреннего давления в шине и радиальной нагрузки на диск.

Расчитаны пространственные распределения НДС в системе с учетом контактного взаимодействия протектора шины с асфальтобетонным покрытием при различных нагрузках. На основании полученных распределений напряжений был проведен расчет опасных объемов и повреждаемости по интенсивности напряжений в протекторе шины и асфальтобетонном покрытии в области контакта, а также в резине в области изгиба нейлонового каркаса. Полученные опасные объемы в асфальтобетоне оказались примерно 2–2,5 раза меньше, чем в резиновом протекторе, в силу большей жесткости асфальтобетона.

Почти во всех областях с увеличением радиальной нагрузки на диск или внутреннего давления в шине максимальные значения интенсивности напряжений, опасные объемы и повреждаемость возрастают, за исключением напряжений в асфальтобетоне, где их изменения происходят без явной зависимости от увеличения нагрузок. Однако, при увеличении радиальной нагрузки на диск, повреждаемость для резины в области изгиба нейлонового каркаса уменьшается, а максимальные напряжения остаются неизменными, что может быть вызвано сложным характером перераспределения напряжений в данной области.

При увеличении внутреннего давления с 0,65 до 0,85 МПа максимальные значения интенсивности напряжений, опасные объемы и повреждаемость, в среднем, изменяются не более чем на 10%, за исключением резины в области изгиба нейлонового каркаса, где данные характеристики увеличиваются примерно в 1,3, 2,4–3,1 и 2,7–3,4 раза соответственно.

Показана эффективность анализа по опасным объемам и повреждаемости, по сравнению с анализом по максимальным значениям интенсивности напряжений. Так, в асфальтобетоне значения повреждаемости показывают более явную зависимость от нагрузок, чем по максимальным напряжениям, изменения которых несут бессистемный характер при увеличении нагрузок. При анализе резины в области изгиба нейлонового каркаса по максимальным значениям интенсивности напряжений не видно влияния радиальной нагрузки на диск, по сравнению с анализом по опасным объемам и повреждаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Imad, L. Al-Qadi. Prediction of Tire-Pavement Contact Stresses and Analysis of As-phalt Pavement Responses: A Decoupled Approach / Imad L. Al-Qadi, Hao Wang // Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists. – 2011. – №80. – С. 289–316.*
2. *Шейкина, В.А. Математическое моделирование контактного взаимодействия авиационной шины с жестким покрытием / В.А. Шейкина. – Иваново: ИГЭУ, 2012.*
3. *Вайнштейн, Е.В. Исследование изменения касательных напряжений и вертикальных перемещений от лесовозного автопоезда в конструкции дорожной одежды и земляного полотна / Е.В. Вайнштейн, В.М. Вайнштейн, П.А. Нехорошков // Инженерный вестник Дона. – 2012. – №4–2. – Т. 23. – С. 39.*
4. *Ларин, А.А. Исследование закономерностей деформирования пневматических шин в контакте с дорогой с учетом наличия эксплуатационной деградации материала / А.А. Ларин, Ю.В. Арефин // Механіка та Машинобудування. – 2011. – №2 – С. 52.*
5. *Namjoo, M. Numerical simulation of tire/soil interaction using a verified 3D finite element model / M. Namjoo, H. Golbakhshi // Journal of Central South University of Technology. – 2014. – №21. – P. 817-821.*
6. *Щербаков, С.С. Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния и объемной повреждаемости системы диск/автомобильная шина/асфальтобетон / С.С. Щербаков, Г.В. Грибовский // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 31. – Минск: БНТУ, 2016. – С. 351 – 355.*
7. *Щербаков, С.С. Трехмерное напряженно-деформированное состояние и повреждаемость системы “многослойная шина–асфальтобетон” / С.С. Щербаков, Г.В. Грибовский // Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». – Вып. 5. Минск: ОИМ НАН РБ, 2017 – С. 203–207*
8. *Грибовский, Г. В. Объемная повреждаемость трибофатической системы диск– многокомпонентная шина–асфальтобетон / Г. В. Грибовский, С. С. Щербаков // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 32. – Минск: БНТУ, 2017. – С. 277–282.*
9. *Щербаков, С. С. Объемная повреждаемость многокомпонентной системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине / С. С. Щербаков, Г. В. Грибовский // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 34. Минск: БНТУ, 2019. – С. 281–286.*

10. Щербаков, С.С. *Механика трибофатических систем* / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.

11. Sosnovskiy, L. A. / *Mechanothermodynamics* / L.A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov – Springer, 2016. – 155 p.

12. Щербаков, С.С. *Напряженно-деформированное состояние многокомпонентной системы «диск–шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине* / С. С. Щербаков, Г. В. Грибовский // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. – Вып. 33. – Минск: БНТУ, 2018. – С. 281–286.*

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Хеук М.В., Холодарь Б.Г.

Брестский государственный технический университет

Определение опорных реакций представляет собой одну из основных операций при расчете конструкций на прочность. Возникающие реактивные силовые факторы зависят от конструктивного исполнения опорных устройств, геометрии системы и характера нагружения.

Традиционно реакции ищутся в декартовой системе координат с помощью уравнений равновесия [1]. При этом для системы, состоящей из нескольких тел, одновременно приходится определять и реакции внутренних связей, решая системы линейных уравнений. Однако можно использовать более рациональный способ решения [2], который позволяет получить результат намного быстрее и с достаточной точностью, сводя решение к графическим построениям, в том числе с использованием средств вычислительной техники.

Рассмотрим принцип построения решения на простой схеме (Рис. 1).

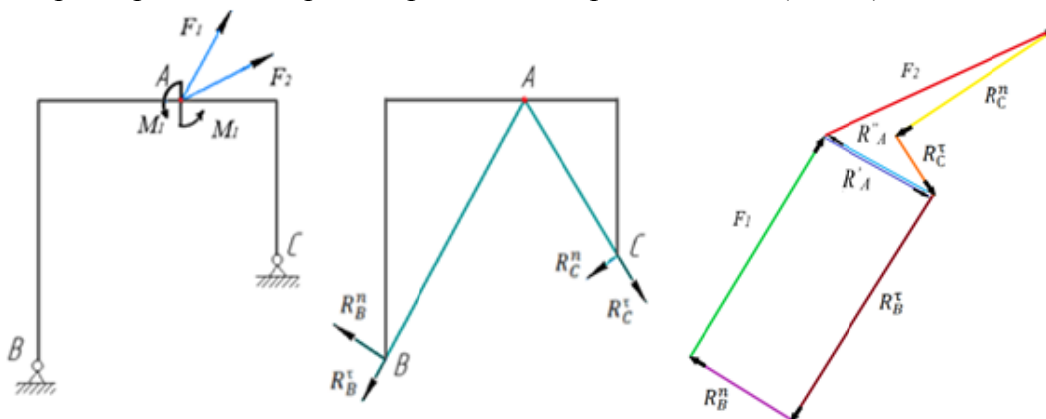


Рис. 1. Расчетные схемы системы на шарнирных опорах

Приложенная к телам системы активная нагрузка может быть приведена к какой-либо точке, и в этом случае она представится двумя силовыми факторами – главным вектором и главным моментом, каждый из которых в частном случае может оказаться равным нулю. Приведем активную нагрузку на каждом из тел к точке A .

Для данной схемы реакции в точках B и C разложим на нормальные и касательные составляющие к прямым AC и AB . При этом определение нормальных составляющих (R_C^n, R_B^n) можно провести путем составления уравнений моментов относительно точки A . Сами нормальные реакции в опорных точках каждого из тел зависят только от момента активных нагрузок на соответствующем теле относительно точки соединения с другим телом. Величины касательных компонент реакций (R_C^t, R_B^t) зависят от всех четырех нагрузок (M_1, M_2, F_1, F_2). Эти компоненты легко могут быть найдены графически из условия равенства нулю главного вектора силовой системы. Действительно, для активных сил и нормальных составляющих реакций известны направления и величины, а для касательных – направления, поэтому можем построить в определенном масштабе замкнутый силовой многоугольник, с помощью которого определить значение касательных составляющих реакций.

тельных составляющих. Решение показано на рисунке 1, причем оно позволило сразу же определить и реакцию внутренней связи – шарнира A .

В [2] рассмотрены способы построения решения для других возможных схем крепления тел. В качестве еще одного примера рассмотрим случай со стержневыми связями (Рис. 2).

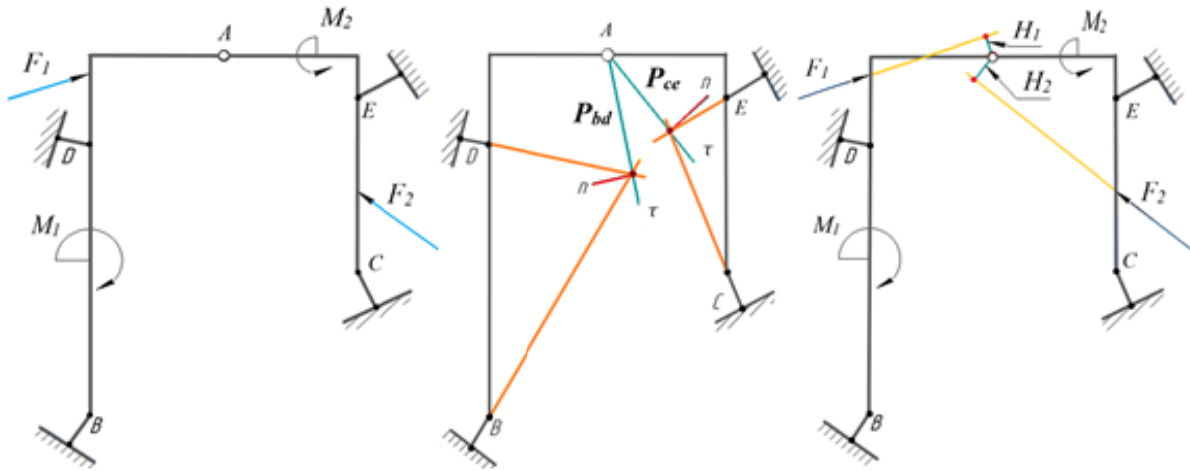


Рис. 2. Схема конструкции и предварительные построения

Приведем активную нагрузку к точке A .

Для этого строим линии действия активных сил F_1, F_2 и находим длину плеча H_1 и H_2 каждой силы, используя графический пакет КОМПАС.

Для нахождения моментов активных сил воспользуемся формулой

$$M_A(F) = F \cdot H \quad (1)$$

где F – численное значение силы, H – плечо этой силы (см. рисунок).

Величина главного момента относительно точки A для выбранной части схемы определится как

$$M_A = M + M_A(F) \quad (2)$$

где M – численное значение активного момента, действующего на выбранную часть схемы, $M_A(F)$ – найденное по (1) численное значение момента активных сил (с учетом знаков этих моментов).

Далее строим точки пересечения реакций стержневых опор для каждого из тел (через них проходят равнодействующие реакций) и соединяем их с шарниром A прямыми P_{bd} и P_{ce} , которые будут представлять собой плечи нормальных составляющих суммарных реакций стержневых связей каждого из тел конструкции.

Беря поочередно для каждого из тел моменты вокруг точки A , найдем нормальные компоненты равнодействующих реакций R_{BD}^n и R_{CE}^n , воспользовавшись формулой

$$R_n = M_A/P \quad (3)$$

где P – расстояние от точки A до найденных точек пересечения линий действия реакций тел (плечи P_{ce}, P_{bd}).

Далее аналогично предыдущему примеру из условия, что главный вектор всех сил системы равен нулю ($\Sigma F=0$), найдем касательные компоненты равнодействующих реакций R_{BD}^{τ} и R_{CE}^{τ} , поскольку знаем направления и величины активных сил и нор-

мальных составляющих реакций. С этой целью строим соответствующие силовые многоугольники (рис. 3). Для нахождения внутренних сил (R'_A и R''_A) соединяем конец и начало векторов сил для каждой части схемы отдельно. Направления этих реакций взаимно-противоположны, а их величины одинаковы.

По построенным векторам R_{BD}^τ и R_{BD}^n , R_{CE}^τ и R_{CE}^n при известных направлениях реакций стержневых опор каждого тела определяем силы во внешних связях системы. Эти построения также показаны на рис. 3.

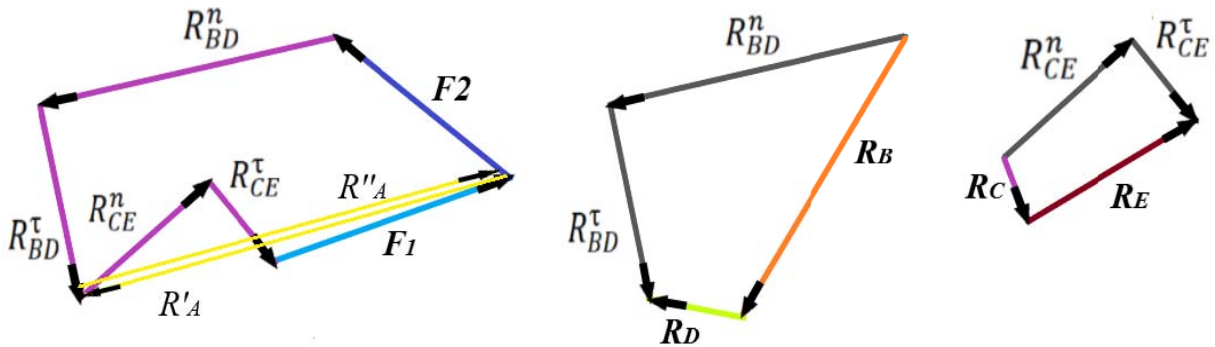


Рис. 3. Определение реакций связей

На этом решение задачи об определении реакций в связях рассматриваемой конструкции закончено.

Аналогичные действия используются и при построении решения для других возможных схем крепления тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики. В двух томах / Н.В. Бутенин, Я.Л. Луиц, Д.Р. Меркин. – СПб.: «Лань», 1998. – 736 с.
2. Холодарь, Б.Г. О выборе полюсов при определении опорных реакций составной конструкции (способ двух моментов) / Б.Г. Холодарь // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический журнал. – Выпуск 29. – Минск: – БНТУ, 2014. – С. 298–302.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ДВУХ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дудяк А.И., Дикан Ж.Г., Мелеховец П.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Во многих областях техники используют стержни, состоящие из прочно соединенных между собой разнородных материалов. Типичным примером могут служить стержни из биметаллических материалов с различными модулями продольной упругости работающие на изгиб как консольные или двухопорные балки. Другим примером могут служить конструкции, изготовленные из железобетона. Расчеты на прочность составных балок из неоднородных материалов имеют существенное отличие от классических методов расчета балок из однородных материалов.

Рассмотрим случай чистого изгиба консольной балки прямоугольного сечения, состоящей из двух прочно соединенных между собой неоднородных материалов. В качестве такого соединения можно использовать склеивание их или для металлических стержней – сварку взрывом. Материалы стержней отличаются между собой модулями продольной упругости и при этом $E_1 > E_2$ (рис. 1).

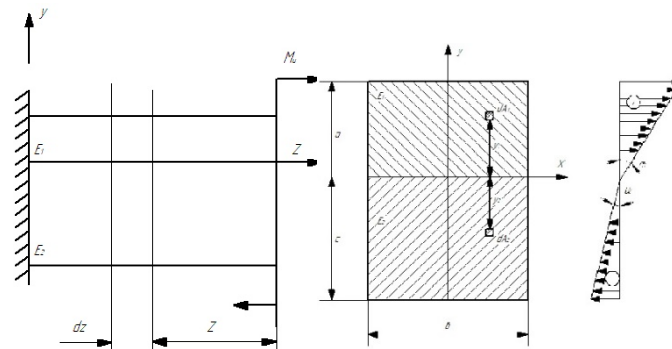


Рис. 1. Схема нагружения стержня (а), форма сечения (б), распределение нормальных напряжений по высоте сечения (в)

Для данного расчета примем, что нейтральный слой проходит через плоскость раздела двух материалов. Ширина сечения «b» и высота части сечения «a» известны. Следует определить высоту части сечения «с» таким образом, чтобы ось X, проходящая по разделу материалов, являлась нейтральной осью.

По закону Гука нормальные напряжения в верхних слоях материала определяются из выражения:

$$\sigma_{z1} = E_1 \varepsilon_1 \quad (1)$$

В нижних слоях материала балки относительно нейтральной оси X, нормальные напряжения определяются:

$$\sigma_{z2} = E_2 \varepsilon_2 \quad (2)$$

Рассмотрим условия деформированного состояния участка балки длиной dz. В результате действия внешнего изгибающего момента M_n этот участок подвергается изгибу таким образом, что верхние волокна относительно нейтрального слоя будут растянуты, а нижние – сжаты (рис. 2).

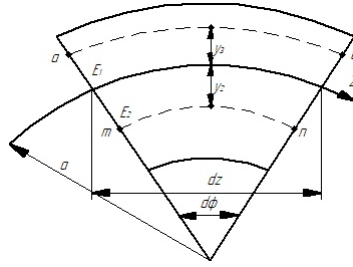


Рис. 2. Деформированное состояние балки длиной dz .

Относительные деформации верхнего растянутого слоя «ab» и нижнего сжатого слоя «mn» соответственно, будут равны:

$$\varepsilon_1 = \frac{y_1}{\rho}; \quad \varepsilon_2 = \frac{y_2}{\rho}; \quad (3)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя; y_1 и y_2 – расстояния от нейтрального слоя до соответствующих слоев балки «ab» и «mn». Подставив величины ε_1 и ε_2 из выражения (3) в выражения (1) и (2) получим

$$\sigma_{z1} = E_1 \frac{y_1}{\rho}; \quad \sigma_{z2} = E_2 \frac{(-y_2)}{\rho} \quad (4)$$

Из условия равновесия, что сумма внутренних сил на ось z при чистом изгибе балки равна нулю, получим

$$N = \int_{A_1} \sigma_{z1} dA_1 + \int_{A_2} \sigma_{z2} dA_2 = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1 dA_1 - \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2 dA_2 = 0 \quad (5)$$

В выражении (5) интегралы представляют собой статические моменты площадей сечения относительно нейтральной оси x . Поэтому выражение (5) можно представить в виде следующего равенства:

$$E_1 S_{x1} = E_2 S_{x2} \quad (6)$$

Статические моменты площадей относительно нейтральной оси x получим из следующих выражений:

$$S_{x1} = A_1 \frac{a}{2} = b \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{ba^2}{2}; \quad S_{x2} = A_2 \frac{c}{2} = b \cdot c \cdot \frac{c}{2} = \frac{bc^2}{2}$$

Подставив полученные выражения для S_{x1} и S_{x2} в равенство (6) получим

$$E_1 \frac{ba^2}{2} = E_2 \frac{bc^2}{2} \quad (7)$$

Из последнего уравнения (7) определяем значение величины высоты второй части сечения «с».

$$c = a \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad (8)$$

При равенстве $E_1 = E_2$ для сечения балки, состоящей из двух частей одного и того же материала, но жестко скрепленных между собой, следует $a = c$. Это равенство устанавливает, что нейтральная ось пройдет через центр тяжести сечения.

Из условия равенства изгибающих моментов в сечении z от внешнего изгибающего момента и от изгибающего момента от внутренних сил следует:

$$M_{(z)} = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA \quad (9)$$

Для случая, когда стержень состоит из двух прочно соединенных между собой стержней из разнородных материалов, уравнение (9) может быть представлено следующим образом:

$$M_{(z)} = \int_{A_1} \sigma_{z1} \cdot y_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} \sigma_{z2} \cdot (-y_2) \cdot dA_2 \quad (10)$$

Рассматривая совместно выражение (10) и выражение (4), получим:

$$M_{(z)} = \int_{A_1} E_1 \cdot \frac{y_1}{\rho} y_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} E_2 \cdot \frac{(-y_2)}{\rho} \cdot (-y_2) \cdot dA_2 \quad (11)$$

Или

$$M_{(z)} = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1^2 \cdot dA_1 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2^2 \cdot dA_2 \quad (12)$$

Так как интегралы, входящие в выражение (12) являются моментами инерции I_{x1} и I_{x2} соответствующих частей сечения балки, то выражение (12) можно преобразовать :

$$M_{(z)} = \frac{1}{\rho} (E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2}). \quad (13)$$

Из последнего выражения следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{E I_{x1} + E I_{x2}} = \frac{M(z)}{(E I_x)_{np}}, \quad (14)$$

где $(E I_x)_{np} = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2}$ – приведенная жесткость сечения при изгибе.

Подставив полученное значение из выражения (14) в формулы (4), получим выражения для определения нормальных напряжений в любой зоне сечения балки:

$$\sigma_{z1} = \frac{M(z) E_1}{(E I_x)_{np}} y_1; \quad \sigma_{z2} = -\frac{M(z) E_2}{(E I_x)_{np}} y_2. \quad (15)$$

Моменты инерции сечения относительно нейтральной оси X определяются из выражений

$$I_{x1} = \frac{ba^3}{12} + ba \left(\frac{a}{2} \right)^2; \quad I_{x2} = \frac{bc^3}{12} + bc \left(\frac{c}{2} \right)^2.$$

Эпюра распределения напряжений по высоте сечения балки показана на рис. 1 в. Из формул (15) следует, что углы наклона эпюр к вертикальной линии α_1 и α_2 будут различными. Приведенную методику расчета можно использовать для многослойных стержней, а также для стержней из композиционных материалов типа железобетона. Получены формулы для определения нормальных напряжений в любой зоне поперечного сечения с переменной изгибной жесткостью сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко, Г.С. *Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко и др. – Киев: Издательство «Техника», 1967. – 83с.*
2. Феодосьев, В.И. *Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев – М.: Издательство «Наука», 1972. – 541 с.*

ОЦЕНКА ПОВРЕЖДЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ, ИСПЫТЫВАЕМЫХ НА ВИБРОПРОЧНОСТЬ

д.т.н. Сурин В.М., к.т.н. Пачинин В.И.

УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

Введение. Самым распространенным методом стендовых испытаний изделий на вибропрочность [1] является метод качающейся частоты (метод 103-1) при действии синусоидальной вибрации. Он заключается в плавном изменении частоты возбуждения $f(t)$ в заданном диапазоне от нижней частоты f_H до верхней f_B и обратно, чтобы последовательно возбуждались резонансы элементов испытываемого изделия при постоянном во всем диапазоне уровне воздействия.

Разнообразные по конструктивному исполнению элементы изделий представляем в виде линейной механической модели масса – демпфер – пружина. Временная функция отклика A модели при рассматриваемом нагружении – синусоидальная, с изменяющейся частотой. Амплитуда отклика A в число раз, равное коэффициенту передачи β отлична от амплитуды a задаваемого стендом постоянного ускорения. Для установившихся колебаний коэффициент передачи равен [2]

$$\beta = A(t)/a = 1/\sqrt{(1 - Z^2)^2 + Z^2/Q^2} \quad (1)$$

где $Z = f(t)/f_o$ – нормированная частота, позволяющая исключить влияние разброса значений собственной частоты f_o элементов изделия при сравнении результатов испытаний; Q – механическая добротность элемента, которая связана [2] с логарифмическим декрементом колебаний δ выражением $Q = \pi/\delta$ и определяется при испытаниях как отношение максимальной амплитуды отклика к амплитуде задаваемого воздействия. Максимального значения коэффициент передачи ($\beta_{max} = Q$) достигает при резонансе, когда $f = f_o$.

Передачный коэффициент зависит от Z , добротности и скорости изменения частоты в резонансной полосе, границы которой определяются частотами f_1 и f_2 , при которых амплитуда отклика в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитуды отклика на резонансе. Полагаем, что в полосе резонанса имеют место установившиеся колебания, а добротность Q не зависит от величины f_o .

Рассчитанные значения передаточного коэффициента для отдельных точек диапазона испытаний ($Z_H - Z_B$) приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Значения передаточного коэффициента β на частотах диапазона испытаний $Z_H - Z_B$ в зависимости от величины добротности

$Z=f(t)/f_o$	β			
	Q=10	Q=20	Q=50	Q=100
1	2	3	4	5
0,5	1,330	1,332	1,333	1,333
0,9	4,756	5,121	5,239	5,257
0,93	6,096	6,998	7,332	7,384
0,95	7,345	9,220	10,067	10,208
0,975	9,150	14,412	18,837	19,869

Окончание таблицы 1

1,0	10	20	50	100
1,03	8,357	12,538	15,554	16,190
1,05	6,814	8,683	9,557	9,705
1,1	4,218	4,606	4,735	4,755
1,413	0,990	0,998	1,000	1,000

Как видно, влияние добротности проявляется на величину передаточного коэффициента только в интервале частот $(0,95-1,05)f_0$. При частотах $f_B > \sqrt{2} \cdot f_0$, когда $Z > 1,413$, а передаточный коэффициент становится меньше единицы и резко уменьшается с увеличением частоты, отклик становится меньше воздействия, испытания проходят в квазиамортизационном режиме нагружения. Поэтому верхнюю частоту диапазона воздействия ограничивают значением $f_B = 1,5f_0$ или $Z_B = 1,5$.

Оценка повреждений. Причиной отказов элементов при испытаниях на вибропрочность является усталостное повреждение. Число циклов до разрушения всегда больше 10^5 [3]. Принимая во внимание условную границу долговечности между мало- и многоциклового усталостью [4] полагаем, что имеет место механизм многоциклового усталости. Для оценки усталостных повреждений использовали степенное уравнение кривой усталости. Считая возникающие в элементах напряжения пропорциональными ускорению отклика оно имеет вид

$$(a \cdot \beta)^m N = C \quad (2)$$

где a – задаваемое стендом ускорение; β – передаточный коэффициент; N – долговечность в циклах при заданной нагрузке; m – показатель наклона кривой усталости в двойных логарифмических координатах, определяемый экспериментально, значения которого возможны от 2 до 20 [5]. Величину C можно отождествить с усталостным повреждением при предельном состоянии.

Повреждение, полученное элементом за одно колебание на разных частотах диапазона испытаний ($Z_H - Z_B$) в связи с изменением коэффициента передачи будет разным. Максимальное повреждение элемент получит на резонансной частоте, когда $\beta = Q$. Известно [6], что при прохождении монотонно возрастающего (понижающего) уровня воздействия получают повышенные (заниженные) значения долговечностей. Качающаяся частота исключает монотонность, поэтому полагаем, что на возникновение повреждений не влияет последовательность изменения частоты и уровня воспринимаемого ускорения. При оценке повреждений, полученных во всем диапазоне испытаний, воспользуемся линейной гипотезой суммирования, согласно которой все повреждения, полученные на всех уровнях вибрационного воздействия, суммируются вне зависимости от их последовательности.

Обозначим время прохождения частотного диапазона $f_H - f_B$ через T , а время прохождения резонансной полосы ΔZ_0 – через Δt_0 .

При испытании по данному методу могут быть использованы следующие зависимости изменения частоты возбуждения.

1. Экспоненциальная (логарифмическая), когда время прохождения резонансной полосы постоянно ($\Delta t_0 = const$):

$$f(t) = f_H \exp(k_1 t) \quad (3)$$

где $k_1 = \ln(f_B/f_H) / T$ – коэффициент, характеризующий скорость изменения частоты.

2. Линейная, когда скорость изменения частоты во всем диапазоне постоянна ($df/dt = const$):

$$f(t) = f_H + k_2 t \quad (4)$$

где $k_2 = (f_B - f_H)/T$, Гц/с – скорость изменения частоты.

3. Гиперболическая, при которой число колебаний в резонансной полосе для всех элементов изделия постоянно ($\Delta n_o = const$)

$$f(t) = f_H / (1 - k_3 t), \quad (5)$$

где $k_3 = k_2/f_B$ – относительная скорость изменения частоты, c^{-1} .

Частота возбуждения в (3) – (5) дана для случая ее увеличения, при ее уменьшении величина t в уравнениях меняется на $(T-t)$. **Вероятность появления амплитуд отклика на некоторой частоте f заменим вероятностью пребывания возбуждения на этой частоте, т.е. $dn = f(t) \cdot dt$.** Общее число колебаний за время T полуцикла качания при изменениях частоты по (3) – (5) определяется как:

$$n_1 = T \cdot \frac{f_B - f_H}{\ln(f_B/f_H)}, \quad n_2 = T \frac{f_B + f_H}{2}, \quad n_3 = T \frac{f_B \cdot f_H}{f_B - f_H} \ln \frac{f_B}{f_H} \quad (6)$$

Нижнюю частоту диапазонов испытаний согласно рекомендациям [1] приняли равной 10 Гц.

Наибольшее число колебаний дает линейная зависимость изменения частоты, а наименьшее – гиперболическая, и это различие увеличивается с расширением частотного диапазона испытаний. Повреждение, полученное элементом за время T , т. е. за полуцикл качания, равно:

$$C_T = \int_0^T (a\beta)^m f(t) \cdot dt \quad (7)$$

Для рассматриваемых зависимостей (3) – (5) выражение (7) примет вид:

$$\begin{aligned} C_{1T} &= T f_0 a^m \frac{1}{\ln(Z_B/Z_H)} \int_{Z_H}^{Z_B} \beta^m dZ, \\ C_{2T} &= T f_0 a^m \frac{1}{Z_B - Z_H} \int_{Z_H}^{Z_B} \beta^m Z dZ, \\ C_{3T} &= T f_0 a^m \frac{Z_B \cdot Z_H}{Z_B - Z_H} \int_{Z_H}^{Z_B} \beta^m dZ/Z, \end{aligned} \quad (8)$$

где $Z_B = f_B/f_0$; $Z_H = f_H/f_0$.

Рассмотрим влияние на накопления усталостных повреждений не только зависимостей изменения частоты, но и отдельных интервалов: дорезонансного $Z_H - Z_1$; резонансной полосы ΔZ_0 и зарезонансного $Z_2 - Z_B$. Нижняя частота была принята 10 Гц, для элемента с $f_0 = 400$ Гц $Z_H = 0,025$, верхняя ограничена условием $\beta \leq 1$ ($Z_B = 1,5$).

Рассчитанные значения границ $Z_1 - Z_2$ резонансной полосы, вычисленные для разных величин добротности приведены в табл. 2

Таблица 2 – Значения границ полосы резонанса Z_1, Z_2 в зависимости от добротности

Q	5	7	10	20	30	50	100
Z_1	0,883	0,920	0,946	0,974	0,983	0,989	0,995
Z_2	1,083	1,064	1,046	1,024	1,016	1,009	1,005

Ширина резонансной полосы ΔZ_0 зависит от добротности, но при любых значениях Q имеет место равенство $\Delta Z_0=1/Q$.

Значения подинтегрального выражения в зависимостях (8) находили численным методом. Считая величину повреждений в интервале от Z_H до Z_B за 100%, определили распределение повреждений на интервалах при рекомендуемых значениях Q и m [4, 5]. Для рассматриваемых зависимостей они равны в интервалах, симметричных относительно резонанса. Для интервала $(0,9-1,1)f_0$ значения интегралов можно посчитать с достаточной точностью по формуле

$$J = 1,5Q^{m-1}m^{-0,56}.$$

Распределение повреждений в % по интервалам частотного диапазона при разных зависимостях изменения частоты приведено в табл. 3.

Таблица 3 – Распределение накопленных повреждений в % по интервалам частотного диапазона при экспоненциальной (C_1), линейной (C_2) и гиперболической (C_3) зависимостях изменения частоты

m	Q	$Z_H - Z_1$			$Z_1 - Z_2$			$Z_2 - Z_H$			$(0,9-1,1)f_0$		
		C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
2	10	40,8	35,2	53,1	30,2	31,5	24,9	29	33,3	22	72,0	75,3	59,8
	20	27,4	24,0	35,7	50,7	51,8	45,8	21,9	24,2	18,5	85,1	87,2	77,4
	50	12,7	11,2	16,9	76,3	76,9	73,2	11	11,9	9,9	94,2	95	90,2
4	10	25,4	23,9	27,1	54,7	55	54,2	19,9	21,1	18,7	95,1	95,1	95
	20	9,3	8,8	9,6	82	82,3	82,2	8,7	8,9	8,2	99,5	99,5	99,5
	50	1,05	1,0	1,1	97,8	97,8	97,8	1,15	1,2	1,1	100	100	100
6	10	17,8	17	18,5	68,7	68,2	68,4	13,5	14,1	13,1	100	100	100
	20	3,6	3,5	3,7	92,8	92,7	92,7	3,6	3,8	3,6	100	100	100
	50				100	100	100				100	100	100
8	10	13	12,3	13,6	77,5	77,7	77,2	9,5	10	9,2	100	100	100
	20	1,5	1,5	1,5	97	97	97	1,5	1,5	1,5	100	100	100
	50				100	100	100				100	100	100

Отметим, что рассчитанные повреждения в интервале высоких нормированных частот ($Z > 1,5$), когда $\beta < 1$, при условии их учета, не превышают 0.5% повреждений рассматриваемого диапазона.

Чем выше значения m и Q, тем больше элементы получают повреждений в резонансной полосе. В интервале дорезонансных частот $Z_H - Z_1$ наибольшее относительное накопление повреждений наблюдается при гиперболической зависимости изменения

частоты воздействия и наименьшее – при линейной. Противоположно влияние зависимостей $f(t)$ на относительную повреждаемость в интервале частот $Z_2 - Z_B$. В интервале полосы резонанса $Z_1 - Z_2$ влияние первой и второй зависимостей изменения частоты на относительный объем накопленных усталостных повреждений примерно одинаково, менее всего способствует повреждению полоса резонанса при третьей зависимости изменения частоты. Такое влияние можно объяснить разным относительным временем прохождения рассмотренных интервалов и соответственно, различным числом колебаний в них. Типичные кривые изменения частоты от времени для рассматриваемых зависимостей $f(t)$ представлены на рис. 1 для элемента с $f_0=400$ Гц в интервале 10–600 Гц (0,025–1,5) Z . Так, нахождение интервала частот $f_H - 0,5f_0$ требуется при экспоненциальной зависимости время 0,75 T , при линейной – 0,35 T и при гиперболической – 0,93 T .

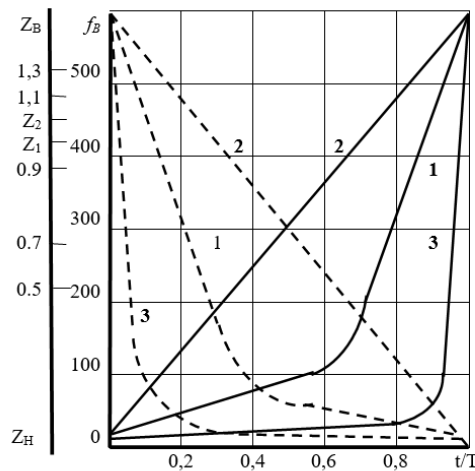


Рис. 1. Изменение частоты по времени в диапазоне 10–600 Гц при экспоненциальной (1), линейной (2) и гиперболической (3) зависимостях:
 — прямой ход от f_H к f_B ; ---- обратный ход от f_B к f_H

Отметим, что при разных зависимостях изменения частоты уровень повреждений приходящийся на интервал $(0,025-0,5)f_0$ очень незначителен.

При оценке суммарного повреждения на всех частотах диапазона $f_H - f_B$ с захватом резонансной полосы, прежде всего нужно учитывать время прохождения Δt_0 резонансной полосы, которое для рассматриваемых зависимостей соответственно равно

$$\Delta t_{01} = \frac{T}{Q \ln(Z_B/Z_H)}; \quad \Delta t_{02} = \frac{T}{Q(Z_B - Z_H)}; \quad \Delta t_{03} = \frac{T Z_B \cdot Z_H}{Q(Z_B - Z_H)}. \quad (9)$$

Влияние величины Δt_0 , как основной, в накоплении повреждений, подтверждают соотношения, полученные при сравнении зависимостей (8) и (9)

$$\frac{C_{2T}}{C_{1T}} = \frac{\Delta t_{02}}{\Delta t_{01}} = \frac{\ln(Z_B/Z_H)}{Z_B - Z_H}; \quad \frac{C_{2T}}{C_{3T}} = \frac{\Delta t_{02}}{\Delta t_{03}}; \quad \frac{C_{1T}}{C_{3T}} = \frac{\Delta t_{01}}{\Delta t_{03}}. \quad (10)$$

При испытаниях в узких диапазонах частот, захватывающих резонанс, не превышающих по ширине $0,3f_0$ и симметричных относительно резонансной частоты, рассматриваемые зависимости не влияют на повреждаемость, а зависимости, представленные на рис. 1 для таких диапазонов, приближаются к прямым линиям. Влияние зависи-

мостей изменения $f(t)$ на повреждение увеличивается с расширением диапазона нормированных частот.

Результаты испытаний. Полученные выше зависимости проверили на электродинамическом стенде УВЭ-5/10000, грузоподъемностью 5 кг, с диапазоном частот возбуждения 5–10000 Гц и максимальным ускорением воздействия 450 м/с^2 . Режим испытаний задавали с помощью системы управления стендом СУВУ4 (15УС-10⁴-002), которая обеспечивает постоянный задаваемый уровень воздействия на столе стенда, автоматическую развертку частоты в установленном диапазоне (5–10000) Гц по экспоненциальной или линейной зависимостям изменения частоты с задаваемой скоростью (1–100 Гц/с), а так же измерение частоты с погрешностью 2 % и измерение ускорения с погрешностью 4 %.

Испытывали резисторы МЛТ-1, закрепленные по схеме центральнонагруженного стержня с расстоянием 49 мм между жестко закрепленными концами f_0 ср = 440 Гц, партиями по 12 штук при ускорении в 16g с экспоненциальной и линейной зависимостями изменения частоты в диапазонах $(0,1-1,5)f_0$ и $(0,5-1,5)f_0$. Скорость развертки частоты принимали при экспоненциальной зависимости равной одной октаве в минуту, а при линейной – подбирали из условия равенства времени прохождения диапазона $Z_H - Z_B$. Используя соотношения (10) рассчитали, что повреждения, полученные при линейной зависимости изменения частоты должны быть в 1.84 раза при испытании в интервале $(0,1-1,5)f_0$ и в 1.097 раз при испытании в интервале $(0,5-1,5)f_0$ больше повреждений, полученных при испытаниях с экспоненциальной зависимостью.

Предельное состояние резисторов фиксировали по разрушению их медных волоочных выводов. Для сравнения использовали медианы долговечностей в минутах испытываемых выборок. Долговечность резисторов, испытанных в диапазоне (50–660) Гц и (230–660) Гц при линейной зависимости изменения частоты в 2,05 и 1,2 раза была соответственно меньше долговечности при испытаниях с экспоненциальной зависимостью.

Большее по сравнению с расчетной влияние на повреждаемость линейной зависимости изменения $f(t)$ можно объяснить тем, что меньшее время прохождения резонансной полосы при экспоненциальной зависимости уменьшает не только количество колебаний с наибольшими амплитудами, но и величину этих амплитуд.

Выводы. 1. Использование нормированных относительно резонанса интервалов частоты возбуждения позволило количественно оценить их влияние на вибропрочность изделий, что важно как при создании надежных изделий (уход от резонанса за счет изменения жесткости конструкции), так и при выборе режимов ускоренных испытаний на вибропрочность.

2. Линейная зависимость изменения частоты возбуждения наиболее эффективна при испытаниях на вибропрочность, особенно в диапазоне дорезонансных частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Межгосударственный стандарт ГОСТ 20.57.406-81 Комплексная система испытания качества. Изделия электронной техники, квантовой электроники и электротехнические. Методы испытаний / Минск, Госстандарт. – М.: Издательство стандартов, 1982. – 165 с.

2. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

3. Держинский, С.М. Долговечность электронных элементов, испытываемых на вибропрочность / С.М. Держинский, В.М. Сурин // Проблемы инфокоммуникаций. – 2015. – № 1. – С. 62–65.

4. Когаев, В.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность / В.П. Когаев, Н.А. Махутов, А.П. Гусенков. – М.: Машиностроение, 1985. – 220 с.

5. Межгосударственный стандарт ГОСТ 25.504-82 Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости / Минск, Госстандарт. М.: Издательство стандартов, 1982. – 81 с.

"б. Межгосударственный стандарт ГОСТ 25.507-85 Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы испытаний на усталость при эксплуатационных режимах нагружения. Общие требования / Минск, Госстандарт. – М.: Издательство стандартов, 1985. – 31 с.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОГО ГРАНИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ АНАЛИЗЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СРЕДЫ

Мармыш Д.Е.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В теории контактного взаимодействия широко известны два распределения контактного давления при упругом взаимодействии твердых тел. При контакте двух тел вращения (классическая задача Герца) распределение контактного давления имеет вид

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (1)$$

где a, b – длины полуосей эллиптической площадки контакта;

p_0 – максимальное давление в центре площадки.

Вторым широко известным случаем является задача о вдавливании штампа в упругое полупространство. В случае круглого поперечного сечения штампа радиуса R распределение контактного давления имеет вид [1]

$$p(r) = \frac{P}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (2)$$

При анализе напряженно-деформированного состояния и состояния повреждаемости среды методом аналитического граничного элемента, развитого в работах [2, 3], важным и до конца не исследованным является вопрос о сходимости алгоритмов гранично-элементного моделирования. В работе [4] исследована и показана сходимость вычислений при распределении контактного давления вида (1). Более сложным случаем является распределение вида (2), особенностью которого является то, что контактное давление стремится к бесконечности на границе вдавливаемого круглого штампа, т.е. при $r \rightarrow R$. Далее в работе будем проводить анализ сходимости метода аналитического граничного элемента при вычислении напряженно-деформированного состояния и повреждаемости для более общего случая распределения контактных усилий:

$$p(x, y) = \frac{P_0}{\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}}. \quad (3)$$

Распределение вида (2) является частным случаем распределения (3) для $a = b = R$

Гранично-элементное моделирование напряженного состояния. Компоненты тензора напряжений в любой точке $A(x, y, z)$ полупространства $z > 0$ находятся по формуле

$$\sigma_{ij}(x, y, z) = \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) G_{ij}(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \quad (4)$$

где $G_{ij}(x, y, z)$ – функции влияния из решения задачи Буссинеска для сосредоточенной силы [5]; $i, j = \{x, y, z\}$;

Ω – двумерная область ограниченная эллипсом

$$\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

При вычислении напряжений методом аналитического граничного элемента область распределения давления Ω разбивалась на прямоугольные граничные элементы (ГЭ) со сторонами параллельными осям координат Ox и Oy . Контактные усилия (3) аппроксимировались равномерным распределением в рамках одного ГЭ. Точность вычислений зависит от порядка дискретизации области Ω . В работе [6] проведено моделирование для распределения вида (3) при различной степени дискретизации области и показана низкая степень погрешности результатов в сравнении с точным решением для нормальной компоненты σ_{zz} вдоль оси Oz (не более 0,3% при соотношении $a/b = 2$ и разбиении большей полуоси на 10 ГЭ). В случае, когда $x=0$ и $y=0$ нормальное напряжение у поверхности полупространства $\sigma_{zz} = -p_0$. Однако для изучения вопроса вычислительной сходимости процедур при моделировании напряженного состояния наибольший интерес представляет численное определение напряжения σ_{zz} вдоль оси параллельной оси Oz и с координатами x, y удовлетворяющими уравнению эллипса (5). В этом случае необходимо удовлетворение граничного условия у поверхности полупространства и напряжение σ_{zz} должно стремиться к $-\infty$ при $z \rightarrow 0$. Точность численного определения напряжения у поверхности полупространства в этом случае зависит от количества граничных элементов, на которое разбивается область Ω . На рис. 1 показано распределение нормального напряжения σ_{zz} вдоль оси параллельной оси Oz под точкой полупространства с координатами $A(a, 0)$ (рис. 1, а) и под точкой с координатами $B(0, b)$ (рис. 1, б). Аппроксимация области Ω производилась квадратами с разбиением большей полуоси на 20, 50 и 100 элементов.

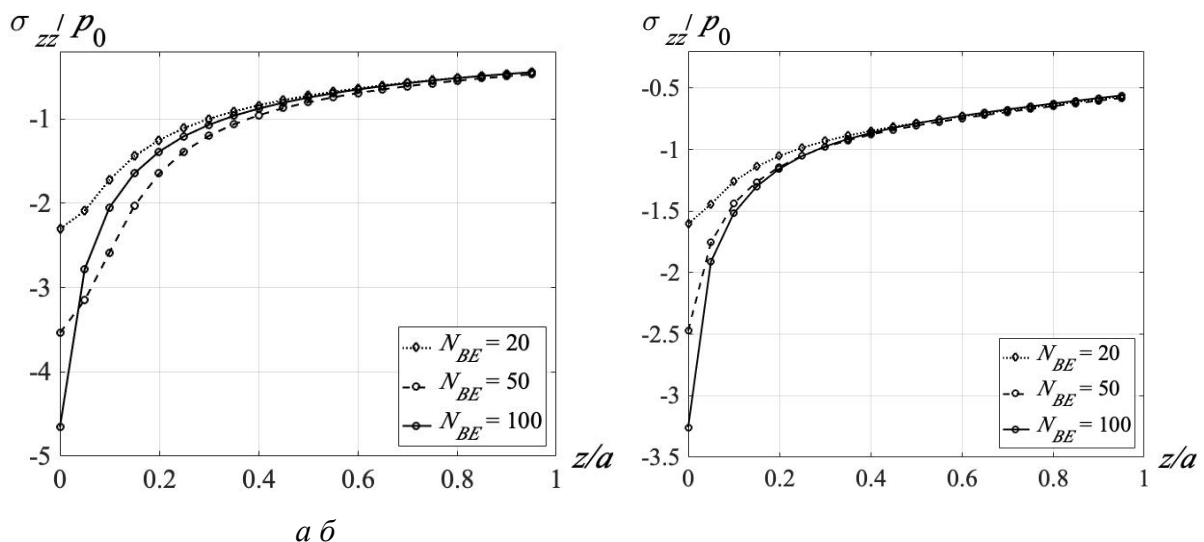


Рис. 1. Распределение нормального напряжения по глубине полупространства: а – под точкой $A(a, 0)$; б – под точкой $B(0, b)$

Из рис. 1 видно, что с увеличением количества N_{BE} граничных элементов, численное значение нормального напряжения у поверхности полупространства будет стремиться к теоретическому.

На рис. 2 представлены распределения остальных отличных от нуля компонент тензора напряжений вдоль оси параллельной оси Oz , соответственно, под точкой $A(a,0)$ (рис. 2, а) и под точкой $B(0,b)$ (рис. 2, б) при разбиении большей полуоси эллипса Ω на 100 граничных элементов.

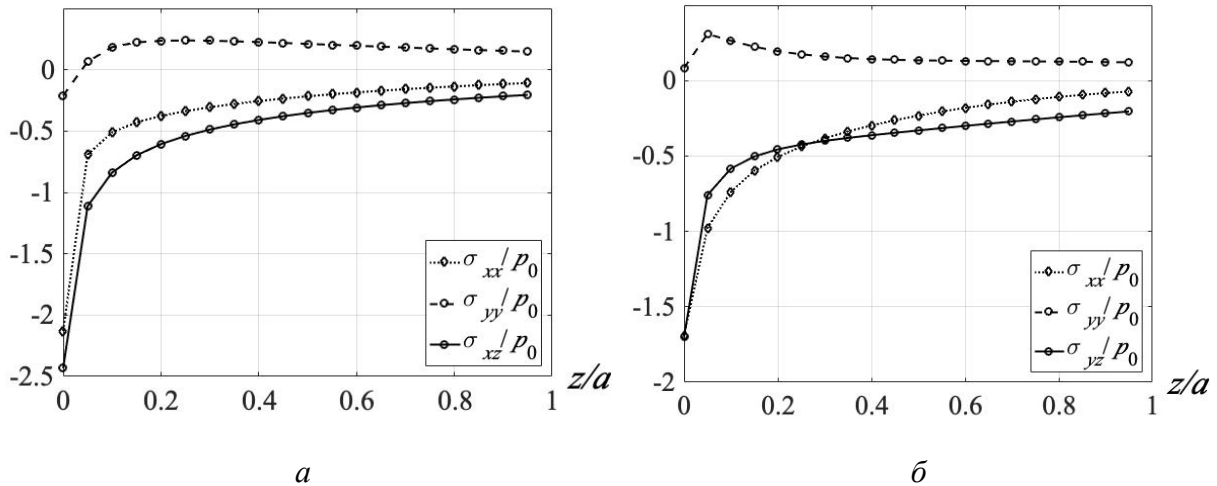


Рис. 2. Распределение нормальных σ_{xx} , σ_{yy} и касательных напряжений σ_{xz} , σ_{yz} :
а – под точкой $A(a,0)$; б – под точкой $B(0,b)$.

Сходимость при вычислении повреждаемости среды. Теоретическое обоснование модель твердого тела с опасным объемом и теория повреждаемости среды получило в работе [3]. В данной работе повреждаемость полупространства в окрестности контактного взаимодействия и сходимость численных процедур анализировалась по трем основным теориям предельных состояний:

1) по нормальным напряжениям $\sigma_{zz} \leq \sigma_{zz}^{(*lim)}$;

2) по интенсивности напряжений

$$\sigma_{int} = |\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_{int}^{(*lim)}; \quad (6)$$

3) по эквивалентным напряжениям

$$\sigma_{eqv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_{eqv}^{(*lim)}; \quad (7)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений.

Исходя из теории твердого деформируемого тела с опасным объемом, выражения для определения количественных значений опасного объема V и интегральной повреждаемости Ψ имеют вид [3]

$$V_i = \int_{\sigma_i \geq \sigma^{(*\text{lim})}} dV, \quad \Psi_i = \int_{\sigma_i \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^{(*\text{lim})}} dV \quad (8)$$

где $\sigma^{(*\text{lim})}$ – предельное напряжение; $i = \{zz, \text{int}, \text{eqv}\}$.

При определении повреждаемости материала, испытываемого на усталость, в работе [7] предельные нормальные и касательные напряжения рекомендуется брать как 0,3 и 0,03 от максимального значения контактного давления p_0 соответственно, т.е.

$$\sigma_n^{(*\text{lim})} = 0,3p_0, \quad \sigma_\tau^{(*\text{lim})} = 0,03p_0.$$

Составим из данных значений тензор напряжений, получим

$$T = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,03 & 0,03 \\ 0,03 & 0,3 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 0,3 \end{bmatrix} p_0. \quad (9)$$

Главные значения тензора напряжений равны соответственно

$$\sigma_1 = 0,36p_0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,27p_0.$$

Общий алгоритм вычисления опасного объема и интегральной повреждаемости среды с помощью метода аналитического граничного элемента описан в работе [4].

Очевидно, что количественные характеристики повреждаемости твердого тела зависят как от интенсивности нормального давления в центре эллиптической площадки Ω , так и от значений длин полуосей a и b . Для большей общности результатов отнесем показатели опасного объема V_i и интегральной повреждаемости Ψ_i к полной величине контактного давления

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = p_0 \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}}.$$

Область интегрирования Ω является эллипсом, поэтому переходя к координатам $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, получим следующий двойной интеграл

$$P = abp_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 2\pi abp_0.$$

При анализе сложного напряженного-деформированного состояния всегда ключевым вопросом является выбор значения предельных напряжений. Самым простым решением будет выбор первого главного напряжения σ_1 в качестве предельного, т.е. $\sigma^{(*\text{lim})} = \sigma_1 = 0,36p_0$. Для этого случая на рис. 3 показана сеточная сходимость метода аналитического граничного элемента при вычислении опасного объема и повреждаемости по нормальным напряжениям (рис. 3, а–б), по интенсивности напряжений (рис. 3, в–г) и по эквивалентным напряжениям (рис. 3, д–е) с использованием формул (8) в зависимости от количества расчетных узлов n в полупространстве вдоль оси Ox .

Из рис. 3 видно, что при разбиении большой полуоси площадки контакта на 10 граничных элементов, значение опасного объема и интегральной повреждаемости во всех трех случаях получается завышенным. Значения повреждаемости полупространства при $N_{BE} = 20$ и $N_{BE} = 30$ отличаются друг от друга не более чем на 1%.

Другим подходом к выбору значений предельных напряжений, является использование определений интенсивности и эквивалентных напряжений. Подставив значения главных напряжений в формулы (6) и (7), получим предельные значения

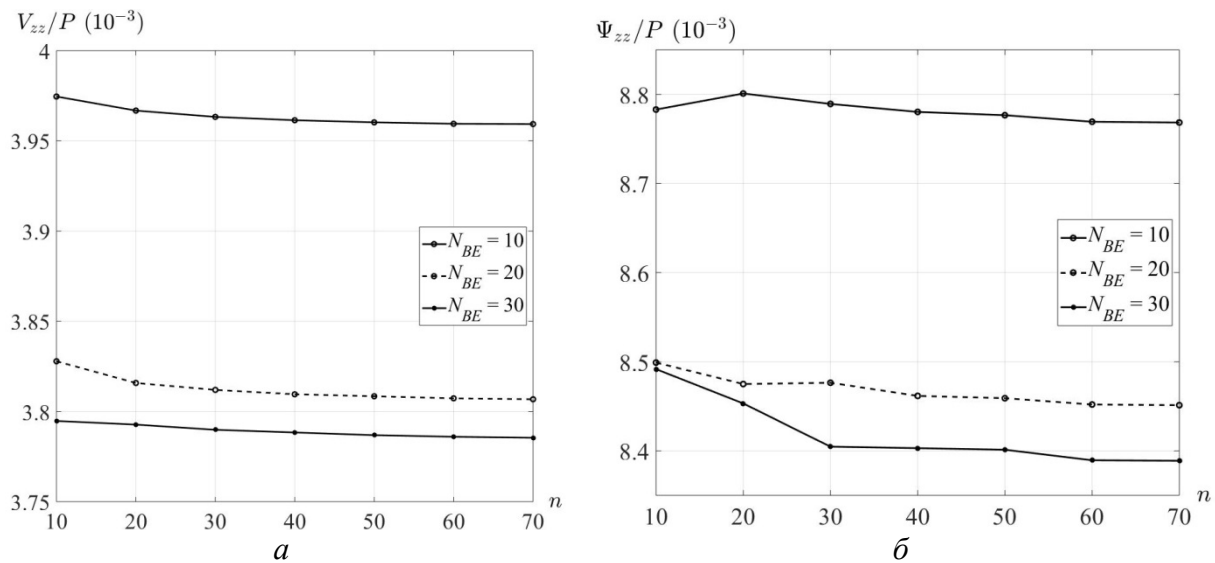
$$\sigma_{\text{int}}^{(*\text{lim})} = \sigma_{\text{eqv}}^{(*\text{lim})} = 0,09p_0. \quad (8)$$

На рис. 4 показана сеточная сходимость при вычислении показателей повреждаемости полупространства для предельных значений (8) по интенсивности напряжений и эквивалентным напряжениям. Следует отметить, что значения опасных объемов по обоим видам напряжений отличаются друг от друга не более чем на 1%, в то время как значения интегральной повреждаемости (повреждаемости опасного объема) отличаются друг от друга на 10%.

Закключение. Метод аналитического граничного элемента является эффективным методом анализа напряженно-деформированного состояния среды. Из работы [4] и из настоящих результатов следует, что данный метод также может быть эффективно применен и при вычислении количественных показателей повреждаемости среды: опасного объема, локальной и интегральной повреждаемости.

При вычислении повреждаемости необходимо построение двух расчетных сеток. Первая – это гранично-элементная сетка по границе среды, вторая – это расчетная сетка по области среды, в любой точке которой действующие напряжения превышают предельные. В данной работе показано, что вне зависимости от порядка гранично-элементной сетки, наблюдается сходимость по расчетной сетке при вычислении значений опасного объема и интегральной повреждаемости (повреждаемости опасного объема) к своим стационарным значениям. При увеличении порядка расчетной сетки в 7 раз, показатели повреждаемости уменьшаются не более чем на 5% для опасного объема и не более чем на 2% для интегральной повреждаемости.

С целью разработки единого подхода к моделированию повреждаемости методом аналитического граничного элемента, рекомендуется брать размер элемента расчетной сетки по объему твердого тела (площади) равным размеру граничного элемента.



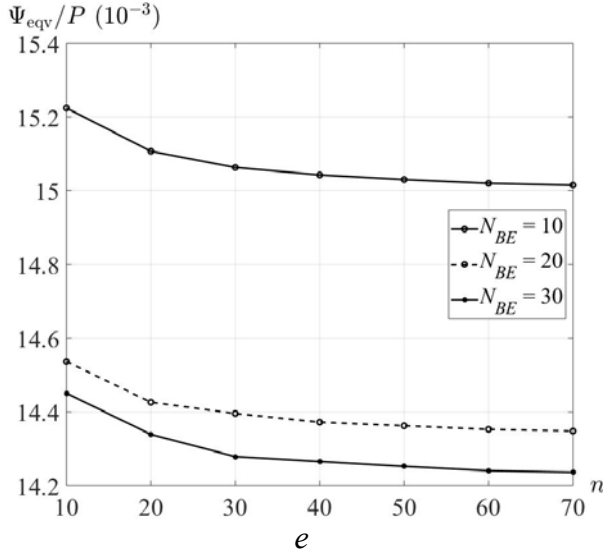
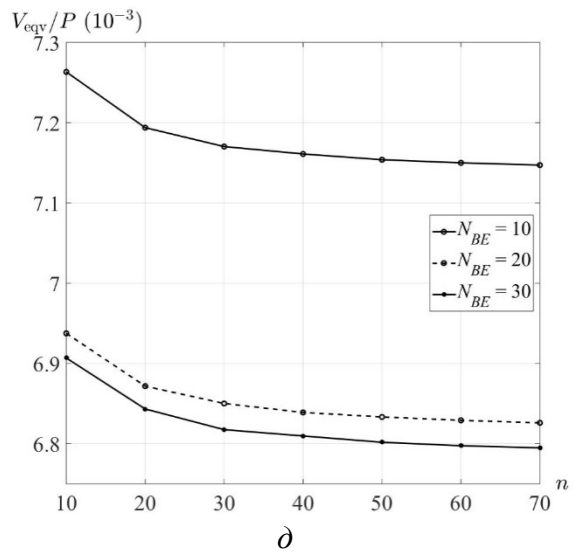
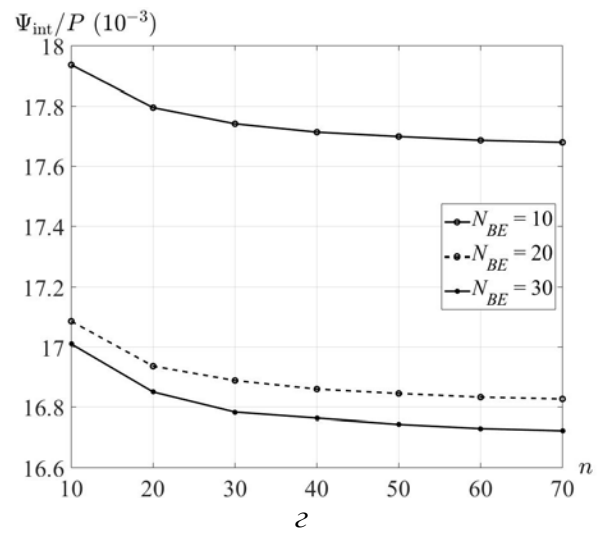
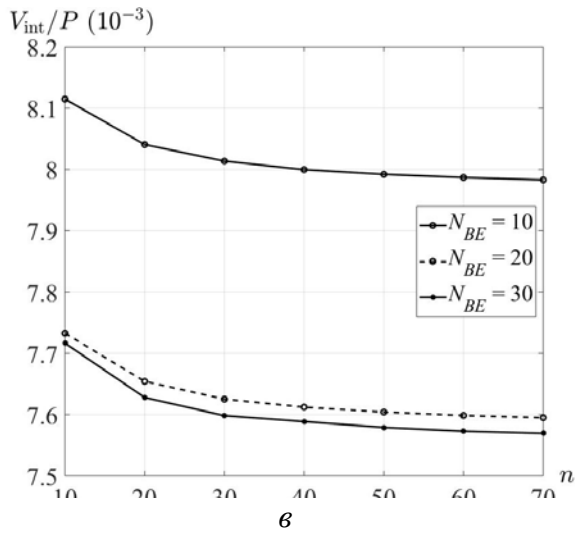


Рис. 3. Сеточная сходимость при вычислении значений опасного объема и интегральной повреждаемости: по нормальным напряжениям (а–б); по интенсивности (в–г); по эквивалентным напряжениям (д–е)

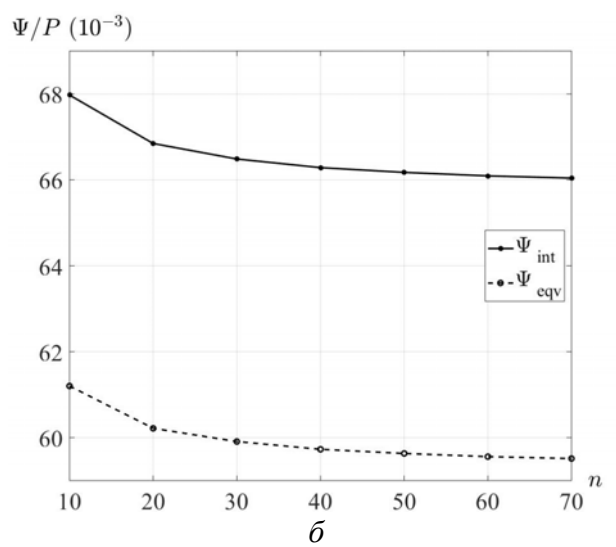
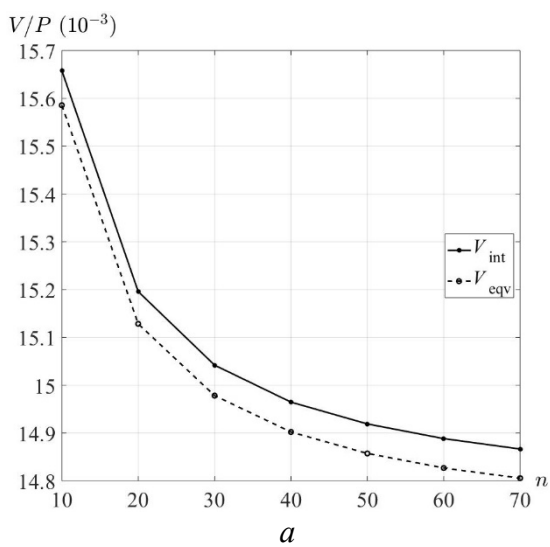


Рис. 4. Сеточная сходимость при вычислении значений опасного объема (а) и интегральной повреждаемости (б) при $\sigma_{\text{int}}^{(\text{lim})} = \sigma_{\text{eqv}}^{(\text{lim})} = 0,09 p_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
2. Мармыш Д.Е. Численное моделирование повреждаемости силовой системы. Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. – Вып. 32. – Мн.: БНТУ, 2017. – С. 312–316.
3. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
4. Щербаков, С.С. Оптимизация объемной повреждаемости полупространства, нагруженного эллиптически распределенным контактным давлением и неконтактными напряжениями / С. С. Щербаков // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 4 (45). – С 96–100.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
6. Мармыш, Д.Е. Гранично-элементное моделирование напряженного состояния при вдавливании штампа в полупространство / Д.Е. Мармыш, С.С. Щербаков // Актуальные вопросы машиноведения. – Вып. 7. – Мн.: ОИМ, 2018. – С. 204–207.
7. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.

РАЗРАБОТКА ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛЕЙ СВОБОДНОГО И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОГО ЗВЕНА ЭКЗОСКЕЛЕТА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ С ДВУМЯ ВЕСОМЫМИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМИ УЧАСТКАМИ*

¹Борисов А.В., ¹Кончина Л.В., ¹Маслова К.С., ²Чигарев А.В.

¹ Филиал ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске

² Белорусский государственный университет, Минск

1. Введение

Ранее [1] были исследованы причины, которые вызывают изменение длины звена в опорно-двигательном аппарате человека. Была предложена модель звена переменной длины, используемая для построения моделей опорно-двигательного аппарата человека. Эта модель представляла собой невесомый стержень, изменяющий свою длину, и расположенные на нем точечные массы. Но такая модель не может быть использована при изготовлении экзоскелета. В этой статье описывается разработанная модель звена переменной длины, которую возможно использовать при создании реального экзоскелета. Данная модель отличается от ранее разработанных [2-5] наличием двух массивных абсолютно твердых участков и находящимся между ними невесомым участком переменной длины. Изменение длины невесомого участка может быть реализовано при использовании пружины, работающей на растяжение-сжатие. Однако, при этом управление изменением длины звена будет невозможно. Для управляемого изменения длины звена можно использовать шаговый электрический двигатель, пневматический или гидравлический цилиндры. В статье не конкретизируется устройство, позволяющее изменять длину звена. Оно аппроксимируется продольной силой F , направленной вдоль звена [2,3].

2. Описание плоской модели закрепленного звена экзоскелета переменной длины с двумя массивными абсолютно твердыми участками и одним невесомым переменной длины между ними и составление дифференциальных уравнений движения

Рассмотрим модель звена, которая состоит из двух весоных абсолютно жестких частей, совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой AB , проходящей через его начало и конец (рис. 1). Цилиндрический шарнир, расположенный в точке A , жестко соединен с опорной поверхностью. Под действием силы тяжести, реакций со стороны опоры и соседних стержней (не показанных на рис. 1) происходит движение участка DB относительно участка AC вдоль направления AB , тем самым обеспечивается изменение длины звена на участке CD .

Для исследования плоского движения звена экзоскелета переменной длины введем неподвижную правую декартову систему координат $ху$ с началом в точке O . Рассмотрим плоскость $ху$, в которой происходит движение центра масс.

Система имеет два весоных абсолютно жестких стержня: AC и DB . На рис. 1 схематично изображено звено AB и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев $AC = l_{11}$, $DB = l_{12}$, двойная нумерация индексов связана с построением многозвенной модели экзоскелета: первый индекс соответствует номеру звена, второй – номеру весоного участка на звене. Переменность длины звена реализуется за счет относительного

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Смоленской области в рамках научного проекта № 19-48-670002

The reported study was funded by RFBR and Smolensk region, project number 19-48-670002

движения вдоль направления звена AB участка DB . Участок переменной длины CD считается невесомым. Считаем, что на нем имеется сила F_1 , которая обеспечивает необходимое управляемое изменение длины звена.

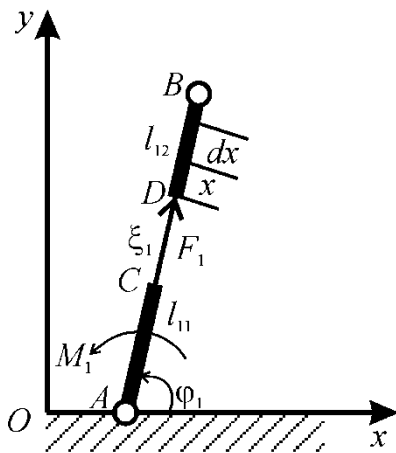


Рис. 1. Модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости

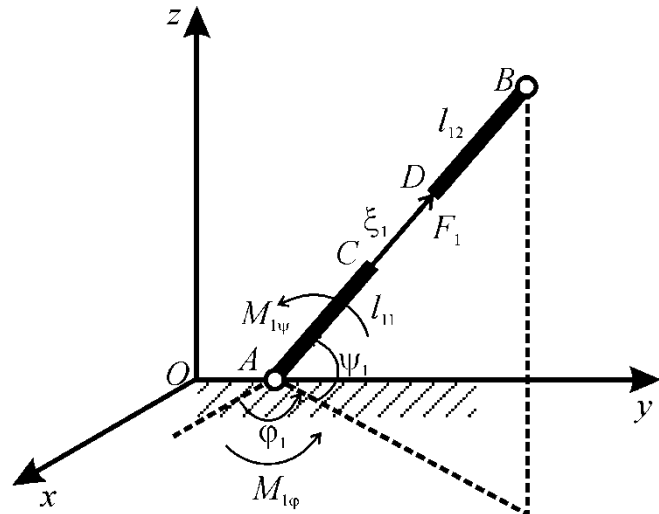


Рис. 2. Модель звена экзоскелета переменной длины в пространстве

Положение однозначно определяется углом φ_1 и переменной длиной участка стержня $\xi_1(t) = CD$. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обозначим через M_1 момент, развиваемый в шарнире A , являющийся управлением и определяющим угловое перемещение звена. Изменение длины участка стержня $\xi_1(t)$ задается силой F_1 , которая является вторым управляющим параметром в рассматриваемой системе.

Масса стержня AC равна m_{11} , момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения I_{11} , для стержня DB масса равна m_{12} , момент инерции относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{12} .

Кинетическая энергия звена будет складываться из энергии звена AC и DB .

$$T = T_{AC} + T_{DB}.$$

$$T_{AC} = (m_{11}n_{11}^2 l_{11}^2 + I_{11}) \dot{\varphi}_1^2 / 2 \quad (1)$$

$$T_{DB} = [(\dot{\xi}_1^2)m_{12} + \{m_{12}(l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2\xi_1 l_{11} + \xi_1 l_{12} + \xi_1^2) + I_{12}\} \dot{\varphi}_1^2] / 2$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2 n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2)) \ddot{\varphi}_1 + g(m_{11}l_{11}n_{11} + m_{12}(l_{11} + l_{12}n_{12} + \xi_1)) \cos \varphi_1 + m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1) \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 = M_1, \quad (2)$$

$$-m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1) \dot{\varphi}_1^2 / 2 + gm_{12} \sin \varphi_1 + m_{12} \ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (3)$$

Таким образом, составлена система дифференциальных уравнений движения, описывающая модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости.

3. Модель шарнирно закрепленного звена экзоскелета в пространстве

Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, относительно

которой рассматривается движение механизма (рис. 2.). Звено AB переменной длины, состоящее из двух весомых частей, изменяющих свою длину, сохраняет свою конструкцию и обозначения, введенные для звена на плоскости.

Положение весомого участка звена зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Рассматриваемая система имеет три степени свободы. Обозначим через $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире A . Продольная сила аналогична плоской модели.

Кинетическая энергия звена складывается из энергии звена AC и DB .

$$T = T_{AC} + T_{DB}.$$

$$T_{AC} = (m_{11}n_{11}^2l_{11}^2 + I_{11})(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)/2 \quad (4)$$

$$T_{DB} = [(\dot{\xi}_1^2)m_{12} + \{m_{12}(l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2\xi_1l_{11} + \xi_1l_{12} + \xi_1^2) + I_{12}\}(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)]/2$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))(\ddot{\varphi}_1 \cos^2\psi_1 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1 \cos\psi_1 \sin\psi_1) + m_{12}\cos^2\psi_1(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 = M_{1\varphi}, \quad (5)$$

$$(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))\ddot{\psi}_1 + \cos\psi_1 \sin\psi_1(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))\dot{\varphi}_1^2 + g(m_{11}l_{11}n_{11} + m_{12}(l_{11} + l_{12}n_{12} + \xi_1))\cos\psi_1 + m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 = M_{1\psi}, \quad (6)$$

$$-m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)/2 + gm_{12}\sin\psi_1 + m_{12}\ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (7)$$

Таким образом, составлена система дифференциальных уравнений движения, описывающая модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости.

4. Построение дифференциальных уравнений движения пространственного экзоскелета по соответствующим уравнениям плоской модели с шарнирным закреплением

Сравнивая уравнения движения на плоскости и в пространстве, можно получить закономерность записи уравнений трехмерного движения по соответствующему дифференциальному уравнению для двумерной модели. Приведем полученные закономерности. Плоская и пространственная модели должны быть одинаковой структуры, т.е. иметь одинаковую конструкцию звеньев, расположение массивных и невесомых участков на звене.

Дифференциальные уравнения движения звена экзоскелета в трехмерном пространстве (5)–(7) отличаются от дифференциальных уравнений (2)–(3) следующим: их количество увеличилось на одно уравнение, соответствующее обобщенной координате ψ_1 , т.е. уравнений для угловых координат стало два. Уравнение, описывающее изменение длины звена экзоскелета в пространстве (7), в сравнении с уравнением (3), описывающим изменение длины звена на плоскости, изменилось незначительно. Угол φ_1 везде изменился на ψ_1 , что связано с особенностью введения углов в двумерной (рис. 1) и пространственной системе координат (рис. 2). Возникло еще одно слагаемое, связанное с углом φ_1 : $\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1$, множитель $\cos^2\psi_1$ связан с проекцией звена на плоскость. Эти изменения следуют из того, что в двухмерном случае, угол, связанный с вертикалью (плоскостью, в которой происходило движение центра масс) был обозначен через φ_1 , а в трехмерной модели через ψ_1 , отсюда следуют данные различия и наличие такого слагаемого. Угол φ_1 , хоть и отсчитывается, как и прежде, от оси OX , но теперь

учитывает повороты звена в пространстве по горизонтали (в плоскости XOY). Соответственно, в слагаемом, содержащем ускорение свободного падения, угол φ_1 изменяется на ψ_1 . В остальном структура уравнения не изменяется.

Уравнение, описывающее изменение угловой координаты при плоском движении (2), распадается на два уравнения (5) и (6). Слагаемое, содержащее ускорение свободного падения, теперь содержится в уравнении (6), описывающем изменение угла ψ_1 и в соответствующем выражении угол φ заменяется на ψ_1 . То же касается и углового ускорения $\ddot{\psi}_1$. В уравнении (6) также возникает дополнительное слагаемое, содержащее $\cos\psi_1\sin\psi_1\dot{\varphi}_1^2$, связанное с угловой скоростью вращения звена в плоскости XOY .

Уравнение (5) получается из первого уравнения системы (2) следующим образом: отсутствует слагаемое, содержащее ускорение свободного падения; в слагаемых, содержащих $\dot{\xi}_1$ и $\ddot{\varphi}_1$ добавляется множитель $\cos^2\psi_1$, что, связано проекцией звена на плоскость XOY ; возникает слагаемое с множителем $\cos\psi_1\sin\psi_1\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1$, связанное с одновременным движением звена в двух плоскостях. В остальном уравнение сохраняет структуру двумерного. И изменяются соответствующим образом управляющие моменты.

Описанные закономерности позволяют при переходе к многозвенной модели экзоскелета, получить алгоритм построения систем дифференциальных уравнений движения трехмерных моделей экзоскелетов по уравнениям двумерных экзоскелетов, аналогично тому, как это описано в работах [4, 5] для звеньев, моделирующих опорно-двигательный аппарат человека.

5. Модель свободного звена экзоскелета переменной длины с двумя массивными абсолютно твердыми участками и одним невесомым переменной длины между ними на плоскости

Для исследования плоского движения звена экзоскелета переменной длины введем неподвижную правую декартову систему координат (рис. 3) Ox_1y_1 с началом в точке O . Рассмотрим плоскость x_1Oy_1 , в которой происходит движение центра масс.

Рассмотрим модель звена, которая состоит из двух весоных абсолютно жестких частей, совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой AB , проходящей через его начало и конец (рис. 3). В качестве полюса выберем точку A с координатами $(x_A(t), y_A(t))$ в неподвижной системе координат Ox_1y_1 . Под действием внутренней управляющей силы F_1 обеспечивается необходимое изменение длины звена на участке CD , которое происходит за счет движения участка DB относительно участка AC вдоль направления AB .

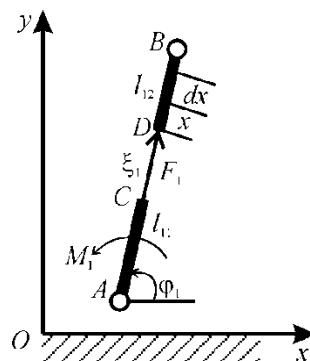


Рис. 3. Модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости

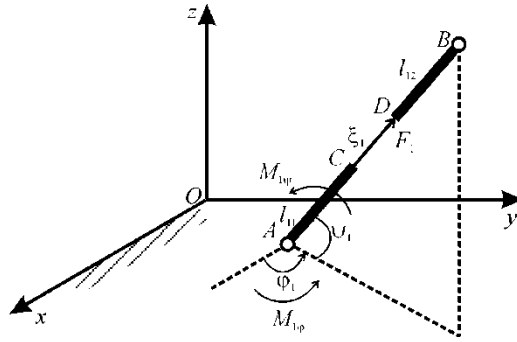


Рис. 4. Модель звена экзоскелета переменной длины в пространстве, движущегося по горизонтальной плоскости

Система имеет два весомых абсолютно жестких стержня: AC и DB . На рис. 4 схематично изображено звено AB и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев $AC = l_{11}$, $DB = l_{12}$, двойная нумерация индексов связана с построением в дальнейшем многозвенной модели экзоскелета: первый индекс соответствует номеру звена, второй – номеру весомого участка на звене. Переменность длины звена реализуется за счет относительного движения вдоль направления звена AB участка DB . Участок переменной длины CD считается невесомым.

Положение звена экзоскелета однозначно определяется координатами точки $A(x_A(t), y_A(t))$, углом φ_1 и переменной длиной участка стержня $\xi_1(t) = CD$. Рассматриваемая система имеет четыре степени свободы. Изменение длины участка стержня $\xi_1(t)$ задается силой F_1 , которая является управляющим параметром в рассматриваемой системе.

Масса стержня AC равна m_{11} , момент инерции относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{11} , для стержня DB масса равна m_{12} , момент инерции относительно оси проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{12} .

Кинетическая энергия звена будет складываться из энергии звена AC и DB .

$$T = T_{AC} + T_{DB}.$$

$$T = [\theta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{\xi}_1^2 m_{12} + \zeta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \dot{y}(2m_{12} S_1^\varphi \dot{\xi}_1 + \eta_1 C_1^\varphi \dot{\varphi}_1) + \dot{x}(2m_{12} C_1^\varphi \dot{\xi}_1 - \eta_1 S_1^\varphi \dot{\varphi}_1)]/2, \quad (8)$$

где: $\theta = m_{11} + m_{12}$ – масса всего механизма, $\eta_1 = m_{11}(l_{11} + 2l_{12}) + m_{12}(l_{12} + 2\xi_1)$, $\zeta_1 = I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{12}(l_{11} + l_{12} + 2\xi_1) + m_{12}\xi_1(l_{12} + \xi_1)$, $C_1^\varphi = \cos\varphi_1$, $S_1^\varphi = \sin\varphi_1$.

Дифференциальные уравнения движения, составленные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид

$$\theta \ddot{x} - \eta_1 S_1^\varphi \ddot{\varphi}_1/2 + m_{12} C_1^\varphi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 C_1^\varphi \dot{\varphi}_1^2/2 - 2m_{12} S_1^\varphi \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\theta \ddot{y} + \eta_1 C_1^\varphi \ddot{\varphi}_1/2 + m_{12} S_1^\varphi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 S_1^\varphi \dot{\varphi}_1^2/2 + 2m_{12} C_1^\varphi \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 + \theta g = 0, \quad (10)$$

$$\eta_1 (C_1^\varphi \ddot{y} - S_1^\varphi \ddot{x})/2 + \zeta_1 \ddot{\varphi}_1 + \lambda_1 g C_1^\varphi + v_1 \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 = 0, \quad (11)$$

$$-v_1 \dot{\varphi}_1^2/2 + gm_{12} S_1^\varphi + m_{12} C_1^\varphi \ddot{x} + m_{12} S_1^\varphi \ddot{y} + m_{12} \ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (12)$$

где в дополнение к обозначениям к формуле (8) вводятся следующие обозначения: $v_1 = 2m_{11}l_{12} + m_{12}(l_{12} + 2\xi_1)$, $\lambda_1 = m_{11}l_{11}/2 + m_{12}(l_{11} + l_{12}/2 + \xi_1)$.

6. Модель звена экзоскелета в пространстве, свободно движущегося по горизонтальной плоскости

Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, в которой происходит движение механизма (рис. 4). Звено AB переменной длины, состоящее из двух весомых частей изменяющих свою длину сохраняет свою конструкцию и обозначения, введенные для звена на плоскости. Предполагаем, что движение полюса A происходит в плоскости x,y .

Положение весомого участка звена экзоскелета зависит от пяти параметров и однозначно определяется координатами полюса $A(x_A(t), y_A(t))$, углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Рассматриваемая система имеет пять степени свободы. Продольная сила аналогична плоской модели.

Кинетическая энергия звена складывается из энергии звена AC и DB .

$$T = [\theta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{\xi}_1^2 m_{12} + \zeta_1((C_1^\psi)^2 \dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) + \dot{y} \{2m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 + \eta_1(C_1^\phi C_1^\psi \dot{\phi}_1 - S_1^\phi S_1^\psi \dot{\psi}_1)\} + \dot{x} \{2m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 - \eta_1(S_1^\phi C_1^\psi \dot{\phi}_1 + C_1^\phi S_1^\psi \dot{\psi}_1)\}]/2, \quad (13)$$

где: $C_1^\psi = \cos\psi_1$, $S_1^\psi = \sin\psi_1$.

Дифференциальные уравнения движения, составленные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$\theta \ddot{x} - \eta_1(S_1^\phi C_1^\psi \ddot{\phi}_1 + C_1^\phi S_1^\psi \ddot{\psi}_1)/2 + m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 C_1^\phi C_1^\psi (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)/2 - 2m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\phi}_1 - 2m_{12} C_1^\phi S_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1 + \eta_1 S_1^\phi S_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 = 0, \quad (14)$$

$$\theta \ddot{y} + \eta_1(C_1^\phi C_1^\psi \ddot{\phi}_1 - S_1^\phi S_1^\psi \ddot{\psi}_1)/2 + m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 S_1^\phi C_1^\psi (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)/2 + 2m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\phi}_1 - 2m_{12} S_1^\phi S_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1 + \eta_1 C_1^\phi S_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 = 0, \quad (15)$$

$$\eta_1(C_1^\phi C_1^\psi \ddot{y} - S_1^\phi C_1^\psi \ddot{x})/2 + \zeta_1((C_1^\psi)^2 \ddot{\phi}_1 - 2S_1^\psi C_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1) + v_1(C_1^\psi)^2 \dot{\xi}_1 \dot{\phi}_1 = 0, \quad (16)$$

$$- \eta_1(S_1^\phi S_1^\psi \ddot{y} + C_1^\phi S_1^\psi \ddot{x})/2 + \zeta_1(S_1^\psi C_1^\psi \dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) + \lambda_1 g C_1^\psi + v_1 \dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1 = 0, \quad (17)$$

$$- v_1((C_1^\psi)^2 \dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)/2 + g m_{12} S_1^\psi + m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \ddot{x} + m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \ddot{y} + m_{12} \ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (18)$$

Следует отметить, что модели с закрепленным в начале координат шарниром на плоскости и в пространстве A являются частными случаями рассмотренных выше более общих моделей. Так, дифференциальные уравнения движения плоской модели с закрепленным шарниром получаются исключением первых двух уравнений (9)–(10) и заменой в уравнениях (11)–(12) обобщенных координат $x_A(t), y_A(t)$ и их производных нулями. Для пространственной модели соответственно исключаются уравнения (14)–(15), а в уравнениях (16)–(18) обобщенные координаты $x_A(t), y_A(t)$ и их производные заменяются нулями. Однако, в этих моделях становится возможным управляемое движение модели, если ввести в точке A цилиндрический шарнир с возможностью создания управляющего момента.

7. Построение системы дифференциальных уравнений движения экзоскелета в пространстве по соответствующим уравнениям плоской модели

Дифференциальные уравнения движения экзоскелета в трехмерном пространстве (14)–(18) отличаются от дифференциальных уравнений движения экзоскелета на плос-

кости (9)–(12) следующим: их количество увеличилось на одно уравнение, соответствующее обобщенной координате ψ_1 , т.е. уравнений для угловых координат стало два. Изменения дифференциальных уравнений движения вызваны тем, что в двухмерном случае угол, связанный с вертикалью (плоскостью, в которой происходило движение центра масс), был обозначен через φ_1 , а в трехмерной модели через ψ_1 , отсюда следуют различия и возникают дополнительные слагаемые, связанные с углом ψ_1 . Угол φ_1 , отсчитывается, как и прежде, от оси Ox , но теперь от проекции звена на горизонтальную плоскость xOy . Соответственно, слагаемое, содержащее ускорение свободного падения отстает в третьем уравнении и находится в четвертом уравнении, при этом к тригонометрическим функциям угла φ_1 добавляются функции угла ψ_1 . В остальном структура уравнений не изменяется.

В первом уравнении для плоской модели (9) и пространственной (14), соответствующим обобщенной координате x , изменения следующие. К обобщенной координате $\dot{\varphi}_1^2$ добавилось аналогичное слагаемое, содержащее $\dot{\psi}_1^2$. Обобщенные ускорения $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\xi}_1$ домножились на $\cos\psi_1$ и появилось слагаемое с обобщенным ускорением $\ddot{\psi}_1$. Слагаемое, содержащее $\dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1$ домножилось на $\cos\psi_1$ и появились слагаемые с $\dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1$ и $\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1$.

В уравнениях (10) и (15), соответствующих обобщенной координате y , произошли изменения, аналогичные обобщенной координате x , кроме того отсутствует слагаемое, связанное с силой тяжести в уравнении (15), что объясняется тем, что в трехмерной модели плоскость xOy – это горизонтальная плоскость, а не вертикальная как в плоской модели.

Уравнение, описывающее изменение угловой координаты при плоском движении (11), распадается на два уравнения (16) и (17). Слагаемое, содержащее ускорение свободного падения, теперь содержится в уравнении (17), описывающем изменение угла ψ_1 и в соответствующем выражении угол φ_1 заменяется на ψ_1 . То же касается и углового ускорения $\ddot{\psi}_1$. К ускорениям \ddot{x} и \ddot{y} добавляется множитель $\sin\psi_1$. В уравнении (17) также возникает дополнительное слагаемое, содержащее $\cos\psi_1 \sin\psi_1 \dot{\varphi}_1^2$, связанное с угловой скоростью вращения звена в плоскости xOy .

Уравнение (16) получается из уравнения (11) следующим образом: отсутствует слагаемое, содержащее ускорение свободного падения; к ускорениям \ddot{x} и \ddot{y} добавляется множитель $\cos\psi_1$, в слагаемых, содержащих $\dot{\xi}_1$ и $\dot{\varphi}_1$ добавляется множитель $\cos^2\psi_1$, что, связано проекцией звена на плоскость xOy ; возникает слагаемое с множителем $\cos\psi_1 \sin\psi_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1$, связанное с одновременным движением звена в двух плоскостях. В остальном уравнение сохраняет структуру двухмерного.

Уравнение, описывающее изменение длины звена экзоскелета в пространстве, (18) в сравнении с уравнением (12), описывающим изменение длины звена на плоскости, изменилось незначительно. К углу φ_1 добавился угол ψ_1 , что связано с особенностью введения углов в двумерной (рис. 3) и пространственной системах координат (рис. 4). Возникло еще одно слагаемое, связанное с квадратом угловой скорости $\dot{\psi}_1^2$. Изменилось слагаемое, связанное с углом φ_1 : $\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1$, множитель $\cos^2\psi_1$ связан с проекцией звена на плоскость xOy .

Опишем, как получить уравнения пространственной модели по плоской. Например, если обозначить коэффициент в уравнении (9) при $\ddot{\varphi}_1$ через $a_{\ddot{\varphi}_1}^{2D}$, а в уравнении (14) через $a_{\ddot{\varphi}_1}^{3D}$, то тогда они связаны между собой следующим равенством:

$$a_{\ddot{\varphi}_1}^{3D} = \cos\psi_1 a_{\ddot{\varphi}_1}^{2D}, \quad (19)$$

т.е. мы получили формулу перехода от плоской модели к пространственной. Тогда для отсутствующего в плоской модели коэффициента для $\ddot{\psi}_1$ формула перехода имеет вид:

$$a_{\ddot{\psi}_1}^{3D} = \operatorname{ctg}\varphi_1 \cos\psi_1 a_{\ddot{\varphi}_1}^{2D}. \quad (20)$$

Аналогичные формулы перехода от плоской модели к пространственной могут быть построены для всех коэффициентов, входящих в систему дифференциальных уравнений движения.

8. Заключение

Для предложенной конструкции звена экзоскелета переменной длины, состоящего из двух массивных абсолютно твердых участков и расположенным между ними невесомым участком переменной длины, получены системы дифференциальных уравнений движения, описывающие движения звена на плоскости и в пространстве. Рассмотрена модель с шарнирным креплением к неподвижной плоскости и свободного движения незакрепленного звена. Предложен метод записи дифференциальных уравнений движения для пространственного экзоскелета со звеньями переменной длины по соответствующим уравнениям плоского механизма. Данную модель можно использовать при изготовлении экзоскелета со звеньями, приближенными по функциональным возможностям к звеньям опорно-двигательного аппарата человека, и обеспечивающего комфортабельное передвижение в нем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов, А. В. Причины, вызывающие изменение длины звена человека, и механическая модель звена переменной длины / А. В. Борисов, Маслова К.С. // *Международный журнал теории и научной практики*. – Том 2. – Выпуск 1. – Смоленск, 2019. – С. 145–150.
2. Борисов, А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // *ПММ*. – 2017. – Т. 81 – № 5. – С. 511–522.
3. Борисов, А. В. Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2018. – № 2. – С. 148–174.
4. Чигарев, А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск: БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70–81.
5. Чигарев, А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения пространственных стержневых антропоморфных систем типа экзоскелета со звеньями переменной длины / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск: БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 52–58.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

А.Г. Козел

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Актуальным направлением в авиа- и ракетостроении является снижение массы элементов конструкций. Многослойные конструкции при относительно малом весе, способны обеспечить не только заданные показатели прочности и жесткость, но и противостоять ряду других отрицательных воздействий. Поэтому возникает актуальная проблема разработки эффективных методик их расчета.

Деформированию сэндвич-пластин под действием динамических нагрузок посвящены статьи [1–3]. В статьях [4, 5] рассматривалось влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в пластине в случае осесимметричного деформирования, неосесимметричным нагружением пластин исследовалось в [6].

Осесимметричное деформирование несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин на основании Пастернака исследовалось в работах [7–9], анализ напряжений в упругой круглой сэндвич-пластине выполнен в работе [10].

Постановки краевой задачи для упругопластической круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака в усилиях и перемещениях, приведены в статьях [11, 12].

Здесь приведены постановки краевой задачи в усилиях и перемещениях, исследованы перемещения в упругопластической круговой сэндвич-пластине, связанной со сложным основанием модели Пастернака.

1. Постановка задачи. Рассматривается сэндвич-пластина на упругом основании (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной $h_1=h_2$ приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной плоскости пластины. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$ в тангенциальном направлении. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Цилиндрическая система координат r, φ, z связана со срединной плоскостью заполнителя.

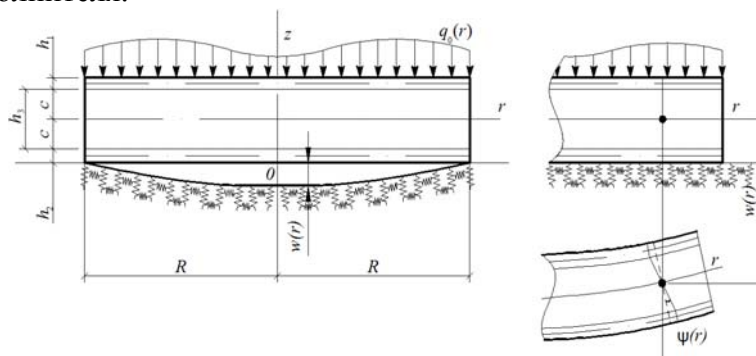


Рис. 1. Схема деформирования сэндвич-пластины

Ввиду симметрии пластины радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$ отсутствует. Решение задачи сводится к нахождению двух неизвестных функций – относительного сдвига в заполнителе $\psi(r)$ и прогиба пластины $w(r)$. Осесимметрич-

ная нагрузка $q_0(r)$ распределена по верхнему слою пластины, реакция основания согласно модели Пастернака, [13]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения радиальных перемещений в слоях u_r^k ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя) через искомые функции $\psi(r)$, $w(r)$:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= c\psi - zw_{,r} & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= z\psi - zw_{,r} & (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= -c\psi - zw_{,r} & (-c - h_1 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где $c\psi$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя;

$-c\psi$ – величина смещения для второго несущего слоя;

z – координата рассматриваемого волокна;

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях получим из (2) и соотношений Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(c\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= -c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(-c\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= z\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(z\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi. \end{aligned}$$

Предполагается, что материалы несущих слоев в процессе деформирования проявляют упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругие. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)}, \quad (3)$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{rz}^{(3)}(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)})), \quad (k = 1, 2, 3, \alpha = r, \varphi),$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ –

функции пластичности материалов несущих слоев, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое ($k=1, 2$), $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев; $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция физической нелинейности заполнителя, причем $\omega_3 \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем в слоях внутренние силы $T_\alpha^{(k)}$ и моменты $M_\alpha^{(k)}$, а также обобщенные усилия T_α , M_α , H_α в пластине:

$$T_\alpha^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad (4)$$

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)}, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)}, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}).$$

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \quad (5)$$

$$\sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},$$

где

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}.$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «е») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$T_\alpha^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha \omega}^{(k)}.$$

Величины $T_{\alpha e}^{(k)}$, $T_{\alpha \omega}^{(k)}$, $M_{\alpha e}^{(k)}$, $M_{\alpha \omega}^{(k)}$ вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$ (5). После этого обобщенные внутренние усилия будут следующими:

$$T_\alpha = T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_\alpha = M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad (6)$$

$$H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \quad H_{\alpha \omega} = M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}).$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая формирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании была получена в [8] без использования физических уравнений состояния, поэтому ее можно принять за исходную:

$$H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0,$$

$$M_{r,r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -(q_0 + q_R). \quad (7)$$

На контуре пластины ($r = R$) должны выполняться силовые граничные условия

$$H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (8)$$

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях уравнений (7) линейные и нелинейные составляющие, в соответствии с формулами (6), получим

$$H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \quad (9)$$

$$M_{r,r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q_0 - q_R + q_\omega.$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, причем нижний индекс «е» в дальнейшем опущен для удобства. Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемое с нижним индексом « ω »:

$$h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}), \quad (10)$$

$$q_\omega = M_{r\omega,r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}).$$

С граничными условиями (8) поступаем аналогично:

$$H_r = H_r^1 + H_\omega, \quad M_r = M_r^1 + M_\omega,$$

$$M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^1 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}).$$

2. Уравнения равновесия в перемещениях. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения по формулам, приведенным в [8], поэтому система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (9), с учетом (1) принимает вид:

$$L_2(a_1\psi - a_2w_{,r}) = h_\omega, \quad (11)$$

$$L_3(a_2\psi - a_2w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q_0 + q_\omega.$$

где коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 следующие

$$a_1 = c^2 \left(2h_1 K_1^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \quad a_2 = c \left[2h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_3 = 2h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k,$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Система уравнений (11) является нелинейной, поэтому для ее решения применим метод упругих решений Ильюшина. В этом случае система (11) переписывается в итерационном виде:

$$L_2(a_1 \psi^{(n)} - a_2 w_{,r}^{(n)}) = h_{\omega}^{(n-1)},$$

$$L_3(a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f \Delta w^{(n)} = -q_0 + q_{\omega}^{(n-1)}. \quad (12)$$

где n – номер приближения; $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения по формулам типа (10)

$$h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}), \quad q_{\omega}^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} - M_{\phi\omega}^{(n-1)}{}_{,r}), \quad (13)$$

где

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_{\alpha}^{(k)(n-1)}) \varepsilon_{\alpha}^{(k)(n-1)} z dz, \quad H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3)(n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)(n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)(n-1)}).$$

Таким образом, на каждом шаге приближения мы имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками (13).

3. Решение краевой задачи. С помощью первого уравнения системы (12) во втором уравнении обнуляем коэффициент перед функцией $\psi^{(n)}$. После двукратного интегрирования и некоторых преобразований этих уравнений получим:

$$\psi^{(n)} = b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r (h_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r + \frac{C_2^{(n)}}{r},$$

$$L_3(w_{,r}^{(n)}) - t_{f1} \Delta w^{(n)} + \kappa^4 w^{(n)} = q + f_{\omega}^{(n-1)}, \quad (14)$$

где $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$ – константы интегрирования на n -м шаге;

$$t_{f1} = t_f D, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \quad f_{\omega}^{(n-1)} = -D q_{\omega}^{(n-1)} + D_1 \frac{1}{r} (r h_{\omega}^{(n-1)})_{,r}, \quad D = \frac{a_1}{a_3 a_1 - a_2^2},$$

$$D_1 = \frac{a_2}{a_1 a_3 - a_2^2}.$$

Решение третьего уравнения системы (14) получим по методике, примененной при решении задачи теории упругости [10], тогда рекуррентный прогиб будет

$$w^{(n)} = C_3^{(n)} J_0(\sqrt{a}kr) + C_4^{(n)} H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + C_5^{(n)} J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + C_6^{(n)} H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p^{(n)}(r), \quad (15)$$

где $J_0(\sqrt{a}kr)$, $J_0(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}kr$ и $\sqrt{\bar{a}}kr$, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов, a и \bar{a} – корни характеристического уравнения, полученные в [10]; $w_p^{(n)}(r)$ – частное решение третьего уравнения (14).

Рекуррентное решение задачи об изгибе круговой упругопластической трехслойной пластины на упругом основании, с учетом ограниченности перемещений в центре пластины $C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = 0$ принимает вид

$$\psi^{(n)} = b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r (h_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r,$$

$$w^{(n)} = C_3^{(n)} J_0(\sqrt{a\kappa}r) + C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a} \kappa r) + w_p^{(n)}(r). \quad (16)$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_5^{(n)}$ следуют из условий закрепления пластины.

При жесткой заделке контура пластины решение (16) необходимо подставить в граничные условия

$$\psi^{(n)} = w^{(n)} = w^{(n)}_{,r} = 0 \text{ при } r = R.$$

В результате получим следующие константы интегрирования

$$C_1^{(n)} = -\frac{1}{a_1 R^2} \int r \int (h_\omega^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R},$$

$$C_3^{(n)} = \frac{w_p^{(n)}(R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) + \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a\kappa} R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a\kappa} R))},$$

$$C_5^{(n)} = \frac{w_p^{(n)}(R) J_0(\sqrt{a\kappa} R) + \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a\kappa} R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a\kappa} R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{a} \kappa R) J_1(\sqrt{a\kappa} R))}. \quad (17)$$

Таким образом, система (16) с константами интегрирования (17) дает рекуррентное решение задачи теории малых упругопластических деформаций для искомой пластины при произвольной осесимметричной нагрузке.

4. Численный параметрический анализ. Численные результаты получены для защемленной по контуру пластины единичного радиуса $R = 1$ м, связанной с основанием средней жесткости ($\kappa_0 = 100$ МПа/м). Величина интенсивности поверхностной нагрузки $q_0 = -18$ МПа принята таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени; толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 0,4$ м.

Функции пластичности и нелинейности в соотношениях (3) удобно представить в виде, предложенном в [14]:

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y, \end{cases}$$

где A_k , α_k – константы нелинейности материалов слоев.

Принимается, что верхние несущие слои пластины выполнены из алюминиевого сплава Д16Т, для заполнителя выбран фторопласт-4 (ПТФЭ), соответствующие упругие и нелинейные характеристики материалов заимствованы из [15]: Д16Т – $A_l = 0,96$; $\alpha_l = 2,34$; $\varepsilon_y^{(l)} = 0,735$ %, для фторопласта – $A_3 = 0,905$; $\alpha_3 = 1,48$; $\varepsilon_s = \varepsilon_y^{(3)} = 3,3$ %.

Численное исследование итерационного решения (7) продемонстрировало быструю сходимость метода (рис. 2). Это подтверждают графики прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса пластины на рисунке 2 а, б, номер кривой соответствует номеру итерации. За искомое решение принимается 4-ое приближение, отличающееся

от предыдущего менее чем на 1 %. Учет физической нелинейности материалов слоев искомой пластины дает увеличение расчетных перемещений до 14 %.

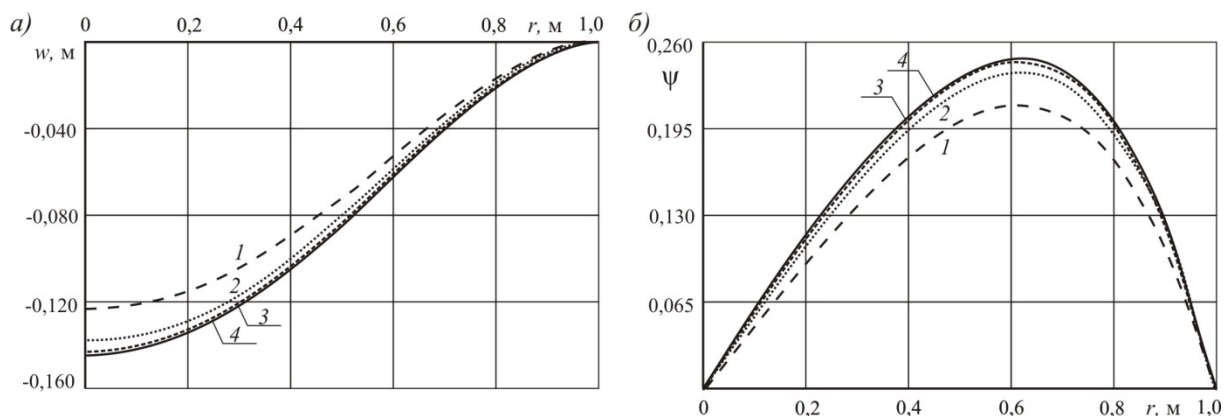


Рис. 2. Сходимость метода упругих решений ($t_f = 0$ МПа·м)

На рис. 3 а, б показано изменение перемещений вдоль радиуса пластины при различных коэффициентах сдвига основания t_f , МПа·м: 1 – $t_f = 0$, 2 – $t_f = 1$, 3 – $t_f = 10$. При $t_f = 1$ МПа·м уменьшение максимумов перемещений достигает 19 %, дальнейшее увеличение коэффициента сдвига до $t_f = 10$ МПа·м приводит к уменьшению перемещений до 45 %.

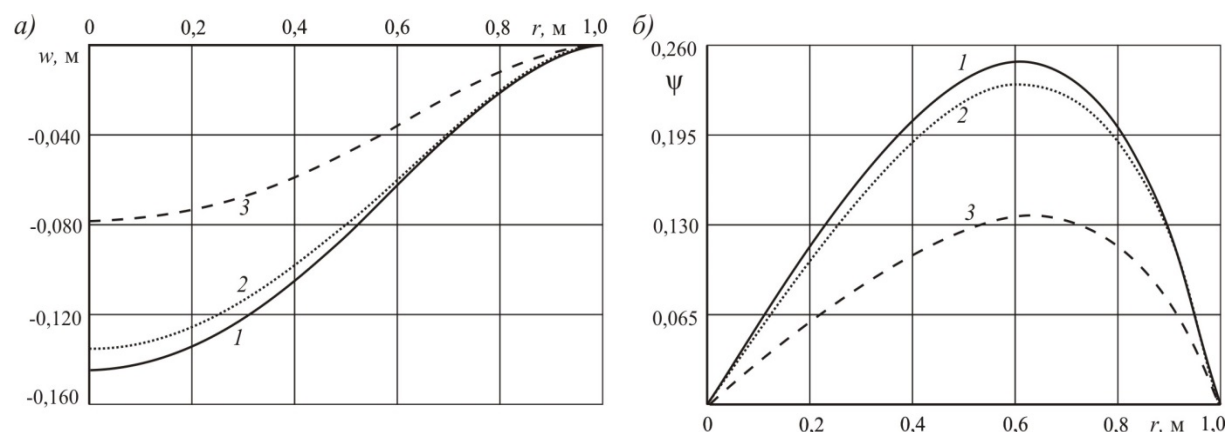


Рис. 3. Зависимость перемещений от коэффициента сдвига основания

Учет сдвиговой жесткости основания оказывает существенное влияние на деформирование сэндвич-пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Starovoitov, E.I. *Vibration of circular sandwich plates under resonance loads* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 39. – № 12. – P. 1458–1463.
2. Starovoitov, E.I. *Circular sandwich plates under local impulsive loads* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 39. – № 8. – P. 945–952.

3. Starovoitov E.I. *Vibrations of circular sandwich plates under resonant loads* / I.E. Starovoitov D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 39. – № 12. – P. 1458–1463.

4. Старовойтов, Э.И. *Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем* / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2018. – № 4. – С. 88–97.

5. Зеленая, А.С. *Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем* / А. С. Зеленая // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки*. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.

6. Нестерович, А. В. *Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении* / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб.* – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.

7. Козел, А.Г. *Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании* / А.Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.

8. Козел, А.Г. *Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании Пастернака* / А.Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб.* – Минск: БНТУ. – 2018. – № 33. – С. 318–323.

9. Старовойтов, Э.И. *Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака* / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т. 24. – №1. – С. 392–406.

10. Козел, А. Г. *Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич-пластины* / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.

11. Козел, А. Г. *Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака* / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. научн. тр.* – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

12. Козел, А.Г. *Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака* / А. Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика* – Минск: БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 165–171.

13. Пастернак, П.Л. *Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели* / П.Л. пастернак // – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, – 1954. – 55 с.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕОДНОРОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Хвисевич В.М., Веремейчик А.И.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. Современный уровень развития науки и техники выдвигает перед инженерами требования по созданию эффективных методов расчета инженерных конструкций, позволяющих снизить материалоемкость элементов при их достаточной прочности и надежности. Основная цель таких методов – исследовать напряженно-деформированное состояние тел, а также распределение температурного поля. Для этого необходимо поставить и решить краевые задачи механики деформируемого твердого тела [1–4]. Во многих случаях достаточно ограничиться рассмотрением плоской области. Немаловажным аспектом с позиции снижения материалоемкости конструктивных элементов является учет неоднородности материала, например, когда характеристики материала зависят от температуры [5].

Для построения решения краевых задач механики деформируемого твердого тела широкое применение получила теория потенциала. Ее практическим воплощением стало появление методов граничных элементов. Длительное время в инженерной практике исследователи отдавали предпочтение методу конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ) [1, 2]. Однако ряд работ, например, [3, 4], позволил развить методы граничных интегральных уравнений (ГИУ) и показал преимущества методов ГИУ перед МКР и МКЭ при решении многих задач. В данной статье разработан прием, позволяющий упростить интегральные уравнения краевой задачи неоднородной термоупругости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим решение краевых задач термоупругости, в которых тепловые и физические характеристики материала зависят от температуры. Типичные зависимости характеристик материала (коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$, теплового линейного расширения $\alpha(T)$ и модуль упругости $E(T)$) от температуры приведены в [6].

Задача термоупругости неоднородных тел состоит в определении перемещений u_i (через которые выражаются компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}), удовлетворяющих в занимаемой телом области D , с учетом переменных $E(T)$, $\alpha(T)$, $\lambda(T)$ и постоянного ν , уравнениям равновесия:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right) = -\varphi B_j \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{ij}, \quad (1)$$

и на контуре L области D граничным условиям:

$$\sigma_{ij} n_j = q_i(x_L), \quad (2)$$

где $\Theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, n_j$ – вектор внешней нормали к L , $q_i(x_L)$ – плотность заданных поверхностных сил, φ – малый параметр, который определяется из соотношения [7].

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT} \left[\ln \frac{E}{E_0} \right] = \varphi \Psi(T).$$

При этом $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi \Psi(T) \frac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi B_j(x_s), B_j(x_s) = \Psi(T) \frac{\partial T}{\partial x_j}, i, j=1,2.$

С использованием гипотезы Дюамеля-Неймана запишем выражения для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right], \quad (3)$$

где $\Theta = \varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема, δ_{ij} – символ Кронекера.

Температура T определяется в результате решения уравнения теплопроводности [8]:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0. \quad (4)$$

2. Построение сингулярных интегральных уравнений (СИУ) плоской краевой задачи неоднородной термоупругости. Применив метод возмущений (малого параметра) для решения плоской краевой задач термоупругости неоднородных тел, последняя сводится к решению краевой задачи термоупругости на нулевом приближении:

$$\Delta u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right), \sigma_{ij}^0 n_j = q_i(x_L), \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{E(T)}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta^{(0)} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT \delta_{ij} \right], i, j=1,2,$$

и последовательности краевых задач теории упругости однородного тела на последующих приближениях:

$$\Delta u_i^k + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial x_i} = -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(k-1)}, \sigma_{ij}^k n_j = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \frac{E(T)}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta^{(k)} \delta_{ij} \right], \Theta^k = \frac{\partial u_j^k}{\partial x_j}, k=0,1,2,\dots$$

Вопросы сходимости метода возмущений подробно рассмотрены в [5, 9]. Рассмотрим решение задачи термоупругости (5) на нулевом приближении. Запишем дифференциальное уравнение равновесия этой задачи в перемещениях:

$$\Delta u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{\alpha(T)} \alpha(T) dT, \quad i, j = 1, 2, \quad (7)$$

где $u_i^{(0)}$ – вектор перемещений, соответствующий нулевому члену степенного ряда, в виде которого ищется решение: $u_i = u_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k u_i^k$ [10].

Решение (7) разыскиваем как сумму общего решения однородного уравнения теории упругости без учета объемных и массовых сил и частного решения неоднородного уравнения:

$$u_i^{(0)} = u_i^U + u_i^T. \quad (8)$$

Общее решение u_i^U соответствует решению однородного дифференциального уравнения теории упругости. Частное решение представим как градиент некоторой функции W :

$$u_i^T = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T) dT \right). \quad (10)$$

Согласно [10], уравнение (10) удовлетворяется, если принять:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^{\alpha(T)} \alpha(T) dT. \quad (11)$$

Используя зависимость $\alpha(T) = \alpha_0 (1 + \gamma T)$ [6], из (11) получаем соотношение:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_0 \left(T + \frac{T^2}{2} \gamma \right) = a \left(T + \frac{T^2}{2} \gamma \right). \quad (12)$$

Температура T подчиняется уравнению теплопроводности (4) и не является гармонической функцией, однако если ввести функцию теплопроводности $T^* = \int_0^T \lambda(T) dT$, T можно неявно выразить через гармоническую функцию T^* соотношением:

$$T = \frac{1}{k} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k}{\lambda_0} T^*} \right). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11), получим:

$$\Delta W = a (bT - cT^*), \quad a = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_0, \quad b = 1 + \frac{\gamma}{k}, \quad c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}. \quad (14)$$

В правой части (14) находится алгебраическая сумма функций температуры T и гармонической функции T^* , которую можно представить в форме (15) и (16)

для внутренней и внешней краевой задачи соответственно:

$$T(x) = \sum_{i=1}^n \int_{L_i+L_e} \chi(y) \frac{\cos \varphi}{r} dl_y + \sum_{i=1}^n A_i \ln r_{A_i}, \quad (15)$$

$$T(x) = T_\infty + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \chi(y) \frac{\cos \varphi}{r} dl_y + \sum_{k=1}^m A_k \ln r_{A_k}, \quad (16)$$

где $\chi(y)$ – плотность потенциала, $r = |y-x| = \sqrt{(y_i-x_i)(y_i-x_i)}$, $i=1, 2$, $y \in L$, φ – угол между направлением \bar{r} и вектором внешней нормали $\bar{n}(y)$ в точке y , $\cos \varphi = n_i(y) \beta_i$, β_i – направляющие косинусы вектора нагрузки, r_{A_k} – расстояние от источника до точки x границы L , A_k – мощность фиктивных источников тепла, т.е. T^* выражается одномерным интегралом по контуру L .

Функцию T будем выражать через δ -функцию Дирака $\delta(y-x)$, а T^* представляем в форме (15). Тогда (14) примет вид:

$$\Delta W = -\frac{ab}{2\pi} \int_F T(y) \Delta \left(\ln \frac{1}{r} \right) dF_y - \left. -ac \left\{ \int_L \chi(y) \Delta \left[\frac{r}{4} \cos \varphi (1 - 2 \ln r) dl_y + \sum_{k=1}^n A_k \Delta \left[\frac{r_{A_k}^2}{4} (1 - \ln r_{A_k}) \right] \right\} \right\}, \quad (17)$$

откуда:

$$W = -\frac{ab}{2\pi} \int_F T(y) \ln \frac{1}{r} dF_y - \left. -ac \left[\int_L \chi(y) \frac{r}{4} \cos \varphi (1 - 2 \ln r) dl_y + \sum_{k=1}^n A_k \frac{r_{A_k}^2}{4} (1 - \ln r_{A_k}) \right] \right\}, \quad (18)$$

где F – плоская область интегрирования.

На основании W строим интегральные формулы температурных добавок перемещений, напряжений и фиктивной температурной нагрузки, т.е. задачу термоупругости (5) сводим к задаче изотермической теории упругости. Представим W в виде суммы двух слагаемых:

$$W = \overset{(\alpha)}{W} + \overset{(k)}{W}, \quad (19)$$

$$\text{где } \overset{[\alpha]}{W} = -\frac{ab}{2\pi} \int_F T(y) \ln \frac{1}{r} dF_y, \quad \Delta \overset{(\alpha)}{W} = abT. \quad (20)$$

Дифференцируя (20), найдем:

$$\frac{\partial \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i} = -\frac{ab}{2\pi} \int_F T(y) \frac{\beta_i}{r} dF_y, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 W^{[\alpha]}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi} \int_F T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y. \quad (22)$$

Термоэластопотенциалы (21) и (22) используются для построения формул перемещений и напряжений соответственно. Исследуя свойства интеграла в (21), легко видеть, что при переходе через кривую контура L , ограничивающего область D^+ , он не испытывает разрыва. Интеграл в (21) является сходящимся, порядок особенности $1/r$ меньше мерности области интегрирования. Интеграл в (22) представляет собой частную производную второго порядка от логарифмического потенциала площади. Этот интеграл особенный и необходимо выразить его неинтегральный член, для чего в окрестности особой точки опишем окружность малого радиуса ε . Применяя формулу Гаусса, получим:

$$I = \int_F T(x) \frac{\partial^2 (\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j} dF_y \cong T(y) \int_F \frac{\partial^2 (\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j} dF_y = T(y) \int_L n_j(x) \frac{\partial (\ln 1/r)}{\partial x_i} dl_y, \quad (23)$$

где L – контур интегрирования. Т.к. для окружности в полярных координатах $dL = \varepsilon d\vartheta$, а $n_j = \beta_j$, то интеграл примет вид:

$$I = T(y) \int_L \beta_i \beta_j d\vartheta. \quad (24)$$

Выполняя интегрирование по контуру окружности в пределах от нуля до 2π , имеем: $I = \pi$, если $i = j$; $I = 0$, если $i \neq j$.

На основании изложенного при $x \equiv y$ (22) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 W^{[\alpha]}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi} \left(\pi T(x) + \int_F T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right). \quad (25)$$

Когда точка x стремится к точкам границы области, вторые производные логарифмического потенциала площади имеют определенные пределы. Эти пределы различны для точек x , стремящихся к границе из внутренней D^+ и внешней D^- области. Используя теорему Гюгонио-Адамара [2] и предполагая, что плотность потенциала $T(y)$ такова, что его внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, определяем скачки этих производных: $I = \eta \pi T(x) n_i(x) n_j(x) + \int_F T(y) \frac{\partial^2 (\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j} dF_y$, где

$\eta = -\pi$ для внутреннего предела и $\eta = \pi$ для внешнего предела. Тогда термоэластопотенциал (22) в граничных точках выражается формулой:

$$\frac{\partial^2 W^{[\alpha]}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi} \left(\eta \pi T(x) n_i(x) n_j(x) + \int_F T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right). \quad (26)$$

На основании (24), (25), (26), составим формулы температурных добавок напряжений, используя формулу:

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right). \quad (27)$$

Запишем с использованием (9) и (21) формулу добавок перемещений:

$$u_i^{(\alpha)T} = -\frac{ab}{2\pi_F} \int T(y) \frac{\beta_i}{r} dF_y. \quad (28)$$

Добавки напряжений для точек внутри области находим следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)T}(x) = -\frac{E(T)ab}{2\pi(1+\nu)} \left[\int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y + 2\pi T(x) \delta_{ij} \right]. \quad (29)$$

В особых точках напряжения определяем, учитывая (25):

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)T}(x_0) = -\frac{E(T)ab}{2\pi(1+\nu)} \left[3\pi T(x) \delta_{ij} + \int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right], \quad (30)$$

а в граничных точках – с учетом (26):

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)T}(x_L) = -\frac{E(T)ab}{2\pi(1+\nu)} \left(\pi T(x_L) [\eta n_i(x_L) n_j(x_L) + 2\delta_{ij}] + \int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right). \quad (31)$$

Тогда формула температурных добавок перемещений примет вид:

$$u_i^T(x) = u_i^{(\alpha)T} + u_i^{(q)T} = -\frac{a}{2} \left(\frac{b}{\pi} \int_F T(y) \frac{\beta_i}{r} dF_y - \right. \\ \left. -c \left\{ \int_L \chi(y) [n_i(y)(2\ln r - 1) + 2\beta_i \cos \varphi] dl_y + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k [\beta_i^{(A_k)} r_{A_k} (2\ln r_{A_k} - 1)] \right\} \right). \quad (32)$$

Температурные добавки напряжений внутри области определяются по формуле:

$$\sigma_{ij}^T(x) = \sigma_{ij}^{(\alpha)T} + \sigma_{ij}^{(q)T} = -\frac{aE(T)}{2(1+\nu)} \left(\frac{b}{\pi} \left[2\pi T(x) \delta_{ij} + \int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right] + \right. \\ \left. +c \left\{ \int_L \chi(y) \frac{1}{r} [n_i(x)\beta_j + n_j(x)\beta_i - (2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}) \cos \varphi] dl_y + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^n A_k [(0,5 + \ln r_{A_k}) \delta_{ij} - \beta_i^{(A_k)} \beta_j^{(A_k)}] \right\} \right). \quad (33)$$

Для особых точек вместо (29) в формуле (33) используется (30).

Формулы температурных добавок напряжений в граничных точках составляем на основе (31) с учетом (18):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^T(x_L) = \sigma_{ij}^{(\alpha)T}(x_L) + \sigma_{ij}^{(q)T}(x_L) = & -\frac{aE(T)}{2(1+\nu)} \{ bT(x_L) [\eta m_i(x_L) n_j(x_L) + 2\delta_{ij}] + \\ & + c\pi \chi(x_L) [\eta m_i(x_L) n_j(x_L) - \delta_{ij}] + \frac{b}{\pi} \int_L T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dl_y + V.p. \sigma_{ij}^{(q)T}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $V.p.$ – обозначает главное значение сингулярного интеграла по Коши.

Полные термические перемещения определяются по формуле (8), где u_i^U – выражаются в виде эластопотенциала простого слоя, определяющего перемещение в точке x плоскости от действия распределенных на контуре L сил интенсивностью $v_i(y)$:

$$q_i(x) = \int_L v_i(y) u_{ij}(x, y) dl_y, \quad (35)$$

где u_{ij} – фундаментальное решение плоской задачи теории упругости [3].

Полные напряжения во внутренних точках области определяются по формуле:

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}^U(x) + \sigma_{ij}^T(x), \quad (36)$$

где $\sigma_{ij}^U(x)$ соответствуют перемещению u_i^U и определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij}^U(x) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L v_k(y) \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}\beta_j + \delta_{jk}\beta_i - \delta_{ij}\beta_k) + 2\beta_i\beta_j\beta_k \right] \frac{dl_y}{r(x, y)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (37)$$

а $\sigma_{ij}^T(x)$ определены соотношениями (33). Аналогично вычисляем напряжения в граничных точках:

$$\sigma_{ij}(x_L) = \sigma_{ij}^U(x_L) + \sigma_{ij}^T(x_L), \quad (38)$$

где $\sigma_{ij}^U(x_L)$ определяем по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^U(x_L) = v_i(x_L) n_i(x_L) \left[1 + \frac{n_j^2(x_L)}{1-\nu} \right] + v_{ji}(x_L) n_j(x_L) \left[\frac{n_j^2(x_L)}{1-\nu} - 1 \right] + V.p. \sigma_{ij}^T(x_L), \\ i, j = 1, 2; i \neq j, \end{aligned} \quad (39)$$

где $n_i(x)$ – направляющие косинусы вектора внешней нормали из области, а $\sigma_{ij}^T(x_L)$ выражаются формулой (34).

Для получения СИУ данной задачи подставляем (38) в граничные условия (2). После соответствующих преобразований получаем [10]:

$$\begin{aligned} v_i(x_L) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L (v_i(y) \cos \psi \left[(1-2\nu) + 2\beta_i^2 \right] + \\ + v_j(y) \left\{ (1-2\nu) \left[n_j(x_L) \beta_i - n_i(x_L) \beta_j \right] + 2\beta_i \beta_j \cos \psi \right\} \left(\frac{dl_y}{r} = f_i(x_L) + f_i^T(x_L), \right. \end{aligned} \quad (40)$$

где $f_i(x_L)$ – заданные механические нагрузки, а $f_i^T(x_L)$ – фиктивная поверхностная температурная нагрузка. Представим $f_i^T(x_L)$ в упрощенном виде:

$$f_i^T(x_L) = -\sigma_{ij}^T(x_L)n_j(x_L). \quad (41)$$

Таким образом, решение краевой задачи термоупругости с переменным коэффициентом $\alpha(T)$ сведено к решению задачи изотермической теории упругости с поверхностными нагрузками $f_i(x_L)$ и $f_i^T(x_L)$. Полные напряжения, вычисленные по формулам (36), (38), используются далее на первом приближении при решении краевой задачи теории упругости как компоненты плотности массовых сил.

3. О вычислении частных производных функции температуры и способе понижения особенности в интегралах. В формулах добавок перемещений u_i^N и напряжений σ_{ij}^N [6] присутствуют частные производные от температуры. Температура T не является гармонической функцией и тем самым не удовлетворяет уравнению Лапласа. Однако эту функцию можно неявно выразить через гармоническую функцию T^* , воспользовавшись соотношением (13). Если продифференцировать (13), получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial T}{\partial x_p} = \frac{\partial T^*}{\partial x_p} \frac{1}{\lambda_0 \sqrt{1 - \frac{2k}{\lambda_0} T^*}}. \quad (42)$$

Гармоническую функцию T^* можно представить формулой (15) в случае внутренней температурной задачи и (16) в случае внешней задачи. Тогда, дифференцируя (15), получим:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_p} = \int_L \chi(y) \frac{2\beta_i \cos \varphi - n_p(y)}{r^2} dl_y + \sum_{k=1}^n A_k \frac{\beta_i^{(A_k)}}{r_{A_k}}. \quad (43)$$

Плотность потенциала $\chi(y)$ определяется в результате решения интегрального уравнения внешней плоской краевой задачи теплопроводности и внутренней краевой задачи Дирихле:

$$T_\infty - \pi\chi(x_L) + V.p. \int_{L_i} \chi(y) \frac{\cos \varphi}{r} dl_y + \sum_{k=1}^n A_k \ln r_{A_k} = F(x_L), \quad (44)$$

$$\pi\chi(x_L) + V.p. \sum_{i=1}^n \int_{L_i+L_e} \chi(y) \frac{\cos \varphi}{r} dl_y + \sum_{i=1}^n A_i \ln r_{A_i} = F(x_L), \quad (45)$$

и считается заданной функцией на контуре L . Продолжим функцию внутрь области D^+ и дополним D^+ до полного евклидова пространства E_2 .

Пусть, например, в области $\Delta\chi = 0$. Запишем вторую формулу Грина для плотности потенциала χ и функции перемещений u , которая удовлетворяет уравнению Пуассона [11]:

$$\int_F (\chi\Delta u - u\Delta\chi) dF_y = \int_L \left(\chi \frac{du}{dn} - u \frac{d\chi}{dn} \right) dl_y, \quad (46)$$

или с учетом $\Delta\chi = 0$ и функции u имеем:

$$2\pi\chi = \int_L \left[\chi \frac{d(\ln 1/r)}{dn} - \ln \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dn} \right] dl_y. \quad (47)$$

Дифференцируя обе части (47), окончательно получаем:

$$\int_L \chi \frac{2\beta_i \cos \varphi - n_i(y)}{r^2} dl_y = \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y. \quad (48)$$

Устремляя точку x к L , из дополненной области определяем предельные значения интеграла в правой части (48):

$$I(x) = \pi n_i(x) \frac{d\chi}{dn} + \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y. \quad (49)$$

Интеграл в (49) имеет слабую особенность и его можно вычислить методом механических квадратур. Таким образом, предложенный способ позволяет заменить расходящийся интеграл в (43) интегралом (49) со слабой особенностью. Значение частных производных $\frac{\partial T^*}{\partial x_p}$ внутри области вычисляем по формуле (43), а в граничных точках – по формуле:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_p} = \pi n_p(x) \frac{d\chi}{dn} + \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y + \sum_{k=1}^n A_k \frac{\beta_p^k}{r_{A_k}}. \quad (50)$$

Для определения $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ представим функцию χ на контуре L потенциалом простого слоя:

$$\chi = \int_L \nu(y) \ln \frac{1}{r} dl_y. \quad (51)$$

Эта функция считается найденной в результате решения соответствующей температурной задачи, что позволяет определить плотность потенциала $\nu(y)$. Дифференцируя левую и правую часть (51) по нормали $n(x)$, получаем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = \int_L \nu(y) \frac{\cos \psi}{r} dl_y, \quad (52)$$

где $\cos \psi = n_i(x) \beta_i$.

В граничных точках контура L интеграл в правой части (52) изменяется скачкообразно:

$$\frac{d\chi}{dn} = \eta \pi \nu(x) + \int_L \nu(y) \frac{\cos \psi}{r} dl_y, \quad (53)$$

где $\eta = 1$ при $x \rightarrow L$ из области D^- , $\eta = -1$ при $x \rightarrow L$ из области D^+ .

Определив из (53) производную $\frac{d\chi}{dn}$ и подставляя ее в (50), находим частные производные $\frac{\partial T^*}{\partial x_p}$ в граничных точках плоской области и по рассмотренным выше формулам определяем перемещения и напряжения плоской задачи теории упругости, возникающей на n -м приближении метода возмущений.

Особенности разработанного алгоритма численного решения плоской краевой задачи термоупругости неоднородных тел приведены в [10, 12]. Достоверность формул и точность разработанного алгоритма подтверждена решением тестовых задач [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 293 с.
2. Сегерлинд, Л. Дж. Применение метода конечных элементов / Л. Дж. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
3. Гюнтер, Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. – М.: Гостехиздат, 1953. – 415 с.
4. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках. Пер.с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 404 с.
5. Подстригач, Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
6. Хвисевич, В. М. Численное решение двухмерных краевых задач термоупругости неоднородных тел / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Перспективные материалы и технологии: монография: в 2 томах / под. ред. чл.-корр. Рубаника В.В. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – Т. 2. – Гл. 7. – С. 87–104.
7. Trostel, R. Stationäre Warmspannungen mit temperaturabhängigen Stofwerten / R. Trostel // Ingenieur-Archiv, 26. – 1958.
8. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа. – 1967. – 599 с.
9. Терновской, Б. П. О сходимости метода последовательных приближений в плоской задаче теории упругости для прямолинейной пластинки / Б. П. Терновской // Прочность и устойчивость инженерных конструкций. – Барнаул, 1989. – С. 59–66.
10. Веремейчик, А. И. К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала / А. И. Веремейчик, В. В. Гарбачевский, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Вып. 30. – С. 184–189.
11. Хвисевич, В. М. Прямое решение трехмерных краевых задач несвязанной стационарной термоупругости методом интегральных уравнений теории потенциала: дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 / В. М. Хвисевич. – М. : МИСИ, 1980. – 230 с.
12. Веремейчик, А. И. Об алгоритме численного решения плоских краевых задач неоднородной термоупругости / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич // Высокие технологии, фундаментальные и прикладные исследования, промышленность: сб. тр. VIII междунауч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 27–28 октября 2009 г. / Санкт-Петерб. гос. ун-т. – Санкт-Петербург, 2009. – С. 75–76.

РАСЧЕТ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ С ДВУМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Акимов В.А., Андреев В.О., Рапинчук Д.В.

Белорусский национальный технический университет

Под упругим плоским тонкостенным кольцом понимают любую замкнутую плоскую упругую стержневую систему, длины участков которой значительно больше размеров их поперечных сечений. Такая система трижды статически неопределима. Лишними неизвестными являются изгибающий момент X_1 , продольное усилие X_2 и поперечная сила X_3 , т.е. внутренние усилия в поперечном сечении, проведенном для закрепления кольца (рис. 1).

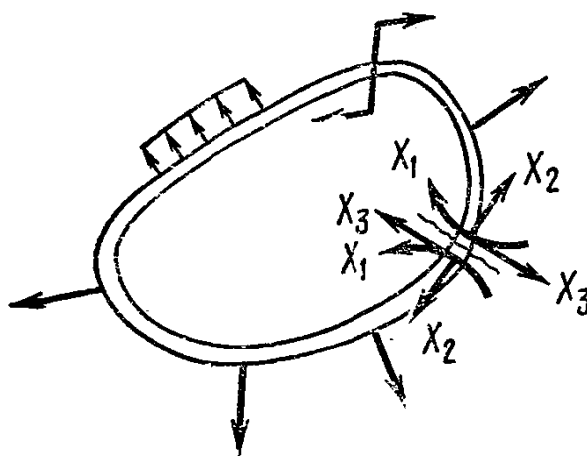


Рис. 1. Плоское тонкостенное кольцо

Поэтому жестко замкнутые системы относятся к системам внутренне статически неопределимым.

Статическую неопределимость колец можно раскрыть, используя канонические уравнения метода сил. В связи с тонкостенностью колец при составлении уравнений, раскрывающих статическую неопределимость, достаточно учитывать только деформацию от изгибающего момента.

Если кольцо по геометрии и нагрузке симметрично относительно одной оси, то в поперечных сечениях, совпадающих с осью симметрии, поперечные силы равны нулю. Следовательно, лишними неизвестными в этих сечениях будут изгибающий момент (X_1 или X_1') и продольное усилие (X_2 или X_2'). Вместо всего кольца можно рассматривать только одну его симметричную половину.

Если кольцо по геометрии и нагрузке симметрично относительно двух осей (рис. 2, а), в сечениях, проходящих через оси симметрии, поперечные силы равны нулю, а продольные усилия можно определить из условия статики как суммы проекций сил и усилий, приложенных к полукольцу, на соответствующую ось симметрии. В этом случае лишним неизвестным будет только изгибающий момент (X , или X). Вместо всего кольца можно рассматривать одну его четверть, заключенную между осями симметрии (рис. 2, б или в). В этих сечениях поперечные силы равны нулю, продольные усилия находят из условия статики, а изгибающий момент будет лишней неизвестной величиной.

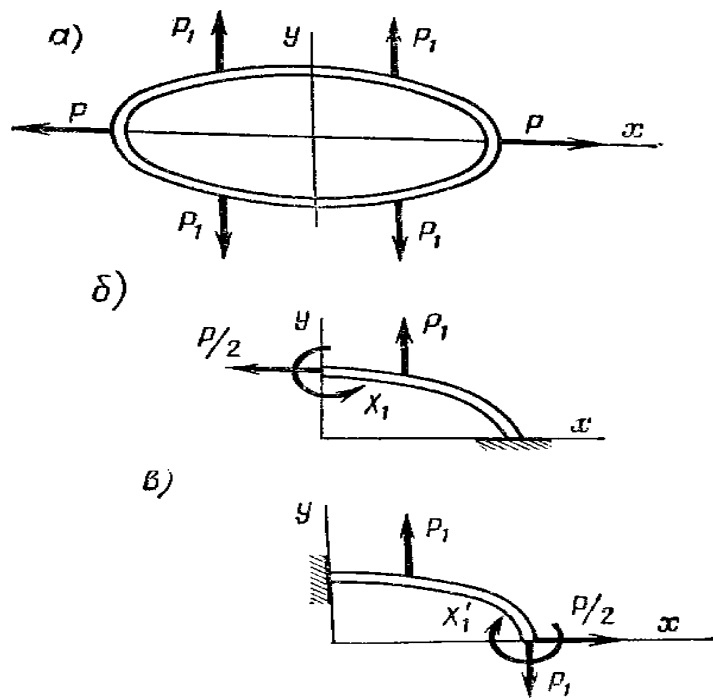


Рис. 2. Кольца с двумя осями симметрии

Рассмотрим пример:

Дано a, b, E, l, q – внутреннее давление на стенку кольца, симметричного относительно осей x и y (рис. 3)

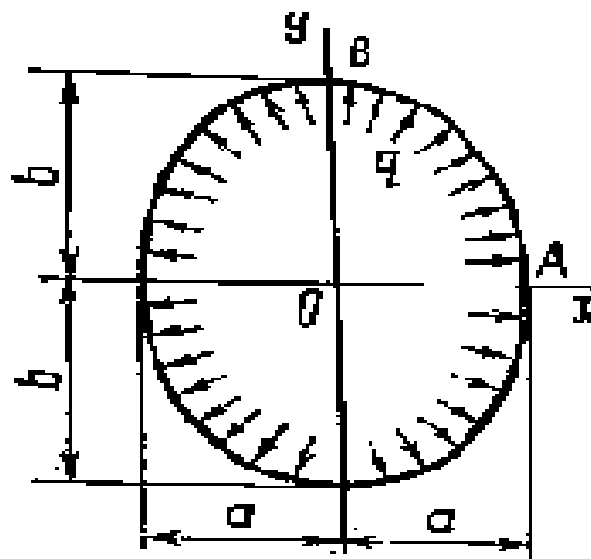


Рис. 3. Кольцо

Требуется определить поперечную в направлении оси Ox Δa и продольную в направлении оси Oy Δb деформации в точках А и В.

Рассматриваем одну четверть кольца (рис. 4). В сечениях, совпадающих с осью x , продольная сила равна нулю, а продольное усилие равно qa .

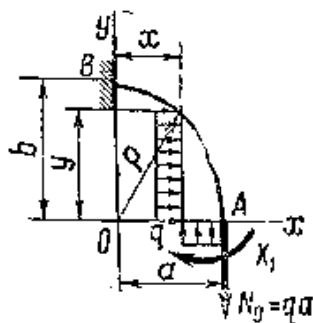


Рис. 4. "Четверть" кольца

Изгибающие моменты в произвольном поперечном сечении с координатами центра тяжести x и y основной и вспомогательной системы, равны:

$$M = qa(a-x) - q/2(a-x)^2 - q/2y^2 = q/2[a^2 - (x^2 + y^2)] = q/2(a^2 - p^2)$$

где $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние рассматриваемого сечения от начала координат и изгибающего момента $M=1$.

Так как

$$EI\delta_1 P = \int_0^s MM ds = q/2 \int_0^s (a^2 - p^2) ds = q/2 (a \int_0^s ds - \int_0^s p^2 ds) = q/2 (as - I_p),$$

Где s – длина дуги геометрической оси четверти кольца; $I_p = \int_0^s p^2 ds$ – полярный момент инерции дуги s относительно начала координат, а величина $EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}^2 ds = \int_0^s ds = s$, то изгибающий момент в сечении А

$$X_1 = -\delta_1 P / \delta_{11} = q/2(I_p / s - a^2).$$

Изгибающий момент в произвольном сечении кольца:

$$M = q/2(a^2 - p^2) + q/2(I_p / s - a^2) = q/2(I_p / s - p^2);$$

$$M_{(p=a)} = q/2(I_p / s - a^2), M_{(p=b)} = q/2(I_p / s - b^2)$$

Если p непрерывно возрастает от значения a до значения $b > a$, то

$$M_{p=a} > 0; M_{p=b} < 0 \text{ и } M_{p=\sqrt{I_p/s}} = 0.$$

На рис. 5 представлена эпюра изгибающего момента для $b > 0$.

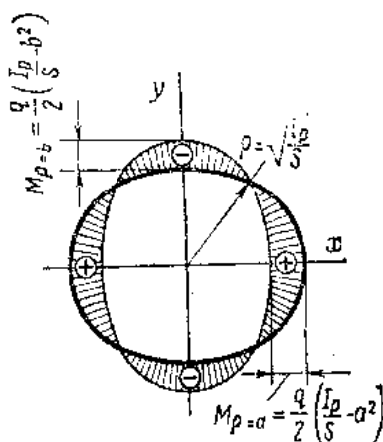


Рис. 5. Эпюра изгибающего момента

Для определения измерения размера a в сечении А четверти кольца прикладываем горизонтальную силу $P_\phi=1$, направленную к центру О. От этой силы $\bar{M} = y$. Следовательно,

$$\Delta a = q/2EI \int_0^s (I_p/s - p^2)y ds = q/2EI (I_p/s \int_0^s y ds - \int_0^s p^2 y ds) = q/2EI (S_x/s I_p - \int_0^s p^2 y ds) = q/2EI (y_c I_p - I_x)$$

Где $S_x = \int_0^s y ds$ – статический момент дуги s относительно оси x ; $y_c = S_x/s$ – ордината центра тяжести дуги s и $I_x = \int_0^s p^2 y ds$.

Для определения изменений размера b в сечении А четверти кольца прикладываем вертикальную силу $P_\phi=1$, направленную вниз. От этой силы $\bar{M} = a - x$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta b &= q/2EI \int_0^s (I_p/s - p^2)(a-x) ds = q/2EI (I_p/s a \int_0^s ds - a \int_0^s p^2 ds - I_p/s \int_0^s x ds + \int_0^s p^2 x ds) = \\ &= q/2EI (I_p/s a s - a I_p - I_p/s S_y + I_y) = q/2EI (I_y - x_c I_p), \end{aligned}$$

Где $I_y = \int_0^s p^2 x ds$, $S_y = \int_0^s x ds$ – статический момент дуги s относительно оси y ; $x_c = S_y/s$ – абсцисса центра тяжести дуги s .

Рассмотрим частный случай. Кольцо, составленное из двух полуокружностей радиусом a и двух прямых длиной $2a$ (рис. 6)

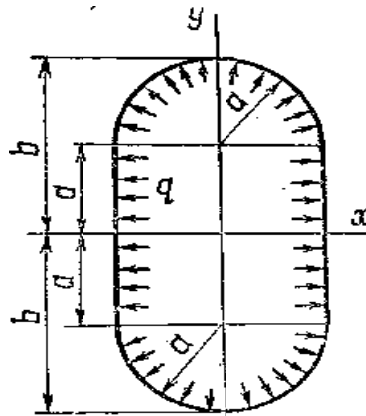


Рис. 6. Кольцо из двух полуокружностей

Так как

$$\begin{aligned} s &= ((2 + \pi) / 2)a; x_1 = a; y_1 = y; ds_1 = dy; x_2 = a \cos \varphi; y_2 = a(1 + \sin \varphi); \\ ds_2 &= a d\varphi; p_1^2 = a^2 + y^2; p_2^2 = 2a^2(1 + \sin \varphi), \end{aligned}$$

$$S_x = \int_0^s y_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y_2 ds_2 = \int_0^a y dy + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \varphi) d\varphi = ((3 + \pi) / 2)a^2;$$

$$S_y = \int_0^a x_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} x_2 ds_2 = a \int_0^a dy + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2;$$

$$x_c = S_y / s = 4a / 2 + \pi;$$

$$y_c = S_x / s = ((3 + \pi) / (2 + \pi))a;$$

$$I_x = \int_0^a y_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y_2^2 ds_2 = \int_0^a y^2 dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi)^2 d\varphi = ((28 + 9\pi) / 12)a^3;$$

$$I_y = \int_0^a x_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} x_2^2 ds_2 = a^2 \int_0^a dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = (4 + \pi) / 4a^3;$$

$$I_p = I_x + I_y = ((10 + 3\pi) / 3)a^3;$$

$$I_x = \int_0^a p_1^2 y_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} p_2^2 y_2 ds_2 = \int_0^a (a^2 + y^2) y dy + 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi)^2 d\varphi = ((19 + 6\pi) / 4)a^4;$$

$$I_y = \int_0^a p_1^2 x_1 ds_1 + \int_a^{\frac{\pi}{2}} p_2^2 x_2 ds_2 = a \int_0^a (a^2 + y^2) dy + 2a^4 \int_a^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi) \cos\varphi d\varphi = (13 / 3)a^4.$$

Для прямолинейного участка:

$$M_1 = q / 2(I_p / s - p_1^2) = qa^2 / 2((14 + 3\pi) / (6 + 3\pi) - y^2 / a^2) \approx qa^2 / 2(1,519 - y^2 / a^2);$$

$$M_{(1_{(y=0)})} = (14 + 3\pi) / 6(2 + \pi)qa^2 \approx 0,759qa^2;$$

$$M_{(2_{(y=0)})} = 4 / (3(2 + \pi))qa^2 \approx 0,259qa^2.$$

Для криволинейного участка

$$M_2 = q / 2(I_p / s - p^2) = qa^2 (4 / (6 + 3\pi) - \sin\varphi) \approx qa^2 (0,259 - \sin\varphi);$$

$$M_{2_{\varphi=0}} = 4 / (3(2 + \pi))qa^2 \approx 0,259qa^2; M_{2_{\varphi=\pi/4}} = -2 + 3\pi / 3(2 + \pi)qa^2 \approx -0,741qa^2$$

Эпюра изгибающего момента для четверти кольца показана на рис. 7.

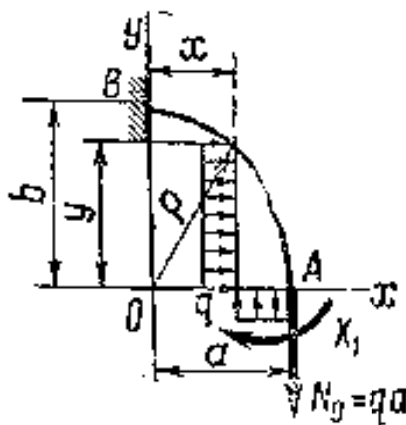


Рис. 7. Эпюра изгибающего момента

Изменение размера a :

$$\Delta a = q / 2EI(Y_c I_p - I_x) = (6 - 17\pi - 6\pi^2) / 24(2 + \pi) \cdot (qa^4) / EI \approx -0,864(qa^4) / EI.$$

Изменение размеров b :

$$\Delta b = q / 2EI(I_y - x_c I_p) = (\pi - 14) / 12(2 + \pi) \cdot (qa^4) / EI \approx -0,160(qa^4) / EI.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Миролубов, И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: уч. пособие для ВТУЗов / И.Н. Миролубов, С.А. Енгальчев, Н.Д. Сергиевский. – Изд. 4-е.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ СХЕМАТИЗАЦИИ СЛУЧАЙНОГО НАГРУЖЕНИЯ

¹Д.т.н. Е.К. Почтенный, ²к.т.н. П.П. Капуста

¹Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси

²Белорусский национальный технический университет

г. Минск, Беларусь

1. Постановка задачи и обоснование выбора метода схематизации

Применение каждого метода регламентировано ГОСТ 23207-78 [1] в зависимости от коэффициента нерегулярности случайного процесса нагружения. Наиболее универсальные, с данной точки зрения, признаются два метода (ГОСТ 25.101-83): метод полных циклов и метод “падающего дождя” [2]. Эти методы позволяют дать расчетные оценки долговечности более сопоставимые с экспериментальными данными, чем остальные методы. Поэтому их применение является предпочтительным.

Хорошую точность оценки нагруженности дает метод анализа полуциклов напряжений [3]. Данный метод учитывает асимметрию нагружения путем приведения случайного асимметричного нагружения с переменным коэффициентом асимметрии к случайному нагружению с постоянным коэффициентом асимметрии [4]. Метод прошел широкую экспериментальную проверку. Наилучший эффект при его использовании можно получать в случае автоматизированного учета и статистической обработки реального случайного нагрузочного ряда напряжений [2 – 9].

Сравнительный анализ экспериментальных и аналитических методов оценки нагруженности показал необходимость дополнения их друг другом.

2. Выделение экстремальных значений случайного процесса нагружения

При проведении процесса схематизации применяют разбиение всего диапазона изменения нагрузок на классы, т.е. интервалы разной ширины. Ширина класса определяется количеством классов разбиения и шириной диапазона нагрузок. Примем стандартный ряд количества классов: 8, 16, 32. Наиболее часто применяется 32 класса. Нумерация классов осуществляется от минимального значения диапазона.

Например, если весь диапазон изменения исходного сигнала составляет от $-10.24V$ до $+10.24V$, то при 32 классах разбиения, ширина класса составит $0.64V$, а границы 1-го класса будут $-10.24V \dots -9.6V$, 16-го класса – $-0.64V \dots 0V$, 32-го класса – $+9.6V \dots +10.24V$.

Выделенные в результате предварительной обработки экстремумы в дальнейшем описываются не своим реальным значением, а номером класса. Это позволит при проведении схематизации оперировать с целыми числами в диапазоне от 1 до 32.

При выделении экстремумов должны выполняться следующие правила [2–9, 12–16]:

- начальные и конечные значения процесса нагружения принимаются за экстремумы;
- соседние экстремумы, образующие размах меньше ширины класса не выделяются (рис. 1);
- если несколько соседних экстремумов процесса нагружения равны между собой, то выделяется один экстремум (рис. 1, 2);
- ординату процесса нагружения X принимать за экстремум при выполнении одного из условий:

$$\begin{cases} X_{i-1} > X_i \\ X_{i+1} \geq X_i \\ |X_{i-1} - X_i| \geq \Delta \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} X_{i-1} < X_i \\ X_{i+1} \leq X_i \\ |X_{i-1} - X_i| \geq \Delta \end{cases} \quad (2)$$

Алгоритмизация выделения экстремальных значений по соотношениям вида (1 и 2) сводится к формализации следующих операций. Из массива последовательных дискретных значений процесса нагружения, полученных при постоянном шаге квантования Δt , выделение экстремумов производят в соответствии с условием:

$$(X_i - X_{i-1})(X_{i+1} - X_i) < 0. \quad (3)$$

В неравенстве (3) – $i=2, 3, \dots, n$, где n – объем ряда дискретных значений процесса нагружения. При выполнении этого условия X_i принимается за экстремум.

Если произведение в левой части соотношения (3) больше нуля, выполняют сдвиг массива на одно значение и процедуру повторяют (анализируют следующие три значения X_i, X_{i+1}, X_{i+2} и т. д.).

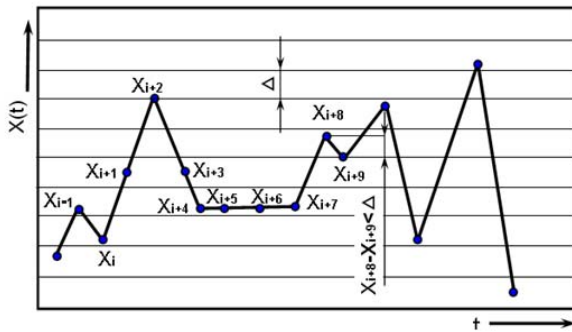


Рис. 10 Выделение экстремумов, образующих размах меньше ширины класса

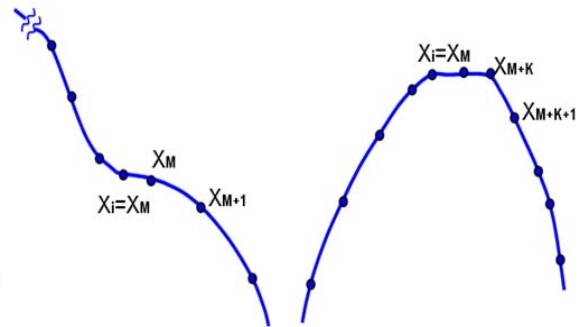


Рис. 20 Выделение экстремумов при равенстве нескольких соседних экстремальных значений процесса

При наличии в массиве следующих друг за другом двух и более одинаковых значений (рис. 2) возможно равенство нулю левой части выражения (3).

$$X_{i+1} - X_i = 0 \quad (4)$$

и фиксируют значение $X_m = X_i$. Далее, последовательно проверяют неравенство

$$(X_m - X_{m-1})(X_{i+1} - X_i) < 0. \quad (5)$$

В неравенстве (5) – $i=m+1, m+2, \dots, m-k-1$, где k – число одинаковых значений. При равенстве нулю левой части выражения (5), массив сдвигают на одно значение и вновь проверяют неравенство (5). Если неравенство (5) выполнено, значение $X_{m+k} = X_i$ принимают за экстремум (рис. 2, 3), после чего поиск экстремумов вновь осуществляют по условию (2).

3. Выделение экстремальных значений случайного процесса нагружения по методу полных циклов

Один из наиболее распространенных алгоритмов, метод полных циклов, широко применяют при оценке эксплуатационной нагруженности элементов машин и механизмов.

В соответствии с определением метода полных циклов схематизацию ведут в несколько этапов. В начале (рис. 3) из реализации процесса выделяют простые промежуточные циклы с амплитудами, меньшими некоторой, наперед заданной, величины L и определяют их количество.

Далее, исключив из рассмотрения выделенные таким образом циклы, определяют число простых циклов, с амплитудами, меньшими величины L_1 . Такую процедуру повторяют, выделяя последовательно из реализации процесса циклы с амплитудами, меньшими L_3, \dots, L_n ($L_3 < L_4 < \dots < L_n$) до тех пор пока не будут выделены все циклы.

Выделение полных циклов производится на основании анализа четырех последовательно расположенных экстремумов (рис. 4).

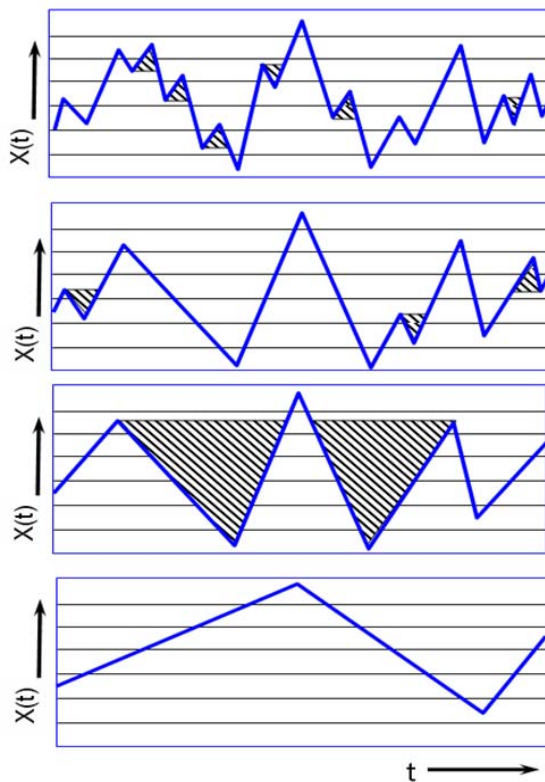


Рис. 3. Схема выделения из реализации процесса простых промежуточных циклов

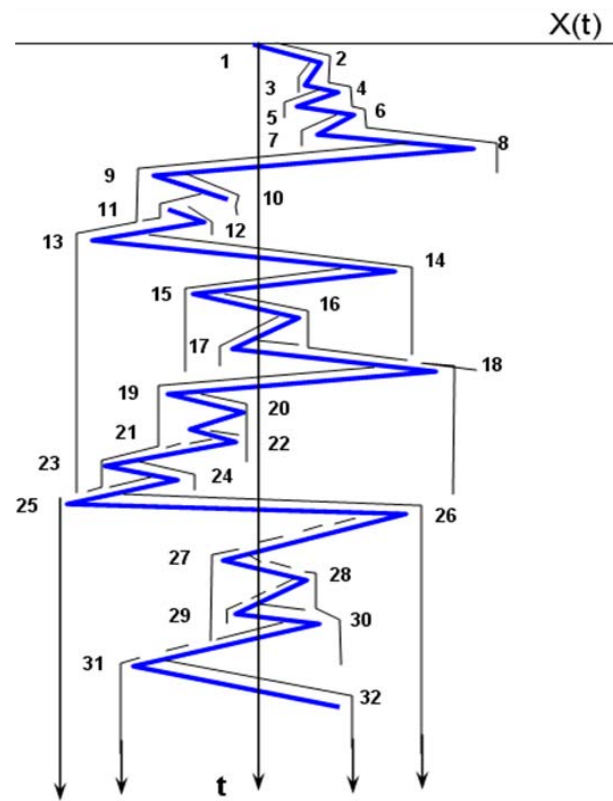


Рис. 4. Схема подсчета циклов нагружения по методу “падающего дождя”

Условия выделения полного цикла по четырем экстремумам имеет вид:

где: $X_{2i} \leq X_{1i}, X_{3i} \leq X_{3i},$

$$X_{1i} = |X_{i+1} - X_i|, X_{2i} = |X_{i+2} - X_{i+1}|, X_{3i} = |X_{i+3} - X_{i+2}|. \quad (6)$$

Если уравнение (6) не выполняется, тогда сдвигают массив на величину одного экстремума, т. е. производят перенумерацию четырех следующих экстремумов и снова проверяют выполнение неравенства (6).

После выделения полного цикла происходит сдвиг массива с исключением точек X_{i+2} , X_{i+1} и процесс поиска полного цикла из начального значения экстремума.

В результате выделения полных циклов в соответствии с неравенством (6) на обрабатываемом участке реализации остаются невыделенные циклы напряжений, соответствующие, как правило, колебаниям с монотонно убывающими или монотонно возрастающими амплитудами.

Метод полных циклов учитывает, как основные, так и наложенные циклы.

Алгоритм схематизации по методу “полных циклов” довольно прост и легко реализуется, но он имеет ряд существенных недостатков:

- для проведения схематизации требуется запоминание больших массивов экстремумов на носителях информации;
- схематизация требует продолжительного времени обработки, зависящего от длины массива данных;
- невозможно проводить схематизацию в режиме реального времени без промежуточного запоминания массивов экстремумов.

Эти недостатки отсутствуют у другого метода выделения полных циклов, который называется методом “падающего дождя”.

4. Выделение экстремальных значений случайного процесса нагружения по методу “падающего дождя”

Схема подсчета циклов нагружения по методу “падающего дождя” проиллюстрирована на рис. 5.

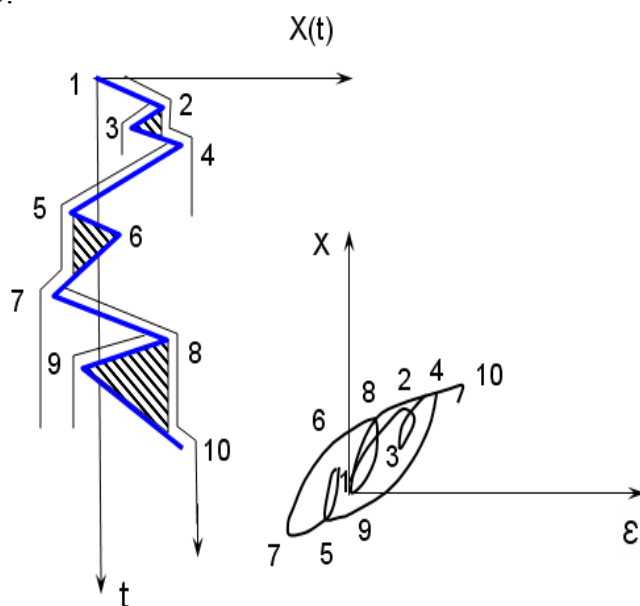


Рис. 5. Выделение полных циклов на основании анализа четырех последовательно расположенных экстремумов

При схематизации по методу “падающего дождя” ось времени направлена вертикально вниз, а линии, соединяющие соседние экстремумы – это последовательность крыш, по которым стекают потоки дождя [2].

Рассмотрим применение этих правил для реализации, показанной на рис. 5.

Траектории потоков определяются в соответствии со следующими правилами.

Потоки начинаются с внутренней стороны экстремумов последовательно. Каждый поток определяет полуцикл нагружения. Величину размаха определяют проекцией траектории потока на ось нагрузки.

Поток, начавшийся в точке максимума (минимума), прерывается в тот момент, когда встретится максимум (минимум), больший (меньший), чем исходный.

При встрече на одной из крыш нескольких потоков движение продолжает тот, который берет начало в экстремуме с меньшим номером, а остальные прерываются.

Поток, не встретивший препятствий, падает на землю.

Толстыми линиями изображены траектории изменения нагрузки, а тонкими – воображаемые потоки дождя. Начало первого потока происходит из минимума 1, а остановка – после максимума 8, напротив минимума 9 так как, он является более отрицательным, чем минимум 1. Размах полуцикла при этом подсчитывается как расстояние между точками проекции минимума 1 и максимума 8 и на горизонтальную ось.

Второй поток начинается от максимума 2 и останавливается напротив максимума 4 в соответствии с правилом 2; размах полуцикла равен расстоянию между проекциями экстремумов 2 и 3 на горизонтальную ось. Аналогично определяют длину потоков, начинающихся от максимумов 4 и 6. Поток от максимума 8 (в рамках рассматриваемого примера) не заканчивается (обозначен стрелкой). Потоки от минимумов 3, 5, 7 в соответствии с третьим правилом останавливаются у мест слияния с потоками, стекающими с крыш, расположенных выше. Размах полуциклов для этих потоков равен соответственно 2–3, 4–5, 6–7. Остальные потоки, приведенные на рис. 5, определены по тем же правилам.

Особенностью метода “падающего дождя” является то, что схематизация по этому методу соответствует диаграмме циклического деформирования: размахи деформаций, подсчитанные как циклы, образуют в координатах “напряжение – деформация” замкнутые петли гистерезиса (Рис. 5), а размахи деформаций, подсчитанные как полуциклы, не образуют замкнутых петель.

Непрекратившиеся потоки после завершения схематизации определяют обычно максимальные размахи полуциклов. В их последовательности сначала встречается охватывающий крупный размах, затем размахи промежуточных циклов нагружения.

Результаты схематизации, как правило, заносятся в корреляционную таблицу, где строками являются номера классов минимумов, а столбцами – номера классов максимумов, выделенных циклов. Так цикл, у которого минимум находится в 5 классе, а максимум в 16, записывается в 16-й столбец 5-й строки корреляционной таблицы (ввиду ограниченности объема статьи таблица не приводится). Числа в ячейках таблицы обозначают числа циклов, подсчитанных в результате схематизации, с одинаковыми значениями максимумов и минимумов.

Незавершенные циклы выводятся отдельным протоколом.

Метод “падающего дождя” позволяет проводить схематизацию в режиме реального времени, при этом запоминается лишь траектория потоков дождя, а обработку производят по мере ввода экстремумов.

Алгоритм схематизации по методу “падающего дождя” реализован на ПЭВМ. Разработаны: блок-схема и программа.

5. Обоснование, разработка и выбор методов схематизации с целью получения процесса, эквивалентного по повреждающему воздействию исходному нагрузочному процессу

5.1. Обоснование выбора метода схематизации

Выше описанные методы схематизации, имеют целый ряд недостатков. Они заключаются в следующем:

- методы игнорируют возможную и достаточно широко распространенную многочастотность процесса нагружения;
- при выделении циклов по данным методам исходят из размахов как нагружения, так и разгрузки, искажая фактическую картину нагружения;
- методы ориентируются только на размах напряжений, не учитывая, что это не соответствует повреждающему воздействию низкочастотных циклов;
- методы не учитывают одновременности действия циклов малого и большого размахов, что вносит погрешности при формировании нагрузочного блока.

Поэтому существует необходимость модернизации старых или разработки новых методов с целью получения в результате схематизации процессов, эквивалентных по повреждающему воздействию исходным процессам и отвечающих следующим требованиям:

- должен разделять основную и наложенную составляющие случайного процесса нагружения;
- в качестве повреждающих учитывать только полуциклы нагружения.

В соответствии **теории огибающих** должна быть обеспечена возможность проводить схематизацию как в режиме реального времени, так и в пакетном режиме.

Массивы, описывающие схематизированный процесс, должны иметь минимальные объемы.

5.2. Методы схематизации случайного нагружения

Для реализации цели повышения адекватности оценки случайного нагружения разработаны два новых метода схематизации.

Метод схематизации 1 для выделения составляющих исходного процесса нагружения

Первый метод основывается на следующих принципах:

- во-первых: поступающие экстремумы разделяются на две группы, в первой из них находятся все экстремумы, во второй – только максимумы. Таким образом, первая группа будет описывать исходный случайный процесс (кривая 1, рис. 6), а вторая – его огибающую (кривая 2, рис. 6);

- во-вторых: обе группы схематизируются отдельно и параллельно в режиме реального времени;

- в-третьих: схематизация производится модифицированным методом “падающего дождя”, учитывающего только полуциклы нагружения в соответствии со следующими правилами:

поток начинается от каждого минимума на обращенной вверх стороне сигнала;

- поток, начавшийся у минимума, стекает отдельной струей по крышам до тех пор, пока не оказывается напротив “более отрицательного” минимума, чем у которого начался;

- поток прекращается при встрече с потоками, стекающими с крыши, расположенной выше.

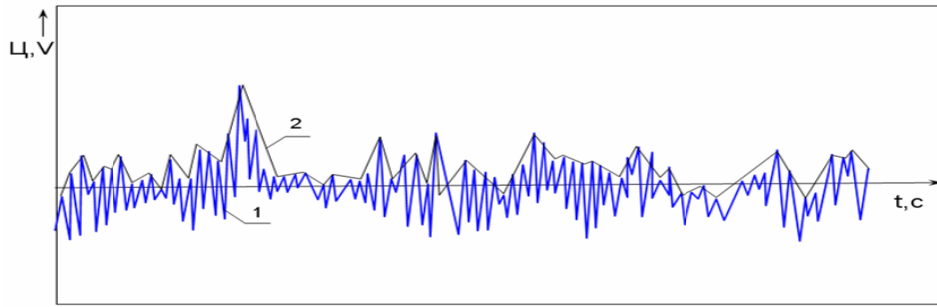


Рис. 6. Схема к пояснению метода схематизации 1 для выделения составляющих исходного процесса

Таким образом, в результате схематизации получают две корреляционных матрицы, одна из которых описывает основной процесс нагружения, т.е. низкочастотную составляющую процесса, а вторая - наложенный сигнал или высокочастотную составляющую исходного сигнала.

Рассмотрим предложенный метод на примере случайного процесса, изображенного на рис. 7–9. На рис. 7–8 изображена схематизация с целью получения высокочастотной составляющей исходного сигнала, а на рис. 9 – низкочастотной.

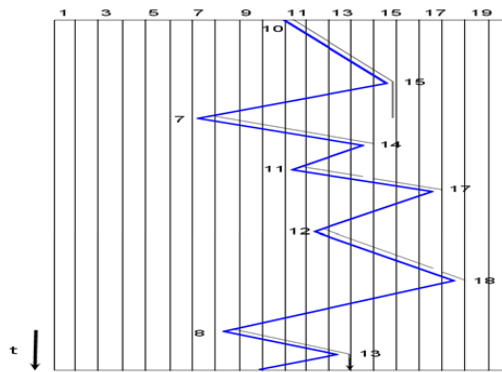


Рис. 7. Схема к пояснению метода схематизации 1 для получения низкочастотной составляющей

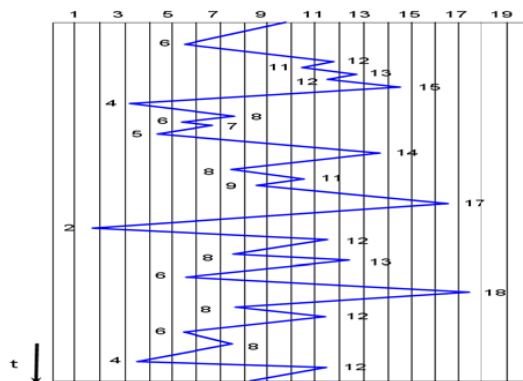


Рис. 8. Схема метода схематизации 2 для получения высокочастотной составляющей исходного процесса нагружения

В результате схематизации выделены следующие полуциклы нагружения (полуциклы обозначены номерами классов минимума и максимума):

- высокочастотная составляющая: –6–15, 11–12, 12–13, 4–17, 6–7, 5–8, 8–14, 9–11, 8–12, 6–13, 8–12, 6–8, 4–12 нез., 2–18 нез. (сокращение нез. обозначает незавершенный цикл);

- низкочастотная составляющая: 10–15, 11–14, 12–17, 7–18 нез., 8–12 нез.
 Дальнейшая обработка двух корреляционных таблиц ведется параллельно.

Метод схематизации 2 для выделения составляющих исходного процесса нагружения

Второй метод проиллюстрирован на рис. 9 и основывается на следующих принципах:

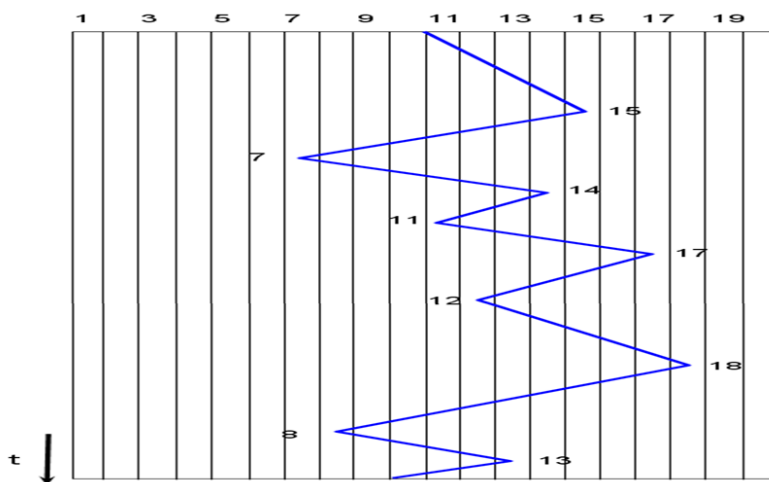


Рис. 9. Схема метода схематизации 2 для получения низкочастотной составляющей исходного процесса нагружения

- во-первых: поступающие экстремумы разделяются на две группы, а в первой из них находятся все экстремумы, во второй – только максимумы;
- во-вторых: обе группы схематизируются отдельно и параллельно в режиме реального времени;
- в-третьих: выделение полуциклов начинается с первого встретившегося минимума; началу полуцикла соответствует минимуму, а концу – следующий за ним максимум.

В результате схематизации случайного процесса, приведенного на рис. 9, по второму предлагаемому методу схематизации, выделены следующие полуциклы:

- высокочастотная составляющая: – 6–12, 11–13, 12–15, 4–8, 6–7, 5–14, 8–11, 9–17, 2–12, 8–13, 6–18, 8–12, 6–8, 4–12;
- низкочастотная составляющая: 7–14, 11–17, 12–18, 8–13.

6. Принципы и методы схематизации случайных процессов нагружения

На основании проведенного сравнительного анализа методов схематизации случайных процессов нагружения предложены принципы и методы схематизации случайных процессов нагружения конструкций и деталей машин, учитывающие временной фактор действующих нагрузок.

Примерами применения и основой для развития указанного подхода являются предложенные: комплексный метод и программа схематизации случайных процессов эксплуатационного нагружения несущих систем мобильных машин; метод схематизации с целью получения процесса, эквивалентного по повреждающему воздействию реальному нагрузочному процессу; алгоритмы новых методов схематизации и метода “падающего дождя”, а также программы для ПЭВМ, обеспечивающие возможность автоматизации обработки экспериментальных результатов эксплуатационных испытаний нагруженности несущих конструкций и деталей мобильных машин [2–16].

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 23207-78. Сопротивление усталости. Основные термины, определения и обозначения. – Введ. с 01.01.1979. М.: Изд-во стандартов, 1981. – 50 с.
2. ГОСТ 25.101-83. Расчеты и испытания на прочность. Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов. – Введ. с 01.07.1984. – М.: Изд-во стандартов, 1083. – 50 с.
3. Почтенный, Е.К. Прогнозирование долговечности и диагностика усталости деталей машин / Е.К. Почтенный. – Мн.: Наука и техника, 1983. – 246 с.
4. Почтенный, Е.К. Приведение асимметричных циклов к эквивалентным по повреждающему воздействию симметричным или отнулевым / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Вестні НАН Беларусі: Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2000. – №2. – С. 59 – 61.
5. Капуста, П.П. Ресурсное проектирование несущих деталей автотранспортных средств / П.П. Капуста // Автомобильная промышленность. – 2000. – № 2. – С. 24–26.
6. Оценка долговечности рам тракторных прицепов / А.И. Журавель и др. // Вестні акадэміі навук БССР. Сер. фізіка-тэхнічных навук. – 1987. – №3. – С.6–12.
7. Почтенный, Е.К. Кинетика усталости машиностроительных конструкций / Е.К. Почтенный. – Мн.: УП «Арти-Фекс», 2002. – 186 с., ил.
8. Почтенный, Е.К. Прогнозирование случайного нагружения и построение нагрузочных блоков / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Современные методы проектирования машин. Расчет, конструирование и технология изготовления. Сборник научных трудов. В 3-х томах. Т. 2. / Под общ. ред. академика П.А. Витязя. – Мн.: УП “Технопринт”, 2002. – С. 167–177.
9. Почтенный, Е.К. Анализ нагруженности и расчет ресурса конструкций при случайном нагружении / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Современные методы проектирования машин. Вып. 2. В 7 томах. – Т. 1. Перспективные направления создания машин. / Под общ. ред. академика П.А. Витязя. – Мн., 2004. – С. 125–135.
10. Почтенный, Е.К. Принципы ускорения испытаний конструкций и деталей машин II Теория и практика машиностроения. – 2004 г – №4.- С. 56-61.
11. Капуста, П.П. Принципы ресурсного проектирования несущих систем и деталей машин / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Вестник машиностроения. – 2005. – №7. – С. 13– 16.
12. Почтенный, Е.К. Прогнозирование эксплуатационного нагружения несущих конструкций автомобилей-самосвалов / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Горная механика. – 2005. – № 3. – С. 47–60.
13. Почтенный, Е.К. Метод ускоренных усталостных стендовых испытаний конструкций при регулярном многоцикловом нагружении / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Вестник БНТУ. – 2006. – №2. – С. 13–16.
14. Почтенный, Е.К. Метод ускоренных усталостных испытаний при регулярном многоцикловом нагружении / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Трибофатика: Сборник докладов V Международного симпозиума по трибофатике ISTF, 2005.; В 3-х томах: 3–7 октября 2005 г. – Иркутск: ИрГУПС, 2005. – Т. 1. – С. 267–281.
15. Почтенный, Е.К. Ресурс несущих конструкций грузовых автомобилей с учетом многочастотности и многорегимности нагружения / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Грузовик. – 2006. – № 1. – С. 31–38.
16. Почтенный, Е.К. Экспериментально-аналитическая методика ускоренных испытаний конструкций при регулярном многоцикловом нагружении и оценка их ресурса при случайном многочастотном и многорегимном нагружении / Е.К. Почтенный, П.П. Капуста // Вестник машиностроения. – 2006. – № 1. – С. 28–40.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТВЕРЖДЕНИЯ ИЗДЕЛИЯ В УСЛОВИЯХ СВЯЗАННОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Беляева Н.А.

Сыктывкарский государственный университет, Сыктывкар, Россия

Широкое распространение полимерных (композитных) материалов в различных областях экономики требует постоянного развития метода математического моделирования исследования процессов формирования изделий различной геометрии из этих материалов. Результаты исследований по данной тематике в условиях несвязанной теории термовязкоупругости проводились автором в предшествующие годы и представлены, к примеру, в работах [1–6].

Основные уравнения. В настоящей работе рассматривается теоретическая часть математической модели формирования плоской пластины в процессе отверждения полимерной среды при наличии неоднородного температурного поля в рамках связанной теории [7]. Диссипативная функция в уравнении баланса тепла состоит из двух компонент: химической, обусловленной процессом полимеризации и механической, обусловленной возникающими в ходе отверждения вязкоупругими напряжениями и деформациями:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } T\right) = \text{div}(\chi \cdot \text{grad } T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + Q_n \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (1)$$

где c – теплоемкость среды, ρ – плотность, χ – теплопроводность, Q_n – тепловой эффект процесса полимеризации. В работе приняты следующие предположения: а) постоянство констант c , χ , Q_n ; б) зависимость целевых функций от одной пространственной координаты x и времени t ; таким образом, $T = T(x, t)$, $\vec{V} = (V(x, t), 0, 0)$, $\alpha = \alpha(x, t)$ – температура, вектор скорости и глубина (степень) полимеризации, соответственно; $\sigma'_{ik} = \sigma'_{ik}(x, t)$ вязкоупругий тензор напряжений, определяемый на основе стандартной линейной модели вязкоупругого тела – последовательное соединение среды Гука и Кельвина [6]. С учетом предположений тензор напряжений имеет одну ненулевую компоненту: $\sigma'_{ik} = \sigma_{xx} \equiv \sigma(x, t)$. Тогда в уравнении (1) выполняются соотношения:

$$\sigma'_{ik} = \eta \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\eta} \sigma, \quad \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \frac{\sigma^2}{\eta}, \quad (2)$$

где $\eta = \eta(T)$ – вязкость среды, зависящая от температуры. С учетом сделанных предположений, выражений для дифференциальных операторов в декартовой системе координат формула (1) примет вид:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{\eta} + Q_n \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (3)$$

В качестве реакции полимеризации (отверждения) примем автокаталитическую реакцию первого порядка:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = k_0 \exp[-U/RT](1-\alpha)(\varepsilon_0 + \alpha), \quad (4)$$

здесь k_0 – константа скорости реакции полимеризации, U – энергия активации процесса полимеризации, R – универсальная газовая постоянная, ε_0 – критерий автокаталитичности процесса полимеризации [1, 5].

Плотность ρ в рассматриваемой постановке задачи не является постоянной величиной – определим ее изменение, следуя закону сохранения масс. Пусть ρ_0 – плотность в точке x в момент времени t , ρ_1 – плотность в точке $x + \Delta x$ в момент $t + \Delta t$, тогда, вследствие сохранения массы элемента, справедливо равенство:

$$\rho_1 \cdot (x + \Delta x) = \rho_0 \cdot x, \quad \rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{x}{x + \Delta x}, \quad \rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta x}{x}}, \quad \rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_x},$$

где $\varepsilon_x = \varepsilon(x, t)$ – относительное изменение длины элемента, то есть деформация элемента. Таким образом, справедлива формула

$$\rho(x, t) = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon(x, t)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon(x, t)}, \quad \rho(x, t) = \rho_0 \cdot \varepsilon_1. \quad (5)$$

Деформация произвольного элемента формируемого материала обусловлена деформацией вследствие изменения температуры $\varepsilon^T = \varepsilon^T(x, t)$ и деформацией вследствие химической реакции, полимеризации (отверждения) материала – химическая усадка $\varepsilon^\alpha = \varepsilon^\alpha(x, t)$. Таким образом, в формуле (5) выполняется равенство:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon^T(x, t) + \varepsilon^\alpha(x, t). \quad (6)$$

Одномерная стандартная модель вязкоупругого тела описывается уравнениями типа Вольтерра – закон наследственной упругости – следующего вида [6]:

$$\sigma(x, t) = E \left[\varepsilon(x, t) - \int_0^t (\lambda - \mu) \varepsilon(x, \tau) \exp(-\lambda(t - \tau)) d\tau \right], \quad (7)$$

где E модуль упругости составляющего элемента Гука, λ , μ – параметры модели, отвечающие за упругие и вязкие свойства модели; будем считать E , λ , μ постоянными величинами.

Соотношения (1)–(7) позволяют записать систему уравнений для анализа процесса формирования плоской полосы в ходе отверждения полимерного материала в неоднородном температурном и конверсионном поле, в условиях связанной теории термоупругости, определения температуры, глубины превращения (отверждения) исходного материала, скорости деформирования, напряженно-деформированного состояния изменяющейся среды:

$$c\rho_0\varepsilon^1 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{\eta} + Q_n \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = k_0 \exp[-U/RT](1 - \alpha)(\varepsilon_0 + \alpha), \quad (9)$$

$$\sigma(x, t) = E \left[\varepsilon(x, t) - \int_0^t (\lambda - \mu) \varepsilon(x, \tau) \exp(-\lambda(t - \tau)) d\tau \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\eta} \sigma; \quad (11)$$

начальные условия:

$$t=0: T(x,0)=T^0, \quad \alpha(x,0)=0, \quad \sigma(x,0)=0; \quad 0 \leq x \leq x_0; \quad (12)$$

граничные условия:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} - h_0(T - T^e) \right|_{x=0} = 0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} + h_1(T - T^e) \right|_{x=x_0} = 0. \quad (14)$$

В условиях (12)–(14) температура T^0 , T^e начальная температура материала и температура окружающей среды, соответственно.

Безразмерная модель. В задаче (8)–(14) введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} r &= \frac{x}{x_0}, \quad 0 \leq r \leq 1; \quad \tau = k_1(T^*)t; \quad \theta = \frac{T - T^*}{\beta T^*}; \quad \xi = \frac{\sigma}{E}; \quad \nu(r, \tau) = \frac{V(x, t)}{x_0 k_1(T^*)}; \\ k_1(T^*) &= k_0 \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right); \quad \beta = \frac{RT^*}{U}; \quad \delta = \frac{\rho_0 c x_0^2 k_1(T^*)}{\chi}; \quad k_n = \frac{\theta_n x_0^2 k_1(T^*)}{\beta T^* \chi}; \\ sig &= \frac{E^2 x_0^2}{\eta_0 \beta \chi T^*}; \quad \bar{h}_0 = x_0 h, \quad \bar{h}_1 = x_0 h_1; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{k_1(T^*)}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{k_1(T^*)}; \\ \omega &= \frac{E}{k_1(T^*) \eta_0}; \quad k^\theta = k^T \beta T^*. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь T^* – некоторая температура материала, определяемая конкретными условиями задачи, к примеру, $T^* = T^0$ – начальная температура материала; $\rho = \rho_0$ – начальная плотность, $\eta = \eta_0$ – начальная вязкость.

Запишем формулу для деформации материала с использованием (15):

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon^T(x, t) + \varepsilon^\alpha(x, t),$$

$$\varepsilon(x, t) = k^T (T - T^0) + k^\alpha \alpha(x, t), \quad \theta = \frac{T - T^*}{\beta T^*}, \quad \theta^0 = \frac{T^0 - T^*}{\beta T^*}, \quad \theta - \theta^0 = \frac{T - T^0}{\beta T^*},$$

$$\varepsilon(r, \tau) = k^T \beta T^* (\theta(r, \tau) - \theta^0) + k^\alpha \alpha(r, \tau), \quad \varepsilon(r, \tau) = k^\theta (\theta(r, \tau) - \theta^0) + k^\alpha \alpha(r, \tau).$$

В безразмерном виде с использованием обозначений (15) система (8) – (14) записывается:

$$\varepsilon^1 \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \nu \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + sig \cdot \exp(\theta) \xi^2 + k_n \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \exp\left[\frac{\theta}{1 + \beta \theta}\right] (1 - \alpha)(\varepsilon_0 + \alpha), \quad (17)$$

$$\xi(r, \tau) = \varepsilon(r, \tau) - \int_0^\tau (\lambda_1 - \mu_1) \varepsilon(r, s) \exp(-\lambda_1(\tau - s)) ds, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} = \omega \cdot \xi \exp \theta; \quad (19)$$

начальные условия:

$$\tau=0: \theta(r,0)=\theta^0, \alpha(r,0)=0, \xi(r,0)=0, 0 \leq r \leq 1; \quad (20)$$

граничные условия:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} - \bar{h}_0 (\theta - \theta^e) \right|_{r=0} = 0, \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} + \bar{h}_1 (\theta - \theta^e) \right|_{r=1} = 0. \quad (22)$$

Система (16)–(22) решается численно с использованием метода прогонки.

Алгоритм численного анализа. Заменяем выражения (16)–(22) разностными соотношениями, учитывая последовательность их использования.

Введем пространственно-временную сетку:

$$(r_i, \tau_j): \quad 0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots < r_n = 1, \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \dots, \\ \Delta r = r_i - r_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \Delta \tau = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

Положим

$$f_{ij} = f(r_i, \tau_j),$$

и преобразуем уравнение (17):

$$\text{ex} = \exp\left(\frac{\theta_{i,j-1}}{1 + \beta \theta_{i,j-1}}\right); \quad \frac{\alpha_{ij} - \alpha_{i,j-1}}{\Delta \tau} = \text{ex} \cdot (1 - \alpha_{i,j}) (\varepsilon_0 + \alpha_{i,j-1}),$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha_{i,j-1} (1 + \Delta \tau \cdot \text{ex}) + \varepsilon_0 \cdot \Delta \tau \cdot \text{ex}}{1 + \Delta \tau \cdot \text{ex} \cdot (\varepsilon_0 + \alpha_{i,j-1})}, \quad j \geq 1, \quad \alpha_{i0} = 0;$$

$$D\alpha = \frac{\alpha_{ij} - \alpha_{i,j-1}}{\Delta \tau}.$$

Запишем разностное соотношение, соответствующее уравнению (16):

$$\varepsilon_{i,j-1}^1 = \frac{1}{1 + k^\theta (\theta_{i,j-1} - \theta_0) + k^\alpha \alpha_{i,j}}, \\ \varepsilon_{i,j-1}^1 \delta \left(\frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta \tau} + v_{i,j-1} \cdot \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{\Delta r} \right) = \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \xi_{i,j-1}^2 \cdot \text{sig} \cdot \exp(\theta_{i,j-1}) + k_n \cdot D\alpha, \\ \theta_{i,j} \left[\varepsilon_{i,j-1}^1 \delta \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{v_{i,j-1}}{\Delta r} \right) + \frac{2}{(\Delta r)^2} \right] = \frac{\theta_{i+1,j}}{(\Delta r)^2} + \theta_{i-1,j} \left(\frac{v_{i,j-1}}{\Delta r} + \frac{1}{(\Delta r)^2} \right) + \varepsilon_{i,j-1}^1 \delta \cdot \frac{1}{\Delta \tau} \theta_{i,j-1} + \\ + \xi_{i,j-1}^2 \cdot \text{sig} \cdot \exp(\theta_{i,j-1}) + k_n \cdot D\alpha;$$

Воспользуемся прогоночной формулой:

$$\theta_{i+1,j} = E_{i+1,j} \theta_{i,j} + F_{i+1,j}, \quad (23)$$

подставив ее в предыдущее разностное соотношение. После несложных преобразований, получим:

$$\theta_{i,j} = \theta_{i-1,j} \frac{(v_{i,j-1}\Delta r + 1)\Delta\tau}{\varepsilon_{i,j-1}^1 \delta \Delta r (\Delta r + v_{i,j-1}\Delta\tau) + \Delta\tau(2 - E_{i+1,j})} + \frac{(\Delta r)^2 \cdot \delta \cdot \varepsilon_{i,j-1}^1 \theta_{i,j-1} + \Delta\tau (\Delta r)^2 (\xi_{i,j-1}^2 \cdot sig \cdot \exp(\theta_{i,j-1}) + k_n \cdot D\alpha) + \Delta\tau F_{i+1,j}}{\varepsilon_{i,j-1}^1 \delta \Delta r (\Delta r + v_{i,j-1}\Delta\tau) + \Delta\tau(2 - E_{i+1,j})}.$$

Из последнего выражения получим рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов:

$$E_{i,j} = \frac{(v_{i,j-1}\Delta r + 1)\Delta\tau}{\varepsilon_{i,j-1}^1 \cdot \delta \cdot \Delta r (\Delta r + v_{i,j-1}\Delta\tau) + \Delta\tau(2 - E_{i+1,j})},$$

$$F_{i,j} = \frac{(\Delta r)^2 \cdot \delta \cdot \varepsilon_{i,j-1}^1 \theta_{i,j-1} + \Delta\tau (\Delta r)^2 (\xi_{i,j-1}^2 \cdot sig \cdot \exp(\theta_{i,j-1}) + k_n \cdot D\alpha) + \Delta\tau F_{i+1,j}}{\varepsilon_{i,j-1}^1 \delta \cdot \Delta r (\Delta r + v_{i,j-1}\Delta\tau) + \Delta\tau(2 - E_{i+1,j})}, \quad (24)$$

$$i \in 1 \dots n-1, \quad j \geq 1.$$

Таким образом, значения температуры в узлах построенной сетки определяются формулой:

$$\theta_{i,j} = E_{i,j} \theta_{i-1,j} + F_{i,j}, \quad i = 1 \dots n-1, \quad j \geq 1. \quad (25)$$

В каждом j -м слое по формулам (24) определяются прогоночные коэффициенты с использованием правого граничного условия (22):

$$r = 1: \quad \frac{\theta_{n,j} - \theta_{n-1,j}}{\Delta r} = -\bar{h}_1 (\theta_{n,j} - \theta^e), \quad \theta_{n,j} = \frac{\theta_{n-1,j}}{1 + \bar{h}_1 \Delta r} + \frac{\bar{h}_1 \Delta r}{1 + \bar{h}_1 \Delta r} \theta^e, \quad j \geq 1.$$

Из последнего соотношения получим выражения для прогоночных коэффициентов на правой границе области:

$$E_{n,j} = \frac{1}{1 + \bar{h}_1 \Delta r}, \quad F_{n,j} = \frac{\bar{h}_1 \Delta r}{1 + \bar{h}_1 \Delta r} \theta^e, \quad j \geq 1.$$

Затем справа налево определяем остальные коэффициенты по формулам (24):

$$(E_{i,j}, F_{i,j}), \quad i = n-1 \dots 1.$$

На левой границе воспользуемся граничным условием:

$$r = 0: \quad \frac{\theta_{1,j} - \theta_{0,j}}{\Delta r} = \bar{h}_0 (\theta_{0,j} - \theta^e),$$

из которого следует, что

$$\theta_{1,j} = \theta_{0,j} + \bar{h}_0 (\theta_{0,j} - \theta^e) \Delta r.$$

С другой стороны, по прогоночной формуле (25)

$$\theta_{1,j} = E_{1,j} \theta_{0,j} + F_{1,j},$$

следовательно, выполняется равенство

$$\theta_{0,j} + \bar{h}_0 (\theta_{0,j} - \theta^e) \Delta r = E_{1,j} \theta_{0,j} + F_{1,j}, \quad \theta_{0,j} (1 + \bar{h}_0 \Delta r - E_{1,j}) = F_{1,j} + \bar{h}_0 \theta^e \Delta r,$$

из которого определяем температуру на границе $r=0$:

$$\theta_{0,j} = \frac{F_{1,j} + \bar{h}_0 \theta^e \Delta r}{1 + \bar{h}_0 \Delta r - E_{1,j}}.$$

Далее по прогоночной формуле (25), слева направо определяем температуру $\theta_{i,j}$ во всех точках сетки рассматриваемого j -слоя.

Преобразуем зависимость между вязкоупругим напряжением и деформацией (18):

$$\begin{aligned} \xi(r, \tau) &= \varepsilon(r, \tau) - \int_0^{\tau-\Delta\tau} (\lambda_1 - \mu_1) \varepsilon(r, s) \exp(-\lambda_1(\tau-s)) ds - \\ &\quad - \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau} (\lambda_1 - \mu_1) \varepsilon(r, s) \exp(-\lambda_1(\tau-s)) ds, \\ \xi(r, \tau) &= \varepsilon(r, \tau) - \int_0^{\tau-\Delta\tau} (\lambda_1 - \mu_1) \varepsilon(r, s) \exp(-\lambda_1(\tau-s)) ds - \\ &\quad - \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) (\varepsilon(r, \tau) + \varepsilon(r, \tau - \Delta\tau) \exp(-\lambda_1 \Delta\tau)). \end{aligned} \quad (26)$$

Выразим интеграл из соотношения

$$\xi(r, \tau - \Delta\tau) = \varepsilon(r, \tau - \Delta\tau) - \int_0^{\tau-\Delta\tau} (\lambda_1 - \mu_1) \varepsilon(r, s) \exp(-\lambda_1(\tau-s)) ds$$

и подставим в правую часть выражения (26), получим рекуррентную формулу для нахождения напряжения:

$$\begin{aligned} \xi(r, \tau) &= \varepsilon(r, \tau) - \varepsilon(r, \tau - \Delta\tau) + \xi(r, \tau - \Delta\tau) - \\ &\quad - \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) (\varepsilon(r, \tau) + \varepsilon(r, \tau - \Delta\tau) \exp(-\lambda_1 \Delta\tau)) \end{aligned}$$

или

$$\xi(r, \tau) = \xi(r, \tau - \Delta\tau) - \varepsilon(r, \tau - \Delta\tau) \left(1 + \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \exp(-\lambda_1 \Delta\tau) \right) + \varepsilon(r, \tau) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \right).$$

Следовательно, значения напряжения в узлах построенной пространственно-временной сетки определяются так:

$$\begin{aligned} \xi(r_i, \tau_j) &= \xi(r_i, \tau_j - \Delta\tau) - \varepsilon(r_i, \tau_j - \Delta\tau) \left(1 + \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \exp(-\lambda_1 \Delta\tau) \right) + \\ &\quad + \varepsilon(r_i, \tau_j) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\xi_{ij} = \xi_{i,j-1} - \varepsilon_{i,j-1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \exp(-\lambda_1 \Delta\tau) \right) + \varepsilon_{ij} \cdot \left(1 - \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \right).$$

При работе с формулой (27) необходимо учитывать начальные условия:

$$\begin{aligned} \xi(r_i, 0) &= \varepsilon(r_i, 0) = 0, \\ \xi_{i0} &= \varepsilon_{i0} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассмотрим алгоритм численного определения скорости деформации, исходя из формулы (19):

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \omega \cdot \exp(\theta) \cdot \xi; \quad \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta r} = \omega \cdot \exp(\theta_{ij}) \cdot \xi_{ij}, \quad (29)$$

$$v_{i,j} = v_{i-1,j} + \Delta r \cdot \omega \cdot \exp(\theta_{ij}) \cdot \xi_{ij}, \quad i = 1 \dots n.$$

Пусть граница $r=0$ закреплена, тогда можно записать:

$$v_{0,j} = 0, \quad v_{1,j} = \Delta r \cdot \omega \cdot \exp(\theta_{1j}) \cdot \xi_{1j}, \quad v_{2,j} = v_{1,j} + \Delta r \cdot \omega \cdot \exp(\theta_{2j}) \cdot \xi_{2j}, \dots,$$

$$v_{n,j} = v_{n-1,j} + \Delta r \cdot \omega \cdot \exp(\theta_{nj}) \cdot \xi_{nj}, \quad j \geq 1$$

$$v_{i,0} = 0, \quad i = 0 \dots n.$$

Следовательно, в любой j -й момент времени скорость может быть определена во всех точках пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляева, Н.А. Напряженное состояние фронтально формируемого сферического изделия / Н.А. Беляева, Е.С. Довжко // *Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* – 2011. – Вып. 2. – С. 123–134.
2. Довжко, Е.С. Формирование сферического изделия с учетом ненулевой критической глубины конверсии. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, Реестр программ для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2011617495, 27 сентября 2011 г.
3. Беляева, Н.А. Деформирование вязкоупругих структурированных систем: монография / Н.А. Беляева // *Lap Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany.* – 2011. – 200 с.
4. Отчет о научно-исследовательской работе в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы по теме: «НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МЕХАНИКИ», шифр «2010-1.1-112-024-024», № 02.740.11.0618 (итоговый, этап № 6). Наименование этапа: «Отчетный». – М.: ВНИИЦ, 2012. – Инв. № 02301297038. – 46 с.
5. Беляева, Н.А. Объемное формирование цилиндрического изделия с учетом давления / Н.А. Беляева, Е.С. Довжко // *Известия Коми научного Центра УрО РАН.* – 2014. – С. 5–11.
6. Беляева, Н.А. Математическое моделирование: Учебное пособие. Н.А. Беляева. – Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета, 2014. – 116 с.
7. Беляева, Н.А. Неизотермическая модель деформирования вязкоупругого материала. Математика в приложениях. Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова. 4–10 августа 2019, Новосибирск, Россия. Тезисы докладов. Новосибирск, 2019 г. – Издательско-полиграфический центр НГУ. – С. 96.

ФОРМИРОВАНИЕ ШАГОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Кузнецов В.В., Марко А.Ф.

УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск

Введение. При цифровом управлении мехатронными системами перемещений на дискретных приводах прямого действия [1–3] в ряде случаев требуется вычислять текущее значение угла α между вращающимся радиусом и осями прямоугольной системы координат или значения некоторых элементарных функций, таких как $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\ln z$ и др. Так например, значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ могут быть использованы для формирования эквидистантных траекторий.

Текущие значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно получить при отработке окружности радиуса R с использованием знаков оценочной функции [4, 5]. При этом предусматривается опрелделение дискретных значений угла α между подвижным радиусом R и осью Ox . На рис. 1 приведен пример отработки отрезка окружности в первом квадранте при движении исполнительного органа против часовой стрелки. Значение угла α , измеряемое между подвижным радиусом и осью Ox , изменяется от 0 до 90° .

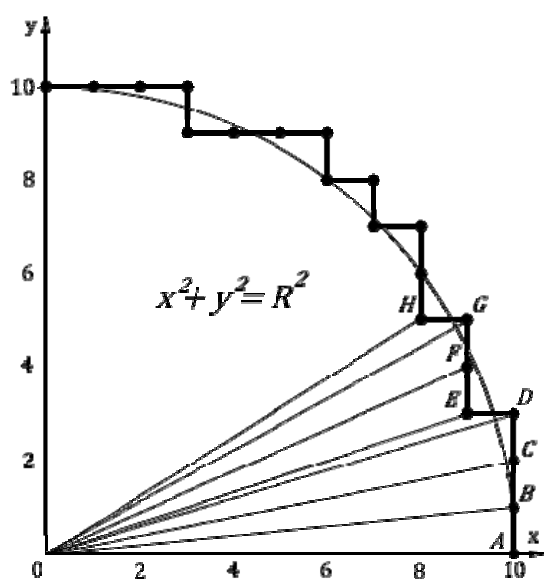


Рис. 1. Вспомогательная шаговая траектория для формирования функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

Алгоритмизация формирования траектории. Для отработки шаговых траекторий или вычисления последовательных значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при изменении угла α от 0 до 360° необходимо построить круговую шаговую траекторию во всех четырех квадрантах.

Для формирования шаговой траектории кривой вида $x^2 + y^2 = R^2$ выполним подстановку в это выражение значения переменных $x = x_i + 0,5 + R$, $y = y_i + 0,5$ и получим числовой аналог на основе знака оценочной функции для формирования круговых траекторий:

$$\sum_{i=1}^n (i-R) + \sum_{j=1}^m (j+0,5R) = F_{ij}^3. \quad (1)$$

Выбор направлений элементарных шагов приращений при обработке отрезка окружности и движении исполнительного органа против часовой стрелки осуществляется следующим образом. Если оценочная функция $F_{ij} \geq 0$, то выполняется элементарный шаг $-\Delta x$, затем вычисляется новое значение оценочной функции F_{i+1j} путем увеличения в выражении (1) значения n на единицу; если оценочная функция $F_{ij} < 0$, то выполняется элементарный шаг $+\Delta y$ и затем вычисляется новое значение оценочной функции F_{ij+1} путем увеличения в выражении 6.18 значения m на единицу. Последовательные значения y_i/R и x_i/R , образуемые в результате процесса обработки круговой траектории, соответствуют значениям элементарных функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Для определения последовательных значений угла α этих функций можно воспользоваться тем, что они пропорциональны значениям площади, заключенной между подвижным радиусом и осью Ox . Например, перемещению конца подвижного радиуса из точки A в точку B (рис. 1) будет соответствовать величина приращения площади $0,5R\Delta y$, а из точки A в точку C – величина приращения площади $R\Delta y$ и так далее.

Если элементарную площадь треугольника AOB выбрать за базовую величину отсчета, то в процессе обработки отрезка окружности, начиная с точки A , можно найти суммарную площадь, заключенную между осью Ox подвижным радиусом и отрезком формируемой траектории, а следовательно, и величину угла между осью Ox и подвижным радиусом. Суммируя приращения площадей элементарных треугольников $S \Delta AOB$, $S \Delta OBC$ и т.д., получаем общую площадь, пропорциональную углу α . Из рис. 1 следует, что приращение площади, покрываемое радиусом при его повороте и выполнении элементарных шагов Δy и Δx , пропорционально соответственно величинам x_i и y_i . В общем случае получим дискретные значения угла α :

$$\alpha_{ij} = \text{arctg} \frac{y_j}{x_i} = 0,5C_1 \left[\sum_{i=1}^n (R-i_j) + \sum_{i=1}^m j_i \right], \quad (2)$$

где C_1 – масштабный коэффициент, определяющий единицу измерения угла; $i_j = \Delta y_i$, $j_i = \Delta x_j$, α_{ij} – угол между радиусом, соединяющим узловую точку x_i , y_i круговой траектории с началом системы координат и осью Ox .

Величину угла с помощью выражения (1) можно найти следующим образом: если $F_{ij}^3 < 0$ то в уравнении (2) на единицу увеличивается значение m , если $F_{ij}^3 \geq 0$, то на единицу увеличивается значение n .

Масштабный коэффициент перерасчета C_1 при отсчете угла в градусах, можно получить из выражения площади сектора, образованного неподвижным радиусом AO и отрезком круговой траектории:

$$\alpha = C_1 S, \text{ где } C_1 = \frac{360}{\pi R^2}, \quad S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}.$$

Значения функций синуса и косинуса можно получить в виде:

$$\sin \alpha = \sum_{i=1}^n j_i; \quad (3)$$

$$\cos \alpha = j \sum_{i=1}^m i_j, \quad (4)$$

$$\text{где } j_i = \begin{cases} 1/R, & \text{если } F_{ij}^3 < 0, \\ 0, & \text{если } F_{ij}^3 \geq 0; \end{cases} \quad i_j = \begin{cases} 1/R, & \text{если } F_{ij}^3 \geq 0, \\ 0, & \text{если } F_{ij}^3 < 0. \end{cases}$$

Расчета аргумента при этом выполняется согласно выражению:

$$\operatorname{arctg} \frac{y_j}{x_i} - C_1 \sum_{k=1}^{n+m} v_k = \varepsilon_k, \quad (5)$$

где ε_k – невязка аргумента, $v_k = \begin{cases} +\Delta\alpha, \text{ если } \varepsilon_{k-1} \geq 0, \\ 0, \text{ если } \varepsilon_{k-1} < 0. \end{cases}$

Отработка элементарных шагов при формировании синусной и косинусной траекторий осуществляется следующим образом: если значение оценочной функции $F_{ij}^3 \geq 0$, то для формирования траектории $\cos\alpha$ выполняется элементарный шаг $-\Delta y$, если $F_{ij}^3 < 0$, то при формировании траектории $\sin\alpha$ выполняется элементарный шаг $+\Delta y$; если значение параметра $\varepsilon_k \geq 0$, то при формировании любой из траекторий $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ – элементарный шаг $+\Delta\alpha$. На рис. 2 приведен пример сформированных траекторий $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ в соответствии с выражениями (3)–(5), причем значения оценочной функции получены, по выражению (3), для окружности радиуса $R = 10$, а значения ε_k вычислялось по формуле (5).

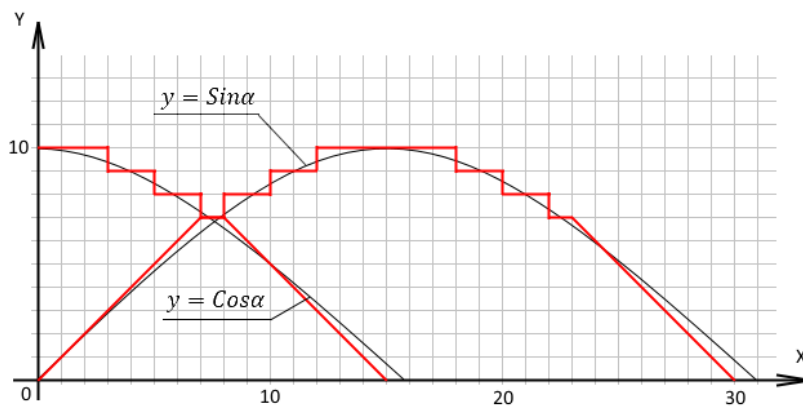


Рис. 2. Трансцендентные шаговые траектории $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ сформированные в результате отработки круговой траектории

Общим свойством рассмотренного выше способа формирования шаговых траекторий $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ является использование знаков оценочных функций, вычисляемых в процессе формирования круговых или гиперболических траекторий. Формирование вторичных шаговых траекторий базируется на применении знаков оценочной функции, получаемых при обработке первичных шаговых траекторий. Определение независимой переменной при этом осуществляется путем отсчета площади, заключенной между осью Ox и отрезком первичной шаговой траектории. Такой подход позволяет расширить функциональные возможности метода за счет увеличения набора генерируемых функциональных зависимостей для трансцендентных траекторий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / С.Е. Карпович [и др.]; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. Жарский, В.В. Привод прямого действия / В.В. Жарский // Ремонт. Инновации. Технологии. Модернизация : специализированный журнал. – 2009. – № 7(45). – С. 26.
3. Система управления шаговым приводом для оборудования производства электронной техники / В.В. Заведеев [и др.] // Новые технологии изготовления мно-

гокристальных модулей : материалы докл. Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 30 сент. – 4 окт. 2002 г. – Минск : БГУИР, 2002. – С. 161–162.

4. Бегун, Д.Г. Формирование шаговых траекторий с использованием экстраполированных значений оценочной функции / Д.Г. Бегун // Материалы Юбилейной науч.-практ. конф., посвященной 85-летию Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, Гомель, Респ. Беларусь, 17 июня 2015 г. : в 4 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель, 2015. – Ч. 4. – С. 12–16.

5. Кузнецов, В.В. Формирование шаговых траекторий при контурном управлении систем многокоординатных перемещений / В.В. Кузнецов // *Mathematical methods in the technics and technologies - MMTT-31: works of the 30d International scienc. conf., Minsk, 8–12 Oktober. 2018 / BSUIR. - Minsk, 2018. – С. 61–64.*

**ВОПРОСЫ ИНТЕНСИФИКАЦИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИН «ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА»,
«ДЕТАЛИ МАШИН», «ОСНОВЫ РАСЧЕТА И КОНСТРУИРОВАНИЯ»**

Гончарова И.А., Кончина Л.В., Куликова М.Г.

Филиал ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» в г. Смоленске

Высшее образование в современном обществе не может ставить своей целью только чистую передачу некоторой информации. Развитая рыночная экономика требует от инженера ориентации на вопросы маркетинга и сбыта, учета социально-экономических факторов, психологии потребителя. В связи с этим важна рациональная организация преподавания точных наук, существенно опирающаяся на дидактические и инструментальные возможности профессиональной подготовки.

Используя принцип межпредметных связей и учитывая значение метапредметного подхода в высшем профессиональном образовании, мы решили описать педагогический эксперимент, затрагивающий дисциплины «Инженерная графика», «Детали машин», «Основы расчета и конструирования оборудования». Данный эксперимент на протяжении нескольких лет проводится сотрудниками кафедры «Технологические машины и оборудование» филиала ФГБОУ «НИУ МЭИ» в г. Смоленске. Структура эксперимента представлена на рис. 1.

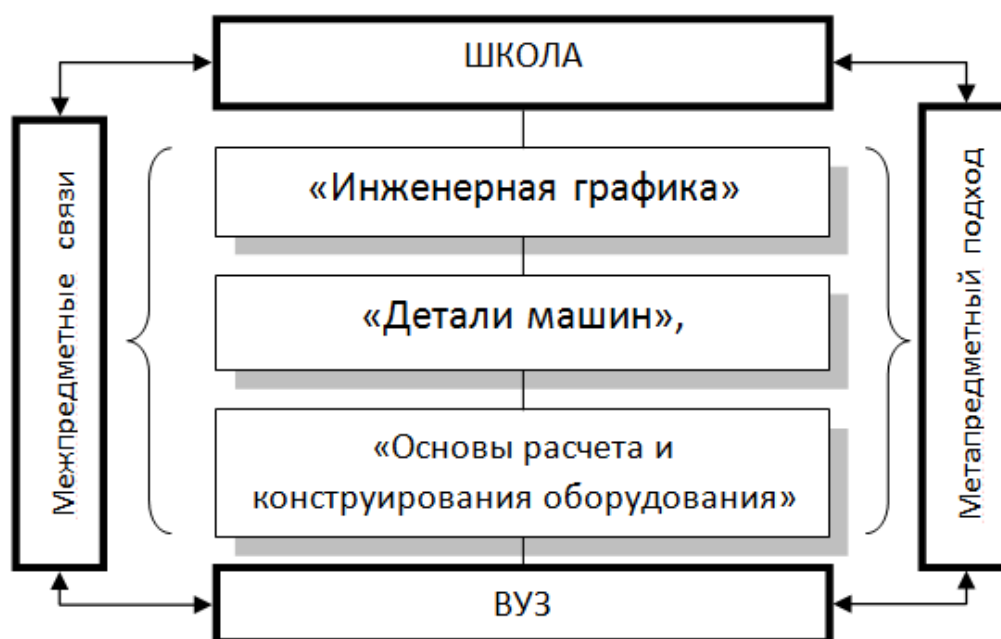


Рис. 1. Структура эксперимента

В эксперименте принимают участие не только студенты, но и учащиеся средних школ г. Смоленска. Материал на эту тему публиковался ранее.

Современная дидактическая наука рассматривает и выделяет некоторые компоненты профессиональной подготовки: целевой, содержательный, стимулирующее-

мотивационный, операционно-деятельностный, контрольно-коррекционный, оценочно-результативный.

Модель подготовки инженера с учетом данных компонентов отражена на рис. 2.

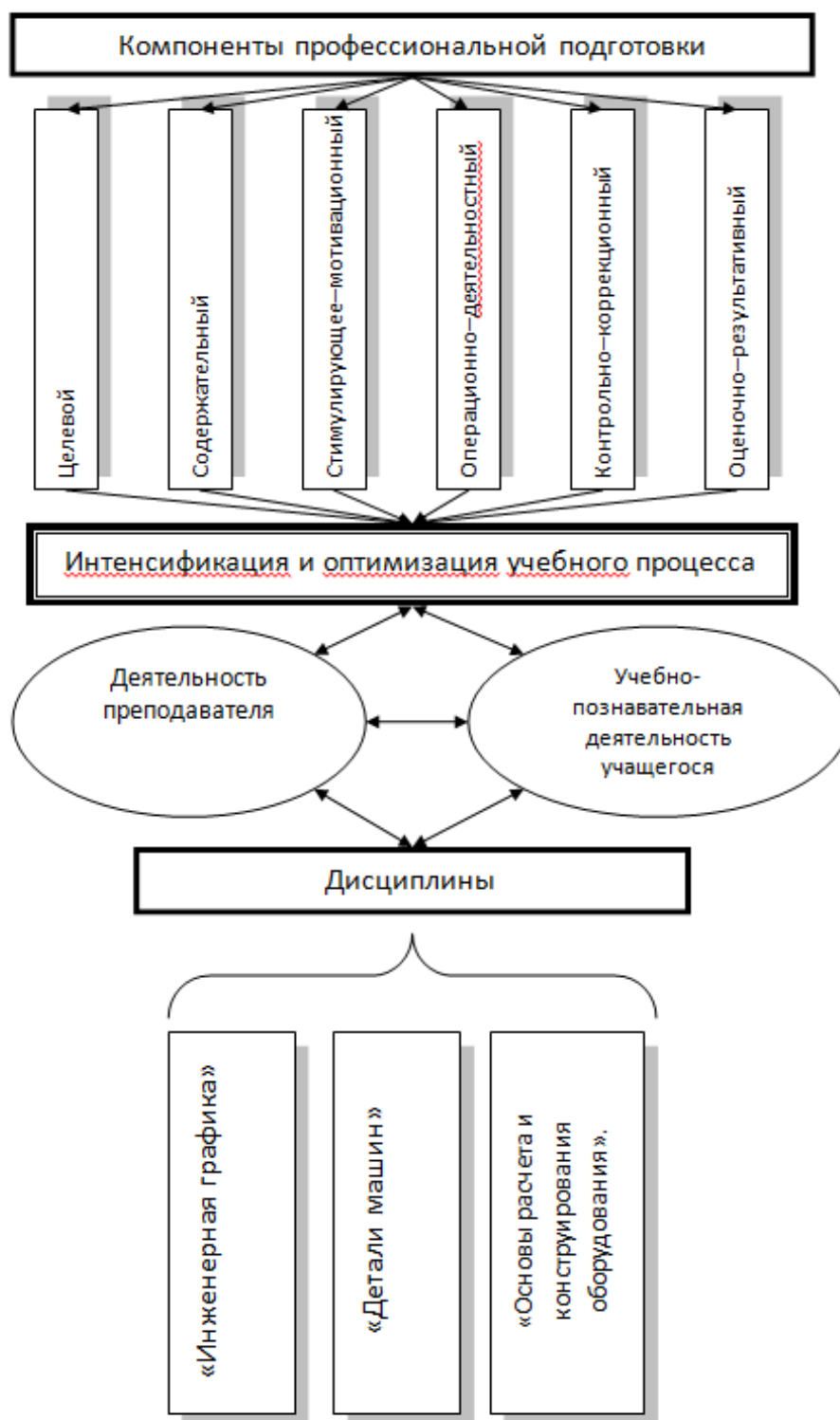


Рис. 2. Теоретическая модель подготовки инженера

Иными словами, обучающая деятельность преподавателя и учебно-познавательная деятельность учащегося имеют общую процессуальную структуру: цель – мотив – содержание – средства – результат – контроль (целемотивационный, содержательный, процессуальный компоненты).

В процессе перехода обучения на новые стандарты перед преподавательским составом ВУЗа встал вопрос интенсификации и оптимизации учебного процесса, что отражено на рис. 2.

Данную проблему помогают решить различные САПР. Эффективность применения САПР для учебного процесса обусловлена возможностями систем: быстрота и надежность обработки информации, компьютерная визуализация, огромные графические возможности, хранение больших объемов информации и легкий доступ к ней. Данные возможности САПР просто необходимы при изучении дисциплин «Инженерная графика», «Детали машин», «Основы расчета и конструирования оборудования».

Экономия времени за счет сокращения вычислительных операций позволяет изучить больший объем информации, расширять круг задач, более тщательно закреплять изученное. Таким образом решается вопрос об интенсификации процесса усвоения знаний. Но педагогическая наука выдвигает два принципа построения учебного процесса – необходимость интенсификации, а так же необходимость оптимизации обучения. Вопрос оптимизации более подробно будет изложен в следующих публикациях.

Интенсификация обучения определяется как повышение производительности учебного труда учителя и ученика в каждую единицу времени.

В качестве основных факторов интенсификации обучения рассматриваются:

- повышение целенаправленности обучения;
- усиление мотивации учения;
- повышение информативной емкости содержания образования;
- применение активных методов и форм обучения;
- ускорение темпа учебных действий;
- развитие навыков учебного труда;
- использование различных САПР.

Мы перечислили «оптимальное сочетание» факторов, но их выбор зависит от возраста учащихся, специфики предмета и возможностей преподавателя.

Говоря об интенсификации процесса усвоения знаний при изучении «Инженерной графики», «Деталей машин», «Основ расчета и конструирования оборудования», мы имеем в виду следующее. Если решение задачи состоит из нескольких этапов, причем часть из них являются второстепенными по отношению к последующим, достаточно хорошо отработаны на предыдущих занятиях, но требуют значительных временных затрат, т.е. становятся сдерживающим фактором, то решение этих этапов можно передать САПР.

Другое направление использования компьютерных систем заключается в возможности значительного расширения круга задач, где с помощью компьютерных систем можно не только значительно повысить наглядность, но и расширить изучаемые темы. Данное условие просто необходимо при формировании навыков и умений, согласно требований последних образовательных стандартов. С применением САПР легко решаются задания уже знакомые, но с измененными данными и с применением других условий. Например: проектирование рам, приводов, различных сборочных единиц и т. д.

Результаты контрольного эксперимента нашего исследования должны были доказать, что применение обучающих систем способно интенсифицировать и существенно улучшить качество процесса обучения. Контрольный эксперимент еще не завершен, но уже на данном этапе можно сделать некоторые выводы. САПР позволяет накапливать, ускоренно совершенствовать и тиражировать прогрессивный дидактический опыт, где обучающая система для учащегося служит проводником в изучении незнакомого материала, для преподавателя – квалифицированным ассистентом, помогающим умело организовать работу обучаемого.

В результате проведенной работы был сделан вывод о правильности нашей гипотезы о положительном влиянии использования компьютерных систем в учебном процессе инженерного вуза, способствующих развитию «технического мышления», самостоятельности в составлении и решении практических задач, творческому подходу к их решению. Процесс интенсификации обучения невозможен без применения САПР, 2D и 3D редакторов, использования 3D принтеров и других современных средств обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева, Т.С. ФГОС нового поколения о требованиях к результатам обучения/ Т.С. Васильева // Теория и практика образования в современном мире: материалы 4 Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, январь 2014 г.). – СПб.: Заневская площадь, 2014. – С. 74–76. – URL <https://moluch.ru/conf/ped/archive/99/4793>.

2. Гончарова, И.А. Подготовка будущих инженеров к использованию инструментальных программных средств при решении и моделировании научных и учебных задач/ И.А. Гончарова // Научная библиотека диссертаций и авторефератов disserCat. – <http://www.dissercat.com/content/podgotovka-budushchikh-inzhenerov-k-ispolzovaniyu-instrumentalnykh-programmnykh-sredstv-pri-#ixzz51ixrG87u>.

3. Гончарова, И.А. Метапредмет и решение учебных, научных, прикладных задач в подготовке выпускников технических вузов / И.А. Гончарова, М.М. Гончарова // *Colloquium-journal*. – 2017. – № 11–3 (11). – С. 5–6.

АНАЛИЗ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОПОРЫ ПРИ ОБРАБОТКЕ ОТВЕРСТИЙ ПРОТЯЖКАМИ

Г.И. Беляева, Н.Г. Алехнович, К.М. Паращенко

Белорусский национальный технический университет, Минск

Протягивание – одна из эффективных операций обработки материалов резанием, выполняемая режущим инструментом-протяжкой, обеспечивающая получение изделий высокой точности (до 6-го качества) и шероховатость обработанной поверхности до $Ra = 0,32$ мкм. Протяжка – многозубый инструмент с рядом последовательно выступающих друг над другом зубьев в направлении, перпендикулярном скорости главного движения резания. Протягивание применяется для обработки внутренних и наружных поверхностей металлических (редко неметаллических) материалов с высокой точностью:

- обработки отверстий нарезного огнестрельного оружия (стволы пистолетов, пулеметов, пушек);
- обработки посадочных поверхностей лопаток турбин авиадвигателей;
- нарезания шлицев и шпоночных канавок;
- обработки сложных наружных профилей;
- калибровки цилиндрических, многогранных, фигурных отверстий.

По сравнению с другими способами механической обработки протягивание имеет ряд преимуществ:

1) одновременное участие в работе нескольких зубьев обеспечивает большую величину минутной подачи в процессе протягивания. При этом, несмотря на низкую скорость рабочего движения $V = 2...12$ м/мин (по чугуна твердосплавные протяжки имеют $V = 40...50$ м/мин), относительная скорость снятия припуска получается выше, чем у других инструментов, что определяет высокую производительность процесса протягивания;

2) точность обработки не ниже 7-го качества;

3) высокое качество обрабатываемых поверхностей – $Ra = 0,92$ мкм и в отдельных случаях – $Ra = 0,16$ мкм по ГОСТ 2789–73;

4) значительная стойкость протяжек;

5) уменьшение количества бракованных деталей;

6) возможность использования рабочих низкой квалификации;

7) сокращение расходов на эксплуатацию инструмента.

Технологический процесс обработки деталей протягиванием сокращает время обработки и обеспечивает высокое качество деталей. Однако этот процесс имеет и недостаток, заключающийся в том, что при всегда имеющей место неперпендикулярности торца к оси подготовленной под протягивание отверстия детали на ее обработанной поверхности остаются «черновины» или происходит поломка протяжки – сравнительно дорогостоящего инструмента. С целью исключения поломок протяжек при обработке отверстий деталей с такой погрешностью на протяжных станках используют самоустанавливающуюся сферическую опору. Схема протягивания отверстия с применением такой опоры показана на рис. 1, где 1 – протяжка, 2 – обрабатываемая деталь, 3 – опора, 4 – фланец.

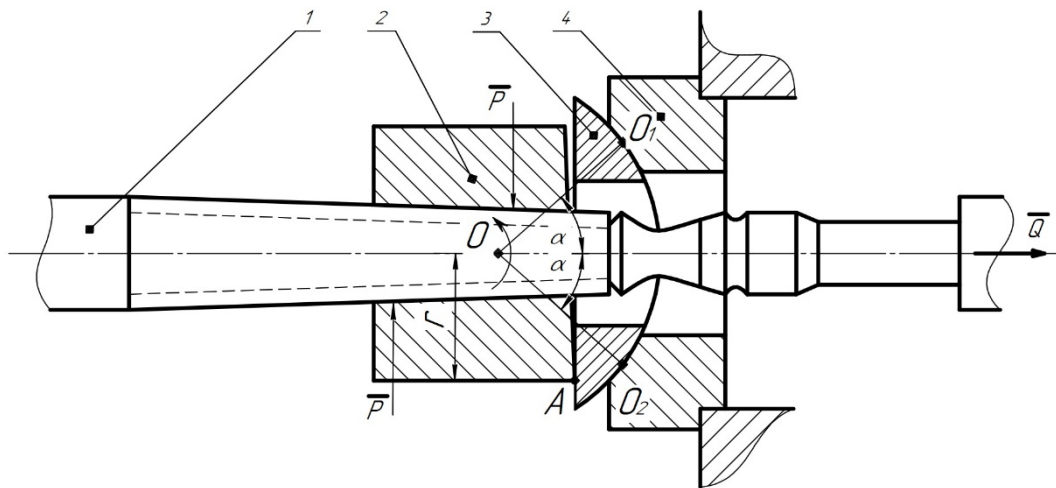


Рис.'1. Схема протягивания отверстия с применением сферической опоры

На рис. 2 показана схема детали с указанной погрешностью и ее положение относительно торца опорного фланца протяжного станка.

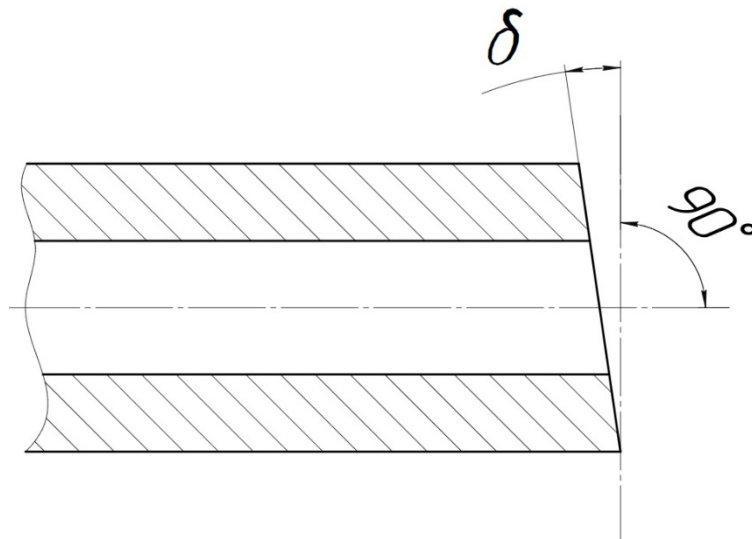


Рис.'2. Схема расположения опорного торца обрабатываемой детали

При жестком закреплении фланца 4 и отсутствии шаровой опоры под действием приложенного усилия \vec{Q} к протяжке 1 и детали 2 из-за одностороннего контакта с ее торцевой поверхностью опоры деталь будет поворачиваться вокруг оси, проходящей через точку O . Вместе с деталью под действием момента от пары сил (\vec{P}, \vec{P}) будет поворачиваться и протяжка, что вызовет изгиб ее тела в направлении, перпендикулярном оси. При значительном перекосе торца детали в результате действия изгибающего момента может произойти поломка протяжки. С целью обеспечения равномерного съема припуска в отверстии при протягивании, а также устранения изгиба оси протяжки применяются сферические опоры к протяжным станкам. Принципа работы такой опоры показан на рис. 3, на котором опора постоянно прижата к фланцу с некоторой силой. В начальный момент резания при воздействии детали 2 на торец опоры 3 в точке A опора будет поворачиваться, преодолевая силы трения, вокруг точки O в направлении, указанном круговой стрелкой до тех пор, пока торцы опоры и детали не соприкоснутся всей своей плоскостью. После самоустановки опоры 3 по торцу обрабатываемой детали

ось ее совпадает с осью протяжки, и при этом будет протекать нормальный процесс протягивания.

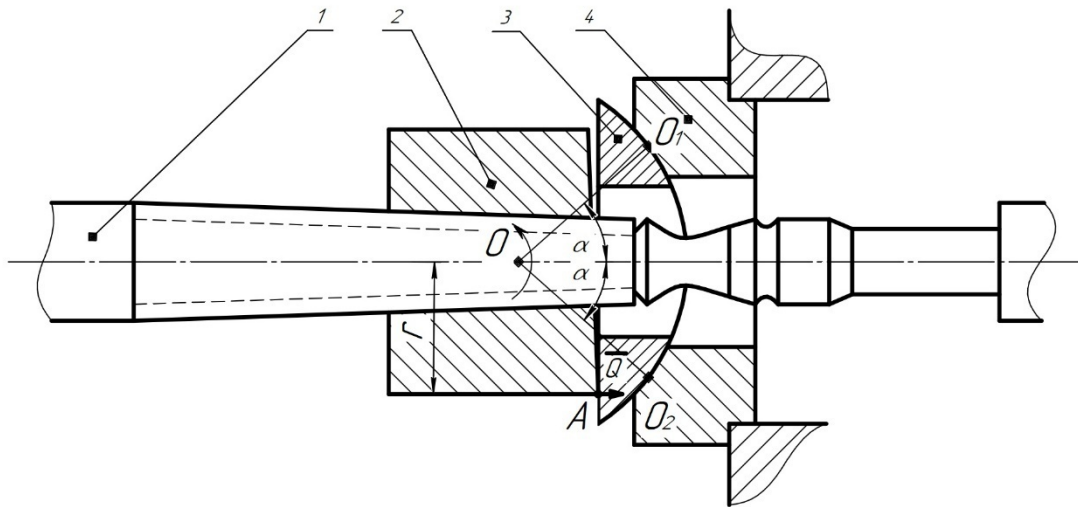


Рис. 3. 'Схема принципа работы сферической опоры

Однако при применении самоустанавливающихся сферических опор все же имеют место поломки протяжек, так как под действием сил трения опора не самоустанавливается по торцу детали. Задача нашей работы состояла в том, чтобы установить, при каком радиусе r опорного торца обрабатываемой детали опора будет самоустанавливаться под действием сил, приложенных к ней и с учетом радиуса R сферы шаровой опоры. При расчетах были сделаны следующие допущения: пространственную систему сил, действующую на опору, свели к плоской системе сил; распределенную нагрузку заменили сосредоточенной, приложенной в точках O_1 и O_2 , положение которых на рисунке задано углом α .

Определение зависимости между параметрами опоры и детали производилось по схеме, изображенной на рис. 4.

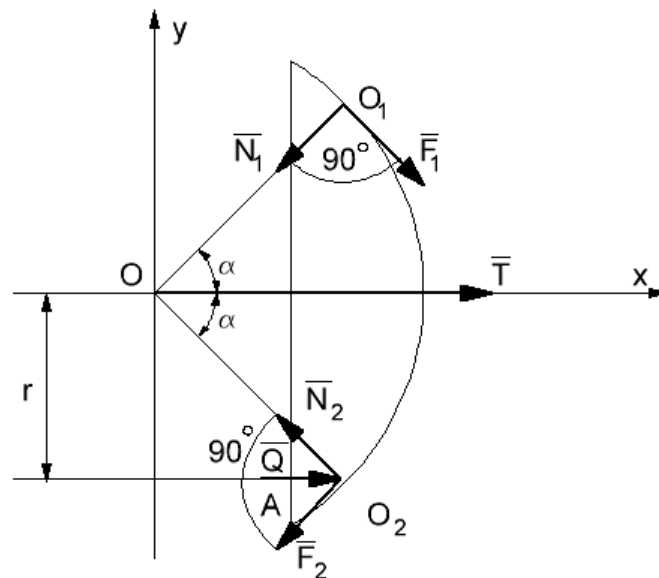


Рис. 4. 'Определение зависимости между параметрами опоры и детали

где \vec{Q} – сила резания;

\vec{N}_1, \vec{N}_2 – силы нормального давления;

\vec{F}_1, \vec{F}_2 – силы трения в точках O_1 и O_2 .

Находящаяся в произвольном положении опора будет самоустанавливаться под действием сил, приложенных к ней, если будет выполняться условие, полученное из уравнения моментов сил относительно точки O ;

$$\begin{aligned}\sum M_0(\vec{F}_k) &= 0 \\ Q_r &\geq F_1 R + F_2 R; \\ Q_r &\geq Rf(N_1 + N_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Для определения \vec{N}_1 и \vec{N}_2 составим уравнение проекций всех сил на оси координат X и Y .

Проекция на ось OX :

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} = 0; \quad Q + F_1 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha + T &= 0; \\ Q + N_1(f \sin \alpha - \cos \alpha) - N_2(f \sin \alpha + \cos \alpha) + T &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

С целью сокращения записи введем обозначения для величин:

$$\begin{aligned}(f \sin \alpha - \cos \alpha) &= A; \\ (f \sin \alpha + \cos \alpha) &= B.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (2) с учетом принятых обозначений примет вид

$$Q + N_1 A - N_2 B + T = 0.\tag{3}$$

Спроецируем все силы, приложенные к опоре, на ось OY и приравняем к нулю:

$$\begin{aligned}\sum F_{ky} = 0; \quad -N_1 \sin \alpha - F_1 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha &= 0; \\ N_1(\sin \alpha + f \cos \alpha) + N_2(f \cos \alpha - \sin \alpha) &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}(\sin \alpha + f \cos \alpha) &= C \\ (f \cos \alpha - \sin \alpha) &= D\end{aligned}$$

Уравнение (4) получим в виде

$$N_1 C + N_2 D = 0.\tag{5}$$

Из уравнения (5) выразим N_1 через N_2 :

$$N_1 = -N_2 \frac{D}{C}.$$

Далее для определения N_1 подставим значение N_2 в уравнение (3):

$$Q - N_2 \frac{DA}{C} - N_2 B + T = 0.\tag{6}$$

Из одного уравнения, с учетом принятых обозначений и небольших преобразований, получим

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \frac{(Q+T)C}{DA+BC} = \frac{(Q+T)(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{(f \cos \alpha - \sin \alpha)(f \sin \alpha - \cos \alpha) + (f \sin \alpha + \cos \alpha)(f \sin \alpha + \cos \alpha)} = \\
 &= \frac{(Q+T)(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{f^2 \sin \alpha \cos \alpha - f \sin^2 \alpha - f \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + f \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + f^2 \sin \alpha \cos \alpha + f \cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{(Q+T)(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2f^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}; \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$N_1 = -N_2 \frac{D}{C} = -\frac{(Q+T)C}{(DA+BC)} \frac{D}{C} = -\frac{(Q+T)(f \cos \alpha - \sin \alpha)}{2f^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha};$$

$$N_1 = \frac{(Q+T)(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2f^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}. \tag{8}$$

Полученные значения сил N_1 и N_2 подставим в неравенство (1) и несколько преобразуя его, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 r &\geq \frac{R}{Q} f(N_1 + N_2) = \\
 &= \frac{R}{Q} f \left[\frac{(Q+T)(\sin \alpha - f \cos \alpha) + (Q+T)(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2f^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} \right] = \\
 &= \frac{Rf(Q+T)}{Q} \left[\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha + \sin \alpha + f \cos \alpha}{2f^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} \right] = \\
 &= \frac{(Q+T)Rf}{Q} \frac{2 \sin \alpha}{2f^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(Q+T)Rf}{Q(1+f^2) \cos \alpha};
 \end{aligned}$$

$$r \geq \frac{(Q+T)fR}{Q(1+f^2) \cos \alpha}. \tag{9}$$

В результате расчетов получена зависимость между расстоянием r точки приложения силы к опоре со стороны обрабатываемой детали и параметрами сферической опоры. Из этой зависимости следует, что вероятность самоустановок опоры увеличивается с уменьшением радиуса сферы R , коэффициента трения f и угла α . Самоустановка опоры от силы резания Q почти не зависит, так как усилие T предварительного поджима опоры к фланцу во много раз меньше силы Q и отношение $(Q+T)/Q$ близко к единице. По уравнению (9) можно производить расчеты при конструировании сферических опор, а также проверку при их применении для конкретных обрабатываемых деталей с целью исключения поломок дорогостоящего инструмента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидов, В. В. «Расчет и проектирование протяжек» Часть 1. Учебное пособие / В.В. Демидов, Г.И. Киреев, М.Ю. Смирнов. – Ульяновск: УлГТУ, 2005 г. – 54 с.
2. Губанов, В.С. «Протяжки для обработки шлицевых отверстий с эвольвентным профилем как энергосберегающий инструмент» Монография. / В.С. Губанов, Ю.Н. Селезнев. – Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 325 с.
3. Миткевич, С. И. «Задания по курсу Теоретическая механика» для студентов машиностроительных специальностей. / С.И. Миткевич, В.П. Яцерицын // – Минск .: Ротапринт БПИ, 1981. – 23 с.

О ДВУХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А., Гончарова С.В.

Белорусский национальный технический университет

Запишем дифференциальные уравнения равновесия упругой изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации без учета массовых сил и сил инерции в виде:

$$\begin{cases} \partial_1 \sigma_x + \partial_2 \tau_{xy} = 0 \\ \partial_1 \tau_{yx} + \partial_2 \sigma_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\partial_1 = \partial/\partial x$ – частная производная по переменной x , $\partial_2 = \partial/\partial y$ – частная производная по переменной y . Напряжения выразим через функцию напряжений по известным [1] формулам Эри:

$$\sigma_x = \partial_2^2 \varphi \quad \sigma_y = \partial_1^2 \varphi \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial_1 \partial_2 \varphi \quad (2)$$

Легко убедиться что уравнения (1) тождественно удовлетворяются. А сама функция φ должна удовлетворять бигармоническому уравнению вида:

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4) \varphi = 0 \quad (3)$$

Для решения поставленной задачи будем использовать операторно – символический метод, изложенный в [3]. Тогда представим:

$$\varphi = [A(\partial_1) \sin(y\partial_1) + B(\partial_1) y \cos(y\partial_1) + C(\partial_1) \cos(y\partial_1) + D(\partial_1) y \sin(y\partial_1)] * f(x) \quad (4)$$

Здесь $A(\partial_1), B(\partial_1), C(\partial_1), D(\partial_1)$ – операторные функциональные коэффициенты, а $f(x)$ – произвольная функция. В дальнейшем, для упрощения записей, зависимость операторных коэффициентов от аргумента ∂_1 показывать не будем, а будем только подразумевать. Чтобы убедиться в справедливости высказывания, что φ является бигармонической функцией, возьмем любое ее слагаемое, например, второе и подставим его в уравнение (3). Так как

$$\begin{aligned} \partial_2^2 [y \cos(y\partial_1)] &= \partial_2^2 \partial_1 [\sin(y\partial_1)] = \partial_1 \partial_2^2 [\sin(y\partial_1)] = -\partial_1 [\partial_1^2 \sin(y\partial_1)] = \\ &= -2\partial_1 \sin(y\partial_1) - \partial_1^2 y \cos(y\partial_1) \\ \partial_2^4 [y \cos(y\partial_1)] &= \partial_2^4 \partial_1 [\sin(y\partial_1)] = \partial_1 \partial_2^4 [\sin(y\partial_1)] = \partial_1 [\partial_1^4 \sin(y\partial_1)] = \\ &= 4\partial_1^3 \sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y \cos(y\partial_1) \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4) [y \cos(y\partial_1)] &= \partial_1^4 y \cos(y\partial_1) + 2\partial_1^2 (-2\partial_1 \sin(y\partial_1) - \\ &- \partial_1^2 y \cos(y\partial_1)) + 4\partial_1^3 \sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y \cos(y\partial_1) = 0 \end{aligned}$$

Аналогично проверяются и остальные слагаемые выражения (4) т.е. функция φ , выражаемая соотношением (4) является бигармонической.

Построим, основанное на ней, так называемое однородное решение плоской задачи теории упругости. Это означает, что на границах $y = \pm b$, будем полагать $\tau_{xy} = 0$ и $\sigma_y = 0$.

Предварительно находим:

$$\partial_2 \varphi = [A\partial_1 \cos(y\partial_1) + B \cos(y\partial_1) - By\partial_1 \sin(y\partial_1) - C\partial_1 \sin(y\partial_1) + D \sin(y\partial_1) + Dy\partial_1 \cos(y\partial_1)] * f(x) \quad (5)$$

Здесь, как и в (4), операторные коэффициенты A, B, C, D функционально зависят от аргумента ∂_1 , но ради упрощения записей эта зависимость не показана.

На основании (2), равенство нулю нормальных и касательных напряжений в зависимости только от y , будет равносильна системе операторных уравнений $\varphi(\pm b) = 0$ и $\partial_2 \varphi(\pm b) = 0$, которая в нашем случае принимает вид:

$$\begin{cases} A \sin(b\partial_1) + Bb \cos(b\partial_1) + C \cos(b\partial_1) + Db \sin(b\partial_1) = 0 \\ -A \sin(b\partial_1) - Bb \cos(b\partial_1) + C \cos(b\partial_1) + Db \sin(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1 \cos(b\partial_1) + B \cos(b\partial_1) - Bb\partial_1 \sin(b\partial_1) - C\partial_1 \sin(b\partial_1) + \\ + D \sin(b\partial_1) + Db \cos(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1 \cos(b\partial_1) + B \cos(b\partial_1) - Bb\partial_1 \sin(b\partial_1) + C\partial_1 \sin(b\partial_1) - \\ - D \sin(b\partial_1) - Db \cos(b\partial_1) = 0 \end{cases}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} A \sin(b\partial_1) + Bb \cos(b\partial_1) = 0 \\ C \cos(b\partial_1) + Db \sin(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1 \cos(b\partial_1) + B \cos(b\partial_1) - Bb\partial_1 \sin(b\partial_1) = 0 \\ C\partial_1 \sin(b\partial_1) - D \sin(b\partial_1) - Db \cos(b\partial_1) = 0 \end{cases}$$

В свою очередь полученная таким образом однородная система уравнений распадается на две независимые однородные системы уравнений:

$$\begin{cases} A \sin(b\partial_1) + Bb \cos(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1 \cos(b\partial_1) + B \cos(b\partial_1) - Bb\partial_1 \sin(b\partial_1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} C \cos(b\partial_1) + Db \sin(b\partial_1) = 0 \\ C\partial_1 \sin(b\partial_1) - D \sin(b\partial_1) - Db \cos(b\partial_1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Для того, что бы полученные системы уравнений имели нетривиальное решение необходимо равенство нулю их определителей. Для систем уравнений (6) и (7) получим соответственно следующие трансцендентные уравнения:

$$\sin 2b\partial_1 - 2b\partial_1 = 0 \quad (6') \quad \text{и} \quad \sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1 = 0 \quad (7')$$

Справедливости ради отметим еще один подход. Установим систему координат таким образом, чтобы уравнения границы задавались уравнениями

$y = 0, y = b$. Тогда соответствующая граничным условиям система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} C = 0 \\ A \sin(b\partial_1) + Bb \cos(b\partial_1) + Db \sin(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1 + B = 0 \\ A\partial_1 \cos(b\partial_1) + B \cos(b\partial_1) - Bb\partial_1 \sin(b\partial_1) + D \sin(b\partial_1) + Db\partial_1 \cos(b\partial_1) = 0 \end{cases}$$

После упрощений, получим:

$$\begin{cases} -B \sin(b\partial_1) + Bb\partial_1 \cos(b\partial_1) + Db\partial_1 \sin(b\partial_1) = 0 \\ -Bb\partial_1 \sin(b\partial_1) + D \sin(b\partial_1) + Db\partial_1 \cos(b\partial_1) = 0 \end{cases}$$

Приравнявая, как и выше, определитель нулю, находим:

$$[-\sin(b\partial_1 + b\partial_1 \cos(b\partial_1))][\sin(b\partial_1 + b\partial_1 \cos(b\partial_1))] + b^2 \partial_1^2 \sin^2(b\partial_1) = 0;$$

или

$$\sin^2(b\partial_1) - (b\partial_1)^2 = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения

$$\sin(b\partial_1) - b\partial_1 = 0 \quad (6'') \quad \text{и} \quad \sin(b\partial_1) + b\partial_1 = 0 \quad (7'') \quad (7')$$

Уравнения (6'') и (7'') идентичны полученным выше (6') и (7'), и отличаются только коэффициентом 2, который указывает на то, что ширина пластины $-b \leq y \leq b$ в 2 раза больше чем ширина пластины $0 \leq y \leq b$, а это не имеет принципиального значения для нахождения корней этих уравнений. Все они имеют комплексные корни, а это обстоятельство приводит к решению поставленной задачи в комплексной области.

Рассмотрим другой подход, позволяющий оставаться в области действительных чисел. Для этой цели наряду с функцией

$$\varphi_1 = [A_1(\partial_1) \sin(y\partial_1) + B_1(\partial_1) y \cos(y\partial_1) + C_1(\partial_1) \cos(y\partial_1) + D_1(\partial_1) y \sin(y\partial_1)] * f(x) \quad (8)$$

введем еще одну бигармоническую функцию:

$$\varphi_2 = [A_2(\partial_2) \sin(x\partial_2) + B_2(\partial_2) x \cos(x\partial_2) + C_2(\partial_2) \cos(x\partial_2) + D_2(\partial_2) x \sin(x\partial_2)] * f(y) \quad (9)$$

На этот раз потребуем выполнения условий граничных условий вида: $\partial_2 \varphi_1(y = \pm b) = 0$ и $\partial_1 \varphi_2(x = \pm a) = 0$.

Кстати, соотношения (6'), (7'), или что то же самое, (6''), (7''), хорошо известны в научной литературе [2]. Кроме того эти соотношения сами по себе еще не являются решением проблемы. Задачу, где они используются, рассмотрим первой.

1. Метод однородных решений.

В этом случае из условия $\varphi_{y=\pm b} = 0$, получаем $A = -bctg(b\partial_1)B$ и $C = -btg(b\partial_1)D$. Тогда выражение φ и $\partial_2\varphi$ приобретают вид:

$$\begin{aligned}\varphi &= [-bctg(b\partial_1)\sin(y\partial_1) + y\cos(y\partial_1)]B + [-btg(b\partial_1)\cos(y\partial_1) + y\sin(y\partial_1)]D \\ \partial_2\varphi &= [(-b\partial_1ctg(b\partial_1) + 1)\cos(y\partial_1) - y\partial_1\sin(y\partial_1)]B + \\ &+ [b\partial_1tg(b\partial_1 + 1)\sin(y\partial_1) + y\partial_1\cos(y\partial_1)]D\end{aligned}$$

Отсюда видно, что если соотношение $\varphi_{y=\pm b} = 0$ выполняется непосредственно, то для соотношения $\partial_2\varphi_{y=\pm b} = 0$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned}y = b & \quad [1\text{скобка}]B + [2\text{скобка}]D = 0 \\ y = -b & \quad [1\text{скобка}]B - [2\text{скобка}]D = 0.\end{aligned}$$

Данная система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. В результате приходим к соотношению

$$\begin{aligned}[1\text{кобка}] \cdot [2\text{скобка}] &= 0 \text{ или} \\ [(-b\partial_1ctg(b\partial_1) + 1)\cos(b\partial_1) - b\partial_1\sin(b\partial_1)] &[b\partial_1tg(b\partial_1 + 1)\sin(b\partial_1) + b\partial_1\cos(b\partial_1)] = 0.\end{aligned}$$

Раскроем эту скобку

$$\begin{aligned}& b\partial_1[(-b\partial_1ctg(b\partial_1 + 1)\cos^2(b\partial_1) - (b\partial_1tg(b\partial_1 + 1)\sin^2(b\partial_1))] + \\ & + [(-b\partial_1ctg(b\partial_1) + 1)(b\partial_1tg(b\partial_1) + 1) - (b\partial_1)^2]\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1) = \\ & = b\partial_1[\cos^2(b\partial_1) - \sin^2(b\partial_1) - b\partial_1\frac{\cos^4(b\partial_1) + \sin^4(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}] + \\ & + [b\partial_1\frac{\sin^2(b\partial_1) - \cos^2(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)} - 2(b\partial_1)^2 + 1]\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1) = \\ & = -(b\partial_1)^2\frac{1 - 2\sin^2(b\partial_1)\cos^2(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)} + (-2(b\partial_1)^2 + 1)\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1) = \\ & = -\frac{(b\partial_1)^2}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)} + \sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1) = 0\end{aligned}$$

Отсюда получаем $\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1) = \pm b\partial_1$ или $\sin(2b\partial_1) \pm 2b\partial_1 = 0$, что совпадает с приведенными выше формулами. Разделяя корни, получим два вида выражений φ :

$$\varphi_1 = \frac{(b\partial_1 \operatorname{tg}(b\partial_1) + 1)\sin(b\partial_1) + b\partial_1 \cos(b\partial_1)}{(-b\partial_1 \operatorname{ctg}(b\partial_1) + 1)\cos(b\partial_1) - b\partial_1 \sin(b\partial_1)} [-b \operatorname{ctg}(b\partial_1) \sin(y\partial_1) + y \cos(y\partial_1)] -$$

$$-b \operatorname{tg}(b\partial_1) \cos(y\partial_1) + y \sin(y\partial_1)$$

$$\varphi_2 = -b \operatorname{ctg}(b\partial_1) \sin(y\partial_1) + y \cos(y\partial_1) +$$

$$+ \frac{(-b\partial_1 \operatorname{ctg}(b\partial_1) + 1)\cos(b\partial_1) - b\partial_1 \sin(b\partial_1)}{b\partial_1 \operatorname{tg}(b\partial_1) + 1 \sin(b\partial_1) + b\partial_1 \cos(b\partial_1)} [-b \operatorname{tg}(b\partial_1) \cos(y\partial_1) + y \sin(y\partial_1)]$$

С учетом соотношений

$$(b\partial_1 \operatorname{tg}(b\partial_1) + 1)\sin(b\partial_1) + b\partial_1 \cos(b\partial_1) = \frac{b\partial_1}{\cos(b\partial_1)} + \sin(b\partial_1) = \frac{\sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1}{2\cos(b\partial_1)}$$

$$(-b\partial_1 \operatorname{ctg}(b\partial_1) + 1)\cos(b\partial_1) - b\partial_1 \sin(b\partial_1) = \cos(b\partial_1) - \frac{b\partial_1}{\sin(b\partial_1)} = \frac{\sin(2b\partial_1) - 2b\partial_1}{2\sin(b\partial_1)}$$

φ_1 и φ_2 перепишем в виде:

$$\varphi_1 = \frac{\sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1}{\sin(2b\partial_1) - 2b\partial_1} [\operatorname{tg}(b\partial_1)y \cos(y\partial_1) - b \sin(y\partial_1)] - \operatorname{tg}(b\partial_1)b \cos(y\partial_1) + y \sin(y\partial_1)$$

$$\varphi_2 = \frac{\sin(2b\partial_1) - 2b\partial_1}{\sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1} [\operatorname{ctg}(b\partial_1)y \sin(y\partial_1) - b \cos(y\partial_1)] - \operatorname{ctg}(b\partial_1)b \sin(y\partial_1) + y \cos(y\partial_1)$$

Проверим выполнение граничных условий. Теперь нетрудно установить:

$$y = \pm b \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad ; \quad y = -b \quad \partial_2 \varphi_1 = \partial_2 \varphi_2 = 0$$

$$y = +b$$

$$\partial_2 \varphi_1 = 2[(b\partial_1 \operatorname{tg}(b\partial_1) + 1)\sin(b\partial_1) + b\partial_1 \cos(b\partial_1)] = 2\left[\frac{b\partial_1}{\cos(b\partial_1)} + \sin(b\partial_1)\right] =$$

$$= \frac{\sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1}{\cos(b\partial_1)}$$

$$\partial_2 \varphi_2 = 2[(-b\partial_1 \operatorname{ctg}(b\partial_1) + 1)\cos(b\partial_1) - b\partial_1 \sin(b\partial_1)] = 2\left[\cos(b\partial_1) - \frac{b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}\right] =$$

$$= \frac{\sin(2b\partial_1) - 2b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}$$

И после этого остается удовлетворить последнему граничному условию

$$\tau_{xy}(y, x = \pm a).$$

Это можно достигнуть с помощью метода, изложенного в [2] или путем переразложения рядов, содержащих корни одних трансцендентных уравнений в ряды, содержащие корни других трансцендентных уравнений.

$$\varphi = \left\{ \left[\frac{1}{\partial_1} (1 - b \operatorname{tg}(b\partial_1)) \sin(y\partial_1) + y \cos(b\partial_1) \right] B(\partial_1) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\partial_1} (1 - b \operatorname{ctg}(b\partial_1)) \cos(y\partial_1) + y \sin(b\partial_1) \right] D(\partial_1) \right\} * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$$

Справедливости ради и другой подход, который для нашего случая является проверочным. А именно, если вначале приравнять нулю производную по переменной y , то получим следующую зависимость между коэффициентами:

$$A = \frac{1}{\partial_1} (b\partial_1 \operatorname{tg}(b\partial_1) - 1)B, \quad C = \frac{1}{\partial_1} (b\partial_1 \operatorname{ctg}(b\partial_1) + 1)D \quad (10)$$

Если теперь приравнять нулю сами напряжения и продолжить выкладки, то получим те же самые формулы что и выше, а это еще раз подтверждает достоверность полученных результатов.

2. Метод ортогональных решений.

В этом случае функции напряжений представляется в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \left\{ \left[\frac{1}{\partial_1} (b\partial_1 \operatorname{tg}(b\partial_1) - 1) \sin(y\partial_1) + y \cos(y\partial_1) \right] B_1(\partial_1) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{\partial_1} (b\partial_1 \operatorname{ctg}(b\partial_1) + 1) \cos(y\partial_1) + y \sin(y\partial_1) \right] D_1(\partial_1) \right\} * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \\ \varphi_2 = & \left\{ \left[\frac{1}{\partial_2} (a\partial_2 \operatorname{tg}(a\partial_2) - 1) \sin(x\partial_2) + x \cos(x\partial_2) \right] B_2(\partial_2) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{\partial_2} (a\partial_2 \operatorname{ctg}(a\partial_2) + 1) \cos(x\partial_2) + x \sin(x\partial_2) \right] D_2(\partial_2) \right\} * \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что в этих записях используются формулы (10), которые определяют равенство нулю касательных напряжений на всем контуре пластины, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой. Так как необходимый произвол содержится в коэффициентах a_n и b_n , то можно положить

$$B_1(\partial_1) = D_1(\partial_1) = B_2(\partial_2) = D_2(\partial_2) = 1$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^1(x = \pm a, y = \pm b) = & -\partial_1 \partial_2 \varphi_1(x = \pm a, y = \pm b) = \frac{\pi n}{a} \{ [(b\partial_1 \operatorname{tg}(b\partial_1) - 1) \cos(b\partial_1) + \\ & + \cos(b\partial_1) - b\partial_1 \sin(b\partial_1)] + [-(\operatorname{ctg}(b\partial_1) + 1) \sin(b\partial_1) + \sin(b\partial_1) + b\partial_1 \cos(b\partial_1)] \} * \\ & * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^2(x = \pm a, y = \pm b) = & -\partial_1 \partial_2 \varphi_2(x = \pm a, y = \pm b) = \frac{\pi n}{b} \{ [(a\partial_2 \operatorname{tg}(a\partial_2) - 1) \cos(a\partial_2) + \\ & + \cos(a\partial_2) - a\partial_2 \sin(a\partial_2)] + [-(\operatorname{ctg}(a\partial_2) + 1) \sin(a\partial_2) + \sin(a\partial_2) + a\partial_2 \cos(a\partial_2)] \} * \text{Итак,} \end{aligned}$$

$$* \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) = 0$$

граничные условия вида $\tau_{xy} = 0$ выполняются тождественно на сторонах $x = \pm a$ и $y = \pm b$ тождественно. Коэффициенты a_n и b_n находятся их оставшихся граничных условий. Используя приведенную в [1] таблицу

$$\begin{aligned} \sin(y\partial_1) * [\sin(\pi n x / a)] &= \operatorname{sh}(\pi n y / a) \cos(\pi n x / a) \\ y\partial_1 \cos(y\partial_1) * [\sin(\pi n x / a)] &= (\pi n y / a) \operatorname{ch}(\pi n y / a) \cos(\pi n x / a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a\partial_1)\cos(y\partial_1) * [\sin \pi nx/a] &= \operatorname{tg}(\pi n) \operatorname{ch}(\pi ny/a) \cos(\pi nx/a) \\ \operatorname{tg}(a\partial_1)y\partial_1 \sin(y\partial_1) * [\sin \pi nx/a] &= \operatorname{tg}(\pi n) \operatorname{ch}(\pi ny/a) \cos(\pi nx/a) \end{aligned}$$

определим коэффициенты a_n и b_n из следующих соотношений:

$$\sigma_x = \partial_2^2(\varphi_1 + \varphi_2) \Big|_{x=\pm a} = G(y) \quad \text{и} \quad \sigma_y = \partial_1^2(\varphi_1 + \varphi_2) \Big|_{y=\pm b} = F(x) \quad (12)$$

Здесь $F(x)$ и $G(y)$ – известные функции, а φ_1 и φ_2 задаются формулами (11) и (12).

Таким образом, выше изложены два операторно-символических подхода к решению плоской задачи теории упругости. Изложение материала носит теоретический характер. Получено новое общее аналитическое решение плоской задачи теории упругости о сжатии упругой прямоугольной пластины. На основании полученных формул в дальнейшем можно будет получить численные результаты для конкретных задач в данной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. *Теория упругости и пластичности* / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
2. Новацкий, В. *Теория упругости* / В. Новацкий. – М.: Издательство «Мир», 1975. – 872 с.
3. Акимов, В.А. *Операторный метод решения задач теории упругости* / В.А. Акимов. – Мн.: УП «Технопринт», 2003. – 101 с.

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ШАГОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ШАГОВЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

проф. Карпович С.Е., маг. Кузнецов В.В.

*УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск*

Введение. В управляющих устройствах мехатронных систем перемещений промышленного оборудования применяются два основных типа алгоритмов формирования шаговых траекторий [1, 2]. Это алгоритмы позиционного управления РТР (Point to point – от точки к точке) а также алгоритмы контурного управления СР (Continuous path – непрерывный путь). При реализации РТР-алгоритмов задается требуемое количество узловых точек траектории, через которые обязательно должна пройти траектория перемещения рабочего инструмента либо координатного стола. СР-алгоритмы применяются для управления по непрерывной траектории с обеспечением синхронной обработки отдельных координата в реальном времени.

Методы формирования шаговых траекторий. Для расчета промежуточных участков траекторий в устройствах управления применяется аппаратный либо программный блок-интерполятор. Выходные сигналы интерполяторов имеют вид распределенных во времени импульсов, поступающих на управляющие входы исполнительного устройства. Криволинейная траектория аппроксимируется отрезками прямых, число которых зависит от требуемой точности формирования траекторий. Существуют варианты отработки сложных траекторий по формулам полиномиальной интерполяции. В данном случае интерполяционные формулы аппроксимируют некоторую функцию $f(x)$ многочленом $P(x)$, который удовлетворяет условию $P(x) = y(x_k)$ в $(n + 1)$ точках интерполяции $x_k (k = \overline{0, n})$. Наиболее известной и широко используемой является интерполяционная формула Ньютона:

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} (x - x_0)(x - (x_0 + h)) \dots (x - x_0 - (k-1)h), \quad (1)$$

где $\Delta^k f(x_0) = \sum_{i=0}^n (-1)^{k-i} C_i^k f(x_0 + ih)$; $x_i = x_0 + ih$; $i = 0, 1, 2, \dots, k$;

$$C_i^k = \frac{k!}{i!(k-i)!} - \text{число сочетаний из } k \text{ элементов по } i \text{ в каждом с учетом того, что } 0! = 1.$$

Так же используются методы приближения траектории сплайнами, но для них требуется большое время вычисления и объем памяти. На практике так же часто применяются способы формирования траекторий с постоянными приращениями координат. Но они требуют большого числа логических операций для определения условия перехода из одного октанта в другой и арифметических операций для вычисления значений в двух точках на каждом элементарном шаге обрабатываемой траектории.

Методы, основанные на интерполяторах [3], как правило, используют знак оценочной функции. При этом отсутствует накапливающаяся погрешность, производится сравнительно простой расчет и управление отработкой траектории. В первых интерполяторах, работающих с использованием оценочной функции, элементарные приращения по одной из координат выполнялись до тех пор, пока не изменится знак погрешности отклонения расчетной траектории от теоретической кривой. Однако такой метод не обеспечивает максимальной точности приближения расчетной траектории к теоретической кривой. Для уменьшения девиации рассчитываемых прямых был предложен метод

выбора направлений элементарных шагов приращений согласно выражениям:

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= 2\Delta b - \Delta a, \\ \nabla_{i+1} &= \begin{cases} \nabla_i + 2\Delta b - 2\Delta a, & \text{если } \Delta_i \geq 0, \\ \nabla_i + 2b, & \text{если } \Delta_i < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta a = x_{i+1} - x_i$; $\Delta b = y_{i+1} - y_i$; причем если $\nabla_i < 0$, то в первом октанте выполняются элементарные шаги, если $\nabla_i \leq 0$, то – комбинированные. В других октантах это соотношение модифицируется с учетом направления движения при обработке траектории. Такой метод интерполирования обеспечивает максимальную точность расчета для выбранной величины квантования переменных при формировании прямолинейных траекторий. Близким к рассмотренному является метод интерполирования, который основан на представлении функции $F(x, y) = 0$ с помощью арифметических прогрессий или числовых последовательностей. Метод пригоден для генерирования функций широкого класса, однако недостатком его является наличие накапливающейся погрешности и необходимостью выполнения дополнительных операций, связанных со сравнением координат.

Метод формирования отрезков прямых и дуг окружностей, основанный на аппроксимации кривой $F(x, y) = 0$ рядом прямолинейных отрезков, характеризуется сложностью математического аппарата, узким классом аппроксимируемых функций и значительное количество логических условий и др.

Метод формирования отрезков прямых, дуг окружностей и парабол, основанный на определении знака оценочной функции в дополнительных точках обладает высокой точностью, но большим объемом вычислений, неравномерностью вычислений, большим объемом аппаратных затрат.

Алгоритмы формирования шаговых траекторий. Траекторию движения управляемого в пространстве и времени объекта можно записать в виде $F(x, y, z, t) = 0$. Основное требование, предъявляемое к управлению движения такого объекта, состоит в том, что управляемый объект должен двигаться с минимально-возможным отклонением от желаемой траектории. Координаты являются дискретными, расчет шаговой траектории производит программирующее устройство согласно выражению:

$$F[x_i, y_j, z_k] = F_{ijk}, \quad (3)$$

где x_i, y_j, z_k – целочисленные значения переменных, характеризующие координаты узловых точек шаговой траектории; F_{ijk} – оценочная функция, характеризующая отклонение узловых точек рассчитываемой шаговой траектории от рассчитываемой кривой. Направление элементарного шага приращения выбирается в зависимости от знаков оценочной функции в узловых точках. Таким образом, оценочная функция представляет собой рассогласование теоретической кривой и шаговой траектории. Процесс формирования шаговой траектории характеризуется постоянным стремлением изменить знак и уменьшить величину оценочной функции. При обработке траекторий значение переменной в один момент времени может измениться только на одно элементарное приращение, вдоль одной из осей координат. Оценочная функция F_i при обработке шаговой траектории на плоскости для целочисленных значений координат имеет вид:

$$[y] - f[x_i] = F_i. \quad (4)$$

Для избегания сложных вычислений значений x на каждом шаге итерации используют следующее выражение:

$$\int_0^y y' dy - \int_0^x x' dx = F_i. \quad (5)$$

При переходе к целочисленным значениям интегралов в выражении (5) они заменяются интегральными суммами, а производные заменяются конечными разностями. С учетом этого, выражения для оценочной функции принимает следующий вид:

$$\sum_{j=0} \Delta F[y_j] - \sum_{i=0} \Delta F[x_i] = F_{ij}. \quad (6)$$

Данный метод в некоторых случаях позволяет создавать простые алгоритмы формирования шаговых траекторий с использованием конечно-разностных приращений. Однако без дополнительных преобразований он не обеспечивает максимально возможную точность формирования траекторий. На рис. 1 приведен отрезок круговой шаговой траектории, построенной с использованием знаков оценочной функции F_{ij} .

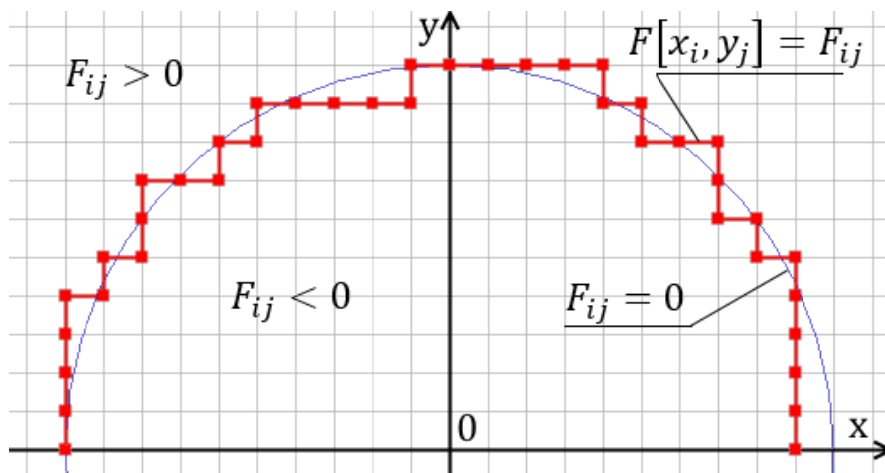


Рис. 1. Отрезок круговой шаговой траектории, построенной с использованием знаков оценочной функции F_{ij}

Алгоритм формирования траектории определяет узловые точки, наиболее близко расположенные к заданной линии $F(x, y) = 0$. Он основан на использовании экстраполированного значения оценочной функции F_{ij}^3 . Значения функции вычисляются в точках $x_i \pm 0,5h, y_j \pm 0,5h$. Сущность алгоритма состоит в том, что направление элементарных шагов выбирается в зависимости от знака оценочной функции F_{ij}^3 , вычисленной с экстраполяцией на половину шага сетки вперед по обеим координатам. Таким образом как бы предугадываем поведение линии $F(x, y) = 0$ в области каждого пересекаемого этой линией элементарного квадрата с учетом того, что выбор направления шага осуществляется из узловой точки с координатами x_i, y_j .

Направление элементарных шагов (рис. 2) в близлежащей узловой точке выбирается в зависимости от знака разности величин $(F_{i,j+1} - F_{i+1,j})$. Если она положительная, то узловая точка В с координатами x_i, y_{j+1} дальше расположена от линии $F(x, y) = 0$, чем узловая точка С с координатами x_{i+1}, y_{j+1} , следовательно, элементарный шаг необходимо выполнять к узловой точке С. Сущность предложенного метода заключается в том, что выполнение элементарных шагов осуществляется в зависимости от знака оценочной функции, вычисленной в узловой точке D с координатами x_{i+1}, y_{j+1} .

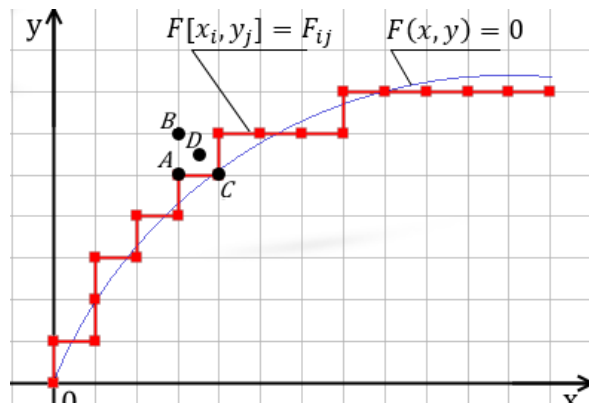


Рис. 2. Шаговая траектория, построенная соединением соседних узловых точек, наиболее близко расположенных возле линии $F(x, y) = 0$

В этом случае формирования шаговых траекторий возможны различные направления пересечения линией $F(x, y) = 0$ элементарных квадратов, при этом направление элементарных приращений Δx , Δy определяется знаками приращений переменных x_j и y_j .

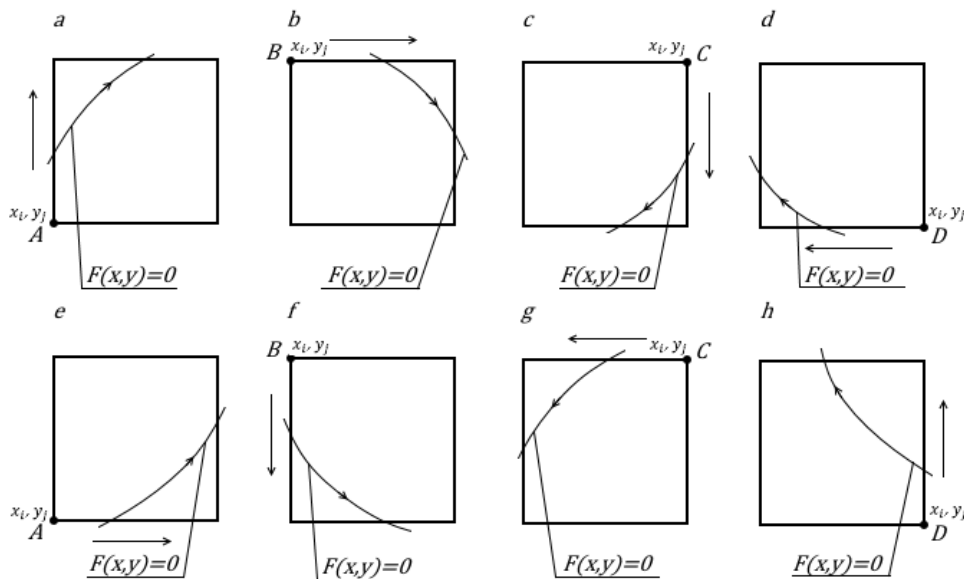


Рис. 3. Примеры выбора направлений элементарных шагов в зависимости от пересечения отрезком линии $F(x, y) = 0$ элементарного квадрата дискретной сетки

На рис. 3 представлены возможные варианты пересечения линией $F(x, y) = 0$ элементарных квадратов и указаны направления элементарных шагов к узловым точкам, наиболее близко расположенным к линии $F(x, y) = 0$. Эти варианты отличаются друг от друга направлением элементарных шагов и выбором начальной точки (A , B , C или D). Анализ возможных пересечений линией элементарных квадратов сетки позволяет обобщить процесс формирования шаговых траекторий и сформулировать алгоритм преобразования функции $F(x, y) = 0$ в сеточную функцию вида:

$$F[x_i + 0,5h; y_i + 0,5h] - F[x_i - 0,5h; y_i - 0,5h] = F_{ij}^3. \quad (7)$$

Такая алгоритмизация позволяет переходить из области непрерывного изменения переменных в область дискретного их изменения и сформулировать числовой аналог с

учетом краевых условий. Реализация предложенного алгоритма осуществляется путем замены непрерывных переменных их дискретными эквивалентами согласно выражению $x = x_i \pm 0,5h$, $y = y_i \pm 0,5h$, где h – шаг сетки, величину которого можно условно принять равной единице. Возможно также реализация этого алгоритма путем построения разностных уравнений – аналогов уравнения $F(x, y) = 0$ – и подстановки в них числовых начальных данных. В результате чего уравнение с непрерывно изменяющимися параметрами аппроксимируется соответствующим разностным уравнением.

Рассмотренные алгоритмы формирования шаговых траекторий для систем перемещений на шаговых двигателях являются достаточно простыми и позволяют получать шаговые траектории с высокой точностью. Они могут быть использованы распределенной системой управления, основанной на технологии EtherCAT.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Программируемые движения в прецизионных системах перемещений : моногр. / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : ФУАинформ, 2008. – 206 с.
2. Дайняк, И.В. Вычислительные алгоритмы формирования программных движений для привода прямого действия / И.В. Дайняк // Инженерный вестник. – 2006. – № 1(21)/3. – С. 55–62.3.
3. Ивоботенко, Б.А. Физические принципы и структуры электрического дробления шага в дискретном электроприводе / Б.А. Ивоботенко, Н.Ф. Ильинский, С.С. Кожин // Труды Моск. энерг. ин-та. – 1979. – Вып. 440. – С. 54–57.
4. Аппаратно-программное моделирование системы управления многокоординатной системы перемещений / Е.А. Литвинов [и др.] // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 50–55.
5. Boldea, I. Linear electric actuators and generators / I. Boldea, S. Nasar. – Cambridge University Press, 1997. – 236 p.
6. Chen, Ch.-T. Trajectory planning of parallel kinematic manipulators for the maximum dynamic load-carrying capacity / Ch.-T.Chen, T.-T.Liao // Meccanica. – 2016. – Vol. 51, Iss. 8. – P. 1653–1674.
7. Zentner, J. Zur optimalen Gestaltung von Parallelkinematikmaschinen mit Planarantrieben / J. Zentner. – Illmenau : ISLE, 2006. – 123 s.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ВАЛОВ ПРИВОДА РЕЛЬСОВОЙ МАШИНЫ

¹Омаров Т.И., ¹Костюченко В.М., ¹Карипбаев С.Ж., ²Маслова К.С.

¹Академия гражданской авиации, Республика Казахстан, г. Алматы

²Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, РФ

Многие рельсовые машины, обслуживающие цеха промышленных предприятий, имеют механизм передвижения, включающий в себя два идентичных, симметричных относительно электродвигателя привода, кинематическая схема одного из которых показана на рис. 1 [1].

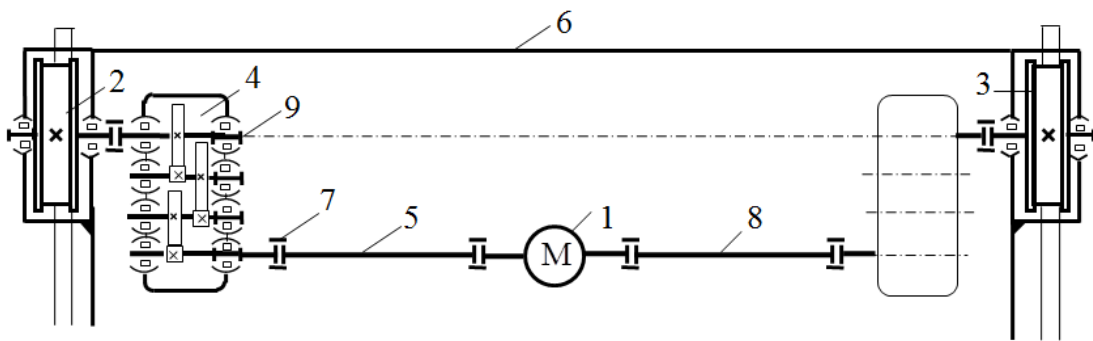


Рис. 1. Механизм передвижения рельсовой машины

В каждую ветвь механизма входит быстроходный вал 8, соединенный муфтами 7, подшипники, ходовые колеса 2, 3 и трехступенчатый редуктор 4, в структуре которого ведущий вал-шестерня, два промежуточных вала со смонтированными на нем зубчатыми колесами и ведомый (выходной) вал 9 с зубчатым колесом, на продолженном участке которого установлено ходовое колесо 2. Ведущий вал-шестерня (быстроходный вал) устанавливается на одной оси вращения с ротором электродвигателя 1.

При такой структуре механизм передвижения рассматриваемой машины статически неопределим из-за избыточной фрикционной связи, наложенной на одно из колес пары. Это приводит к тому, что в приводе периодически формируется динамическая нагрузка (моменты сил упругости), изменение которой носит автоколебательный характер [2].

На рис. 2 показана левая ветвь привода механизма передвижения. Правая ветвь привода имеет идентичную структуру и симметричное расположение.

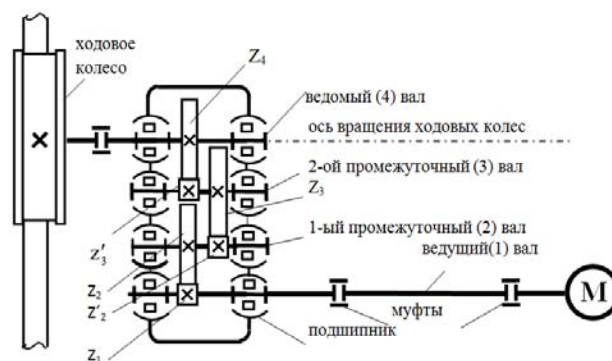


Рис. 2. Левая ветвь привода механизма передвижения рельсовой машины

Система валов трехступенчатого редуктора 4 представляет собой последовательное соединение упругих элементов, в данном случае валов, работающих на кручение.

Преобладающей силовой нагрузкой в рассматриваемом приводе являются моменты упругих сил. В конструкции привода механизма передвижения исследуемой машины несущими элементами являются трансмиссионные валы, зубчатые муфты, соединяющие отдельные участки валов, зубчатые колеса. Как показывает эксплуатационная и экспериментальная практика в большинстве случаев, как и в данном исследовании, крутильная жесткость зубчатых муфт и зубчатых колес величина настолько большая, что можно, без ущерба для исследования, считать их абсолютно жесткими телами и не учитывать упругие свойства этих деталей при определении приведенной крутильной жесткости ветви привода. Очевидно, что наиболее податливыми элементами приводов рельсовых машин являются трансмиссионные валы.

Для исследования характера изменения динамической нагрузки в приводе, необходимо составить динамическую модель (расчетную схему) механизма.

Динамическая модель – есть идеализированное отображение рассматриваемой механической системы, используемое при ее теоретическом исследовании и инженерных расчетах [3].

В данном случае динамическая модель (рис. 3) представлена трехмассовой системой, состоящей из трех дискретных масс с приведенными моментами инерции J_1, J_2, J_3 , связанных между собой невесомыми упругими валами с крутильными жесткостями c_{12} и c_{13} , приведенными к оси вращения ходовых колес. На схеме J_1 – приведенный момент инерции ротора электродвигателя; J_2, J_3 – приведенные моменты инерции вращающихся частей левой и правой ветвей привода, которые определяются из условия равенства кинетических энергий приводимой и приведенной массы [4]; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – обобщенные координаты приведенной системы.

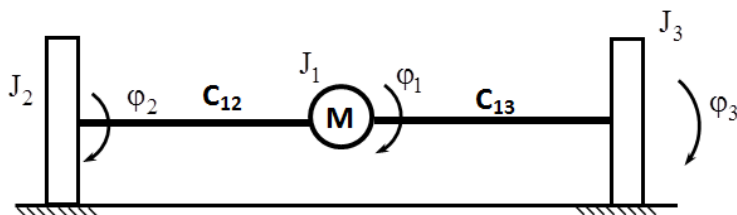


Рис. 3. Расчетная схема механизма передвижения рельсовой машины

Приведение жесткостей осуществляется из условия равенства потенциальных энергий приводимой и приведенной систем. Приведенная крутильная жесткость вала редуктора $c_{пр}$ определяется по формуле [4]

$$c_{пр} = c_{пм} \cdot u^2 \quad (1)$$

Здесь $c_{пм}$ – жесткость приводимого вала; u – передаточное отношение между приводимым и приведенным валами.

Рассмотрим подробнее методику определения приведенной крутильной жесткости левой ветви привода механизма передвижения рельсовой машины.

Основная характеристика валов как упругих элементов – крутильная жесткость, под которой обычно понимают коэффициент пропорциональности между силой в обобщенном смысле и вызываемой ею угловой деформацией. Крутильная жесткость вала с постоянным поперечным сечением, как известно, определяется выражением (2).

$$C = \frac{GJ_p}{l} = \frac{G\pi d^4}{32l} \quad (2)$$

где G – модуль сдвига (модуль упругости второго рода); $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции сечения вала, d – диаметр вала; l – длина вала с постоянным поперечным сечением.

В данном случае (рис. 2) участки вала и ведущий вал редуктора соединены последовательно посредством муфт, также как и нагруженные участки ведомого вала редуктора. Именно на ведущий вал привода из-за его длины приходится основная составляющая моментов сил упругости, формирующихся в трансмиссии при движении машины.

Трансмиссионные валы механизмов передвижения мобильных машин, как правило, имеют ступенчатую конфигурацию, что значительно усложняет задачу определения численного значения крутильной жесткости. В таких случаях бывает целесообразно ступенчатый вал заменить гладким валом эквивалентной жесткости [5]. При этом изменится общая длина вала, которая называется приведенной длиной l . Постоянный по всей длине диаметр гладкого вала будет называться приведенным диаметром d . За приведенный может быть принят диаметр любой ступени вала. Диаметр и длина – основные геометрические размеры вала для определения значения крутильной жесткости.

Ступенчатый вал можно рассматривать как последовательно соединенные дискретные массы. Податливость всего вала, величина обратная жесткости, определяется суммированием податливостей участков вала.

После определения эквивалентных жесткостей нагруженных участков валов трансмиссии, полученные результаты приводятся к оси вращения ходового колеса 2 с помощью формулы (1). Таким образом, получается система последовательно соединенных упругих элементов соответственно с жесткостями c_2 , $c_{I\text{пр}}$, $c_{II\text{пр}}$, $c_{1\text{пр}}$ (рис. 4) [5].

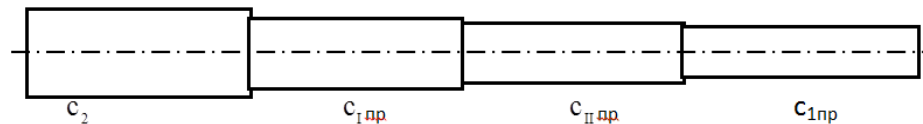


Рис. 4. Расчетная схема последовательно соединенных упругих элементов

На рис. 4 использованы следующие обозначения: c_2 – эквивалентная жесткость ведомого вала; $c_{I\text{пр}}$ – приведенная эквивалентная жесткость первого промежуточного вала редуктора; $c_{II\text{пр}}$ – приведенная эквивалентная жесткость второго промежуточного вала редуктора; $c_{1\text{пр}}$ – приведенная эквивалентная жесткость ведущего вала.

Жесткости $c_{\text{пр}}$, $c_{II\text{пр}}$, $c_{1\text{пр}}$ определяются по формулам [5]:

$$c_{I\text{пр}} = c_I \cdot u_I^2; \quad c_{II\text{пр}} = c_{II} \cdot u_{II}^2; \quad c_{1\text{пр}} = c_1 \cdot u_{12}^2 \quad (3)$$

Здесь c_I , c_{II} – соответственно, эквивалентные жесткости первого и второго промежуточных валов редуктора; $c_{Iв.}$ – эквивалентная жесткость ведущего вала; u_1 , u_{II} – передаточные отношения между промежуточными валами редуктора и колесом 2; u_{12} – передаточное отношение всего редуктора.

Результирующая приведенная крутильная жесткость c_{12} невесомого упругого вала, соединяющего на расчетной схеме массы J_1 и J_2 (т.е. аналога трансмиссии приво-

да) (рис. 3) определяется как при последовательном соединении упругих элементов из формулы (рис. 4)

$$\frac{1}{c_{12}} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_I \cdot u_I^2} + \frac{1}{c_{II} \cdot u_{II}^2} + \frac{1}{c_1 \cdot u_{12}^2} \quad (4)$$

В результате приведения масс и жесткостей механизм передвижения машины (рисунок 1) заменяется расчетной схемой с тремя дискретными массами (моментами инерции) J_1, J_2, J_3 (рисунок 3). Дискретные массы соединены между собой невесомыми упругими связями с жесткостями c_{12} и c_{13} . Такая система имеет 4 обобщенных координаты, т.е. ее движение определяют 4 параметра: φ_1 – приведенный к оси вращения ходовых колес угол поворота ротора электродвигателя; φ_2 и φ_3 – соответственно углы ходовых колес; x – поступательное движение всей системы (машины), на схеме не показана.

Действующие в механизме силы и моменты сил также приводятся к оси вращения ходовых колес. Их значения определяются из условия равенства мощностей приводимой и приведенной сил или моментов сил [6].

Аналогично определяется приведенная жесткость c_{13} для правой части привода. При симметричном расположении электродвигателя в приводе механизма передвижения жесткости c_{12} и c_{13} практически равны между собой.

Данная расчетная схема с численно определенными параметрами, а именно: приведенными крутильными жесткостями c_{12}, c_{13} и приведенными моментами инерции J_1, J_2, J_3 может быть использована для математического описания движения исследуемой механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Техническая документация напольной завалочной машины мартеновского цеха грузоподъемностью 15 тонн // Завод «Криворожсталь». – Кривой Рог, 1989.*
2. *Omarov, T.I. Influence of Redundant Connections in Rail Movement Mechanism on Dynamic Loads in Rail Vehicle's Drive. Mediterranean Journal of Social Sciences. – MCSER Publishing, Rome-Italy. – Vol 5. – № 23. . – November 2014. – P. 2594–2599.*
3. *Вульфсон, И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. / И.И. Вульфсон. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.*
4. *Кожевников, С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах / С.Н Кожевников. – Киев: Наук. думка, 1996. – 288 с.*
5. *Омаров, Т.И. Динамика механизмов переменной структуры рельсовых машин / Т.И. Омаров. – Алматы: КазНТУ, 2014. – 225 с.*
6. *Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Луцк, Д.Р. Меркин. – Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2009. – 736 с.*

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

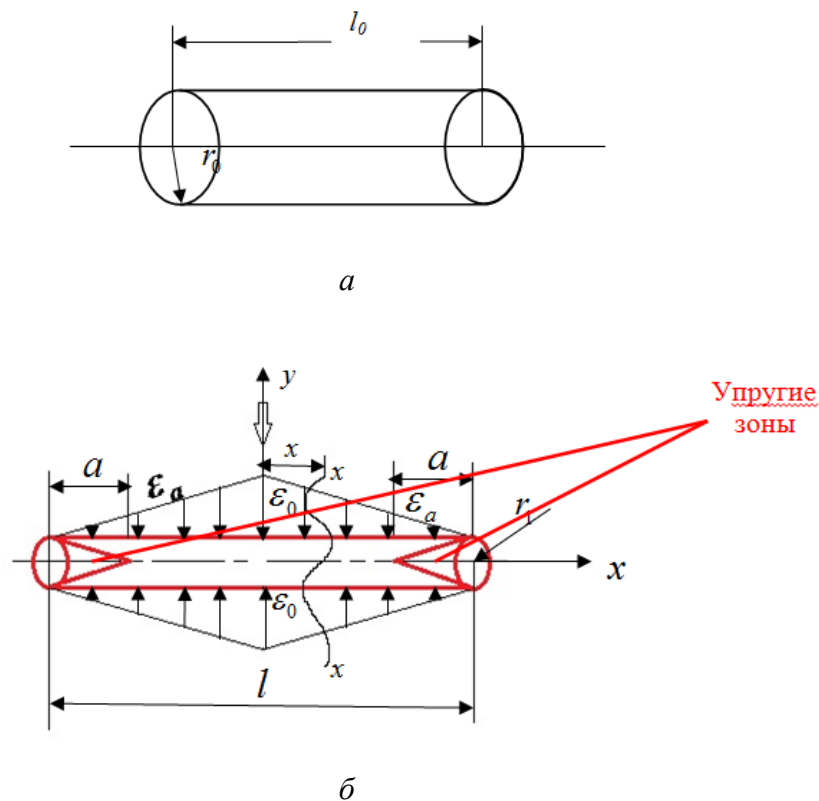
Гончарова С.В., Акимов В.А., Якубовский Д.С.

Белорусский национальный технический университет

Изучение структуры пластических материалов, находящихся в деформированном состоянии показывает, что остаточные деформации обязаны своим появлением сдвигом в кристаллической решетке отдельных кристаллов, из которых состоит материал.

Указанное обстоятельство является основной причиной, побудившей принять в качестве критерия прочности ту часть потенциальной энергии деформации, которая соответствует изменению формы тела [1, 2].

В данной работе предпринята попытка, в отличие от известных энергетических теорий формоизменения получить новые соотношения и формулы для подсчета работы формоизменения. В основу решения проблемы был положен геометрический подход. Для этого рассматривалась заготовка цилиндрической конфигурации с начальными размерами, показанными на (рис. 1, а), которая затем во вращающихся валках принимала окончательный вид (рис. 1, б).



*Рис. 1. Заготовка цилиндрической конфигурации:
а – первоначальный вид заготовки; б – конечный вид заготовки*

Определим работу, которую необходимо произвести для перехода заготовки из одного состояния в другое. Для убедительности впервые получаемых результатов осуществим два подхода.

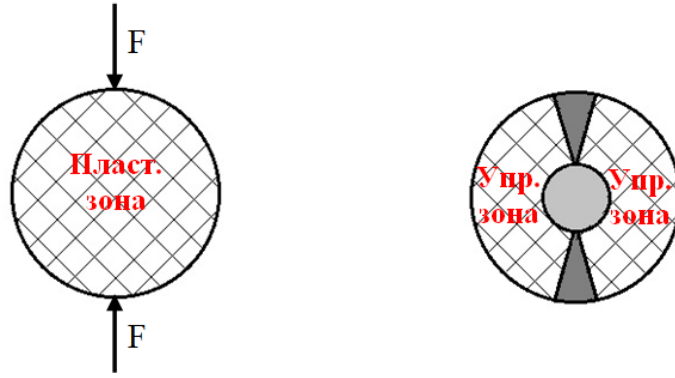


Рис. 2. Промежуточное состояние

В соответствии с рис. 2, в первом случае будет процесс обжатия, при котором круглое сечение будет полностью находиться в пластическом состоянии, то есть a пренебрежимо мало.

$$\text{Тогда } A_1 = \eta_1 A \frac{\sigma_0 \varepsilon_0}{2} = \frac{1}{2} \eta_1 A \frac{F_0}{A} \varepsilon_0 l = \frac{1}{2} \eta_1 F_0 \varepsilon_0 l.$$

Здесь η_1 – КПД установки, F_0 и ε_0 – соответственно максимальные усилие и деформация, A – площадь сечения заготовки. Кроме того, было учтено $\sigma_x = F_0 / A$.

Принимая $F_0 = A \sigma_T = \pi r_0^2 \sigma_T$, где σ_T – предел текучести материала и находя из условия равенства объемов $\pi r_0^2 l_0 = \pi r_1^2 l$ величину $l = \frac{r_0^2}{r_1^2} l_0$, а затем

$$\varepsilon_0 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\frac{r_0^2}{r_1^2} l_0 - l_0}{l_0} = \frac{r_0^2}{r_1^2} - 1 = \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_1^2}, \quad \text{определим удельную работу}$$

$$A_1^{y\partial} = \eta_1 \frac{1 - k^2}{2k^4} \sigma_T$$

Окончательно получим:

$$A_1 = A_1^{y\partial} V_0 \quad (1)$$

где $k = r_1 / r_0$ – коэффициент уменьшения заготовки, $V_0 = \pi r_0^2 l_0$ – начальный объем заготовки. В развернутом виде выражение (1) принимает вид:

$$A_1 = A_1^{y\partial} V_0 = A_1^{y\partial} \pi r_0^2 l_0 = \frac{\eta_1 \pi r_0^4 (r_0^2 - r_1^2) l_0 \sigma_T}{2 r_1^4} \quad (1')$$

Во втором случае сохраняются зоны упругости, и идет как бы «наплыв» пластического материала на упругие зоны и его дальнейшее перемещение на периферию. На основании приведенной на рис. 1 и 2 схемы, будем иметь

$$A_2 = 4\eta_2 A \int_0^{l/2} \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} dx = 2\eta_2 F_0 \varepsilon_0 \int_0^{l/2} \varepsilon_x dx$$

Полагая $\varepsilon_x = A + Bx$, и учитывая, что при $x = 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_0$, а при $x = l/2$, $\varepsilon_x = 0$, получим $A = \varepsilon_0$, $B = -\frac{2A}{l} = -\frac{2\varepsilon_0}{l}$, то есть $\varepsilon_x = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{2}{l}x\right)$.

Тогда

$$A_2 = 2\eta \cdot F_0 \varepsilon_0 \left(x - \frac{1}{l}x^2\right) \Big|_0^{l/2} = 2\eta F_0 \varepsilon_0 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right) = (\eta F_0 \varepsilon_0 l) / 2.$$

Подставляя в это соотношение введенные выше величины $F_0 = A\sigma_T = \pi r_0^2 \sigma_T$, $\varepsilon_0 = \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_1^2}$, $l = \frac{r_0^2}{r_1^2} l_0$ получим

$$A_2 = \frac{1}{2} \eta_2 \pi r_0^2 \sigma_T \frac{(r_0^2 - r_1^2)}{r_1^2} \frac{r_0^2}{r_1^2} l_0 = \frac{\eta_2 \pi r_0^4 (r_0^2 - r_1^2) l_0 \sigma_T}{2r_1^4} = A_2^{y0} V_0 \quad (2)$$

Здесь, как и выше $A_2^{y0} = \eta_2 \frac{1-k^2}{2k^4} \sigma_T$ $k = r_1 / r_0$ – коэффициент уменьшения заготовки; σ_T – предел текучести материала.

Так как получена одна и та же формула (кстати, косвенно подтверждающая правильность проделанных выкладок), то окончательно принимаем

$$A = \frac{\eta \pi r_0^4 (r_0^2 - r_1^2) l_0 \sigma_T}{2r_1^4} = A^{y0} V_0 \quad (3)$$

где обозначено $A^{y0} = \eta \frac{1-k^2}{2k^4} \sigma_T$ – удельная работа, $k = r_1 / r_0$ – коэффициент уменьшения заготовки; σ_T – предел текучести материала; η – КПД установки.

Теоретически определить КПД η не предоставляется возможным [1, 2]. Для этого нужен эксперимент. Первоначально можно положить $\eta \approx 0,75$. Авторы считают, что предложенный геометрический подход к теории формообразования заслуживает внимания, и полученной формулой (3) можно пользоваться для проведения практически расчетов. Так, например, используя формулу $T = A/c$, где A вычисленная по формуле (3) работа, а c – удельный коэффициент теплоемкости материала, можно найти температуру изделия на выходе. Правильность полученных результатов подтверждается совпадением, полученных в различных подходах, промежуточных формул (1) и (2).

Произведя замер температуры в ходе эксперимента, можно попытаться определить КПД установки, а затем и определить на каком расстоянии от концов достигается текучесть материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник // под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Издательство АСВ, 1995. – 568 стр.*
2. *Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.*

ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ЕЕ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

к.т.н. ¹Миронов Д.Н., к.т.н. ²Гончаренко В.П.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

В последнее время нейронным сетям, с целью создания самообучающихся (интеллектуальных) систем, уделяется повышенное внимание. Наиболее сложной задачей, является задача самообучения нейронной сети подобно человеческому мозгу [1, 2, 3, 4]. Решение данной задачи будет прорывом в науке и позволит создать искусственный интеллект.

В работе стоит задача создать самообучающуюся нейронную сеть деталей механической системы, которая будет определять ее состояние (готовность) [5, 6, 7, 8].

Для разработки алгоритма обучения нейронной сети возьмем единицу объема материала (рис. 1), который смоделируем в виде масс (рис. 2), связанных между собой упругими структурами (пружинами).

Каждая масса соединена с соседними массами упругими связями, которые смоделированы пружинами. Каждая единица массы удерживается шестью пружинами, которые позволяют каждой массе совершать пространственные колебания в пределах упругих деформаций пружин [9]. Своими колебаниями каждая масса через упругие связи вызывает колебания соседних масс.

Первоначально, новое исправное изделия без брака и нарушений сплошности материала деталей воспринимает нагрузку и обеспечивает надежность механической системы. Такое состояние материала примем за идеальное. Но в процессе изготовления деталей сложных механических систем на этапах их отливки, варки и обработки, в деталях образуются пустоты, неоднородности, механические повреждения, которые в последующем влияют на эксплуатацию механических систем и срок их службы.

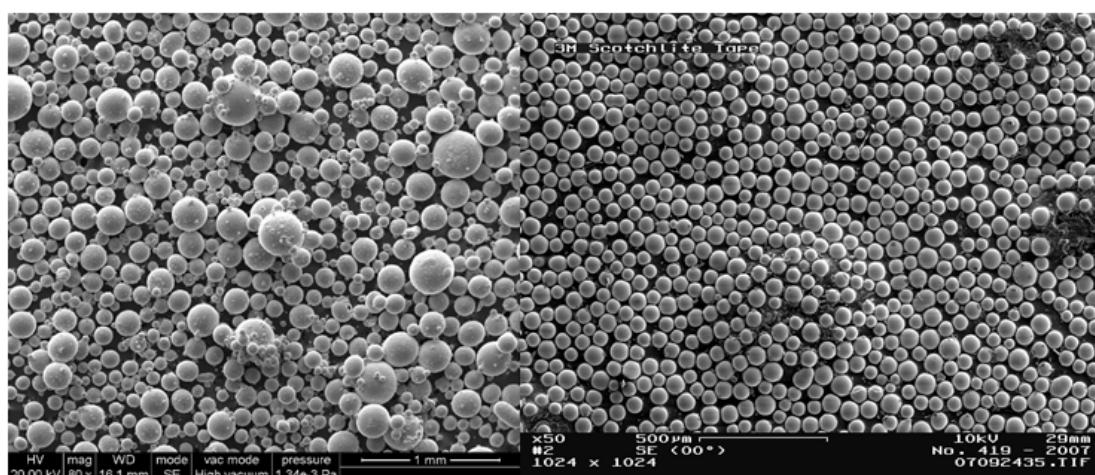


Рис. 1. Модель единицы объема материала

Каждая механическая система индивидуальна и рассматривать единый первоначальный облик для всех однообразных систем будет неправильно из-за возможных

особенностей их изготовления или сборки: разное оборудование и их износ, уровень подготовки и стаж работы специалистов, качество поставляемых деталей и расходного материала, атмосферные и биологические факторы и т.д.

Поэтому для последующего обучения нейронных систем и оценки технического состояния сложных механических систем первоначальный ее облик (портрет) будем брать для каждой системы свой с учетом дефектов, которые она приобрела на этапах проектирования, создания, доработок и модернизации.

Модель единицы объема механической системы представленной на рис. 1 можно рассматривать как систему элементов соединенных параллельно. Разрыв одной из пружин, подобно параллельному соединению элементов электрической цепи, не приводит к разрушению (отказу) системы, но снижает ее надежность. Учитывая тот факт, что критическим порогом нарушения сплошности материала является достижение 25%. В связи с тем, что каждая масса крепится 6 упругими связями, механическая система считается работоспособной если разрушены не более одной связи.

Надежность механической системы будем рассчитывать с допущением, что система и любой ее элемент (пружина) находится только в одном из двух возможных состояний – работоспособном и неработоспособном, и отказы элементов независимы. Состояние системы (работоспособное или неработоспособное) определяется состоянием элементов.

Такой метод (метод прямого перебора) [10] универсален и может использоваться для расчета надежности любой механической системы. Однако при большом количестве элементов системы N такой путь становится невозможным из-за большого объема вычислений. Но в нашем случае, для 6 пружин он может быть применен.

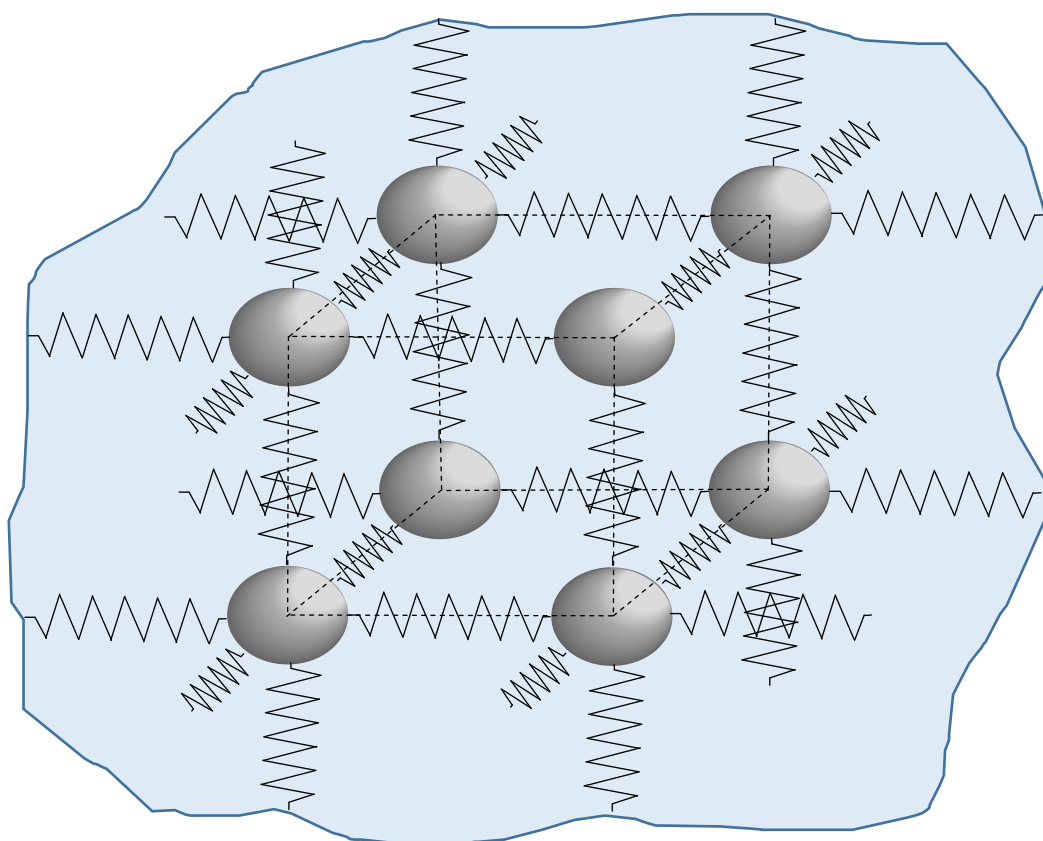


Рис. 2. Модель единицы объема материала

Систему, изображенную на рис. 2, представим как систему типа «5 из 6» – систему с параллельным соединением элементов, отказ которой произойдет, если из 6 пружин, соединенных параллельно, работоспособными окажутся не менее 5 любых пружин.

Для оценки надежности единицы объема механических систем составим таблицу 1 всех возможных состояний работоспособностей этой системы. Количество таких состояний можно определить по формуле $5^6 = 15625$. В таблице работоспособные состояния элементов системы отмечены знаком «+», неработоспособные – знаком «-», а p – вероятность безотказной работы (разрыва) пружины, q – вероятность разрыва пружины.

Таблица 1 – Возможные состояния работоспособности системы

№ сост.	Состояние пружин						Состояние системы	Вероятность состояния системы
	1	2	3	4	5	6		
1.	+	+	+	+	+	+	+	p^6
2.	-	+	+	+	+	+	+	$p^5q = p^5(1 - p)$
3.	+	-	+	+	+	+	+	$p^5q = p^5(1 - p)$
4.	+	+	-	+	+	+	+	$p^5q = p^5(1 - p)$
5.	+	+	+	-	+	+	+	$p^5q = p^5(1 - p)$
6.	+	+	+	+	-	+	+	$p^5q = p^5(1 - p)$
7.	+	+	+	+	+	-	+	$p^5q = p^5(1 - p)$
8.	-	-	+	+	+	+	-	$p^4q^2 = p^4(1 - p)^2$
9.	-	+	-	+	+	+	-	$p^4q^2 = p^4(1 - p)^2$
10.	-	+	+	-	+	+	-	$p^4q^2 = p^4(1 - p)^2$
11.	-	+	+	+	-	+	-	$p^4q^2 = p^4(1 - p)^2$
12.	-	+	+	+	+	-	-	$p^4q^2 = p^4(1 - p)^2$
13.	+	-	-	+	+	+	-	$p^4q^2 = p^4(1 - p)^2$
14.	+	-	+	-	+	+	-	$p^4q^2 = p^4(1 - p)^2$

Окончание таблицы 1

15.	+	-	+	+	-	+	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
16.	+	-	+	+	+	-	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
17.	+	+	-	-	+	+	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
18.	+	+	-	+	-	+	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
19.	+	+	-	+	+	-	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
20.	+	+	+	-	-	+	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
21.	+	+	+	-	+	-	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
22.	+	+	+	+	-	-	-	$p^4q^2 = p^4(1-p)^2$
23.	-	-	-	+	+	+	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
24.	-	-	+	-	+	+	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
25.	-	-	+	+	-	+	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
26.	-	-	+	+	+	-	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
27.	-	-	+	+	+	+	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
28.	+	-	-	-	+	+	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
29.	+	-	-	+	-	+	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
30.	+	-	-	+	+	-	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
31.	+	+	-	-	-	+	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
32.	+	+	-	-	+	-	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
33.	+	+	+	-	-	-	-	$p^3q^3 = p^3(1-p)^3$
	и так далее для трех, четырех, пяти разрушенных пружин							
15625	-	-	-	-	-	-	-	$q^6 = (1-p)^6$

Вероятность любого состояния единицы объема определяем по теореме умножения вероятностей как произведение вероятностей состояний, в которых пребывают элементы.

С учетом всех возможных состояний вероятность безотказной работы единицы объема найдем по теореме сложения вероятностей всех работоспособных сочетаний.

$$P_{1\text{об}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7.$$

После подстановки значений имеем

$$P_{1\text{об}} = p^6 + 6p^5q = p^6 + 6p^5(1-p) = p^6 + 6p^5 - 6p^6 = -5p^6 + 6p^5. \quad (1)$$

Расчет надежности единицы объема можно произвести комбинаторным методом при использовании биномиального распределения [10]

$$P_{1\text{об}} = \sum_{i=k}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

где n – количество всех пружин, которые крепятся к массам; k – количество пружин достаточных для нормального функционирования системы; $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальных коэффициент.

Подставив значения имеем:

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!1!} = 6, \quad C_6^6 = \frac{6!}{6!} = 1,$$

$$P_{1\text{об}} = 6p^5(1-p) + p^6(1-p)^0 = 6p^5 - 6p^6 + p^6 = -5p^6 + 6p^5. \quad (2)$$

В результате двух способов получены идентичные зависимости (1) и (2) для расчета вероятности безотказной работы единицы объема материала силового элемента, которые ложатся в основу функции обучения нейронной сети. Для расчета значения вероятности разрушения силового элемента, необходимо, используя одну из представленных выше методик, проведя эксперимент по уменьшению поперечного сечения до $\frac{3}{4}$ от своего первоначального значения. Эксперимент можно произвести путем циклического нагружения, имитируя полет или путем наблюдения и обследования за эксплуатируемыми летательными аппаратами. Используя полученные результаты можно с определенной степенью точности прогнозировать вероятность разрушения силовой системы (детали, агрегата) и с помощью нейронной сети постоянно отслеживать ее состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хемминг, Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг. – М.: Наука, 1972. – 138 с.
2. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 702 с.
3. Микулик, Н.А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике: Справочное пособие / Н.А. Микулик, Г.Н. Резина. – Мн.: Высшая школа, 1991. – 163 с.

4. Микулик, Н.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для технических специальностей / Н.А. Микулик, А.В. Метельский. – Мн.: НПООО “ПИОН”, 2002. – 191 с.
5. Бородич, Л.И. Справочное пособие по приближенным методам решения задач высшей математики / Л.И. Бородич [и др.]. – Мн.: Высшая школа, 1986. – 186 с.
6. Чигарев, А.В. Основы системы Mathematica 4.0. Задачи и решения / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук. – Мн.: УП “Технопринт”, 2002. – 149 с.
7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов: 4-е изд. / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1972. – 368 с.
8. Зуев, В.В. Об ударном нагружении мишени из композиционных материалов. Расчеты на прочность / В.В. Зуев // – М.: Машиностроение, 1989. – № 30. – С. 148–155.
9. Надежность технических систем и техногенный риск : учеб. пособие: в 2 ч. / А. Б. Корчагин, В. С. Сердюк, А. И. Бокарев. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРИБОФАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВАЛ/ВКЛАДЫШ ПРИ ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Дембовский И.Н., Богданович А.В.

Белорусский государственный университет, Минск

В силовых системах современных машин и оборудования при их эксплуатации происходят сложные кинетические процессы генерирования и накопления повреждений, в том числе при одновременном воздействии на их элементы внеконтактных (объемных) и контактных нагрузок при трении скольжения. Эти сложные процессы недостаточно исследованы экспериментально, также мало изучено напряженно-деформированное состояние подобных систем.

Для экспериментальной оценки взаимного и совместного влияния процессов трения и механической усталости на работоспособность материалов и моделей силовых систем в сложных условиях нагружения разработаны специальные методы износоусталостных испытаний [1–3].

В лабораторных условиях сопротивление износоусталостным повреждениям (ИУП) изучают, как правило, при испытании малоразмерных моделей силовых систем. Такие испытания проводят на специальных машинах для износоусталостных испытаний. В результате испытаний определяют количественные характеристики сопротивления ИУП. Эти характеристики могут быть использованы:

- при выборе конструкционных материалов для силовых систем и обосновании конструктивно-технологических решений;
- контроле качества материалов;
- расчетах на этапе проектирования силовых систем;
- сертификации силовых систем по критерию ИУП;
- конструировании и создании материалов с заданными физико-механическими свойствами для обеспечения требуемых характеристик сопротивления ИУП.

Один из путей разработки методов комплексных (износоусталостных) испытаний – совмещение известных методов испытания на механическую усталость и методов испытания на трение и изнашивание [1–3]. Принцип такого формирования в том случае, когда базовым методом испытания на усталость принимают изгиб с вращением. Заметим, что вращательное движение наиболее характерно для современных машин, поэтому методы являются практически важными.

Используя подобный подход, достигают той цели, что на машинах, предназначенных для износоусталостных испытаний, можно проводить и обычные испытания либо на механическую усталость, либо на трение и изнашивание в определенных условиях. Испытания на фрикционно-механическую усталость ведут согласно СТБ 1448-2004 [4].

При испытаниях на фрикционно-механическую усталость объектом испытания является трибофатическая система. На рис. 1 представлена схема испытаний на фрикционно-механическую усталость и основные размеры образца и контрообразца, образующих трибофатическую систему [5–7].

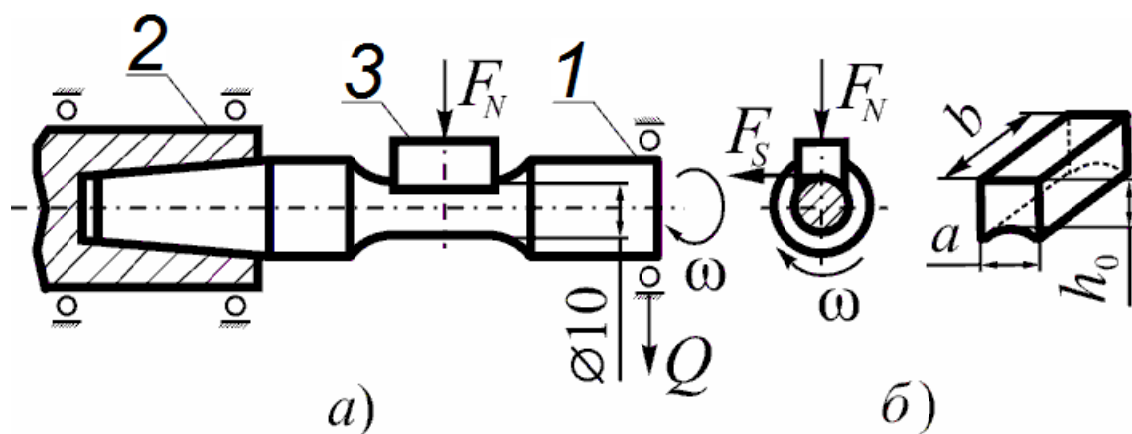


Рис. 1. Схема испытаний на фрикционно-механическую усталость:
 (а): 1 – образец; 2 – шпиндель; 3 – контрообразец (частичный вкладыш);
 (б): a – ширина, b – длина; h_0 – высота

Согласно данной схеме, цилиндрический образец 1 одним концом закреплен в шпинделе 2 и вращается с угловой скоростью ω_1 . На другом его конце приложена вертикальная изгибающая нагрузка Q (направлена вниз). К его рабочей зоне ($d = 10$ мм) прижимается под действием контактной нагрузки F_N закрепленный неподвижно контрообразец 3 (частичный вкладыш). Особенностью проводимых испытаний является то, что в опасном сечении образца возникают напряжения от одновременного действия нагрузок F_N и Q . В результате в трибофатической системе возникает комплексное повреждение – повышение температуры в зоне трения, износ контрообразца, одновременный износ образца и контрообразца, повышение вибрации и температуры в зоне трения (при испытании металл-металлической трибофатической системе) и излом образца.

Для определения характеристик сопротивления фрикционно-механической усталости необходимо построить кривую фрикционно-механической усталости [8–11]. Для построения кривой фрикционно-механической усталости в многоцикловой области строят либо кривую механической усталости по параметру фрикционных напряжений N ($\sigma_a, \tau_w = \text{const}$) (рис. 2, а) – прямой эффект (влияние процессов и условий трения и изнашивания при скольжении (определяемых уровнем τ_w) на изменение характеристик сопротивления механической усталости трибофатической системы и/или ее элементов), либо кривую фрикционной усталости по параметру амплитуды напряжений цикла N ($\tau_w, \sigma_a = \text{const}$) (рис. 2, б) – обратный эффект (влияние повторно-переменных напряжений (деформаций) (определяемых уровнем σ_a) на изменение характеристик трения и изнашивания при скольжении трибофатической системы и/или ее элементов).

Для предварительного определения программ испытания при построении кривой фрикционно-механической усталости можно использовать компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния трибофатической системы.

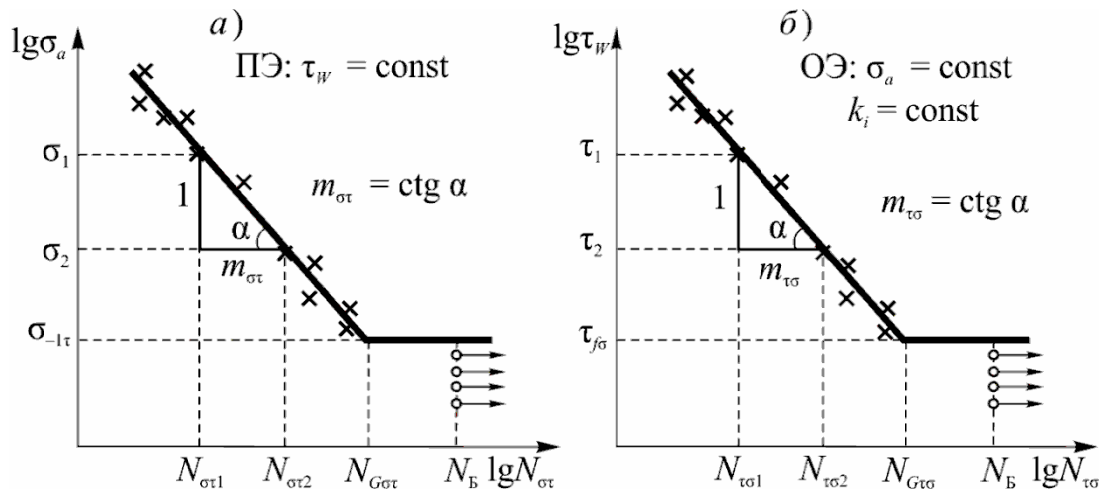


Рис. 2. Схемы кривых фрикционно-механической усталости: прямой эффект (а); обратный эффект (б)

В данной работе использовалась среда Ansys Workbench. Модель образца была выполнена в соответствии с производственным чертежом, в качестве материала использовалась конструкционная сталь с нелинейной моделью поведения. Положение контрообразца было выбрано так, чтобы напряжения возникающие под действием силы трения были в области максимальных изгибных напряжений в теле образца, в качестве материала использовался алюминиевый сплав с нелинейной моделью поведения. Износ при моделировании был задан равным 50 мкм.

Задача решалась в динамической постановке. Телу образца с помощью удаленного перемещения было задано вращение частотой 3000 об/мин. Перемещения образца были ограничены с помощью цилиндрической поддержки. Контактная нагрузка была принята равной 10 Н, а изгибающая нагрузка – 100 Н, она была направлена вверх, вниз или принималась равной нулю (рис. 3). Коэффициент трения был задан равным 0,1. Шаг конечно-элементной сетки в опасном сечении образца и в теле контрообразца был выбран равным 1 мм.

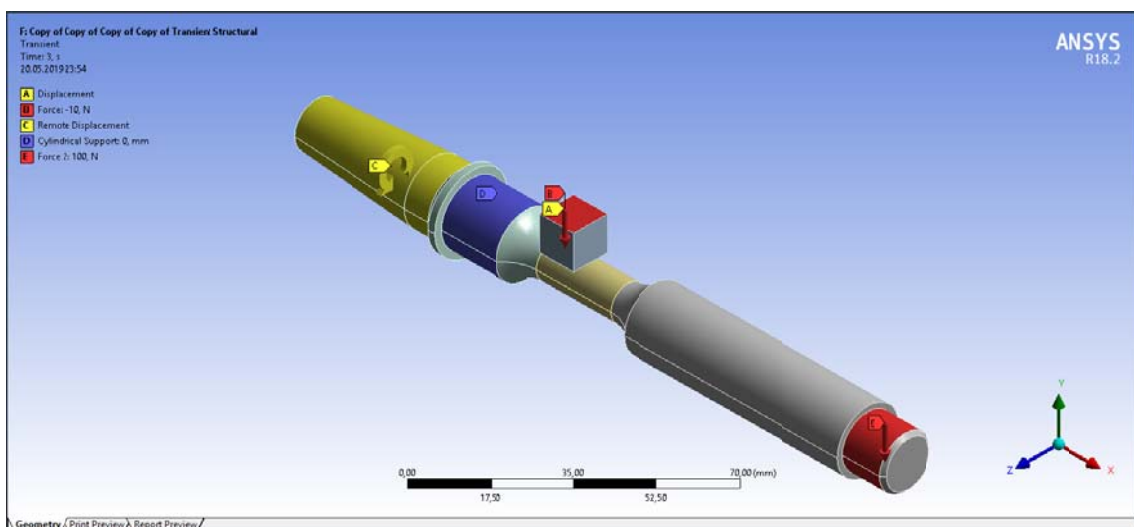


Рис. 3. Схема нагружения и закрепления модели трибофатической системы

По результатам моделирования, напряжения в рабочей части образца при изгибающей нагрузке, направленной вниз, составили около 120 МПа (рис. 4). Прогиб образца в хвостовой части составил 0,51 мм.

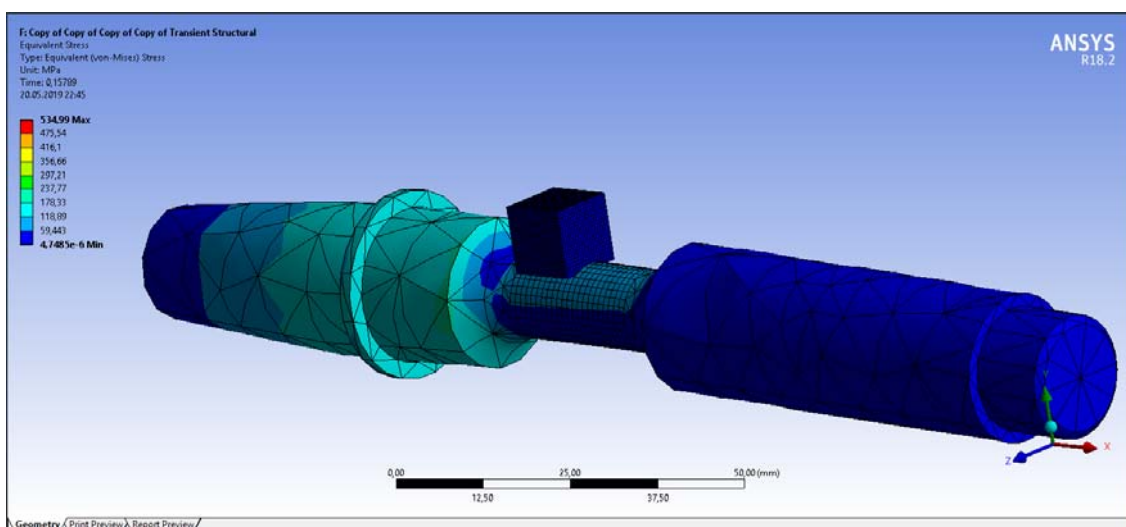


Рис. 4. Результаты моделирования трибофатической системы, изгибающая нагрузка направлена вниз

По результатам моделирования, напряжения в рабочей части образца при изгибающей нагрузке, направленной вверх, составили около 180 МПа (рис. 5). Прогиб образца в хвостовой части составил 0,47 мм.

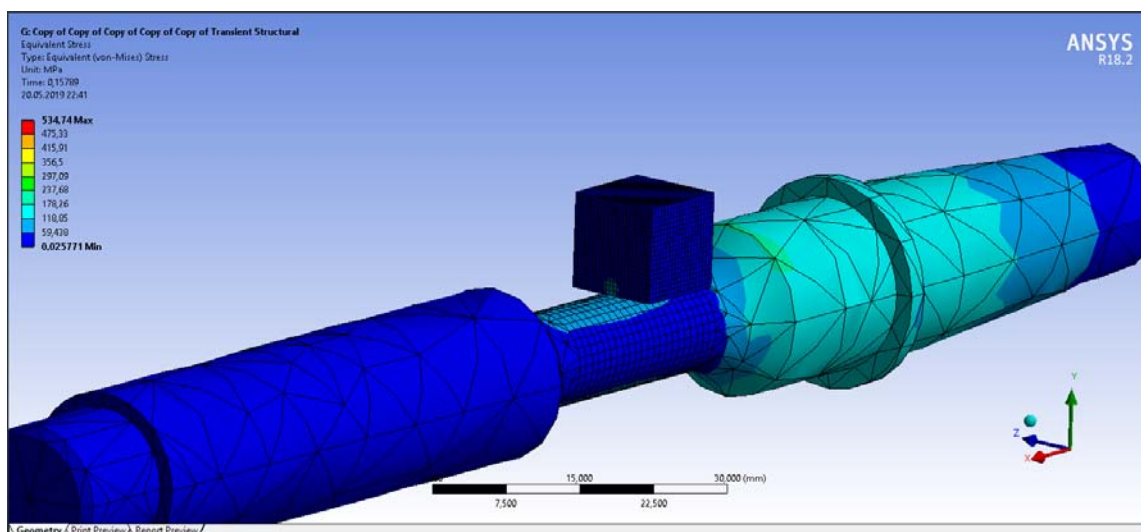


Рис. 5. Результаты моделирования трибофатической системы, изгибающая нагрузка направлена вниз

На рис. 5 хорошо видна локализация напряжений в теле контробразца, связанная с прогибом образца вверх, именно в этой области и были достигнуты напряжения в 180 МПа. Таким образом, такая схема является более опасной.

Так же было проведено моделирование данной трибофатической системы при изгибающей нагрузке равной нулю (фрикционная усталость). Результаты моделирования представлены на рис. 6.

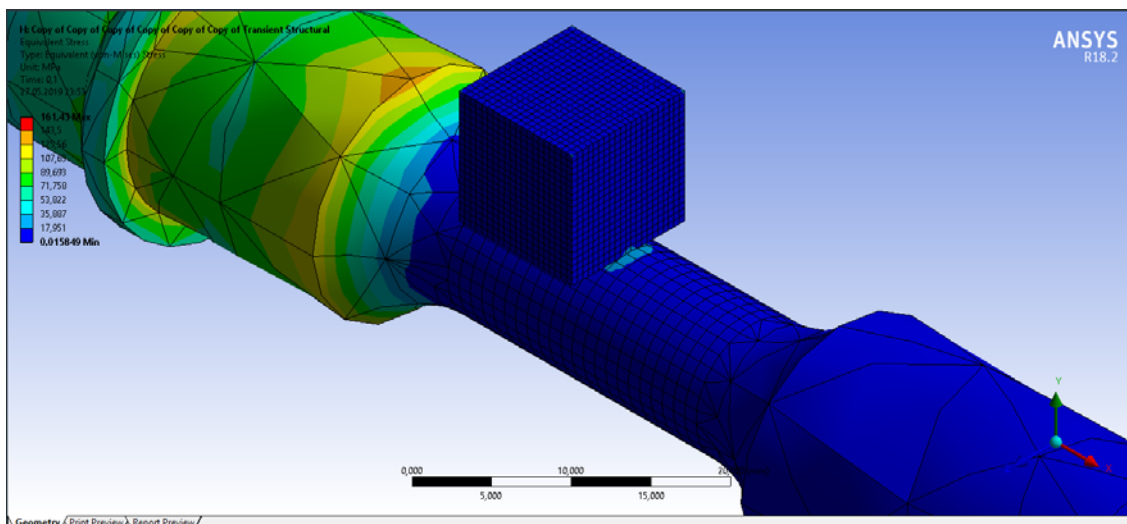


Рис. 60 Результаты моделирования трибофатической системы, изгибающая нагрузка равна нулю

Данную модель можно использовать для предварительной оценки напряженно-деформированного состояния системы вал-вкладыш при испытаниях на фрикционную и фрикционно-механическую усталость, однако для ускорения и уточнения расчетов имеет смысл использовать упрощенную модель, имеющую цилиндрическую часть вместо конусной с упорным выступом, необходимым для крепления образца. В таком случае так же удастся избежать высоких напряжений, возникших вблизи упорного кольца, по сути являющегося концентратором напряжений, которых не возникает в реальных условиях благодаря особенностям крепления образца в испытательном центре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Methods and Main Results of Tribo-Fatigue Tests / L.A. Sosnovskiy [et al.] // International Journal of Fatigue. – 2014. – V. 66. – P. 207–219.*
2. *Методы износоусталостных испытаний и их реализация на машине СИ / Н.А. Махутов [и др.] // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 1995. – № 6. – С. 17–42.*
3. *Сосновский, Л.А. Экспериментальные основания трибофатика. Сообщения 1–3 / Л.А. Сосновский // Проблемы прочности. –1997. – № 3. – С. 74–82. –№ 4. – С. 17–29.*
4. *Трибофатика. Методы износоусталостных испытаний. Ускоренные испытания на контактно-механическую усталость (Стандарт Беларуси). СТБ 1233-2000. – Минск : Госстандарт, 2000. – 16 с.*
5. *Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.*
6. *Износоусталостные повреждения и их прогнозирование (трибофатика). Науч. редактор Сосновский Л.А. / Л.А. Сосновский [и др.]– Гомель, Киев, Москва, Ухань, 2001. – 170 с.*
7. *Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2010. – 407 с.*
8. *Сосновский, Л.А. Методы износоусталостных испытаний силовых систем и их моделей / Л.А. Сосновский // Трение и износ. – 1993. – № 5. – С. 937– 952.*

9. *Высоцкий, М.С. Трибофатика – новые пути для повышения надежности машин / М.С. Высоцкий [и др.] // Весці АНБ. Серыя фіз.-тэхн. навук. – 1994. – № 4. – С. 32– 41.*

10. *Трибофатика-95 : ежегодник / под общ. ред. Л.А. Сосновского // Вып. 1 : Машины серии СИ для износоусталостных испытаний / под ред. М.С. Высоцкого / Ф.Ю. Белиц [и др.]. – Гомель : НПО «ТРИБОФАТИКА», 1996. – 80 с.*

11. *Трибофатика. Машины для износоусталостных испытаний. Общие технические требования (Стандарт Беларуси) : СТБ 1067–97. – Введ. 01.01.1998. – Мн.: ГОССТАНДАРТ, 1997. – 10 с.*

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРИБОФАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ДИСК-АВТОМОБИЛЬНАЯ ШИНА-АСФАЛЬТОБЕТОН» С ПОМОЩЬЮ РАДИОЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

¹Николаенко В.Л., ²Сечко Г.В.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Общество с ограниченной ответственностью Стрим центр, Минск

Введение. Для эффективного решения задач надежности наиболее ответственных компонентов машин и оборудования потребовалось создать трибофатику как комплексную дисциплину, возникшую на стыке теории надежности и теории механики усталостного разрушения машин и механизмов [1]. Объекты, исследуемые трибофатикой, было предложено назвать трибофатическими системами (ТФС). Среди задач ТФС, активно изучаемых в последние годы, выделяется проблема определения объемной повреждаемости (износа протектора автомобильной шины) в области контакта протектора и дорожного полотна из асфальтобетона в многоэлементной ТФС «диск-автомобильная шина-асфальтобетон» [2–4]. При этом следует отметить (наше мнение), что в [2–4] речь идет не столько о повреждаемости (термин, отсутствующий в ГОСТ [5]), сколько о долговечности. Дело в том, что использованный в [2–4] термин «повреждаемость» образован скорее всего от имеющегося в ГОСТ [5] термина «повреждение», а повреждение – это событие, заключающееся в нарушении исправного состояния объекта при сохранении работоспособного. Пример повреждения – на капоте работоспособного автомобиля со временем ухудшилось качество покраски, автомобиль не соответствует требованиям нормативно-технической документации в части окраски, но отлично едет. Следовательно, такой автомобиль согласно [5] находится в неисправном из-за повреждения, но работоспособном состоянии.

Названная проблема оценки износа протектора автомобильной шины очень сложна для решения ее математическими формулами, которые вывести практически невозможно из-за множества аргументов, часто взаимосвязанных друг с другом. Приведем пример. В работах [6, 7] 42 года назад была сделана попытка оценить долговечность металлизации интегральных схем с помощью времени сохранения работоспособности $T_{сохр}$. Выведенная результирующая формула для $T_{сохр}$ имеет вид:

$$T_{сохр} = (\beta + \alpha\tau)h_n(\alpha; \gamma) - \tau, \quad (1)$$

где α , β , τ , γ – параметры металлизации, зависящие от температуры и плотности протекающего тока, а h_n – минимальный корень уравнения

$$a(h_e^2 + \gamma)^3 + (3bn + ck + 2md)(h_e^2 + \gamma)^2 + n(cn + kd)(h_e^2 + \gamma) + \frac{1}{3}dn^3 = 0, \quad (2)$$

причем в (2) обозначено

$$a = 8h_n^4 + 20\alpha\gamma h_n^3 - 24\gamma h_n^2 - 15\alpha\gamma^2 h_n + 3\gamma^2, \quad (3)$$

$$b = 2h_n^3 + 4\alpha\gamma h_n^2 - 3\gamma h_n - \alpha\gamma^2, \quad (4)$$

$$c = 2h_n^2 + 3\alpha\gamma h_n - \gamma, \quad (5)$$

$$d = h_n + \alpha\gamma, \quad (6)$$

$$m = \alpha h_n^4 + 2(h_n^3 - \gamma h_n)(\alpha^2 \gamma - 1) + \alpha(\gamma - 6h_n^2), \quad (7)$$

$$n = \alpha h_n^2 + h_n(\alpha^2 - 1) - \alpha \gamma, \quad (8)$$

$$k = 2\alpha h_n^3 - 3h_n^2(\alpha^2 \gamma - 1) - 6\alpha \gamma h_n - \gamma(1 - \alpha^2 \gamma). \quad (9)$$

Несмотря на имеющиеся значения всех аргументов α , β , τ , γ оцениваемой величины $T_{соxp}$ выражение (1) в явном виде не решается, поэтому в [6, 7] для определения $T_{соxp}$ применена таблица, в которой значения найдены на компьютере с интервалом α от 0,00 до 50,00 через 0,25 и интервалом β от 0,000 до 0,060 через 0,005. Анализ формул (1) – (9) и сопровождающего их текста наглядно показывает, насколько сложна проблема оценки износа для решения ее математическими формулами.

Поэтому в [2–4] сходная по задачам проблема обоснованно решается с помощью компьютерного моделирования. Моделируется ТФС «диск-автомобильная шина-асфальтобетон» при задании в выбранных пределах внутреннего давления P_S в шине на поверхности S и радиальной нагрузки F_n , которая направлена вдоль оси ОУ и приложена к поверхности Н.

Формально под моделированием общепринято понимать замещение одного объекта (оригинала) другим (моделью) и фиксацию или изучение свойств оригинала путем исследования свойств модели. В свою очередь модель – это представление объекта, системы или понятия (идеи) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования. Польза от моделирования может быть достигнута только при соблюдении очевидного условия: модель адекватно отображает свойства оригинала, существенные с точки зрения цели исследования.

О точности и степени адекватности модели оригиналу в [2-4] ничего не сказано, поэтому в данной работе обсуждается предложение повысить точность модели путем эксперимента. Предложение пока чисто теоретическое, основано на изучении патентов США и выносится на обсуждение.

Общеизвестно, что в патентах содержится примерно 80 % всей научно-технической информации, опубликованной и публикуемой в мире. Патентная база США была выбрана как самое большое собрание патентов в мире (на сегодня примерно 10,5 миллиона) и самая быстрорастущая (за последних 50 лет ее объем вырос примерно в 3 раза).

Основная часть.

Описание эксперимента. В качестве эксперимента для проверки адекватности и оценки, а также повышения точности компьютерной модели ТФС «диск-автомобильная шина-асфальтобетон» предлагается следующий эксперимент: в шины реального автомобиля вставляются радиочастотные (RFID) метки. Перед экспериментом оценивается степень износа протекторов шин. Автомобиль проезжает некоторое расстояние по асфальтобетонной дороге, причем водитель следит по экрану компьютера, к которому подключен считыватель информации с метки, за тем, чтобы внутреннее давление в шинах и радиальная нагрузка соответствовали тем, которые были выбраны при компьютерном моделировании ТФС. После остановки автомобиля снова оценивается степень износа протекторов шин. Разность степени износа сравнивается с такой же при компьютерном моделировании, причем в модели задаются те параметры внутреннего давления P_S в шине на поверхности S и радиальной нагрузки F_n , которая направлена вдоль оси ОУ и приложена к поверхности Н. Если экспериментальные результаты совпали с результатами компьютерного моделирования, значит, модель полностью адекватна оригиналу – реальному процессу, происходящему в ТФС «диск-автомобильная шина-асфальтобетон». Если модель отлична от оригинала, значит, ее следует уточнять до тех пор, пока степень адекватности не достигнет некоторых заданных пределов.

Краткие сведения о радиочастотной идентификации. Принцип работы RFID-системы с меткой, реализующей технологию RFID, показан на рис. 1 [8].

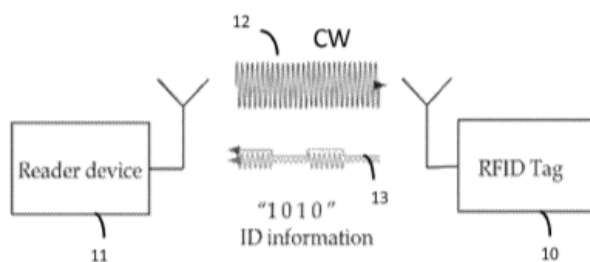


Рис. 1. Структура RFID-системы:

10 – метка; 11 – считыватель; 12 – сигнал, принятый меткой от считывателя; 13 – сигнал, отраженный меткой обратно в считыватель и содержащий данные об идентификации, ID information; CW – непрерывная волна (continuous wave)

Транспондер (поз. 10, он же RFID-метка или просто метка, он же RFID-tag), дополненный устройством считывания информации с него (поз. 11, оно же считыватель, оно же Reader device) в совокупности составляют RFID-систему. Считыватель RFID передает сканирование 12 непрерывной волны (CW, т. е. немодулированное) на назначенной частоте RF-связи, чтобы опросить удаленную метку RFID 10, и в ответ принимает RF-сигнал 13 автоматического обратного рассеяния, передаваемый меткой [8]. Более подробно технология RFID описана в монографии [10].

Предварительное обоснование возможности проведения эксперимента.

Возможность автоматического измерения давления в шинах подтверждается патентом [9] 2010 года (автор Хирохиса Сузуки (Suzuki; Hirohisa) с соавторами, патентовладельцы «Sanyo Electric Co., Ltd.» и «Akebono Brake Industry Co., Ltd.», Япония), в котором предлагается автоматическая система определения давления в шинах автомобиля с помощью RFID-меток (рис. 2). Система состоит из вспомогательной антенны (не показана), блока 6 датчиков (RFID-меток), установленных на каждой шине 4 автомобиля 2, и блоков 10 датчиков (RFID-считывателей), установленных рядом с каждой шиной в кузове 8 транспортного средства. Блок 6 датчиков (RFID-меток) определяет давление воздуха в шине и передает данные в RFID-считыватель. Каждый из считывателей уведомляет блок 12 управления транспортным средством о давлении воздуха в шине.

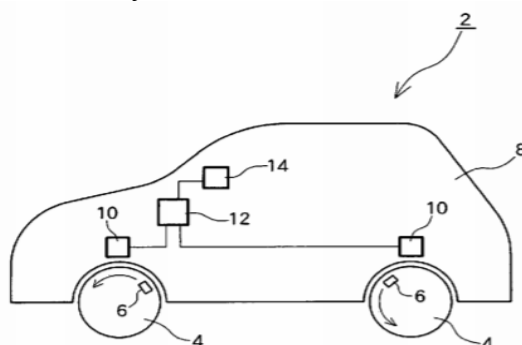


Рис. 2. Общая конфигурация системы определения давления в шинах из [7]

Блок 6 RFID-меток снабжен датчиком давления воздуха. Этот датчик накачки представляет собой датчик давления накачки емкости и представляет собой сенсорный элемент, который изменяет электрическую емкость C_s в соответствии с давлением накачки. В составные элементы шины встроена усилительная антенна, которая

уменьшает затухание колебаний электромагнитного поля, передаваемого между метками и считывателем.

Возможность автоматического измерения радиальной нагрузки подтверждается структурой полуактивной метки, показанной на рис. 3, который заимствован из монографии [10].

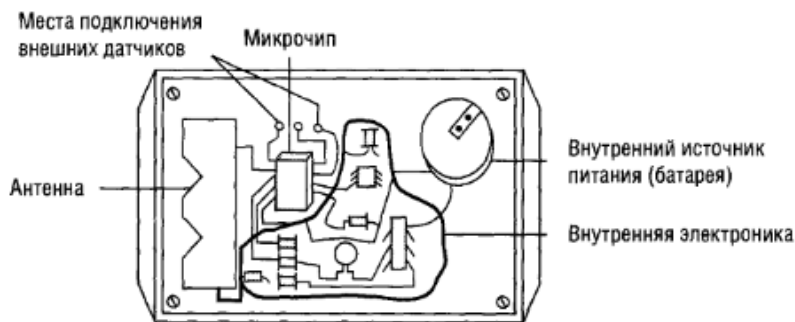


Рис. 3. Структура полуактивной метки

Как показано на рис. 4, в метке есть места подключения внешних датчиков, куда можно подключить и датчик радиальной нагрузки, запитываемый от внутреннего источника питания (батареи) метки.

Возможность подключения компьютера водителя автомобиля к считывателю (позиция II на рис. 1) информации с меток подтверждается структурой считывателя, показанной на рис. 4, который заимствован из монографии [10].

Как показано на рис. 4, в считывателе есть блок «интерфейс ввода-вывода», через который собранные данные о давлении в шинах и радиальной нагрузке могут быть переданы в компьютер. Таким образом, описанные выше технические средства радиочастотной идентификации позволяют провести эксперимент, описанный в начале основной части этой работы.

Заключение.

Как показано выше, выносимое на обсуждение предложение повысить точность моделирования трибофатической системы «диск-автомобильная шина-асфальтобетон» путем эксперимента может быть технически реализовано с помощью методов радиочастотной идентификации.

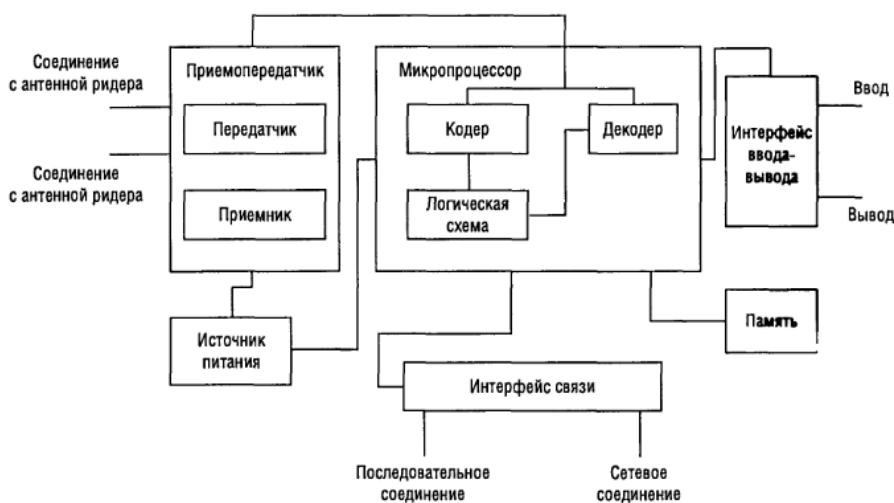


Рис. 4. Структура считывателя данных с меток

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, С. С. *Механика трибофатических систем* / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
2. Щербаков, С. С. *Объемная повреждаемость многокомпонентной системы «диск-автомобильная шина-асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки и внутреннего давления в шине* / С. С. Щербаков, Г. В. Грибовский // Межд. науч.-техн. сборник «Теоретическая и прикладная механика». – 2019. – Вып. 34.– Минск: БНТУ, 2019.– С. 307–313
3. Щербаков, С. С. *Напряженно-деформированное состояние многоэлементной системы «диск-шина-асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки и внутреннего давления в шине* / С. С. Щербаков, Г. В. Грибовский // Межд. науч.-техн. сборник «Теоретическая и прикладная механика». – 2018. – Вып. 33.– Минск: БНТУ, 2018.– С. 281–286.
4. Грибовский, Г. В. *Объемная повреждаемость трибофатической системы диск-многокомпонентная шина-асфальтобетон»* / Г. В. Грибовский, С. С. Щербаков // Межд. науч.-техн. сборник «Теоретическая и прикладная механика». – 2017. – Вып. 32.– Минск: БНТУ, 2017.– С. 277–282
5. *Надежность в технике. Термины и определения: ГОСТ 27.002-89.* – Введ.01.07.90. – М.: Изд-во стандартов, 1989. – 37 с.
6. Достанко, А. П. *Оценка надежности проводящих элементов ИС относительно эффекта массопереноса* / А. П. Достанко, Г. В Сечко, А. Н Смирнов // *Электронная техника.* – Серия 8 (Управление качеством, метрология и стандартизация. – 1977. – Вып. 2 (56). – С. 20–30.
7. Сечко, Г. В. *Разработка методов оценки времени сохранения работоспособности некоторых элементов автоматики и вычислительной техники: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.05 / Г. В. Сечко.* – Минск, 1978. – 209 с.
8. *Passive wireless sensor (пассивный беспроводной датчик): пат. США 10,140,566, МПК (Current International Class) G06K 19/07 (20060101), H04Q 9/00 (20060101), G06K 19/077 (20060101) / V. Viikari; заявитель Metso Oyj; заявл. 30.12.13; опубл. 27.11.18 // Портал патентного ведомства США [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.uspto.gov/>. – Дата доступа: 15.12.2019.*
9. *Tire sensor system and tire used for the same (Система датчиков шин и шина, используемая для того же): пат. США 7,859,393, МПК (Current International Class) B60C 23/00 (20060101) / H. Suzuki, H. Saito, E. Kuwako, T. Kunimi; заявитель Sanyo Electric Co., Ltd., Akebono Brake Industry Co., Ltd.; заявл. 17.04.06; опубл. 28.12.10 // Портал патентного ведомства США [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.uspto.gov/>. – Дата доступа: 15.12.2019.*
10. Лахири, С. *RFID. Руководство по внедрению = The RFID Sourcebook* / Лахири С. М. – М. : Кудиц-Пресс, 2007. – 312 с. / Оригинал: Lahiri, Sandip *RFID Sourcebook* / Sandip Lahiri. –New York, San Francisco and others: Prentice Hall PTR, 2005. – 304 p.

ОЦЕНКА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕСУРСА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

к.т.н. ¹Миронов Д.Н., к.т.н. ²Гончаренко В.П.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

Проблема диагностики и прогнозирования состояния сложных механических систем в течение эксплуатации является всегда актуальной. Особенно она важна при эксплуатации систем, на изготовление которых было затрачено большое количество материальных, временных и интеллектуальных затрат и от безотказности которых непосредственно зависят жизни людей и состояние других материальных ценностей.

Проблема оценки технического состояния сложных механических систем для каждого нового поколения машин становится все более актуальным в связи с ростом их стоимости и необходимостью полностью реализовывать ресурс, заложенный на этапах проектирования и создания. Надежность системы закладывается при ее проектировании, однако ресурс задается производителем, как правило, с большим коэффициентом запаса прочности по ряду причин: отсутствия конкуренции, плохо налаженной системы контроля качества, боязни снизить статус организации и т.д. А эксплуатирующие организации заинтересованы в полной окупаемости затрат, выразившееся в реализации всего потенциала приобретенной механической системы.

Для этого необходимо иметь на вооружении современные методики, позволяющие после снятия значений параметров и проведения диагностических испытаний либо продлить эксплуатацию изделия, тем самым, реализовав весь запас прочности, заложенный при изготовлении, либо досрочно отправить агрегат в ремонт, предотвратив людские жертвы или экологические катастрофы.

В сложных механических системах, состоящих из большого количества элементов принципиально невозможно учесть все факторы влияющие на такие характеристики летательного аппарата как ресурс, конструкционная прочность, трещиностойкость, масса и т. д. [1, 2, 3]. Поэтому важно на строгой научной основе уметь выделить главные факторы, которые влияют на наиболее важные структуры первого уровня [4, 5, 6].

Одной из основных задач теории и практики усталостного разрушения является подбор параметров статистической модели, описываемой уравнением механического состояния системы вида

$$t^* = f(\sigma, T, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где t^* – ресурс (долговечность), a_i – параметры модуля (элемента), который подлежит оценки, σ – напряжение, T – температура.

Применение этой формулы связано со статистической обработкой данных экспериментов, проведенных над выборкой однотипных образцов и дает возможность оценить время до разрушения.

Современные базы данных позволяют значительно расширить выборки, на основе которых находятся статистические оценки параметров системы. В некоторых случаях

удается получить численные оценки уровня адекватности на основании расчета погрешности вычислений.

Для оценки влияния различных факторов применим метод статистической регрессии. Согласно методу [7], первоначально производится сбор базы данных статистических параметров летательных аппаратов советского и зарубежного производства. После анализа и обработки собранных данных коэффициенты β эмпирической зависимости, определяются с помощью метода множественной линейной регрессии по формуле:

$$\text{Re } s = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n, \quad (1)$$

где $\text{Re } s$ – ресурс летательного аппарата; $x_1 \dots x_n$ – аэродинамические и геометрические характеристики летательного аппарата.

Согласно методу множественной линейной регрессии набору фиксированных значений независимых переменных $X = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_k\}$ ставится в соответствие значение переменной $\text{Re } s_i$.

При составлении алгоритма вычисления коэффициентов уравнения регрессии, используется матричная форма записи системы уравнений и ее решения:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T \text{Re } s, \quad (2)$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ и есть определяемые в процессе численного эксперимента коэффициенты уравнения регрессии; X – матрица аэродинамических параметров и геометрических характеристик летательных аппаратов; $\text{Re } s$ – матрица-столбец значения ресурса летательных аппаратов.

Таким образом, после осуществления вычислительного процесса по выражению (2), получаем значение коэффициентов в уравнении регрессии для определения ресурса летательного аппарата.

На базе указанной выше методики был проведен численный эксперимент [8, 9], которому предшествовал сбор и анализ статистических данных летательных аппаратов. Из всего многообразия параметров и характеристик выбраны лишь те, которые наиболее полно описывают конструкцию и аэродинамические процессы, а также влияют на надежность и долговечность летательного аппарата. К таким параметрам относятся:

Ne – мощность двигателей, M – взлетная масса летательного аппарата и его пустая масса, God – год создания летательного аппарата, l – длина летательного аппарата, $l_{кр}$ – размах крыла, $S_{кр}$ – площадь крыла, h – высота летательного аппарата, D – диаметр фюзеляжа; V_{\max} ($V_{кр}$) максимальная (крейсерская) скорость, L – дальность полета, H – эксплуатационный потолок.

В численном эксперименте использовались летательные аппараты отечественного и зарубежного производства. По выше описанной методике был проведен численный эксперимент для определения ресурса летательного аппарата. Из всего многообразия

параметров характеризующих летно-технические характеристики и конструкцию летательного аппарата выбраны лишь те, которые наиболее полно его характеризуют: оказывают влияние на ресурс и не имеют математической связи между собой (табл. 1).

При использовании выше описанной методики, было получена эмпирическая зависимость для расчета ресурса компрессора авиационного двигателя. Проверка адекватности полученного уравнения на двигателях участвующих в процессе численного эксперимента показала, что точность зависимости составила порядка 75%. Анализ полученного результата (погрешность вычисления) показал, что в абсолютном виде параметры летательных аппаратов применять нецелесообразно, так как они значительно отличаются друг от друга по порядку и вносят большую погрешность в расчет ресурса. Это и уменьшает точность уравнения.

Для уменьшения погрешности уравнения регрессии, все параметры запишем в относительном виде таким образом, чтобы они принадлежали интервалу от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{M}{M_{\max}}; \quad \overline{h} = \frac{h}{h_{\max}}; \quad \overline{S} = \frac{S}{S_{\max}}; \quad \overline{God} = \frac{God}{God_{\max}}; \quad \overline{L} = \frac{L}{L_{\max}}, \quad \overline{LL} = \frac{LL}{LL_{\max}}; \\ \overline{Ne} &= \frac{Ne}{Ne_{\max}}, \quad \overline{V} = \frac{V}{V_{\max}}, \quad \overline{SS} = \frac{SS}{SS_{\max}}, \quad \overline{H} = \frac{H}{H_{\max}}, \quad \overline{Res} = \frac{Res}{Res_{\max}}. \end{aligned} \quad (3)$$

где \overline{M} , \overline{h} , \overline{S} , \overline{God} , \overline{L} , \overline{LL} , \overline{Ne} , \overline{V} , \overline{SS} , \overline{H} , \overline{Res} - соответственно относительные величины максимальной взлетной массы, высоты летательного аппарата, площади крыла, года создания, размаха крыла, длины летательного аппарата, мощности двигателей, максимальной скорости, эксплуатационного потолка, ресурса, а M_{\max} , h_{\max} , S_{\max} , God_{\max} , L_{\max} , LL_{\max} , Ne_{\max} , V_{\max} , SS_{\max} , H_{\max} , Res_{\max} – базовое значение этих же величин.

Максимальные значения базовых параметров выбираются таким образом, чтобы их величины были больше максимального значения соответствующих величин, представленных в табл. 3. Значение базовых величин выбрано следующим образом:

$$M_{\max} = 150\,000, \quad h_{\max} = 20, \quad S_{\max} = 230, \quad God_{\max} = 2020, \quad L_{\max} = 50, \quad LL_{\max} = 50, \quad Ne_{\max} = 33\,000, \quad V_{\max} = 900, \quad SS_{\max} = 7500, \quad H_{\max} = 12\,500, \quad Res_{\max} = 40.$$

Таким образом, после выше описанных преобразований с помощью формул (3) и (3.2), а также исключения летательных аппаратов, параметры которых не возможно привести к диапазону от 0 до 1, табл. 1 примет следующий вид:

Таблица 1 – Тактико-технические характеристики летательных аппаратов

Название ЛА	Год создания я, Год	Длина L [м]	Размах крыла, L [м]	Площадь крыла, S [м ²]	Высота h, [м]	Двигатели, тяга Ne	Крейсер/макс скорость V _{кр} /V _{макс} [км/ч]	Дальность полета SS, [км]	Взлетная масса M, [кг]	Эксплуатацион- ный потолок H, [м]	Срок службы лет, [лет]
Airbus A400M (воен-транс)	2008	43,8	42,4	221,5	14,6	ТР400-D6 4x11000 л.с. (8090,61 кВт)	781/840	3300	141 000	11 300	20
Douglas DC-3 (пассажирский)	1935	19,66	29,98	91,7	5,16	Pratt & Whitney R- 1830-92 2x 1200 л.с. (2x882,61 кВт)	297/368	2160	13190	7350	20,3
АН-10 (пассажирский)	1957	34	38	121,73	9,83	ТВД АИ-20А 4 x 400 л.с. (2x294,2 кВт)	675/710	4000	51000	10000	20
АН-12 (транспортный)	1959	33,11	38,015	121,7	11,44	ТВД АИ-20М (4x4250 л.с.) (2x 3125,87 кВт)	570/660	5530	64000	9000	20
АН-14 (транспортный)	1958	11,36	22	39,7	4,36	АН-14РФ, 2x300 л.с. (2x220,65 кВт)	180/210	680	3630	5000	20
АН-24 (транспортный)	1959	23,53	29,2	74,98	8,32	ТВД АИ-24 II серия (2x2530 л.с.) (2x1875,53 кВт)	460/540	990	22500	8000	20
АН-26 (транспортный)	1968	23,8	29,2	74,98	8,575	АН-24ВТ 2x2820 л.с. (2x2074,11 кВт)	435/540	2200	24000	7500	20
АН-28 (транспортный)	1969	13	22	39,7	4,6	ТВД-10Б (С) 2 x 960 л.с. (2x706,1 кВт)	335/350	1500	6500	9000	20
АН-30 (авропоездка)	1974	24,26	29,2	74,98	8,32	АН-24ВТ 2x2820 л.с. (2x2074,11 кВт)	435/540	2630	23000	8300	20
АН-32 (транспортный)	1976	23,7	29,2	74,98	8,75	2 x АИ-20Д-5М, 2x3100 кВт (2x4200 э.л.с.)	470/530	3200	27000	9400	20
АН-38 (транспортный)	1994	15,54	22,06	39,72	4,30	2 ТВД ТВД-1500 2 x 1500 л.с. (2x1103,5 кВт)	380/405	1450	8800	9000	20
АН-70 (транспортный)	1994	40,73	44,06	204	16,38	4 ТВД Прогресс Д- 27 4 x 14000 кВт	800/890	7400	135000	12000	20

Таблица 2 – Параметры летательных аппаратов в относительном виде

Назва- ние ЛА	\overline{God}	\overline{LL}	\overline{L}	\overline{S}	\overline{h}	\overline{Ne}	\overline{V}	\overline{SS}	\overline{M}	\overline{H}	\overline{Res}
DC-3	0,957920	0,3932	0,5996	0,398696	0,258	0,2521743	0,4088889	0,288	0,202923077	0,588	0,5075
АН-12	0,969802	0,6622	0,7603	0,529131	0,572	0,8931057	0,7333333	0,7373333	0,984615385	0,72	0,5
АН-24	0,969802	0,4706	0,584	0,326	0,416	0,5358657	0,6	0,132	0,346153846	0,64	0,5
АН-26	0,974258	0,476	0,584	0,326	0,42875	0,5926029	0,6	0,2933333	0,369230769	0,6	0,5
АН-28	0,974753	0,26	0,44	0,172609	0,23	0,2017429	0,3888889	0,2	0,1	0,72	0,5
АН-30	0,977228	0,4852	0,584	0,326	0,416	0,5926	0,6	0,3506667	0,353846154	0,664	0,5
АН-32	0,978218	0,474	0,584	0,326	0,4375	0,8857143	0,5888889	0,4266667	0,415384615	0,752	0,5
АН-38	0,987129	0,3108	0,4412	0,172696	0,215	0,3152857	0,45	0,1933333	0,135384615	0,72	0,5

После выполнения вычислений по зависимости (2), используя данные табл. 2, получена эмпирическая зависимость для расчета ресурса летательных аппаратов:

$$\overline{Res} = -0,0591524 + 0,4418263\overline{God} + 0,285519\overline{LL} + 0,7003218\overline{L} - 0,5663512\overline{S} - 0,0022081\overline{h} - 0,00008425\overline{Ne} - 0,3609938\overline{V} - 0,0276417\overline{SS} + 0,0051365\overline{M} - 0,0135156\overline{H}. \quad (4)$$

Определим ресурс летательных аппаратов, используемых в расчетах (табл.2), по выражению (4). Результаты расчетов приведены в таблице 3, где $\overline{Res}_{\text{практ.}}$ – статистическое относительное значение ресурса летательных аппаратов, $\overline{Res}_{\text{теорет.}}$ – относительное значение ресурса летательного аппарата полученного с помощью выражения (4).

Таблица 3 – Проверка точности уравнения регрессии на летательных аппаратах принявших участие в численном эксперименте

Летательный аппарат	$\overline{Res}_{\text{практ.}}$	$\overline{Res}_{\text{теорет.}}$
DC-3	0,5075	0,507394268
АН-12	0,5	0,50005921
АН-24	0,5	0,499971685
АН-26	0,5	0,499648816
АН-28	0,5	0,500479332
АН-30	0,5	0,501087185
АН-32	0,5	0,499291617
АН-38	0,5	0,499571858
Среднее значение	0,5009	0,500937996

Как видно из табл. 3, средние значения $\overline{Res}_{\text{практ.}}$ и $\overline{Res}_{\text{теорет.}}$ соответственно равны 0,5009 и 0,500937996. Точность вычисления составила 99,99%.

В работе выведена зависимость для определения ресурса летательных аппаратов по его тактико-техническим характеристикам. Точность вычислений удовлетворяет требованиям инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хемминг, Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг. – М.: Наука, 1972. – 138 с.
2. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 702 с.
3. Микулик, Н.А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике: Справочное пособие / Н.А. Микулик, Г.Н. Резина. – Мн.: Высшая школа, 1991. – 163 с.
4. Огибалов, П.М. Термоустойчивость пластин и оболочек / П.М. Огибалов, В.Ф. Грибанов. – М.: МГУ, 1968. – 420 с.
5. Микулик, Н.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для технических специальностей / Н.А. Микулик, А.В. Метельский. – Мн.: НПООО “ПИОН”, 2002. – 191 с.
6. Бородич, Л.И. Справочное пособие по приближенным методам решения задач высшей математики / Л.И. Бородич, Л.И. Герасимович, Н.П. Кеда, И.Н. Мелешко. – Мн.: Высшая школа, 1986. – 186 с.
7. Чигарев, А.В. Основы системы Mathematica 4.0. Задачи и решения / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук. – Мн.: УП “Технопринт”, 2002. – 149 с.
8. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов: 4 – е изд. / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1972. – 368 с.
9. Зуев, В.В. Об ударном нагружении мишени из композиционных материалов // Расчеты на прочность / В.В. Зуев. – М.: Машиностроение, 1989. – № 30. – С. 148–155.

ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ПРИВОДАМИ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

доц. ¹Дайняк И.В., асп. ¹Титко Д.С., инж. ²Дедков А.И.
¹УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск
²ОАО «КБТЭМ-ОМО», Минск

Введение. Объединение узлов точной механики с электронными, электрическими и компьютерными компонентами мехатронные системы перемещений позволило осуществлять проектирование и производство качественно новых модулей, систем и машин с интеллектуальным управлением их функциональными движениями. С развитием электрических приводов и возможностей их применения в индустриально-производственных и транспортных системах, стала очевидна необходимость полной интеграции составляющих элементов электропривода: механики, электрических машин, силовой электроники, микропроцессорной техники и программного обеспечения для наиболее полного использования возможностей электропривода и обеспечения им прецизионного движения [1–3].

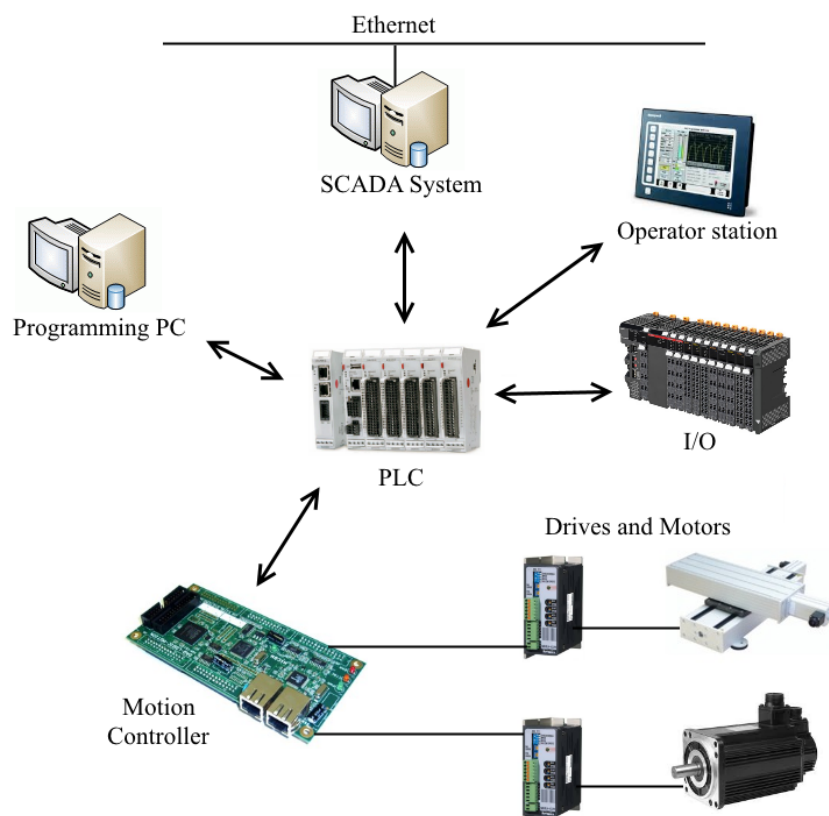


Рис. 1. Компоненты системы управления перемещениями на базе ПЛК

Компоненты мехатронной системы перемещений. Можно выделить следующие основные компоненты мехатронной системы прецизионных перемещений: объект перемещения; электропривод (с обратными связями либо без них); драйвер электропривода; интеллектуальный контроллер; аппаратно-программное обеспечение системы управления; пользовательский интерфейс. Традиционные системы перемещений используют ПЛК-технология для выполнения задачи управления и включают в свой состав некоторые аппаратные и программные элементы: ПК для визуализации, ПЛК с

различными сопроцессорами, ввод/вывод через полевую шину, управление движением через параллельный интерфейс LPT, операционную систему и различные языки программирования. Основные компоненты стандартной ПЛК-системы для управления электроприводами показаны на рис. 1.

Такие системы получили широкое применение и имеют ряд преимуществ. За счет фотоэлектронной изоляции всех модулей ввода/вывода, функции самотестирования и компонентной избыточности в больших масштабируемых ПЛК достигается большая надежность всей платформы. Большое количество интерфейсов ввода/вывода и поддержка многих типов сигналов позволяет адаптировать такую систему к различным ситуациям.

К недостаткам ПЛК-системы относится тот факт, что требуется множество компонентов для каждой отдельной функции. Как правило, такая система включает множество аппаратных платформ, баз данных и пакетов программ, поэтому их объединение и настройка для передачи команд и данных представляет собой непростую задачу.

За последние годы ПК на базе микропроцессоров стали более производительными и дешевыми, что в свою очередь привело к переходу с ПЛК на ПК в системах управления перемещениями по одной координате, а также в многокоординатных системах перемещений [4, 5]. К преимуществам новых систем относятся возможность точной визуализации, простые функции управления и хранения данных, возможность получения отчетов и др. Все это достаточно сложно реализовать в системах на ПЛК. Описанные преимущества привели к тому, что ПК получили широкое применение сегодня, особенно в области сбора данных и управления технологическими процессами.

Типичная структура системы управления электроприводом на базе ПК приведена на рис. 2.

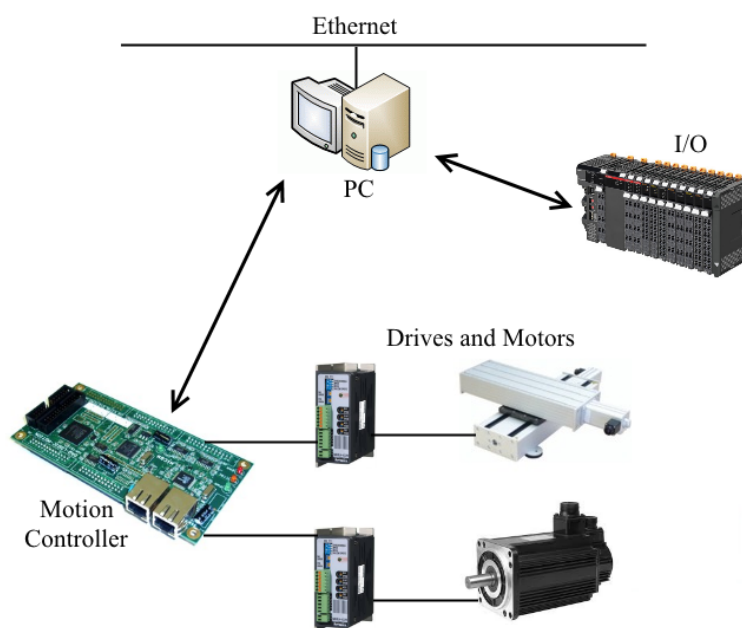


Рис. 2. Компоненты системы управления перемещениями на базе ПК

Для управления шаговыми и синхронными двигателями используются драйверы – для коммутации обмоток, контроллеры – для логического управления приводами, и комбинированные устройства. Драйверы, как правило, поддерживают функцию дробления шага, что позволяет достичь высокой разрешающей способности при построении и реализации программируемых движений.

Распространенными блоками управления являются устройства, которые воспринимают внешние управляющие сигналы 0 В/5 В и преобразуют их в соответствующие перемещения шагового двигателя. Один управляющий импульс соответствует одному шагу или микрошагу шагового двигателя. Если управляющие импульсы должны следо-

вать по определенному, заранее известному, алгоритму, то удобнее применять специализированные контроллеры шаговых двигателей, которые управляют не отдельным дискретным перемещением, а задают траекторию движения с нужными величинами скорости и ускорения, воспринимают сигналы от внешних датчиков, имеющих в системе, для синхронизации шагового привода с другими элементами технологического оборудования.

Структуры управления многокоординатными системами перемещений. Если система перемещений является многокоординатной, то есть включает несколько приводов, то необходимо реализовывать синхронные перемещения по нескольким управляемым осям (координатам). Типовой структурой системы управления для многокоординатной многоприводной системы перемещений является структура с общей шиной, показанная на рис. 3. В такой системе отдельным контроллерам от управляющего ПК по шине передаются задания на перемещение, которые обрабатываются приводами отдельных координатных осей.

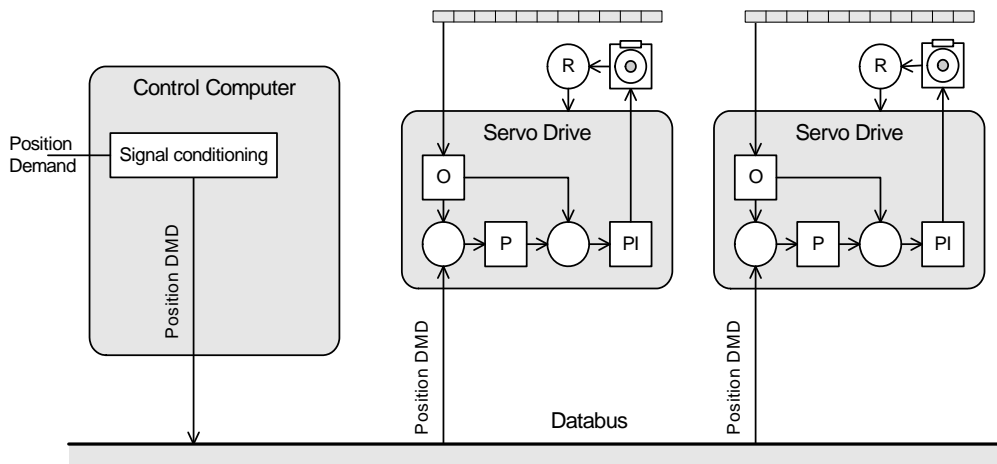


Рис. 3. Структура управления с общей шиной без сигналов обратной связи

Для более точной синхронизации работы приводов может быть реализована структура с обратной связью, показанная на рис. 4, в которой по общей шине в управляющий ПК также передаются данные о текущей позиции и скорости приводов.

В этом случае требуется реализация более широкого двунаправленного канала передачи данных по шине, что особенно критично при высоком разрешении реализуемых дискретных шаговых траекторий. Кроме того, как это показано на рис. 4, реализация блока сбора данных (так называемого «наблюдателя») о текущей позиции и скорости для всех приводов, составляющих систему перемещений, не требуется.

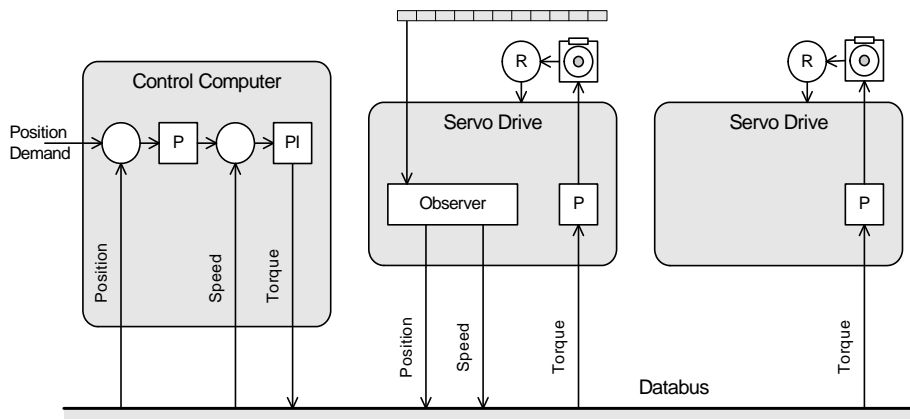


Рис. 4. Структура управления с общей шиной и сигналами обратной связи

Такая централизованная система управления предполагает реализацию всех процессов управления объектами в едином центральном органе управления. Этот орган собирает информацию о состоянии всех объектов управления, осуществляет ее обработку и каждому объекту управления выдает свою собственную управляющую команду. При таком подходе создается возможность реализации оптимального управления системой перемещений в целом, поскольку каждое управляющее воздействие вырабатывается на основе всей информации о системе.

Пример централизованной системы управления электроприводами, реализованной на базе одного управляющего ПК и промышленной шине Ethernet, показан на рис. 5, а на рис. 6 показан вариант реализации на основе технологии EtherCAT.

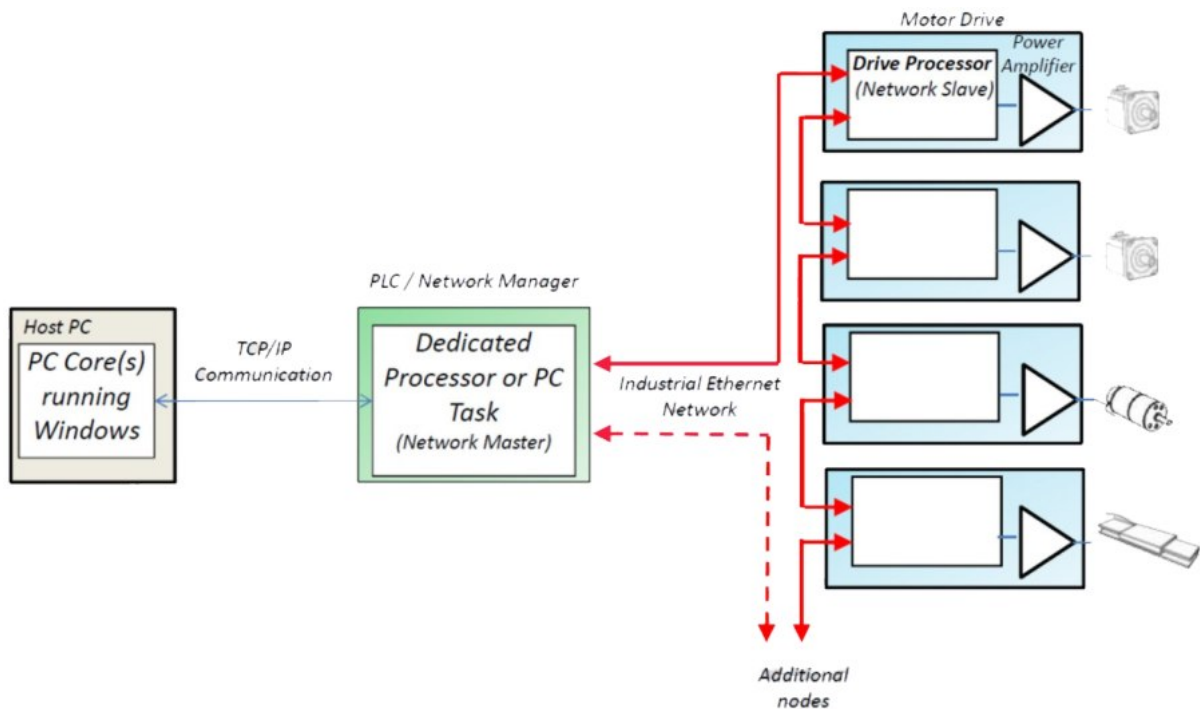


Рис. 5. Типовая структура управления электроприводами

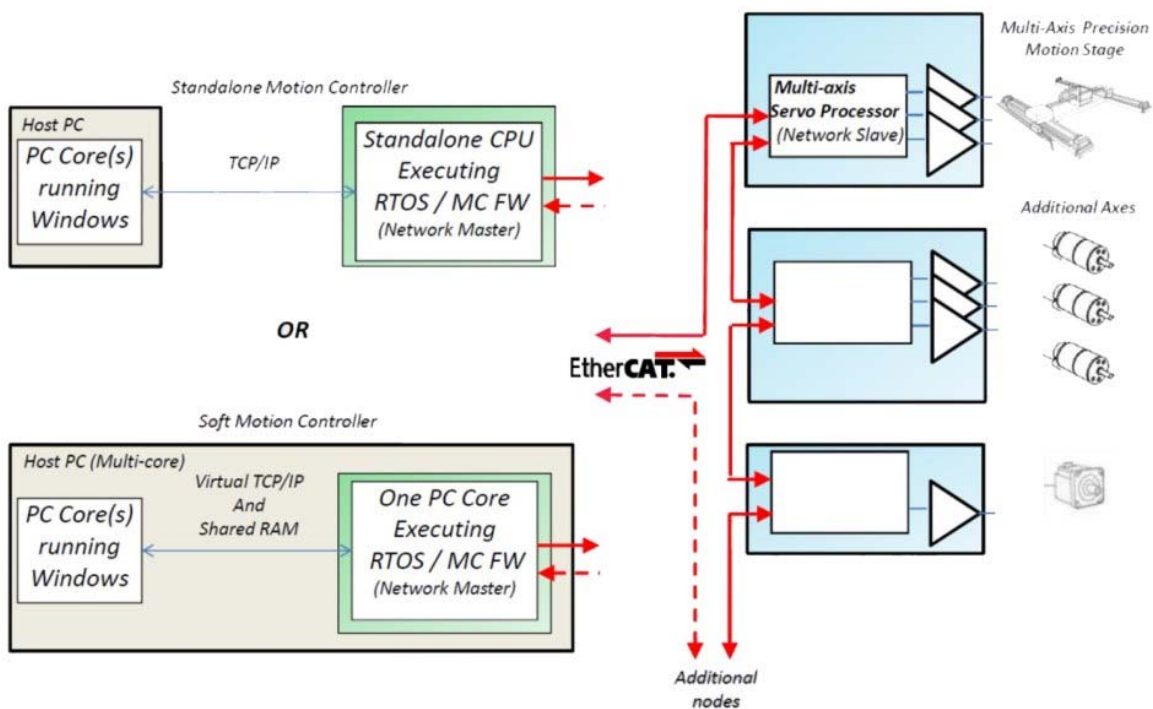


Рис. 6. Улучшенная структура управления электроприводами

В централизованной системе управления достаточно просто реализуются процессы информационного взаимодействия, исключается необходимость в пересылках промежуточных результатов процессов управления, достаточно легко осуществляется корректировка оперативно изменяющихся данных. Возникает возможность достижения максимальной эксплуатационной эффективности при минимальной избыточности технических средств.

Однако у этого подхода есть недостатки:

- необходимость для органа управления собирать, запоминать и обрабатывать чрезвычайно большие объемы информации;
- наличие запоминающих устройств очень большого объема;
- необходимость использования вычислительных средств очень высокой производительности;
- чрезвычайно высокие требования по надежности ко всем элементам технического обеспечения и ко всем элементам программного обеспечения, потому что выход из строя любого элемента приводит к выходу из строя всей системы;
- высокая суммарная протяженность и перегруженность каналов связи при наличии территориально разнесенных объектов управления;
- значительное усложнение алгоритмов управления при увеличении количества модулей движения.

В централизованном виде управления существует еще одна разновидность системы управления – так называемая централизованная рассредоточенная структура. В отличие от полностью централизованной структуры она не имеет четкой локализации в едином управляющем органе. Ее использование позволяет снизить требования к объемам памяти, производительности и надежности каждого управляющего органа без снижения качества управления, суммарная протяженность и стоимость каналов связи в такой системе может быть снижена. Тем не менее, есть и недостатки:

- усложненность информационных процессов вследствие необходимости обмена данными между центрами обработки;
- сложность корректировки хранимой в памяти информации;
- значительная избыточность технических средств и, следовательно, повышение расходов на их приобретение, монтаж и эксплуатацию;
- сложность синхронизации процессов обмена информацией.

В данной работе не рассматриваются системы управления, основанные на поведении, так как они относятся к управлению роботами. В таких системах производится декомпозиция элементов системы управления на модули выполнения задач. Каждый из таких модулей непосредственно подключен к датчикам и модулям движения, при этом используется только информация, необходимая для выполнения специфических задач. Модули поведения объединяются в слои, где верхний слой переопределяет некоторые аспекты нижнего слоя, а взаимодействие между слоями задается жесткими связями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарский, В.В. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. Жарский, В.В. Планарный привод прямого действия для многокоординатной системы перемещений / В.В. Жарский // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 44–49.
3. Жарский, В.В. Привод прямого действия / В.В. Жарский // Ремонт. Инновации. Технологии. Модернизация : специализированный журнал. – 2009. – № 7(45). – С. 26.
4. Программируемые движения в прецизионных системах перемещений : мо-

ногр. / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : ФУАинформ, 2008. – 206 с.

5. Joos, H-D. *A methodology for multi-objective design assessment and flight control synthesis tuning* / H-D. Joos // *Aerospace Science and Technology*. – 1999. – P. 161–176.

6. Karakaya, S. *A New Mobile Robot Toolbox for Matlab* / S. Karakaya, G. Kucukyildiz, H. Ocak // *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. – 2017. – Vol. 87, Iss. 1. – P. 125–140.

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ НА ГИБРИДНОМ КОЛЬЦЕВОМ ПРИВОДЕ

проф. ¹Карпович С.Е., ¹Поляковский В.В., ²Обиходов П.А.,
¹Димидко И.А., студ. ¹Евдаков А.А.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

²УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введение. На сегодняшний день весьма актуальной является задача построения и исследования исполнительных механизмов параллельной кинематики для мехатронных систем координатных перемещений с возможностью их структурного реконфигурирования в зависимости от требуемой технологической направленности оборудования, в которое встраивается эта система. Среди кинематических характеристик при разработке системы перемещений, в первую очередь, необходимо учитывать способность реализации программируемых движений с заданным числом степеней свободы, поскольку влияние данного параметра на выбор структуры, конструкции и остальные характеристики является определяющим.

Решение этой задачи нами было выполнено на структурно-топологическом уровне [1, 2], что позволило разработать концепцию построения управляемого движения в трехмерном пространстве на базе композиционного использования многокоординатного привода прямого действия и реконфигурируемых механизмов параллельной кинематики. В соответствии с этой концепцией в настоящей работе исследованы две системы перемещений, полученные нами путем реконфигурирования механизма параллельной кинематики на гибридном кольцевом приводе прямого действия. Исходя из предложенного реконфигурирования исходная система перемещений состоит из механизма параллельной кинематики на основе пространственной группы Ассура [3, 4] нулевой подвижности, которая своими подвижными шатунами соединяется сферическими шарнирами с подвижными ведущими элементами привода, не изменяя его суммарную степень свободы.

Механизмы параллельной кинематики на кольцевом приводе. На рис. 1 представлена разработанная нами система перемещений с шестью степенями свободы на кольцевом сегментном шаговом двигателе, которая состоит из шатунов 1, 2, 3, 4, 5, 6, с одной стороны связанных сферическими шарнирами 7, 8, 9, 10, 11, 12 с подвижной платформой 13, а с другой стороны связанных сферическими шарнирами 14, 15, 16, 17, 18, 19 с шестью управляемыми подвижными сегментными модулями кольцевого сегментного шагового двигателя, причем подвижные сегментные модули выполнены в виде шести автономно управляемых индукторов 20, 21, 22, 23, 24, 25 шагового двигателя, которые установлены на неподвижную направляющую основания статора 26, имеющего замкнутую кольцевую структуру. Кольцевой сегментный шаговый двигатель разработан в нашей научно-исследовательской группе НИГ 3.2 «Мехатроника и микросистемы».

Система перемещений работает следующим образом. При перемещении подвижных индукторов 20, 21, 22, 23, 24, 25 в соответствии с задаваемыми на входе системы законами их движения по неподвижной направляющей основания статора 26 кольцевого сегментного шагового двигателя, через сферические шарниры 14, 15, 16, 17, 18, 19, шатуны 1, 2, 3, 4, 5, 6 и, соответственно, сферические шарниры 7, 8, 9, 10, 11, 12 приводится в движение платформа 13. В зависимости от задаваемых угловых положений ин-

дукторов 20, 21, 22, 23, 24, 25 платформа 13 принимает однозначно соответствующие им положение и ориентацию в пространстве.

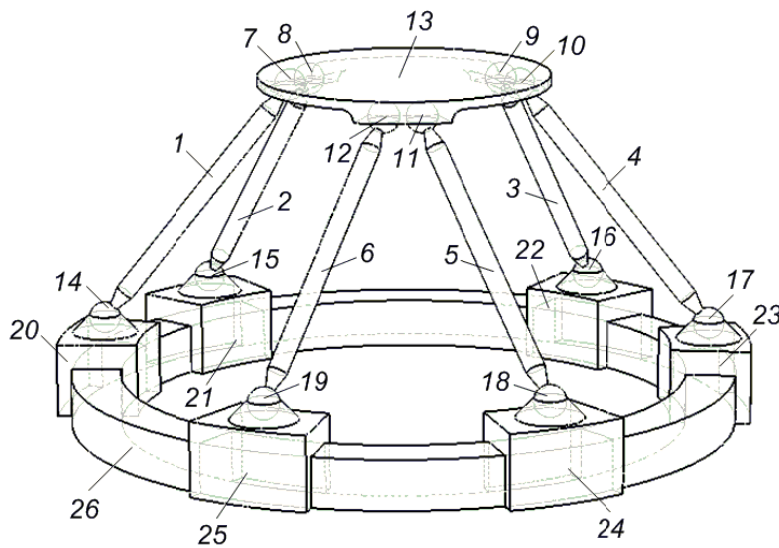


Рис. 1. Система перемещений с шестью степенями свободы

В результате реализуются прецизионные движения с шестью степенями свободы, обеспечивая в то же время высокие динамические характеристики перемещений объекта в пространстве. При этом обеспечивается способность реализации движений разворота вокруг вертикальной оси в диапазоне ± 360 градусов, что расширяет область применения для построения систем перемещений современного прецизионного, фрезерного, сверлильного оборудования, прецизионных промышленных роботов или платформ, например, для телескопов, лазеров, телекоммуникационных антенн.

На рис. 2 представлена реконфигурируемая система перемещений полученная из исходной (рис. 1) с тремя треугольными шатунами, позволяющая реализовать три степени свободы. Эта система запатентована с участием автора работы (патент № и 20170203; опубл. 30.04.2018). Она состоит из механизма параллельной кинематики в виде раскрывающегося тетраэдра и трехкоординатного кольцевого сегментного двигателя. Механизм параллельной кинематики построен на группе Асура третьего класса, которая состоит из трех шатунов в виде треугольных звеньев 8 – 9, 10 – 11, 12 – 13, связанных сферическими шарнирами 5, 6, 7 с управляемыми подвижными сегментными модулями 2, 3, 4, а соответствующими вращательными шарнирами с подвижной треугольной платформой. При перемещении сегментных модулей 2, 3, 4 по неподвижной кольцевой направляющей статора 1, их движение через сферические шарниры, шатуны, и вращательные шарниры механизма параллельной кинематики передается на исполнительное звено – треугольную платформу 23, которая принимает однозначное положение и ориентацию в трехмерном пространстве. Система перемещений (рис. 2) позволяет реализовывать прецизионные движения по шести взаимосвязанным координатам в трехмерном пространстве, включая три линейные и три угловые, обеспечивая при этом время высокие точностные и динамические характеристики перемещения объекта. При этом обеспечивается технический результат при довольно простой и дешевой в изготовлении конструкции самого исполнительного механизма. Способность реализации дополнительного переносного движения управляемого разворота вокруг вертикальной оси в диапазоне $\pm 360^\circ$ расширяет область управляемого движения платформой.

Ниже представлена разработанная алгоритмизация математических моделей позиционирования выходного звена (рабочей платформы) в зависимости от положения трех автономно управляемых сегментных модулей движения на кольцевой на-

правляющей гибридного трехкоординатного привода [1, 3], который разработан в нашей научно-исследовательской группе.

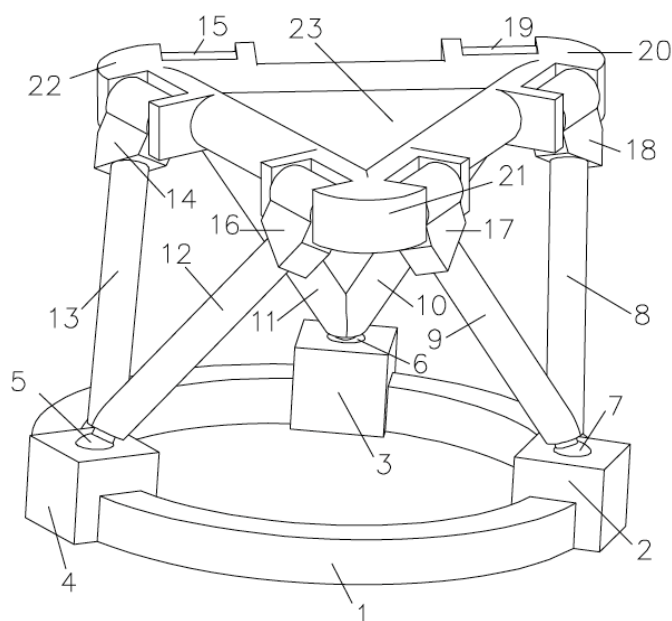


Рис. 2. Система перемещений с тремя степенями свободы

Принципиальная схема конструкции типового подвижного модуля поворотных координат систем перемещений изображенных на рис. 1 и 2, показана на рис. 3. Фрагментально модуль со статором образует локальный синхронных двигатель, который состоит из основания 1, на котором расположен статор, включающий магнитопровод 2 и постоянные магниты 3, расположенные с чередующей полярностью магнитных полюсов вдоль направления перемещения.

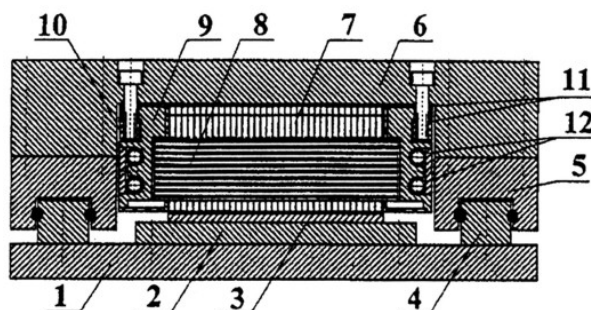


Рис. 3. Конструкция подвижного модуля

На основании 1 закреплены две линейные направляющие 4 с подшипниками 5, на которых с помощью каретки 6 закреплен якорь двигателя. Якорь состоит из ряда П-образных магнитопроводов 7 с обмотками 8 управления, закрепленных с помощью теплопроводящего компаунда и выступов в металлическом немагнитном, например, из дюралюминия, корпусе 9. Корпус 9 с помощью несущей балки 10 крепится к каретке 6 и теплоизолирован от нее и балки 10 посредством прокладок 11. Для подведения потока охлаждающей жидкости корпус 9 снабжен каналами 12.

Мехатронная система перемещений. Структура интегрирования систем перемещений, представленных на рис. 1 и рис. 2 в мехатронную систему параллельной кинематики представлена на рис. 4 на примере системы перемещений с шестью степенями свободы.

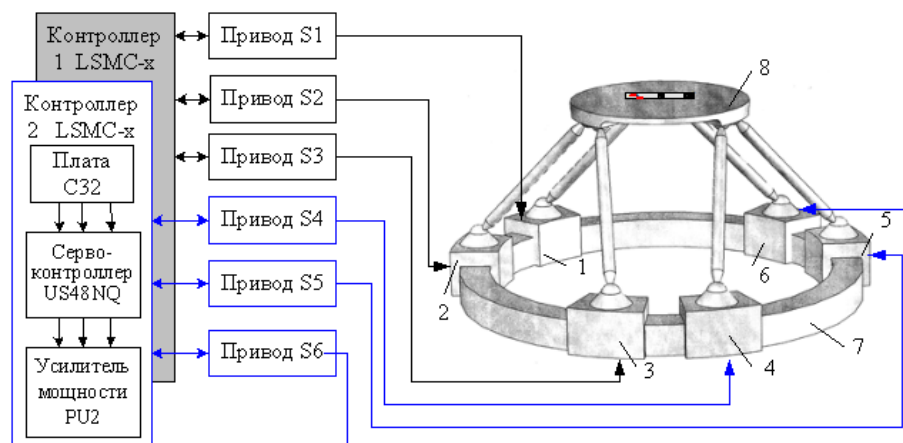


Рис. 4. Структура мехатронной системы перемещений

Она состоит из шестикоординатного исполнительного манипулятора с гибридной структурой, шести сегментных синхронных двигателей 1, 2, 3, 4, 5, 6 и шести параллельных кинематических цепей механизма параллельной кинематики, звенья которых через сферические шарниры передают управляемое движение на рабочую каретку 8.

Исполнительные двигатели входят в состав координатных приводов S_1, S_2, \dots, S_6 , согласованная работа которых обеспечивается управляющей программой контроллера в соответствии со структурной схемой.

Использование технологии EtherCAT в системе управления мехатронной системой перемещений (рис. 4) позволяет обеспечить необходимое быстродействие канала передачи данных, в том числе и в сверхпрецизионном оборудовании, характеризующимся высокой разрядностью данных и большим количеством сегментов траектории. Тем самым достигается оптимальное разделение функций между компьютером и системой управления LSMC, позволяющее полностью использовать ресурс последней для решения в реальном времени задач генерации траектории, сплайн-интерполяции, обработки сигналов датчика, расчета положения и регулирования привода.

Рассмотренные системы перемещений предназначены для использования в качестве прецизионных координатных позиционеров для сборочного и оптико-механического оборудования производства изделия электронной техники. Они могут быть использованы в качестве исполнительных механизмов при юстировке оптических элементов в объективах проекционных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. Литвинов, Е.А. Построение многокоординатной системы перемещений на базе механизма параллельной кинематики / Е.А. Литвинов, В.В. Жарский, М.А. Ареби // Доклады БГУИР. – 2009. – № 8(46). – С. 79–84.
3. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики : монография / С.Е. Карпович [и др.]; под ред. проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2017. – 254 с.
4. Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warszawa : PWN, 2001. – 351 s.

МЕТОД ПРОЕКТНОГО РАСЧЕТА ОСЕЙ ПО КРИТЕРИЮ СОПРОТИВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ

¹П.П. Капуста, ²П.П. Капуста-мл.

¹Белорусский национальный технический университет,

²Минский завод колесных тягачей

г. Минск, Беларусь

В конкурентных условиях, особую актуальность имеют вопросы повышения качества выпускаемых машин и деталей, их технического уровня, технологичности, технико-экономических характеристик и безопасности в эксплуатации.

Для обоснования метода проектной оценки массогабаритных характеристик осей по критерию сопротивления усталости на рис. 1 приведено фото эксплуатационного усталостного разрушения оси прицепа устаревшей конструкции, где неудачно использовано штифтовое соединение, создавшее концентрацию напряжений в опасном сечении оси (снята с производства).

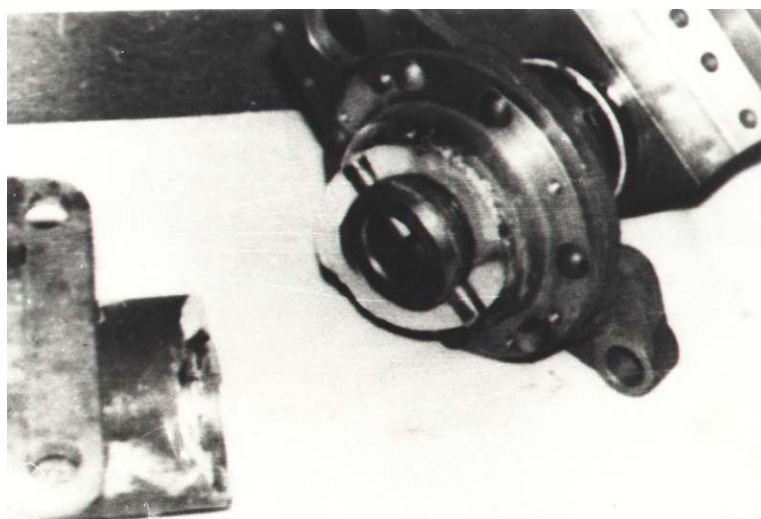


Рис. 1. Эксплуатационное усталостное разрушение оси прицепа устаревшей конструкции (снята с производства)

При стендовых испытаниях (проведены под руководством автора¹ совместно с инженером Слабко И.А.) осей прицепов перспективной конструкции установлено, что усталостное разрушение происходит в нижней растянутой зоне от действия циклических максимальных изгибающих напряжений (рис. 2, 3), в конструкции которой использованы дугообразные сварные соединения, галтели в местах изменения диаметров подвержены ППД накаткой шариковой головкой, создавшими остаточные сжимающие напряжения и обеспечившие повышение предела выносливости и ресурса в км. пробега.

Расчетно-экспериментальные исследования перспективной оси прицепа показали правильность конструкции, в т. ч. – выбора мест сварных соединений и других концентраторов напряжений (галтели и т.д.), что подтверждено расположением трещин (в нижней растянутой зоне от действия максимальных изгибающих напря-

жений) практически всех, доведенных до разрушения при стендовых испытаниях балок осей (рис. 2, 3, 4, 5, 6).

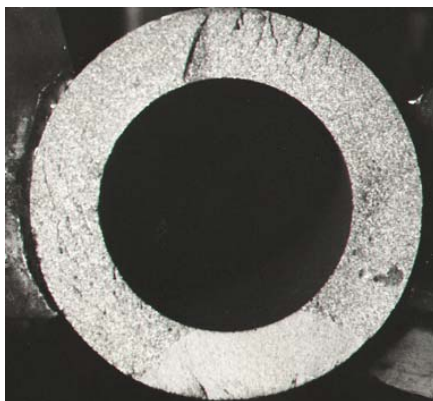


Рис. 2. Усталостное разрушение оси прицепа перспективной конструкции

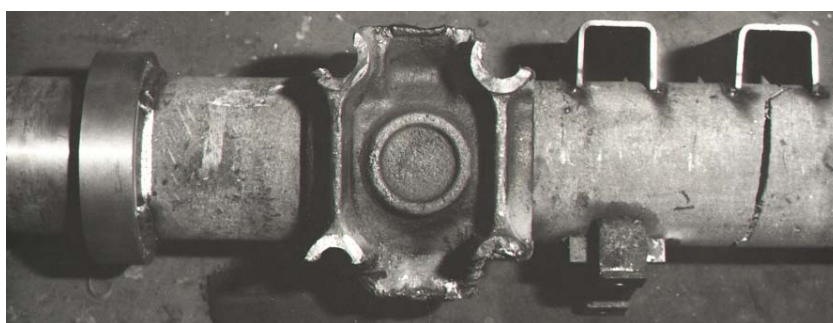


Рис. 3. Усталостное стендовое разрушение оси прицепа перспективной конструкции в нижней растянутой зоне от действия максимальных изгибающих напряжений

Результаты проведенных исследований использованы для разработки методик ресурсного проектирования несущих систем (осей, рам, элементов подвесок) и при проектировании автотранспортных средств Минского автомобильного завода.

Применение разработанного подхода и методики кратко проиллюстрируем на примере проектирования прицепа-самосвала (см. рис. 4) и его основных несущих систем и элементов (на примере оси, см. рис. 5) [1, 2].

На первом этапе исследования прогнозируемой эксплуатационной нагруженности проектируемого прицепа создавались трехмерные модели его основных систем: платформы, рамы, тележки, балок осей, колес, гидроцилиндра и т.д. Разработка конечно-элементных моделей и исследование статической нагруженности и напряженно-деформированного состояния (НДС) основных несущих систем и элементов прицепа производилась по соответствующим методикам. Были созданы конечно-элементные модели и произведена оценка НДС рамы и оси проектируемого прицепа [1].

Модели создавались в пакете трехмерного моделирования, далее созданные файлы импортировались в специальный формат для получения файлов, содержащих информацию об инерционных характеристиках описанных элементов проектируемого прицепа, импортировались в пакет динамического моделирования. В описанном пакете производилась дальнейшая сборка модели и ее динамический расчет, целью которого ставилось определение динамических нагрузок на несущие элементы прицепа в условиях его движения с заданной скоростью в заданных дорожных условиях. Нагрузки в этих точках получены в пакете динамического моделирования [1, 2].

Картина распределения напряжений в оси при статически действующей полной нагрузке приведена на рис. 5 и 6.

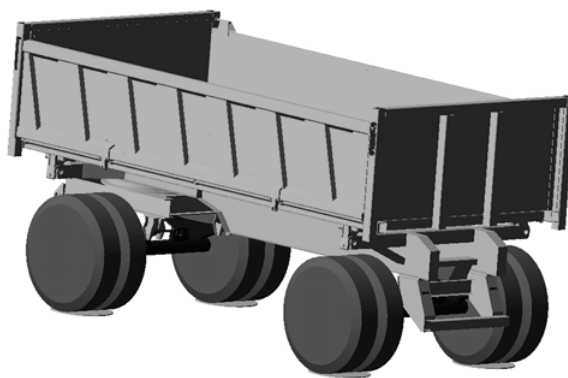


Рис. 4. Динамическая виртуальная

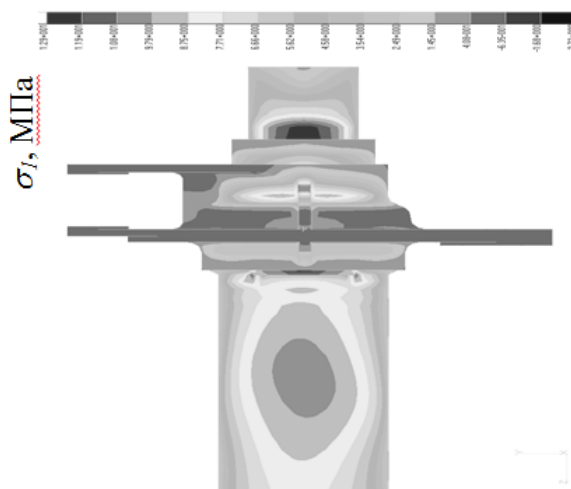


Рис. 5. Опасные зоны оси по максимальным растягивающим напряжениям σ_1

Полуось для установки подшипников колес изготовлена из стали 40Х. Наиболее нагружен локальный элемент – галтель в месте изменения диаметра основной трубной заготовки из стали 45 и прессовой посадки литого тормозного суппорта из стали 40Л. По этому элементу определялась зависимость напряжений от времени при случайном процессе нагружения, реализованному в пакете динамического моделирования и представляющему расчет нагрузок при движении прицепа по неровной дороге. В результате совместного анализа результатов расчетно-экспериментальных исследований можно сделать вывод, что в данной конструкции удачно применен принцип «не навреди» при выборе геометрических соотношений, методов сборки деталей и расположения концентраторов напряжений. Это означает, что конструкция и технология сборки оси не приводят к снижению несущей способности основной несущей трубной детали балки оси, составляющей наибольшую удельную металлоемкость изделия.

Данная конструкция оси использована для разработки нового модельного ряда осей с различной нагрузкой на ось и внедрена в серийное производство Минского автозавода¹ [3].

В связи с этим обоснована необходимость проектирования осей по основной несущей балке с ограниченным запасом прочности и оптимальными массогабаритными характеристиками. Применение методов расчета на сопротивление усталости на стадии проектирования позволяет найти наиболее приемлемый вариант конструкции.

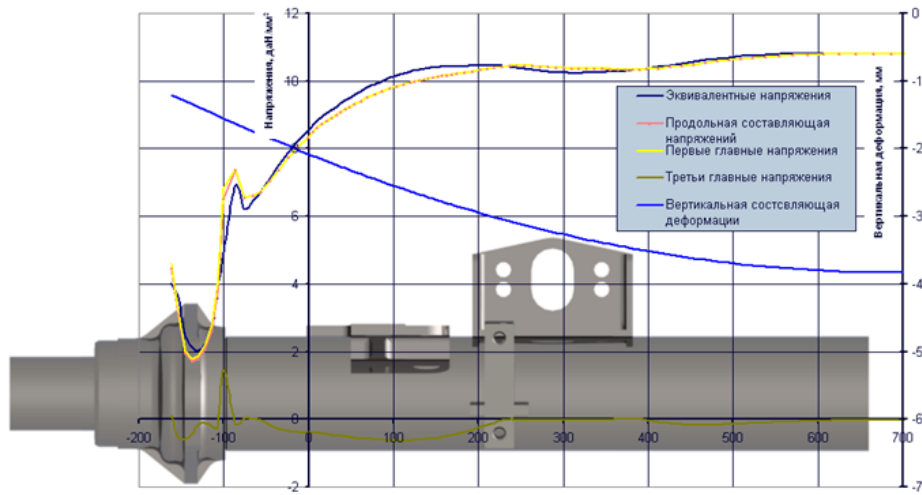


Рис. 6. Характеристики НДС балки оси прицепа-самосвала снизу

Данная конструкция оси использована для разработки нового модельного ряда осей с различной нагрузкой на ось и внедрена в серийное производство Минского автозавода¹ [3].

В связи с этим обоснована необходимость проектирования осей по основной несущей балке с ограниченным запасом прочности и оптимальными массогабаритными характеристиками. Применение методов расчета на сопротивление усталости на стадии проектирования позволяет найти наиболее приемлемый вариант конструкции.

Разработка метода решения задачи.

В настоящее время расчет на сопротивление усталости проводят как проверочный по классическому условию $S_f \geq [S_f]$ [4, 5, 6]. Практика проектирования показывает, что S_f , как правило, значительно отличается, чаще в большую сторону, от $[S_f]$, что значительно затрудняет получение оптимальных массогабаритных параметров валов, конструируемых на них узлов и агрегатов. Для усовершенствования существующей методики, возможно проведение проектного расчета с учетом современных технологий виртуального моделирования и количественного обоснования компоновочных решений деталей.

С учетом работы осей в основном при одноосном напряженном состоянии (циклический изгиб), по классической схеме проектные расчеты проводятся, как правило, в два этапа.

Первый этап, применяемый в практике проектирования на стадии анализа кинематических схем, предусматривает приближенную оценку размеров сечения оси, например – диаметра D_* , (1) по известному изгибающему моменту M_u в рассчитываемом сечении и допускаемым нормальным напряжениям при изгибе $[\sigma_u]$

$$D_* \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_u}{\pi \cdot [\sigma_u]}} \quad (1)$$

Второй этап, применяемый в практике проектирования на стадии анализа предварительных компоновочных решений и схем, предусматривает оценку расчетного коэффициента запаса усталостной прочности S_f и сравнение его с допускаемым $[S_f]$ по формуле (2).

$$S_f = S_{f\sigma} \geq [S_f],$$

2)

где: $S_f (S_{f\sigma})$ и $[S_f]$ – соответственно, расчетный и допускаемый коэффициенты запаса усталостной прочности при изгибе; $S_{f\sigma}$ – расчетный коэффициент запаса усталостной прочности при действии изгиба напр, определяемые по формуле (3).

$$S_{f\sigma} = \frac{\sigma_R}{\frac{K_{\sigma D}}{K_{L\sigma}} \cdot \sigma_a}, \quad (3)$$

где: σ_R – предел выносливости материала при коэффициенте асимметрии циклов напряжений R или, как частный случай, σ_{-1} – при симметричном цикле нагружения, в МПа (например, для используемой марки стали, определенные на полированных образцах стандартных размеров [5, 6]) при изгибе;

$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ – соответственно, изгибающие в вертикальной M_x и горизонтальной M_y плоскостях моменты, определяемые по эпюрам для рассчитываемого поперечного сечения;

σ_a – амплитуда нормальных напряжений в МПа при изгибе σ_u (4):

$$\sigma_a = \sigma_u = \frac{M_u}{W_{xd}}; \quad (4)$$

$K_{\sigma D}$ – общий коэффициент снижения предела выносливости оси в рассчитываемом сечении по нормальным напряжениям при изгибе (5) [4, 5, 6];

$$K_{\sigma D} = \left(\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{K_{v\sigma} \cdot K_{A\sigma}}; \quad (5)$$

K_{σ} – коэффициент концентрации нормальных напряжений при изгибе [4, 5, 6];

$K_{d\sigma}$ – коэффициент влияния размеров рассчитываемого поперечного сечения по нормальным напряжениям при изгибе [4, 5, 6];

$\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}}$ – отношение коэффициентов концентрации нормальных напряжений и влияния размеров рассчитываемого поперечного сечения по нормальным напряжениям при изгибе (принимается в уравнении (5) для случаев наличия в соединении “вал-ступица” сборочных напряжений (при сборке с натягом), способных вызвать “фреттинг-коррозию” [4, 5, 6]);

$K_{F\sigma}$ – коэффициент влияния шероховатости поверхности рассчитываемого поперечного сечения по нормальным напряжениям при изгибе [4, 5, 6];

$K_{v\sigma}$ – коэффициент упрочнения (как, правило – поверхностного) рассчитываемого поперечного сечения по нормальным напряжениям при изгибе [4, 5, 6];

$K_{A\sigma}$ – коэффициент, учитывающий анизотропию механических свойств, зависящий от технологии производства заготовок для проектируемых осей в рассчитываемом поперечном сечении по нормальным напряжениям при изгибе [4, 5, 6];

$K_{L\sigma}$ – коэффициенты усталостной долговечности по нормальным напряжениям при изгибе, определяемые по формуле (6) [4, 5, 6];

$$K_{L\sigma} = m_{\sigma} \sqrt{\frac{N_{G\sigma}}{N_{\sigma}}}; \quad (6)$$

$N_{G\sigma}$ – числа циклов до точки нижнего перелома кривой усталости в логарифмической системе координат, принимаемые с учетом расчета по нормальным напряжениям при изгибе [4, 5, 6];

N_{σ} – числа циклов до разрушения, соответствующие принятой проектной долговечности, принимаемые с учетом расчета по нормальным напряжениям при изгибе и параметров нагруженности, например – циклограммы нагружения или критерия нагруженности K_w [5, 6, 7];

m_{σ} – показатели наклона левой ветви кривой усталости рассчитываемого поперечного сечения по нормальным напряжениям при изгибе [4, 5, 6].

Результатом решения неравенства (2) с учетом (3) и (4), получена формула для проектного вычисления требуемого момента сопротивления сечения изгибу для выбора балки оси из сортамента стандартного профиля проката или проектирования конструкции оси иного профиля, например сварного коробчатого сечения и др.:

$$W_x \geq \frac{M_u \cdot K_{\sigma D} \cdot [S_{f\sigma}]}{\sigma_R \cdot K_{L\sigma}}. \quad (7)$$

А, подставив в уравнение (7) значения W_x для различных профилей, наиболее приемлемых для проектирования балок осей, получим формулы для проектного вычисления размеров поперечного их сечения по критерию сопротивления усталости с учетом наиболее значимых факторов [4, 5, 6]:

– диаметра оси круглого сплошного сечения

$$D_{\bullet} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_u \cdot K_{\sigma D} \cdot [S_{f\sigma}]}{\pi \cdot \sigma_R \cdot K_{L\sigma}}}; \quad (8)$$

– наружного диаметра оси кольцевого сечения

$$D_{\circ} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_u \cdot K_{\sigma D} \cdot [S_{f\sigma}]}{\pi \cdot (1 - C^4) \cdot \sigma_R \cdot K_{L\sigma}}}, \quad (9)$$

где $C_{\circ} = \frac{d_{\circ}}{D_{\circ}}$ – проектное отношение внутреннего d_{\circ} и наружного D_{\circ} диаметров оси кольцевого сечения;

– размера стороны оси квадратного сплошного сечения:

$$B_{\blacksquare} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot M_u \cdot K_{\sigma D} \cdot [S_{f\sigma}]}{\sigma_R \cdot K_{L\sigma}}}; \quad (10)$$

– размера стороны (высоты) оси прямоугольного сплошного сечения:

$$H = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot M_u \cdot K_{\sigma D} \cdot [S_{f\sigma}]}{a^2 \cdot \sigma_R \cdot K_{L\sigma}}}, \quad (11)$$

где $a = \frac{H_{\square}}{B_{\square}}$ – проектное отношение высоты H_{\square} и ширины B_{\square} оси прямоугольного сплошного сечения;

– внешнего размера стороны (высоты) оси квадратного трубного (полого) сечения:

$$B = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot M_u \cdot K_{\sigma D} \cdot [S_{f\sigma}]}{\sigma_R \cdot K_{L\sigma} \cdot (1 - C^4)}}, \quad (12)$$

где $C_{\square} = \frac{b_{\square}}{B_{\square}}$ – проектное отношение внутренней стороны b_{\square} к внешней стороне B_{\square} квадратного трубного (полого) сечения.

Для применения уравнений (7)–(12) в расчетной конструкторской практике разработаны соответствующие базы данных по всем входящим характеристикам, параметрам и коэффициентам, алгоритм и программа для вычисления геометрических характеристик осей, что позволяет автоматизировать расчеты на начальной стадии проектирования и интегрировать метод в САПР.

Первоначальные значения коэффициентов, входящих в зависимости (7)–(12), определяют по диаметру или другим геометрическим проектируемого сечения оси. Расчеты по формулам (10)–(12) справедливы для случаев нагружения осей в одной плоскости, например вертикальной, с увеличением, при этом M_u пропорционально коэффициенту динамичности действующих на ось нагрузок. Для случаев нагружения оси в двух взаимно ортогональных плоскостях, ось может работать при косом изгибе или при косом изгибе с кручением, что при аналогии несложных преобразований внесет изменения в формулы (9)–(12) для проектного вычисления размеров поперечного сечения оси по критерию сопротивления усталости с учетом наиболее значимых факторов. Окончательный вид этих зависимостей может быть легко получен для всех возможных сечений путем элементарных преобразований и в данной статье не приводится.

Заключение. Обоснован метод проектной расчетной оценки массогабаритных характеристик осей по критерию сопротивления усталости. Для применения уравнений в расчетной конструкторской практике разработаны соответствующие базы данных по всем входящим характеристикам, параметрам и коэффициентам, алгоритм и программа для вычисления геометрических характеристик осей, что позволяет автоматизировать расчеты на начальной стадии проектирования и интегрировать разработанный метод в САПР. Это позволит оптимизировать конструкции осей по долговечности и массогабаритным характеристикам на стадии проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капуста, П.П. Анализ напряженно-деформированного состояния рамы автомобильного прицепа-самосвала / П.П. Капуста, В.Г. Махнач // Грузовик. – 2005. – № 1. – С. 14–21.

2. Капуста, П.П. Моделирование, испытания и прогнозирование ресурса осей автотранспортных средств / П.П. Капуста, И.А. Слабко, В.Г. Махнач // Современные методы проектирования машин. Расчет, конструирование и технология изготовления. Сборник научных трудов. В 3-х томах. Т. 2. / Под общ. ред. академика П.А. Витязя. – Мн.: УП “Технопринт”, 2002. – С. 391–397.

2. Капуста, П.П. Разработка типажа осей автомобильных прицепов с требуемыми ресурсом и надежностью / П.П. Капуста, М.А. Крицкий // Материалы 2-го Бело-

русского конгресса по теоретической и прикладной механике “Механика-99” (28-30 июня 1999г., г. Минск) / Под общ. ред. академика М. С. Высоцкого. – Гомель: ИММПС НАНБ, 1999. – С. 184–185.

3. ГОСТ 25.504-82. Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. – Введ. 01.07.83. – М.: Изд-во стандартов, 1983. – 81 с.

4. Капуста, П.П. Расчеты на сопротивление усталости / П.П. Капуста // – Мн.: Изд. БелНИИТИ, 1989. – 99 с.

5. Капуста, П.П. Вероятностная оценка характеристик сопротивления усталости деталей на стадии проектирования машин. / П.П. Капуста // – Мн.: Изд. “Техно-принт”, 2001. – 97 с.

6. Капуста П.П. Методика оценки нерегулярной нагруженности деталей и конструкций машин / П.П. Капуста // Вестник машиностроения. – 2005. – №6. – С. 13–18.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ ГАЛТЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

¹Капуста П.П., ²Вихренко Д.В.

¹Белорусский национальный технический университет

²Минский автомобильный завод

При конструировании сложных деталей машиностроения необходимо учитывать влияние на прочность и долговечность детали концентраторов напряжений. Одним из способов учета является расчет с применением современных пакетов трехмерного моделирования и конечноэлементного анализа, которые позволяют создавать трехмерные модели деталей с концентратором и, таким образом, сразу при расчете получать значения напряжений в зоне концентрации.

Способы моделирования и результаты расчета напряжений в зоне отверстий описаны ранее [1]. В настоящей работе рассмотрим другой класс наиболее распространенных концентраторов в деталях машин – галтели в зонах сопряжения участков детали разных размеров либо конфигурации.

Так, рассмотрим ступенчатый вал с сопряжением диаметров $D = 100$ мм, $d = 50$ мм с галтелью $r = 5$ мм. Длина каждого участка вала $l = 200$ мм. Трехмерная модель детали выполнена в системе EDS\Unigraphics, а для создания конечноэлементной модели и расчета используются 2 подхода:

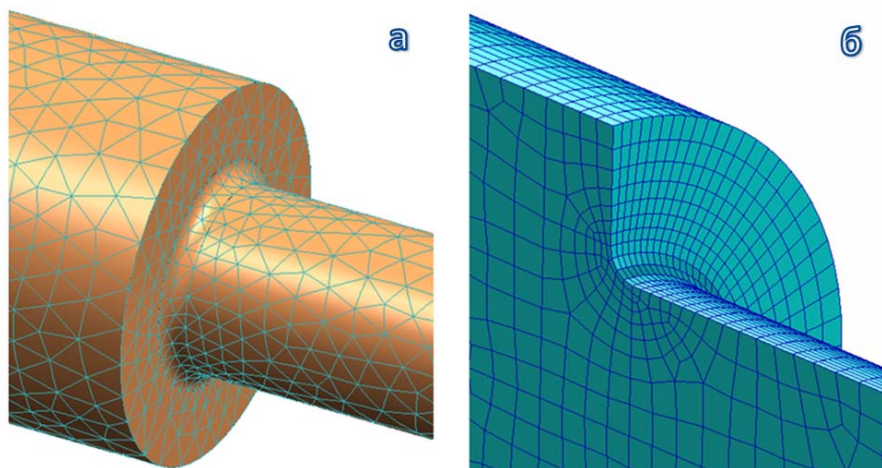


Рис. 1. Конечноэлементные модели вала:
а – с автоматической тетраэдральной сеткой;
б – с кубической сеткой (с разрезом)

- создание модели и расчет встроенными в Unigraphics средствами в модуле Modeling; при этом возможно создание расчетной модели только с автоматической тетраэдральной сеткой (рис. 1, а)

- создание модели в системе MSC\Patran из кубических конечных элементов первого порядка (рис. 1, б) методом вращения плоской «квадратной» сетки и расчет полученной модели в MSC\Nastran.

В каждом случае будем варьировать размерами элементов в зоне галтели. В качестве расчетных случаев примем растяжение с силой $F = 10$ кН и изгиб с моментом в зоне галтели $M = 200$ кН·мм. При растяжении вала номинальные напряжения в сечении с диаметром d находятся по формуле теории упругости

$$\sigma_{ном}^p = 4F/\pi d^2,$$

где F – растягивающая сила; $F = 10000$ Н; d – диаметр вала; $d = 50$ мм.

Таким образом, $\sigma_{ном}^p = 5,09$ МПа.

Максимальные напряжения σ_{MAX} можно определить, зная коэффициент концентрации при растяжении k_{σ}^p :

$$\sigma_{max}^p = k_{\sigma}^p \sigma_{ном}^p$$

Для данного типа концентратора при соотношениях $D/d = 2$ и $r/d = 0,1$ коэффициент концентрации равен $k_{\sigma}^p = 1,98$ согласно [3, с.53], $k_{\sigma}^p = 1,97$ согласно [6, с. 100]. Таким образом, получаем $\sigma_{max}^p = 10,1$ МПа.

При изгибе вала номинальные напряжения в сечении с диаметром d находятся по формуле теории упругости

$$\sigma_{ном}^u = 32M/\pi d^3,$$

где M – изгибающий момент в сечении; $M = 200000$ Н·мм; d – диаметр вала; $d = 50$ мм.

Таким образом, $\sigma_{ном}^u = 16,3$ МПа.

Максимальные напряжения σ_{MAX} можно определить, зная коэффициент концентрации при изгибе k_{σ}^u :

$$\sigma_{max}^u = k_{\sigma}^u \sigma_{ном}^u.$$

Для данного типа концентратора при соотношениях $D/d = 2$ и $r/d = 0,1$ коэффициент концентрации равен $k_{\sigma}^u = 1,74$ – согласно [3, с. 57], $k_{\sigma}^u = 1,78$ – согласно [5, с. 204], $k_{\sigma}^u = 1,79$ – согласно [6, с. 107]. Таким образом, получаем $\sigma_{max}^u = 28,4...29,2$ МПа.

Результаты расчета напряжений в моделях с автоматической тетраэдральной сеткой приведены в табл. 1, а в моделях с кубической сеткой в табл. 2. Следует отметить, что исследованию подвергались 2 типа тетраэдральных элементов – 1-го порядка (с 4 узлами на элемент) (рис. 2, а) и 2-го порядка (с 10 узлами на элемент) (рис. 2, б) различных размеров. При исследовании кубических элементов варьировались три размера – размер вдоль линии галтели a , в глубину модели b и по дуге c (рис. 3)

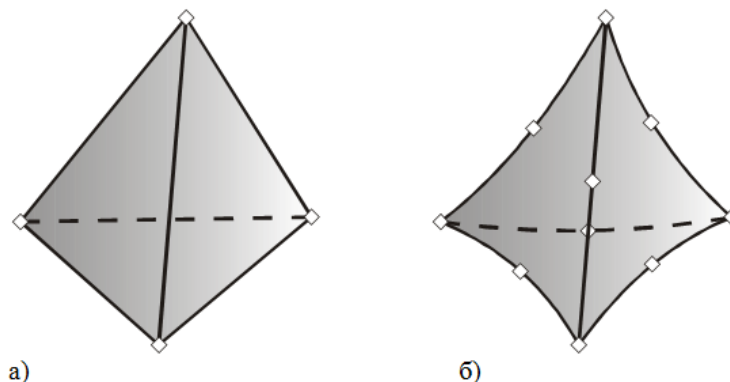


Рис. 2. Тетраэдральные элементы первого (а) и второго (б) порядка

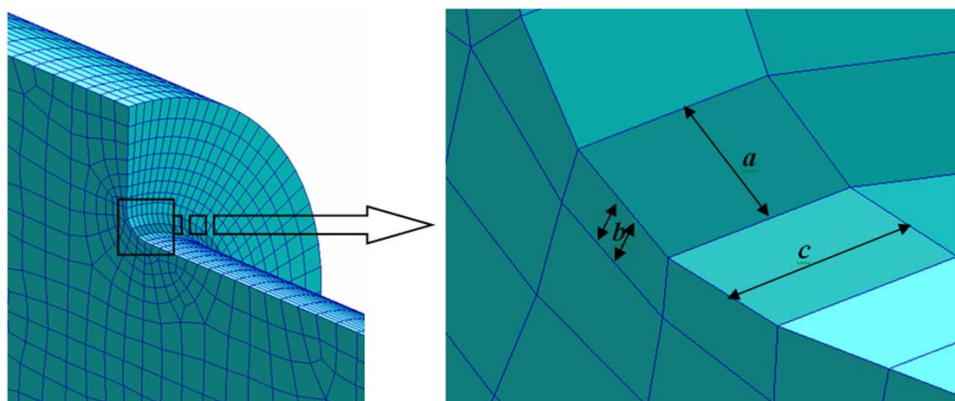


Рис. 3. Характерные размеры кубических элементов

Таблица 1 – Максимальные напряжения в моделях с тетраэдральной сеткой

Порядок элемента (количество узлов в элементе)	Количество элементов на радиусе галтели (глобальный размер элемента, мм)	Наибольшее первое главное напряжение σ_{1max} при растяжении (изгибе), МПа	Отклонение от определенного по коэффициенту при растяжении (изгибе), %	Количество узлов (элементов) в модели, тысяч
1 (4)	2 (10)	8,2 (18,0)	-19 (-36)	4,5 (23)
1 (4)	4 (5)	9,7 (24,2)	-4 (-15)	32 (180)
2 (10)	1 (25)	9,5 (21,1)	-6 (-26)	2 (3)
2 (10)	2 (10)	11,4 (28,7)	+13 (-)	33 (23)
2 (10)	4 (5)	11,4 (29,4)	+13 (+1)	249 (180)

Таблица 2 – Максимальные напряжения в моделях с кубической сеткой

Количество элементов на радиусе галтели (размер элемента a , мм)	Размер элемента в глубину модели b (по дуге c), мм	Наибольшее первое главное напряжение σ_{1max} при растяжении (изгибе), МПа	Отклонение от определенного по коэффициенту при растяжении (изгибе), %	Количество узлов (элементов) в модели, тысяч
4 (2)	2 (2)	10,1 (26,4)	- (-7)	13 (12)
4 (2)	1 (2)	10,8 (28,1)	+7 (-1)	14 (13)
4 (2)	1 (1)	10,7 (28,3)	+6 (<1)	28 (26)
4 (2)	1 (4)	10,7 (28,7)	+6 (-)	7 (6)
6 (1,3)	0,6 (3,1)	10,9 (29,1)	+8 (-)	11 (10)
6 (1,3)	0,6 (1,6)	10,9 (29,0)	+8 (-)	22 (21)
8 (1)	1 (1)	11,4 (29,3)	+13 (<1)	30 (28)
12 (0,7)	0,6 (0,7)	11,4 (30,1)	+13 (+3)	60 (55)

По результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

- расчет моделей как с тетраэдральной сеткой 2-го порядка, так и с кубической сеткой дает одинаковый предел напряжений, на 13 % превышающий напряжения, определенные через коэффициент концентрации при растяжении, в то же время при изгибе разница незначительна (Рис. 4);
- использование тетраэдрической сетки 1-го порядка неприемлемо из-за существенно заниженных напряжений (так, при сопоставимом количестве степеней свободы рассчитываемых моделей – около 32000 узлов – использование элементов 1-го порядка дает напряжения на 15...20 % ниже, чем в модели 2-го порядка и при расчете с использованием коэффициента концентрации);
 - минимально необходимое количество элементов на радиус галтели при использовании элементов 2-го порядка – 2 элемента (эквивалентно трем промежуточным узлам);
 - при использовании кубической сетки имеется много возможностей варьировать размеры элементов; хорошие результаты получаются при использовании четырех элементов на радиус галтели с уменьшенным размером в глубину, в то же время по дуге цилиндра можно увеличить размер элемента ($c = 2a$, $b = a/2$ согласно рис. 3); такой способ разбивки дает минимальную размерность модели при приемлемых результатах расчета.

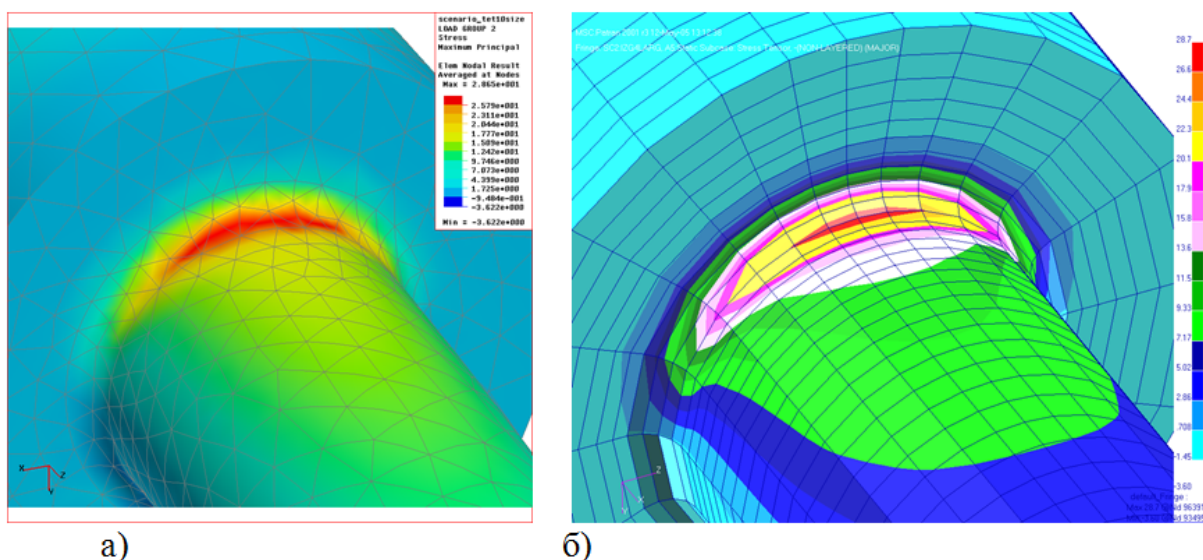


Рис. 4. Напряжения в галтели при изгибе при расчете модели в системе Unigraphics (а) и Patran-Nastran (б)

Рассмотрим галтели с другими параметрами – при соотношении $D/d = 2$ и $r/d = 0,06$, а также $D/d = 1,2$ и $r/d = 0,1$. В качестве расчетной будем использовать модель с автоматической тетраэдральной сеткой с глобальным размером элемента 5 мм в системе Unigraphics (Рис. 5). Результаты расчета сведены в табл. 3.

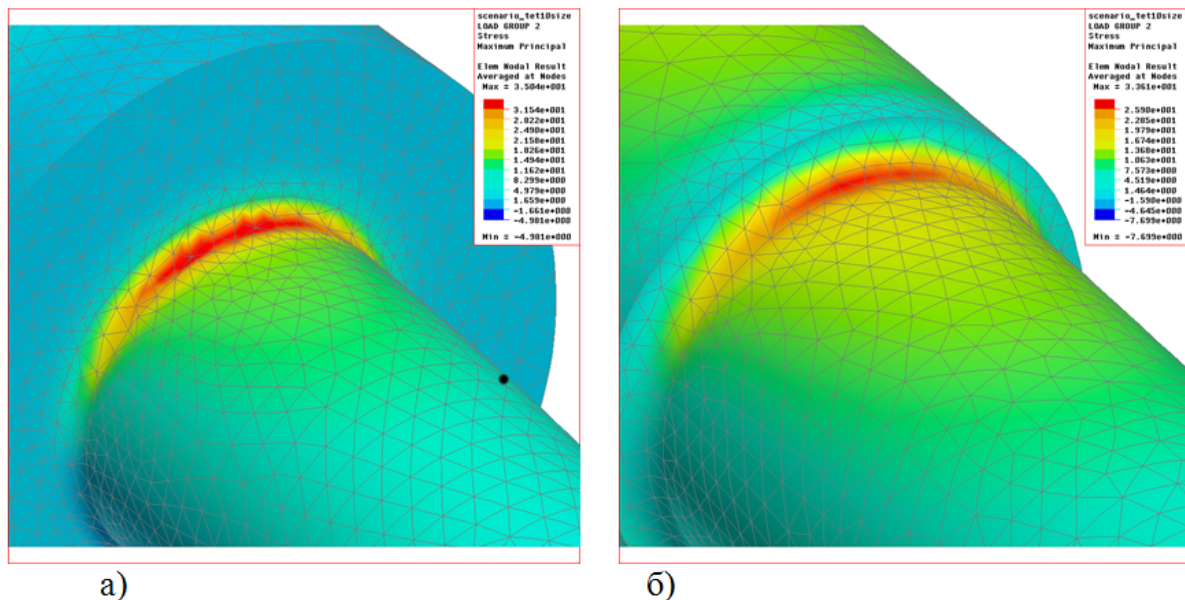


Рис. 5. Модели с измененными параметрами галтелей:
 а) $D/d=2$ и $r/d=0,06$; б) $D/d=1,2$ и $r/d=0,1$

Как видно из табл. 3, при изменении параметров галтели сохраняется первоначальная тенденция завышенных расчетных значений при растяжении по сравнению с литературными источниками и весьма близких значений при изгибе.

Таблица 3 – Максимальные напряжения в моделях с измененными параметрами галтели

Вид нагружения	Параметры галтели		Коэффициент концентрации согласно источнику			Коэффициент концентрации согласно расчету МКЭ	Отклонение, %
	D/d	r/d	[3]	[5]	[6]		
Растяжение	2	0,06	2,4		2,3	2,71	+13
Изгиб	2	0,06	2,08	2,15	2,13	2,15	-
Растяжение	1,2	0,1	1,68		1,75	1,85	+6
Изгиб	1,2	0,1	1,63	1,7	1,65	1,59	-2

Рассмотрим также плоскую постановку задачи определения концентрации напряжений в галтелях угловых элементов. Создана модель для расчета МКЭ (рис. 6) по размерам и способу нагружения подобно эксперименту [2].

Модель состоит из плоских конечных элементов, которые имеют свойства двумерного объема. Величина нагрузки P подобрана таким образом, что на кромке стойки возникают единичные напряжения, соответственно, напряжения на галтели численно будут равны искомому коэффициенту концентрации.

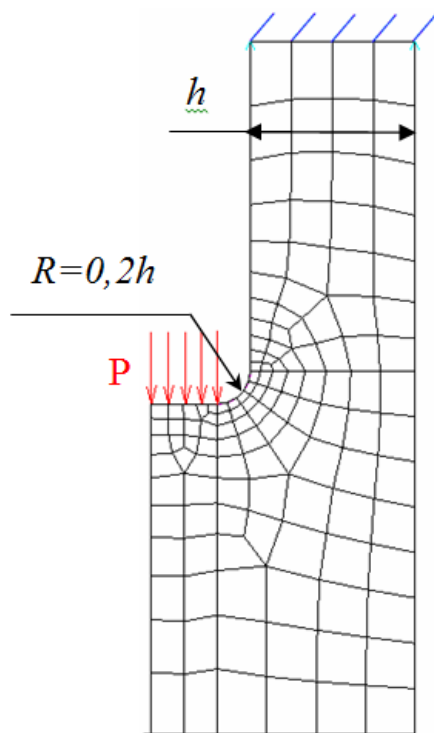


Рис. 6. Модель углового элемента с галтелью

Как и во всех предыдущих проведенных нами численных экспериментах, сначала определяем необходимую степень дискретизации модели, начиная с 5 элементов на радиусе галтели. Предел напряжений достигается при 8 элементах на радиусе и равен 1,85 МПа (рис. 7, а) против 1,76, МПа при пяти элементах. Экспериментально определенный [2] коэффициент равен 1,78, разница с расчетным значением составляет не более 4 %. Проведем и в данном случае еще один расчет с увеличенным в 2 раза радиусом галтели – напряжения снижаются до 1,46 МПа (рис. 7, б) экспериментально определенный [4] коэффициент концентрации равен 1,51, так что и в этом случае разница менее 4 %.

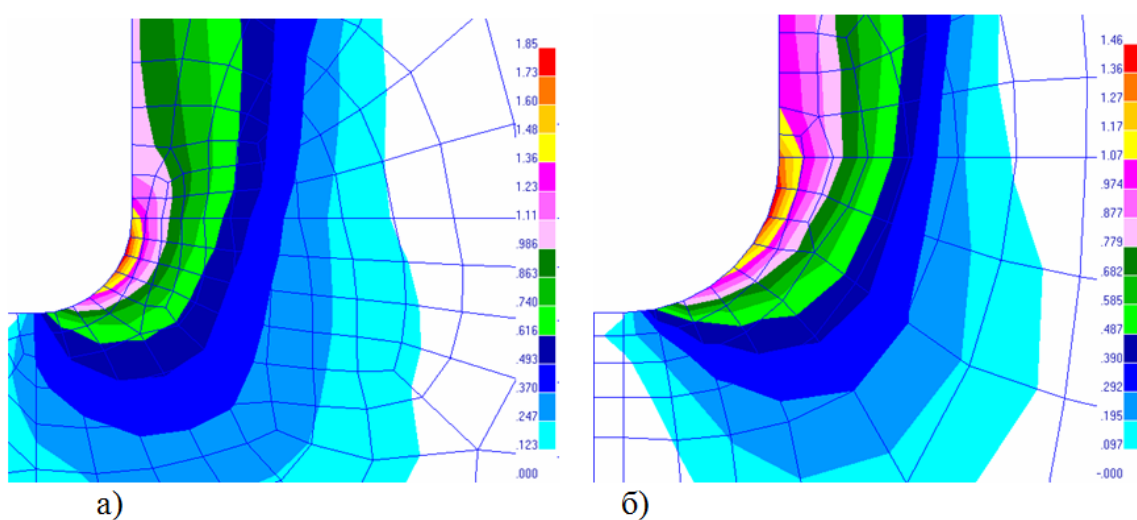


Рис. 7. Напряжения в галтели при $R=0,2h$ (а) и $R=0,4h$ (б)

Выводы:

1. Применение пакетов расчетов МКЭ MSC\Nastran и EDS\Unigraphics позволяет с достаточной точностью учитывать концентраторы в виде галтелей как при плоском, так и при объемном напряженном состоянии.

2. Показана неприемлемость использования автоматической тетраэдральной сетки 1-го порядка.

3. Определено, что достаточным является 4 элемента 1-го порядка (кроме тетраэдров) или 2 элемента 2-го порядка на радиус галтели. При увеличении дискретизации напряжения оказываются несколько завышенными, но такое решение увеличивает, а не уменьшает запас прочности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капуста, П.П. Моделирование концентраторов в виде круглых отверстий в пластине с помощью МКЭ / П.П. Капуста, Д.В. Вихренко, Ю.А. Воронько.

2. Васильев, В.В. Галтели переменной кривизны для несущих деталей машин / В.В. Васильев // Вестник машиностроения. – №9. – 1965. – С.20–24.

2. ГОСТ 25.504-82. Расчеты и испытания на усталость.

3. Коновалов, Л.В. Концентрация напряжений в галтелях угловых элементов / Л.В. Коновалов // «Вестник машиностроения». – № 3. – 2001. – С. 26–33.

4. Лейкин, А.С. Напряженность и выносливость деталей сложной конфигурации / А.С. Лейкин. – М. Машиностроение, 1968.

5. Петерсон, Р. Коэффициенты концентрации напряжений. / Р. Петерсон. – М: Мир, 1977.

ПОВЫШЕНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ НЕКРУГЛЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС В ПРИВОДЕ КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕГО ДВИЖИТЕЛЯ

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н., Дьяченко О.В., Криуша С.М.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Созданный в БНТУ опытный образец колесно-шагающего движителя (КШД) использует при движении четыре опорных башмака, которые крепятся на концах двух штанг. Часть перемещения движителя осуществляется за счет поворота штанги и кривошипов (шагающий принцип движения), а другая часть – за счет прокатывания башмака (колесный принцип движения). Конструктивные особенности данного движителя позволяют перешагивать относительно невысокие препятствия (бордюры, камни, бревна). Это обстоятельство открывает широкие перспективы применения колесно-шагающего движителя в лесном хозяйстве, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций [1].

Серьезным недостатком колесно-шагающего движителя является неравномерность скорости его перемещения даже при установившемся режиме работы. Это обстоятельство приводит к возникновению значительных сил инерции даже при движении со скоростью до 10 км/час. Таким образом, для серьезного улучшения кинематических характеристик могут потребоваться изменения в конструкции привода вращения ступицы движителя [1, 2].

Исходя из работ [1, 2], горизонтальное перемещение оси ступицы колесно-шагающего движителя выражается формулой:

$$X_{01} = (a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi + \int_0^{\varphi} \left(Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot d\varphi. \quad (1)$$

Вертикальное положение оси ступицы:

$$Y_{01} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi - b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (2)$$

Здесь: a – расстояние между осями вращения ступицы и кривошипов, b – длина кривошипа, Y_1, Y_2 – переменные радиус-вектора профиля опорного башмака, φ – угол поворота ступицы движителя [1, 2].

Учитывая выражение $\frac{dY_2}{d\varphi} = -\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \cos \varphi$ [3], проведем дифференцирование.

Аналог скорости центральной оси ступицы по горизонтали:

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (3)$$

Аналог ускорения центральной оси ступицы по горизонтали:

$$\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi - 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (4)$$

Аналог скорости центральной оси ступицы по вертикали:

$$\frac{dY_{01}}{d\varphi} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 2 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (5)$$

Аналог ускорения центральной оси ступицы по вертикали:

$$\frac{d^2 Y_{01}}{d\varphi^2} = -\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi - (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 4 \cdot b \cdot \cos 2\varphi. \quad (6)$$

Толкающая реакция почвы по горизонтальной оси:

$$X_K = \frac{j}{i} \cdot G_{KK} \cdot \psi + \frac{m_{TC}}{i} \cdot \omega^2 \cdot \frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2}. \quad (7)$$

Вертикальная реакция почвы:

$$Y_K = m \hat{E} \hat{O} \ddot{A} \cdot \left(g + \omega^2 \cdot \frac{d^2 Y_{01}}{d\varphi^2} \right). \quad (8)$$

Масса транспортного средства: $m_{TC} = i \cdot m \hat{E} \hat{O} \ddot{A} + j \cdot m_{KK}$.

Учитывая, что: $G_{TC} = m_{TC} \cdot g$; $G = m \hat{E} \hat{O} \ddot{A} \cdot g$; $G_{KK} = m_{KK} \cdot g$; вес транспортного средства будет равен:

$$G_{TC} = i \cdot G + j \cdot G_{KK}. \quad (9)$$

Здесь m_{TC} – общая масса транспортного средства, кг; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; i – число ведущих колесно-шагающих движителей; $m \hat{E} \hat{O} \ddot{A}$ – приведенная масса транспортного средства на один ведущий колесно-шагающий движитель, кг; j – число ведомых колес; m_{KK} – приведенная масса транспортного средства на одно ведомое круглое колесо, кг.

Ведущий момент обеспечивает вращение ступицы колесно-шагающего движителя, которое обеспечивает движение транспортного средства:

$$\dot{I} \hat{A} \hat{A} \ddot{A} = M \ddot{I} \mathcal{D} + M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} + Y_K \cdot \frac{dY_{01}}{d\varphi}.$$

Момент на преодоление внутренних потерь в редукторе движителя:

$$M \ddot{I} \mathcal{D} = \frac{1 - \eta_{\delta}}{\eta_{\delta}} \cdot \left(M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} + Y_K \cdot \frac{dY_{01}}{d\varphi} \right).$$

Здесь η_{δ} – механический КПД редуктора движителя.

Момент сопротивления качению

$$M_K = Y_K \cdot \psi \cdot R_K. \quad (10)$$

Радиус кривизны профиля опорного башмака находится как [3]:

$$R_K = Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi. \quad (11)$$

Здесь ψ – безразмерный коэффициент трения качения.

Тогда ведущий момент будет равен:

$$\dot{I} \hat{A} \hat{A} \ddot{A} = \frac{1}{\eta_{\delta}} \cdot \left(M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} + Y_K \cdot \frac{dY_{01}}{d\varphi} \right). \quad (12)$$

Касательная сила тяги, действующая на опорную поверхность:

$$P_K = \dot{I} \hat{A} \hat{A} \ddot{A} / \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right). \quad (13)$$

Максимальная величина касательной силы тяги P_K , возможная по условиям сцепления с опорной поверхностью, выражается уравнением:

$$P_K \leq P_{\phi} = \phi \cdot Y_K; \quad (14)$$

где ϕ – коэффициент сцепления с опорной поверхностью.

Одним из методов улучшения кинематических характеристик КШД является применение некруглых зубчатых колес в приводе движителя [2]. В данных работах описаны методики построения начальных линий зубчатого зацепления, и их разбиения на участки при профилировании зубьев. Для колесно-шагающего движителя целесообразно использовать некруглый профиль башмака, который описывается радиус-векторами в виде функций [1]:

$$Y_1 = 4 \cdot b \cdot \cos \phi - a ; \quad (15)$$

$$Y_2 = a - 2 \cdot b \cdot (1 + \cos^2 \phi) + c . \quad (16)$$

Здесь: a – расстояние между осями вращения ступицы и кривошипов, b – длина кривошипа, c – длина стойки башмака, ϕ – угол поворота ступицы движителя в диапазоне $-\pi/4 \leq \phi \leq \pi/4$ [1].

Тогда вертикальное положение оси ступицы движителя и аналог скорости движителя по горизонтали выражаются соответственно формулами:

$$Y_{01} = a - b + c = const ; \quad (17)$$

$$\frac{dX_{01}}{d\phi} = a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\phi . \quad (18)$$

Для обеспечения постоянной скорости перемещения движителя, зубчатое зацепление между шестерней приводного вала и колесом водила должно обеспечивать следующее переменное передаточное отношение [2]:

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \frac{i \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\phi} \right)}{Y_{01}} . \quad (19)$$

Здесь рассматривается установившееся движение КШД, когда частота вращения приводного вала $\omega = const$. Тогда частота вращения водила:

$$\omega_H = \frac{\omega \cdot Y_{01}}{i \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\phi} \right)} .$$

Вращение водила обеспечивает поступательное перемещение КШД, тогда скорость транспортного средства с КШД на установившемся режиме будет равна:

$$v = \omega_H \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\phi} \right) = \frac{\omega \cdot Y_{01}}{i} .$$

Для значений угловой скорости $\omega = const$, значения вертикальной координаты оси ступицы $Y_{01} = a - b + c$, коэффициента передаточного отношения $i = const$, получим линейную скорость перемещения $v = const$. Для зацепления некруглых колес величина коэффициента передаточного отношения i будет определена далее. Для проектируемой передачи привода движителя, несмотря на переменное передаточное отношение, за один полный оборот колеса водила будут совершаться два полных оборота шестерни приводного вала. Уравнения начальных линий проектируемых некруглых зубчатых колес определяются из следующих условий [2]:

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \frac{r_H}{r} ; \quad (20)$$

$$r + r_H = L = const . \quad (21)$$

В этом случае уравнения начальных линий проектируемых некруглых зубчатых колес определяются формулами [2]:

$$r_H = \frac{L \cdot i \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{(a - b + c) + i \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}; \quad (22)$$

$$r = \frac{L \cdot (a - b + c)}{(a - b + c) + i \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}. \quad (23)$$

Обобщенной координатой является угол поворота φ колеса водила, связанный с углом поворота θ шестерни приводного вала соотношением:

$$\omega_H = \frac{\omega \cdot Y_{01}}{i \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)}. \quad (24)$$

С учетом формул (22–24) получим выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{(a - b + c)}{i \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)} \cdot \frac{d\theta}{dt}; \\ \frac{i}{a - b + c} \cdot \int (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi) d\varphi &= \int d\theta; \\ \frac{i}{a - b + c} \cdot ((a - b + c) \cdot \varphi + \frac{3}{2} \cdot b \cdot \sin 2\varphi) + C &= \theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Определим постоянную интегрирования C , исходя из условия, что при $\varphi = 0$ будет $\theta = 0$. Тогда из выражения (25) получим $C = 0$.

Для проектируемой передачи привода колесно-шагающего движителя мобильной машины зададимся условием, что за один полный оборот колеса водила будут совершаться два полных оборота шестерни приводного вала. При этом текущее передаточное отношение будет переменным.

Поэтому необходимо выполнение условия, что при $\varphi = \pi/4$ радиан будет $\theta = \pi/2$ радиан. Тогда из выражения (25) получим равенство:

$$i = \frac{2 \cdot (a - b + c) \cdot \pi}{(a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b}. \quad (26)$$

Подставив полученное выражение (26) в формулу (25), определим зависимость между углом поворота φ колеса водила и углом поворота θ шестерни приводного вала:

$$\theta = \frac{\pi \cdot (2 \cdot (a - b + c) \cdot \varphi + 3 \cdot b \cdot \sin 2\varphi)}{(a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b}. \quad (27)$$

Преобразуем формулы (22–23) с учетом выражения (26):

$$r_H = \frac{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}; \quad (28)$$

$$r = \frac{L \cdot ((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b)}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}. \quad (29)$$

Тогда, усилие на зубчатом венце колеса водила будет вычисляться согласно выражению:

$$F_C = \frac{\dot{I} \cdot \hat{A} \hat{A} \hat{A}}{r_H}; \text{ Н.} \quad (30)$$

Здесь: $\dot{I} \text{ } \tilde{A} \tilde{A} \tilde{A}$ – ведущий момент (12) на ступице колесно-шагающего движителя, Н·м; r_H – радиус делительной окружности (28) на зубе водила, м. Эти параметры являются переменными величинами, поэтому очевидно, что зубья на венце колеса водила, а также и зубья на венце шестерни приводного вала будут нагружены неравномерно.

Отдельные участки рабочих поверхностей зубьев, работающие при различных условиях, должны обеспечивать совершенно разные эксплуатационные свойства. В основании зубьев должно обеспечиваться сопротивление усталости, на участке возле делительной окружности – контактная прочность, на остальных участках боковой поверхности – износостойкость. Это особенно характерно для силовых зубчатых передач. Очевидно, что традиционные технологии обработки боковых поверхностей зубьев (фрезерование и шлифование) не могут обеспечить выполнение таких условий. Для этого может потребоваться целенаправленное изменение силового и температурного воздействий на обрабатываемую поверхность зуба [4].

В зубчатых передачах в процессе приработки изменяется форма эвольвентной рабочей поверхности, увеличивается боковой зазор, что ведет к изменению линии контакта и разрушению зубьев. Избежать этого можно, если при зубонарезании и шлифовке зубьев – обеспечить их эксплуатационный профиль, а при обкатке – равномерное состояние качества поверхности. Для этого должны быть соответствующие рабочие профили фрезы и шлифовального круга, учитывающие функциональное назначение обрабатываемой поверхности [5].

Большинство деталей машин, узлов и механизмов работают при изменяющихся условиях эксплуатации (скорость, нагрузки, температура). Рабочие поверхности трения этих деталей и механизмов должны обладать высокими эксплуатационными качествами. Очевидно, что для повышения долговечности деталей, узлов и механизмов необходимо при их изготовлении обеспечивать соответствующие эксплуатационные показатели, что в большинстве случаев требует создания новых поверхностных слоев. Поэтому необходимо целенаправленное системное совершенствование методов обработки деталей машин с учетом их функционального назначения.

К традиционным методам повышения прочности зубчатых колес относятся: термическое или химико-термическое упрочнение, обдувка дробью, накатка или чеканка впадины зубьев. Технологии объемной термической закалки обладают рядом недостатков, основным из которых является коробление (теряются две степени точности). Также закалка характеризуется значительными остаточными внутренними напряжениями, которые снимаются последующей термической обработкой. При химико-термической обработке (например, цементации и последующей закалке) происходит еще более высокое коробление деталей (теряются три степени точности). Поэтому, для обеспечения заданной точности зубчатых колес требуется проводить дополнительную механическую обработку, как правило – шлифование, как наиболее эффективный и экономичный метод [4, 5].

Характеристики рабочих поверхностей деталей машин влияют на ряд их свойств. Высокое качество детали обычно представляет собой оптимальный комплекс свойств материала, сочетающий требуемые эксплуатационные характеристики поверхности (износостойкость, коррозионная стойкость) и механические свойства материала (прочность, вязкость). Оптимальные свойства деталей могут быть достигнуты улучшением технологий обработки, включая нанесение покрытий. Среди различных технологий выделяют метод плазменного напыления, а также лазерные методы упрочнения.

Лазерное легирование широко используется как при изготовлении новых, так и при восстановлении изношенных деталей машин. При лазерном легировании можно

дозировать подвод энергии и легирующих веществ с высокой точностью [5, 6, 7]. Повышение уровня требований промышленности к качеству поверхностных слоев вызывает необходимость создания композиционных многокомпонентных покрытий, включающих в свой химический состав соединения различных металлов. Для этой цели широко используются карбиды бора, карбиды вольфрама, молибден и оксиды циркония.

Как метод поверхностного упрочнения заготовок и деталей, лазерная закалка обладает многими преимуществами по сравнению с азотированием, цементацией и закалкой токами высокой частоты. Процесс лазерной закалки состоит в структурном изменении материала, находящегося в твердом состоянии, при очень быстром нагревании в результате поглощения лазерного излучения в тонком поверхностном слое и быстром охлаждении на воздухе нагретой зоны за счет теплопроводности материала [6, 7]. При этом деформации заготовок минимальны, в результате чего повышается их точность и снижается трудоемкость последующей механической обработки. В итоге, обеспечивается высокая твердость и износостойкость деталей из обычных углеродистых и низколегированных сталей.

Преимущества технологии лазерного упрочнения [6, 7]:

1. Экономичность процесса. Радикальное (на 200...500 %) повышение износостойкости поверхностей, упрочняемых на глубину до 0,8...1,5 мм, и увеличение срока службы деталей достигается затратами, не превышающими 15...20 % стоимости неупрочненных деталей.

2. Нагрев при лазерной закалке является не объемным, а поверхностным процессом, что исключает изменение геометрии обрабатываемых деталей.

3. Упрочнение осуществляется без оплавления поверхности, что исключает изменение шероховатости и необходимость в последующей механической обработке (шлифовка, полировка).

4. Термический цикл при лазерном упрочнении составляет по времени 0,3...0,5 с. Это обстоятельство обеспечивает высокие скорости нагрева и охлаждения обрабатываемых поверхностных участков. В результате достигаются высокая твердость поверхности, высокая дисперсность и однородность структуры поверхностного слоя.

5. Высокая производительность данной технологии обусловлена автоматизацией процесса и исключением необходимости термообработки всей детали. Требуется обработка лишь локальных участков, подверженных износу.

6. Возможность упрочнения поверхностей широкой номенклатуры материалов, что позволяет заменять дорогостоящие высоколегированные материалы на более дешевые и доступные, которым придаются нужные эксплуатационные характеристики.

Применение лазерного термического упрочнения для некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя, позволит повысить износостойкость рабочих поверхностей зубьев. Для подтверждения качества и надежности деталей, полученных с использованием данного метода, необходимо проведение испытаний [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Скойбеда, А.Т. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя / А.Т.Скойбеда, В.Н. Жуковец // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. 2013. № 6. – С. 38–42.

2. Скойбеда, А.Т. Расчет начальных линий некруглых зубчатых колес / А.Т.Скойбеда, В.Н. Жуковец // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Выпуск 31. 2016. – С. 110–117.
3. Жуковец, В.Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде / В.Н. Жуковец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2006. № 1. – С. 76–86.
4. Суслов, А.Г. Совершенствование и разработка конкурентоспособных технологий, обеспечивающих повышение качества изделий машиностроения / А.Г. Суслов // Вестник Брянского государственного технического университета. 2006. № 2 (10). – С. 24–29.
5. Бадртдинов, М.А. К вопросу лазерного упрочнения зубчатых колес трансмиссий быстроходных транспортных гусеничных машин / М.А. Бадртдинов // Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 11. Ч. 3. – С. 180–185.
6. Лазерные технологии обработки металлов: современные проблемы. Под ред. В.Я. Панченко. – М.: Физматлит, 2009. – 664 с.
7. Дьяченко, О.В. Влияние лазерного легирования на трибологические характеристики сложнопрофильных зубчатых колес / О.В. Дьяченко, В.Н. Жуковец // Материалы 6-й Международной научно-практической конференции, 12-й Международной научно-технической конференции «Наука – образованию, производству, экономике», 29-31 мая 2014 года. Часть 2. – Минск.: БНТУ, 2014. – Стр. 157–163.

РАЗРАБОТКА ИНЕРЦИОННО-ПРУЖИННОГО СИНХРОНИЗАТОРА И ПРЕДПОСЫЛКИ К ЕГО ПРИМЕНЕНИЮ В ТРАНСМИССИИ ТЯГОВО-ТРАНСПОРТНЫХ МАШИН

¹Цереня А.А., ¹Грибков Ю.А., ¹Шапилевич С.С., ²Миронов Д.Н.

¹УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение

Работа фрикционного синхронизатора коробки передач тягово-транспортной машины происходит в напряженном режиме. Это объясняется тем, что он должен уравнивать угловые скорости звеньев, моменты инерции которых велики. Поэтому включение таких синхронизаторов требует больших затрат энергии. На легковых автомобилях переключение передач происходит легко и четко, так как моменты инерции включаемых звеньев малы.

Инерционные синхронизаторы впервые были применены на автомобилях фирмы Джeneral Моторс [1]. Они были разработаны в нескольких вариантах и получили название синхро-мэш. Оснащались ими легковые автомобили различных марок. После этого инерционные синхронизаторы получили широкое применение по всему миру, причем в различном конструктивном исполнении.

Конструкции инерционных синхронизаторов разнообразны. Однако любая из них в качестве обязательных имеет элементы трения и блокировки. Вспомогательными являются элементы упругой связи, которые способствуют установке деталей системы в нейтральное положение и одновременно не препятствуют блокировке системы, разблокировке и включению передачи.

Элементы трения могут выполняться несколькими вариантами. Это конструкции одноконусные, многоконусные и многодисковые. Общим для этих конструкций является диссипация (рассеяние) энергии при синхронизации и даже при разблокировке синхронизатора.

Предложенный дисковый синхронизатор [2] и испытанный экспериментальный образец показал способность автоматически выполнять подготовленные операции перед включением необходимой передачи. Автор полностью отказался от применения стандартных, существующих систем блокировки и фиксации (элементов упругой связи). В этой связи пришлось применять пакеты дисков трения, которые сжимаются сначала при небольшом перемещении зубчатой муфты. Этого перемещения оказалось достаточным для сжатия рабочих пружин с помощью винтовых лунок с шариками. Происходит полное выравнивание угловых скоростей синхронизируемых звеньев. По окончании выравнивания угловых скоростей начинается с помощью рабочих пружин деблокировка (разблокировка) системы. При этом шарики в винтовых лунках несколько поворачивают звено (шестерню) относительно ступицы. Зубчатая муфта освобождается от действия запирающего устройства и ее зубья оператор легко вводит в зацепление с зубьями на венце шестерни.

В этом полуавтоматическом синхронизаторе происходит двукратное преобразование вращательного движения в поступательное и наоборот, хотя и без участия оператора происходит как синхронизация, так и разблокировка системы. Применение дисков трения усложняет синхронизатор.

Нами предпринимаются попытки создания синхронизатора с использованием «напрямую» кинетической энергии за счет начальной разности угловых скоростей или вала с установленной на нем шестерни на подшипниках или вала (первичного) и вто-

ричного в потенциальную [3, 4]. Потенциальная энергия после синхронизации обеспечивает деблокировку системы, а окончательно передача включается оператором. В синхронизаторе полностью сохранены стандартные элементы блокировки и фиксации, а элементы трения заменены упругоподатливыми элементами. Этот синхронизатор двухсторонний с двумя блоками синхронизации.

В статье рассматривается дальнейшее развитие конструктивной схемы синхронизатора [5], работающего за счет превращения кинетической энергии разности угловых скоростей синхронизируемых звеньев в потенциальную энергию синхронизации, а затем превращения потенциальной энергии в энергию деблокировки синхронизатора.

Кроме того, рассматриваются ключевые вопросы выбора параметров упругоподатливых элементов и вычисления времени синхронизации при различных угловых скоростях синхронизируемых звеньев.

Основная часть

Инерционно-пружинный синхронизатор выполняется на базе стандартного инерционного синхронизатора. При этом сохранены блокирующие и фиксирующие элементы. Зубчатая же муфта оснащается упругоподатливыми элементами (пружинами), которые и осуществляют поглощение кинетической энергии синхронизируемых звеньев. Эта энергия переходит в потенциальную, обеспечивающую после синхронизации разблокировку синхронизируемых звеньев, после которой оператор включает необходимую передачу. Конструктивная схема инерционно-пружинного синхронизатора показана на рис. 1, 2, 3.

Этот синхронизатор осуществляет синхронизацию или первичного вала 2 с шестерней низшей передачи 3 или (для примера) первичного вала 2 и вторичного вала 4 с сидящей на нем втулкой 5 со шлицами включения прямой передачи.

В обойме 8 зубчатой муфты 9 находятся пружины 10. Они имеют разные жесткости: пружина большей жесткости закреплена на одном из сухариков 21 (рис. 2) и имеет меньшую длину, чем вторая пружина меньшей жесткости, установленная в сухариках 20 под небольшим натягом. Сухарики 21 контактируют с язычками 11. Варианты I и II этих контактов показаны на рис. 2.

Ребра язычков оснащены жестко установленными на них направляющими пальцами 17 включения синхронизатора, в котором находится пружина 18 с пальцем включения синхронизатора. В кольцах синхронизатора 14 предусмотрены окна, имеющие диаметры больше диаметров направляющих пальцев 17. Пальцы 20 при включении синхронизатора входят в окна 19 дисков 6, 7, установленных на шестерне 3 и на втулке 5, соединенной с вторичным валом 4.

Зазоры в нейтральном положении между торцами пальцев включения синхронизатора 20 и дисками 6, 7 составляют 1,5–2,0 мм.

При подаче силового импульса, например, влево, вилка синхронизатора сдвинет вместе с зубчатой муфтой 9 обойму 8 и ребра язычка 13 тоже влево.

Как только пальцы включения синхронизатора 20 войдут в окна 19 диска 6, начинается блокировка зубчатой муфты 9 блокирующими пальцами 15, так как угловые скорости вращения диска 6 и зубчатой муфты 9 разнятся.

Выравнивание угловых скоростей диска 6 и муфты 9 осуществляется за счет поглощения пружинами 10 (упругоподатливыми элементами) кинетической энергии вращающихся масс. Выравнивание осуществляется посредством язычков 11, контактирующих с сухариками 21 (рис. 2), которые в свою очередь контактируют с пружинами 10.

При равенстве угловых скоростей шестерни 3 и вала 2 произойдет разблокировка муфты 9 с помощью пружин 10, при этом шарики фиксаторов освободят фиксирующие

пальцы 16 и муфта передвинется влево, включая низшую передачу. Аналогично включается вправо и прямая передача.

Процесс включения передач с помощью фрикционных синхронизаторов отличается от процесса включения передач с помощью инерционно-пружинных синхронизаторов только этапами синхронизации и деблокировки.

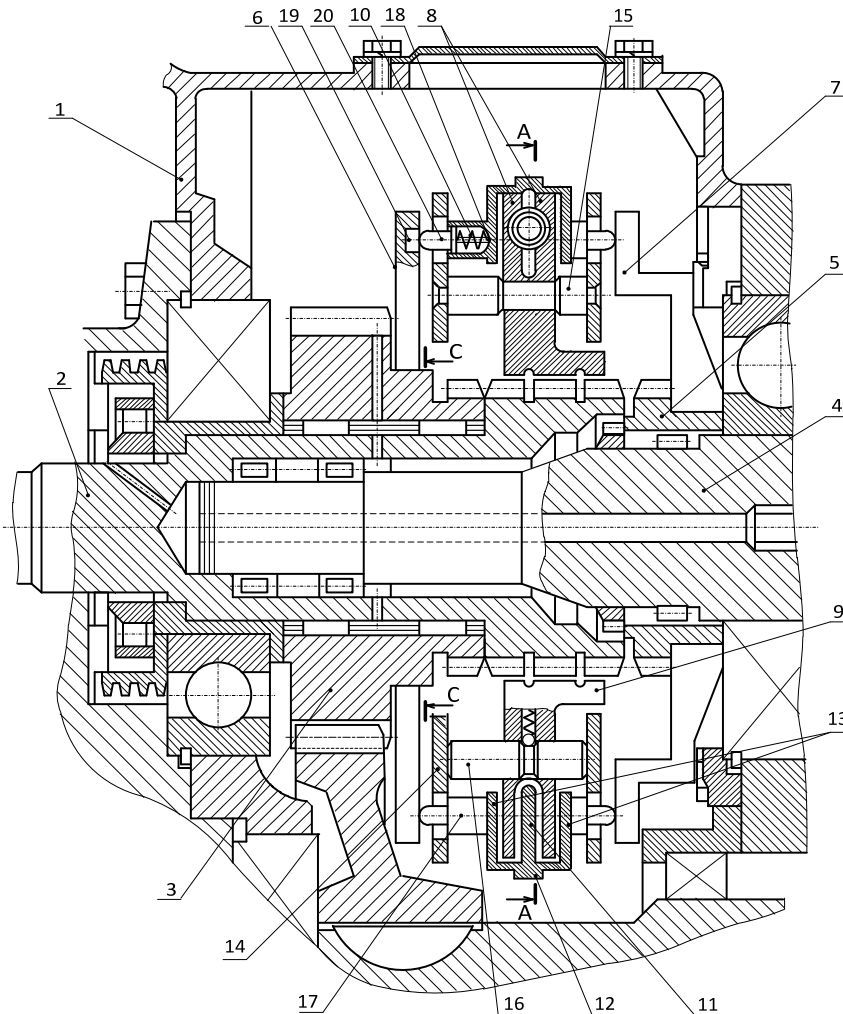


Рис. 1. Продольный разрез инерционно-пружинного синхронизатора ступенчатой трансмиссии тягово-транспортного средства:

- 1 – крышка коробки передач; 2 – ведущий вал (первичный вал); 3 – шестерня низшей передачи;
 4 – вторичный вал; 5 – втулка со шлицами включения прямой передачи (блокировки первичного и вторичного валов); 6, 7 – диски; 8 – обойма; 9 – зубчатая муфта;
 10 – пружины включения синхронизатора (упругоподатливые элементы); 11 – язычок;
 12 – синхронизирующий диск; 13 – ребра язычка; 14 – кольца синхронизатора;
 15 – блокирующие пальцы; 16 – фиксирующие пальцы;
 17 – направляющие пальцев включения синхронизатора;
 18 – пружина пальца включения синхронизатора; 19 – окна дисков 6, 7;
 20 – палец включения синхронизатора*

В инерционно-пружинном синхронизаторе конусные кольца заменены кольцами 14, через окна которых свободно проходят направляющие 17 пальцев включения 20. Эти пальцы при синхронизации входят в окна дисков 6, 7, которые жестко соединяются с синхронизируемыми звеньями – или шестернями или валами. Причем, если позволяет диаметр шестерни, можно сделать окна и в них, то есть тогда шестерня будет играть

роль и диска 6. Блокировка зубчатой муфты и колец 6, 7 и их фиксация осуществляются так же, как и во фрикционном синхронизаторе.

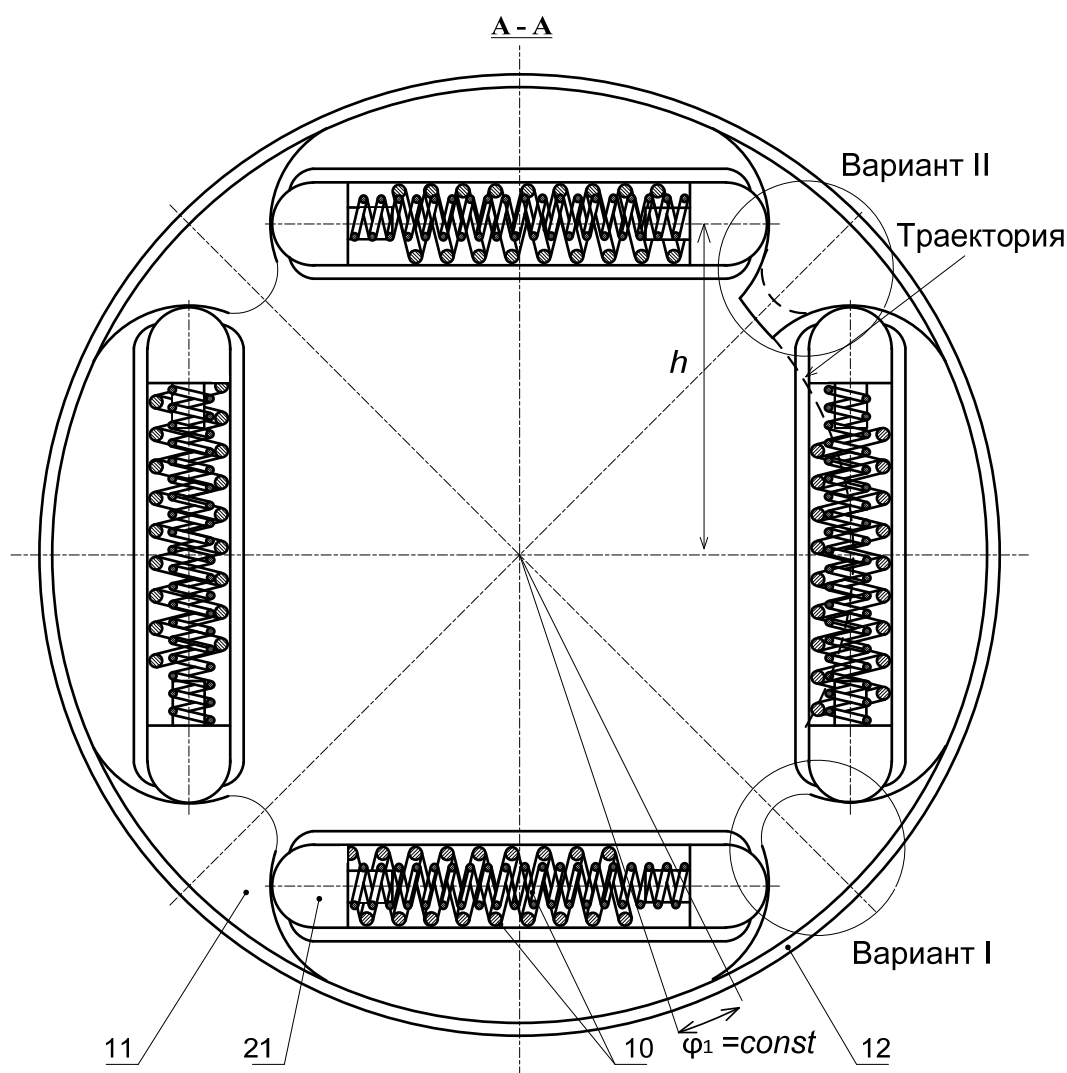


Рис. 2. Поперечный разрез инерционно-пружинного синхронизатора ступенчатой трансмиссии тягово-транспортного средства:
21 – сухарики включения синхронизатора; φ_1 – угловая разность длин пружин включения упругоподатливых элементов (остальные позиции на рис. 1)

После выравнивания частот вращения синхронизируемых звеньев, блокирующее действие пальцев 15 заканчивается. В том числе, заканчивается и фиксирующее действие пальцев 16 – муфта движется по шлицам вала 2. Происходит включение нужной передачи. Синхронизация и десинхронизация осуществляется пружинами 10.

Расчет параметров упругоподатливых элементов, то есть жесткой и менее жесткой пружин, начинается с определения момента синхронизации, который аналогичен моменту трения синхронизатора [6] по формуле

$$M_c = \frac{J_1 \Delta \omega_{\text{нач}}}{t}, \quad 1)$$

где M_c – момент синхронизации; J_1 – суммарный момент инерции, приведенный к синхронизируемому звену, связанному с первичным валом; $\Delta \omega_{\text{нач}}$ – начальная разность угловых скоростей синхронизируемых звеньев; t – время синхронизации.

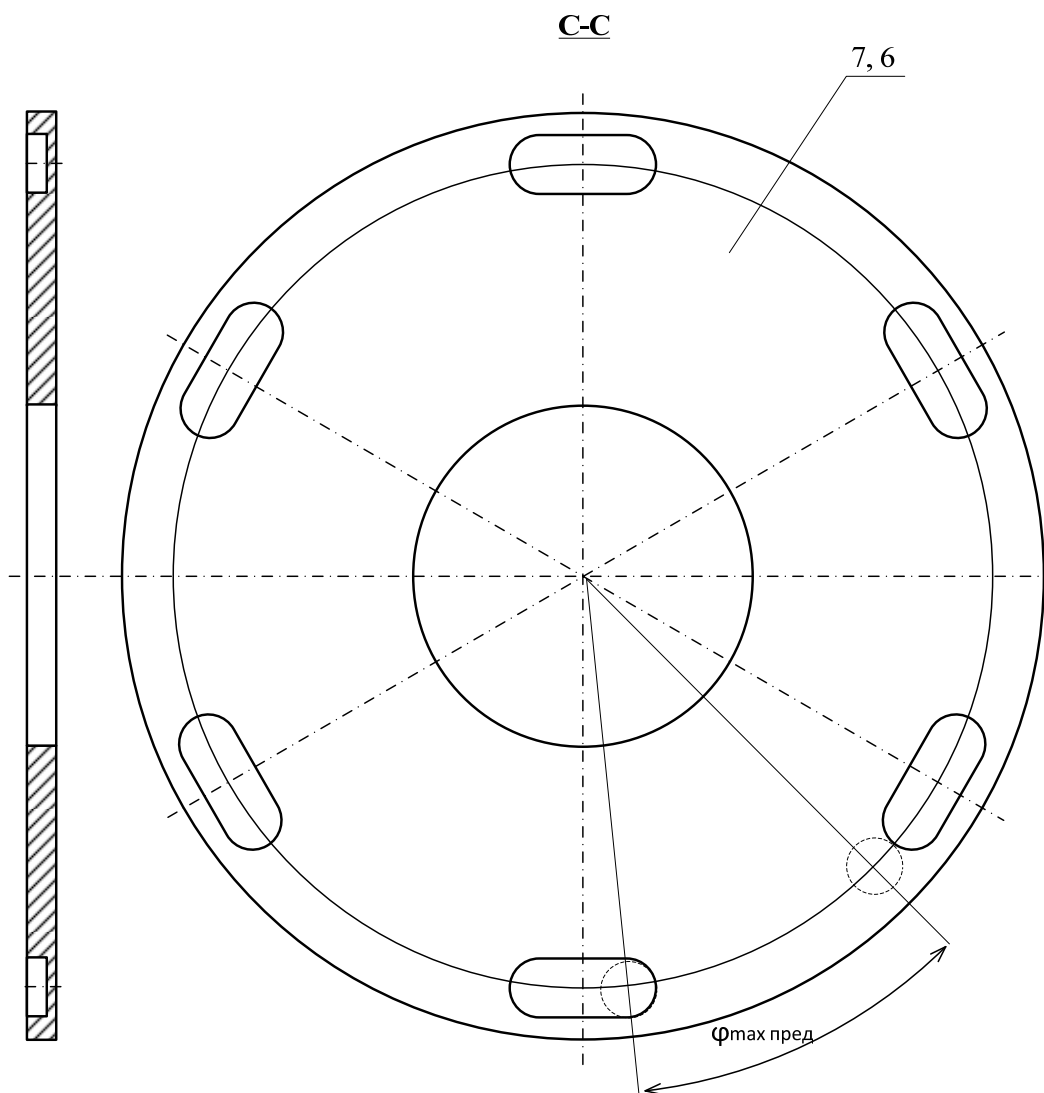


Рис. 3. Диск:

$\varphi_{\max \text{ пред}}$ – максимальный угол предварительного включения синхронизатора
(остальные позиции на рис. 1, 2)

Определяя по рис. 2 число упругоподатливых элементов ($n = 4$) и расстояние h от оси каждого упругоподатливого элемента до центра синхронизатора, находим необходимую рабочую нагрузку каждого упругоподатливого элемента

$$P = \frac{M_c}{n \cdot h}, \quad 3)$$

В упругоподатливом элементе на жесткую пружину рабочую нагрузку принимаем 75–80 %, а на длинную пружину – 25–20 %.

Далее задаемся диаметром жесткой пружины и ее проволоки и определяем ее параметры [7]. То же самое совершаем и с менее жесткой пружиной.

Пример определения параметров пружин приведен в табл. 1, составленной по рекомендациям в работе [7].

В табл. 1 даны формулы для вычисления параметров упругоподатливых элементов и приведены вычисленные их величины при $M_c = 300$ Нм мощного синхронизатора включения раздаточной коробки грузового четырехосного тягача.

Таблица 1

№ п/п	Наименование параметра	Формула вычисления параметра	Размерность	Составляющие упругоподатливых элементов	
				Жесткая пружина	Менее жесткая пружина
1.	Диаметр пружины	D	мм	40	20
2.	Диаметр подвески	d	мм	5	2,5
3.	Число рабочих витков	i	-	5	20
4.	Число опорных витков	$i_{оп}$	-	3	2
5.	Индекс пружины	$C = \frac{D}{d}$	-	8	8
6.	Коэффициент	$K = \frac{4c + 2}{4c - 3}$	-	1,172	1,172
7.	Допускаемые напряжения	$[\tau]$	МПа	400	400
8.	Осадка пружины	$\lambda = \frac{8Pc^3i}{\sigma d}$	мм	21,4	42,89
9.	Модуль сдвига	G	МПа	$8 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$
10.	Проверка d	$d = 1,373 \sqrt{\frac{\kappa PD}{[\tau]}}$	мм	5	2,5
11.	Длина пружины в свободном состоянии	$L = \lambda + 1,1d \cdot (i + i_{оп} - 1)$	мм	54,4	102,73
12.	Рабочая нагрузка (усилие пружины)	$P = 0,392 \frac{d^3}{\kappa D} [\tau]$	Н	418	104,708

При $M_c = 300$ Нм, числе упругоподатливых элементов $n = 6$ и плече $h = 100$ мм (рис. 2) каждый упругоподатливый элемент должен развить усилие $P = 500$ Н. Жесткая пружина развивает 418 Н, а мягкая 104,708 Н. Всего к окончанию синхронизации получаем 522,708 Н, то есть усилие в 22,708 Н можно не развивать. Удаляем 4 рабочих витка у длинной пружины. Тогда длина L менее жесткой (длинной) пружины составит примерно 80 мм.

Вывод формулы времени синхронизации осуществляем исходя из теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы [8]: полная производная кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе. Для синхронизации, при отсутствии внешних сил, эта теорема представлена так

$$\frac{d\left(\frac{J\Delta\omega^2}{2}\right)}{dt} = \frac{c\varphi^2\Delta\omega}{2}, \quad (3)$$

где J – момент инерции синхронизирующего звена; $\Delta\omega$ – текущее значение разности угловых скоростей включаемых звеньев: $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$; ω_1 и ω_2 – текущие значения угловых скоростей включаемых (синхронизируемых) звеньев; t – время; c – суммарная жесткость всех упругоподатливых элементов; φ – текущее значение угла сжимаемого упругоподатливого элемента (рис. 2).

Дифференцируем левую часть уравнения (3)

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = \frac{c\varphi^2}{2};$$

$$Jd\Delta\omega = \frac{c\varphi^2}{2} dt, \quad (4)$$

но $\varphi = \Delta\omega t$.

Тогда

$$Jd\Delta\omega = \frac{c \cdot \Delta\omega^2 t^2}{2} dt.$$

Разделяем переменные

$$J \frac{d\Delta\omega}{\Delta\omega^2} = \frac{ct^2}{2} dt. \quad (5)$$

Интегрируем правую и левую части

$$J \int_{\Delta\omega}^0 \frac{d\Delta\omega}{\Delta\omega^2} = \frac{c}{2} \int_0^t t^2 dt, \quad (6)$$

Согласно свойству интегрирования, получим

$$-J \int_0^{\Delta\omega} \frac{d\Delta\omega}{\Delta\omega^2} = \frac{c}{2} \int_0^t t^2 dt.$$

Результат решения

$$-J \cdot \left(-\frac{1}{\Delta\omega} \right) \int_0^{\Delta\omega} = \frac{ct^3}{6} \int_0^t + B. \quad (7)$$

Постоянную интегрирования B находим при $t=0$ и $\omega = \infty$.

Согласно правилам Штальца и Логиталья [9] получим

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta\omega} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{6} = 0.$$

Тогда: $0 = 0 + B$ и $B = 0$.

Из (7) находим время синхронизации для синхронизатора с одной пружиной в каждом упругоподатливом элементе

$$t = \sqrt[3]{\frac{6J}{c \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}} = 1,817 J^{0,33} \cdot c^{-0,33} \cdot \Delta\omega^{-0,33}. \quad (8)$$

Для примера определим время синхронизации при включении третьей передачи со второй на тракторе МТЗ-100 по формуле (8).

Приведенный момент инерции J_1 определялся как на бифиляре, так и по расчетам согласно чертежей деталей, и равен $0,91 \text{ Нм}\cdot\text{с}^2$. Жесткость всех упругоподатливых элементов $c = 17,6 \text{ Нм/рад}$. Момент синхронизации $M_c = 11,1 \text{ Нм}$ при заданном «пороге синхронизации» $t = 0,4 \text{ с}$. Разность (перед включением) угловых скоростей синхронизируемых звеньев $\Delta\omega_{\text{нач}} = 30 \text{ с}^{-1}$.

Тогда время синхронизации

$$t = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,91}{17,6 \cdot 30}} = 0,218 \text{ с}.$$

То есть, время синхронизации примерно в 2 раза меньше «порога синхронизации», равного $0,4 \text{ с}$.

Формула определения t в работе [3] некорректна, так как в ней отсутствует $\Delta\omega_{\text{нач}}$. В формуле (8) жесткость упругоподатливых элементов c определяется экспериментально, так как она носит нелинейный характер при синхронизации. Поэтому ее необходимо линеаризовать прямой линией методом наименьших квадратов. Такая «корректировка» жесткости пружин упругоподатливых элементов компенсирует неизбежные изменения в ходе синхронизации плеча h при сжатии пружин.

Плечо h при этом считается неизменным.

Парадокса в формуле (8) нет – чем больше $\Delta\omega_{\text{нач}}$, тем больше угловое замедление (угловое ускорение со знаком минус) синхронизируемых звеньев, то есть синхронизация осуществляется быстрее.

При двух пружинах в упругоподатливых элементах время синхронизации вычисляем с помощью метода суперпозиции.

Введем обозначения: $\Delta\omega_1$ – угловая скорость при работе внутренней пружины (рис. 2); c_1 – суммарная жесткость внутренних менее жестких пружин; c_2 – суммарная жесткость внешних менее жестких пружин; t_0 – время синхронизации при работе внутренней пружины (на угле φ_1); t_2 – время синхронизации при работе всех пружин; Φ – угол обхвата в свободном состоянии упругоподатливого элемента (одного); φ_1 – угол обхвата внутренней пружины в свободном состоянии (рис. 2); $\Delta\omega$ – текущее значение угловой скорости; t_1 – время синхронизации, когда работает только менее жесткая пружина.

В предположении, что упругоподатливые элементы оборудованы только менее жесткой пружинкой, время синхронизации определится по формуле

$$t_0 = \sqrt[3]{\frac{6J}{c_1 \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}}. \quad (9)$$

Из известной формулы

$$\varphi = \frac{\varepsilon t_0^2}{2}, \quad (10)$$

найдем угловое замедление (угловое ускорение со знаком минус, знак минус опускаем)

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t_0^2}. \quad (11)$$

Но «самостоятельно» менее жесткая пружина работает только на дуге φ_1 (рис. 2). Значит, на этом участке синхронизируется только угловая скорость

$$\Delta\omega_1 = \varepsilon t_1. \quad (12)$$

Так как

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon t_1^2}{2}, \quad (13)$$

то

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varepsilon}}. \quad (14)$$

Тогда время синхронизации синхронизатора, оборудованного упругоподатливыми элементами с двумя пружинами, найдем по общей формуле

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varepsilon}} + \sqrt[3]{\frac{6J}{(c_1 + c_2) \cdot (\Delta\omega_{\text{нач}} - \Delta\omega_1)}}. \quad (15)$$

Развернем формулу (15), подставив в нее известные первоначально величины. Из формул (9) и (11) находится ε

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{\sqrt[3]{\frac{6J}{c_1 \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}}}. \quad (16)$$

Подставляя ε в формулу (14) найдем t_1

$$t_1 = \sqrt{\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{c_1 \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}{6J}}}, \quad (17)$$

Текущее значение угловой скорости $\Delta\omega_1$ находим из формулы (12)

$$\Delta\omega_1 = \frac{2\varphi}{\sqrt[3]{\frac{6J}{c_1 \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{6J}{c_1 \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}}}}. \quad (18)$$

Формула (15) в известных величинах переписется

$$t = \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6J}{c_1 \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}} + \sqrt[3]{\frac{6J}{(c_1 + c_2) \cdot \left(\Delta\omega_{\text{нач}} - \frac{2\sqrt{\varphi - \varphi_1}}{\sqrt[3]{\frac{6J}{c_1 \cdot \Delta\omega_{\text{нач}}}}} \right)}}. \quad (19)$$

Для оценки времени включения передачи используется угол $\varphi_{\text{max предв}}$ (рис. 3).

В заключение статьи мы предлагаем выполнить модернизацию – из многодискового инерционного синхронизатора [1] сделать инерционно-пружинный синхронизатор.

Достаточно сказать, что многодисковый инерционный синхронизатор с $M_c = 280$ Нм при коэффициенте трения между дисками $\mu = 0,5$ включается силой включения $P = 2151$ Н, а при $\mu = 0,1$ силой 3226 Н. Для включения инерционно-пружинного синхронизатора достаточно силы $P = 200$ Н.

При такой модернизации удаляются диски трения, а блокирующие и фиксирующие элементы остаются без изменения. Нажимные и упорные диски служат для размещения в них устройств включения инерционно-пружинного синхронизатора, а на периферии муфты включения размещаются упругоподатливые элементы, причем их число $n = 6$.

Эти синхронизаторы после модернизации найдут применение в раздаточных коробках тяжелых многоприводных автомобилей.

Выводы

1. Разработана конструктивная схема инерционно-пружинного синхронизатора, в котором процесс подготовки к включению зубчатой муфты сводится только к командному импульсу. Синхронизация и деблокировка осуществляются без участия оператора (водителя), а включение передачи осуществляет оператор.

2. Показан принцип выбора основных параметров упругоподатливых элементов синхронизатора.

3. Осуществлен вывод формулы времени синхронизации.

4. Теоретически установлено:

- работа синхронизатора не зависит от значений коэффициента трения;
- блокирующие элементы и фиксирующие рассчитывают по методике их расчета для фрикционных синхронизаторов;

- установлено, что быстродействие синхронизатора высокое, причем деблокировка осуществляется быстрее, так как одновременно работают при переходе потенциальной энергии в кинетическую обе пружины упругоподатливого элемента.

5. Инерционно-пружинные синхронизаторы могут найти применение, например, в раздаточных коробках тяжелых многоприводных автомобилей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красеньков, В.И. Синхронизаторы в ступенчатых трансмиссиях / В.И. Красеньков, В.В. Егоркин. – М.: Машиностроение, 1967. – 198 с.

2. Дисковый синхронизатор: авт. свидет. 114910 СССР, МПК F16H 57/06 / И.М. Хованов – № 593374; заявл. 24.02.1958; опубл. 01.01.1959 // Бюл. изобр. / Гос. комит. по делам изобр. и откр. СМ СССР. – 1959.

2. Цереня, А.А. Перспективы развития синхронизированных трансмиссий тягово-транспортных машин / А.А. Цереня [и др.] // Тракторы и сельхозмашины. – 2010. – № 9. – С. 47-50.

3. Цереня, А.А. Способ включения передач ступенчатых трансмиссий и устройство для его осуществления: пат. 5811 Респ. Беларусь, МПК F16D 23/06 / А.А. Цереня [и др.] заявитель Воен. акад. Респ. Беларусь. – № а 20000291; заявл. 28.03.2000; опубл. 30.12.2003 // Афiцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2003. – № 6.

4. Грибков, Ю.А. Инерционно-пружинный синхронизатор включения передач ступенчатой трансмиссии : пат. 22338 Респ. Беларусь, МПК F16D 23/06 / Ю.А. Грибков, С.С. Шатилевич, А.А. Цереня, М.П. Брель, А.С. Мезенцев; заявитель Воен. акад. Респ. Беларусь. – № а 20150236; заявл. 29.04.2015; опубл. 30.12.2016 // Афiцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2016. – № 6.

5. Гришкевич, А.И. Проектирование трансмиссий автомобилей: справочник / А.И. Гришкевич, Б.У. Булы, Г.Ф. Бутусов. – М.: Машиностроение, 1984. – 272 с.

6. Орлов, П.И. Основы конструирования: справочно-методическое пособие / П.И. Орлов. – М.: Машиностроение, 1988. – 560 с.

7. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Луиц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука. Физмалит, 1979. – 272 с.

8. Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу / Ю.С. Богданов. – Минск: БГУ, 1974. – 176 с.

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Нестерович А. В.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Введение. Многочисленные исследования проведены для слоистых элементов конструкций по деформированию и колебаниям. Постановки соответствующих краевых задач и методы расчета приведены в монографии [1]. Выкладки, связанные с осесимметричными колебаниями круговых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [2, 3]. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня рассмотрен в статье [4]. Результаты, описывающие изотермическое и термопластическое осесимметричное деформирование трехслойных круговых и прямоугольных пластин с несжимаемым и сжимаемым заполнителем, в том числе на упругом основании приведены в публикациях [5–12]. Аналитические результаты по неосесимметричному деформированию круговой однослойной и трехслойной пластин приведены в статьях [13, 14]. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении рассмотрены в [15].

Здесь получены общее и частные решения системы дифференциальных уравнений равновесия упругой трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении. Приведены амплитудные составляющие перемещений для n -ой гармоники. Нагрузки рассматривались зависящие от радиуса.

1. Общее решение краевой задачи при неосесимметричном деформировании. С учетом ранее полученной системы уравнений равновесия трехслойной круговой пластины [15] при неосесимметричном деформировании в своей плоскости внешними нагрузками $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$ (рис. 1) искомые перемещения $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных при отсутствии прогиба и сдвига в заполнителе:

$$\begin{aligned} a_1 u_{r,rrr} + \frac{a_1}{r} u_{r,rr} - \frac{a_1}{r^2} u_r + \frac{a_{13}}{r^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_{13}}{r} u_{\varphi,\varphi r} - \frac{a_1 + a_{13}}{r^2} u_{\varphi,\varphi} &= -p_r, \\ a_{13} u_{\varphi,rrr} + \frac{a_{13}}{r} u_{\varphi,rr} - \frac{a_{13}}{r^2} u_\varphi + \frac{a_2 + a_{13}}{r} u_{r,r\varphi} + \frac{a_1}{r^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_{13}}{r^2} u_{r,\varphi} &= -p_\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где a_1 , a_2 , a_{13} – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

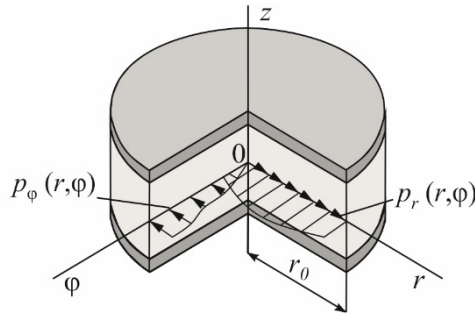


Рис. 1. Расчетная схема неосесимметричного нагружения в своей плоскости

Для решения системы уравнений (1) искомые перемещения и нагрузки раскладываем в тригонометрические ряды Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \varphi) &= u_{r0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\
 u_{\varphi}(r, \varphi) &= u_{\varphi0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\
 p_r(r, \varphi) &= p_{r0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\
 p_{\varphi}(r, \varphi) &= p_{\varphi0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right],
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $u_{r0}(r)$, $u_{\varphi0}(r)$ – перемещения, соответствующие осесимметричному нагружению

$$u_{r0} = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{a_1 r} \int_0^r \int_0^r p_{r0} \, dr \, dr, \quad u_{\varphi0} = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{1}{a_{13} r} \int_0^r \int_0^r p_{\varphi0} \, dr \, dr;$$

C_1, \dots, C_4 – константы интегрирования, следующие из граничных условий;

$u_{rn}^{(1)}(r)$, $u_{rn}^{(2)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – искомые амплитудные составляющие перемещений;

$p_{r0}(r)$, $p_{\varphi0}(r)$ – осесимметричные составляющие нагрузки;

$p_{rn}^{(1)}(r)$, $p_{rn}^{(2)}(r)$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – составляющие радиальной и тангенциальной внешних неосесимметричных нагрузок

$$p_{rn}^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \cos(n\varphi) \, d\varphi, \quad p_{rn}^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \sin(n\varphi) \, d\varphi,$$

$$p_{\varphi n}^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_{\varphi}(r, \varphi) \cos(n\varphi) \, d\varphi, \quad p_{\varphi n}^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_{\varphi}(r, \varphi) \sin(n\varphi) \, d\varphi.$$

После преобразований и приравнивания коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему обыкновенных линейных дифферен-

циальных уравнений для определения искоемых амплитудных функций $u_{rn}^{(1)}(r)$, $u_{rn}^{(2)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$:

$$\begin{aligned}
 L_2\left(a_1 u_{rn}^{(1)}(r)\right) - \frac{a_{13} n^2}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) + \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{\varphi n, r}^{(2)}(r) - \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) &= -p_{rn}^{(1)}(r), \\
 L_2\left(a_1 u_{rn}^{(2)}(r)\right) - \frac{a_{13} n^2}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) - \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{\varphi n, r}^{(1)}(r) + \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) &= -p_{rn}^{(2)}(r), \\
 L_2\left(a_{13} u_{\varphi n}^{(1)}(r)\right) + \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{rn, r}^{(2)}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) + \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) &= -p_{\varphi n}^{(1)}(r), \\
 L_2\left(a_{13} u_{\varphi n}^{(2)}(r)\right) - \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{rn, r}^{(1)}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) - \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) &= -p_{\varphi n}^{(2)}(r).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Общее решение системы (3) получим в виде суммы решений соответствующей однородной системы и частного решения $u_{rn}^{(1)*}$, $u_{\varphi n}^{(1)*}$, $u_{rn}^{(2)*}$, $u_{\varphi n}^{(2)*}$ данной системы. Для однородной системы общее решение получено с помощью стандартных процедур пакета Maple. Суммируя, имеем

$$\begin{aligned}
 u_{rn}^{(1)} &= C_{n5} r^{-S_{n1}} + C_{n6} r^{S_{n1}} + C_{n7} r^{-S_{n2}} + C_{n8} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(1)*}, \\
 u_{\varphi n}^{(1)} &= C_{n1} h_{n1} r^{-S_{n1}} + C_{n2} h_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n3} h_{n3} r^{-S_{n2}} + C_{n4} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \\
 u_{rn}^{(2)} &= C_{n1} r^{-S_{n1}} + C_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n3} r^{-S_{n2}} + C_{n4} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(2)*}, \\
 u_{\varphi n}^{(2)} &= -C_{n5} h_{n1} r^{-S_{n1}} - C_{n6} h_{n2} r^{S_{n1}} - C_{n7} h_{n3} r^{-S_{n2}} - C_{n8} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(2)*},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где C_{ni} ($i=1, \dots, 8$) – константы интегрирования, следующие из граничных условий;

S_{n1} , S_{n2} – степени в фундаментальных решениях, зависящие от параметра n , геометрических и упругих характеристик материалов слоев

$$S_{n1} = \frac{\sqrt{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_{13} n^2 + 2a_1 a_{13} - Q_n}}{\sqrt{2a_1 a_{13}}}, \quad S_{n2} = \frac{\sqrt{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_{13} n^2 + 2a_1 a_{13} + Q_n}}{\sqrt{2a_1 a_{13}}},$$

$$Q_n = \sqrt{n^2 (a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})(n^2 a_1^2 + (4 - 2n^2)a_1 a_{13} - n^2 a_2^2 - 2n^2 a_2 a_{13})};$$

h_{n1} , h_{n2} , h_{n3} , h_{n4} – коэффициенты

$$\begin{aligned}
 h_{n1} &= \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 - Q)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13})S_{n1})}{2\left((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2)a_{13}^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2)a_{13} + a_1 a_2^2 n^2\right)n}, \\
 h_{n2} &= \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 - Q)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13})S_{n1})}{2\left((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2)a_{13}^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2)a_{13} + a_1 a_2^2 n^2\right)n},
 \end{aligned}$$

$$h_{n3} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 + Q)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13}) S_{n2})}{2\left(\left(a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2\right) a_{13}^2 + \left(2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2\right) a_{13} + a_1 a_2^2 n^2\right) n},$$

$$h_{n4} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 + Q)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13}) S_{n2})}{2\left(\left(a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2\right) a_{13}^2 + \left(2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2\right) a_{13} + a_1 a_2^2 n^2\right) n}.$$

Из условия ограниченности перемещений в центре пластины следует в решении (4) положить $C_{n1} = C_{n3} = C_{n5} = C_{n7} = 0$. В результате амплитудные составляющие перемещений для n -ой гармоники принимают вид

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)} &= C_{n6} r^{S_{n1}} + C_{n8} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(1)*}, \\ u_{\varphi n}^{(1)} &= C_{n2} h_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n4} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \\ u_{rn}^{(2)} &= C_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n4} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(2)*}, \\ u_{\varphi n}^{(2)} &= -C_{n6} h_{n2} r^{S_{n1}} - C_{n8} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(2)*}. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Решение системы уравнений в конечном виде. Если при разложении нагрузки в ряд (2) можно ограничиться одним членом, то $S_{11} = 0$ и искомые перемещения будут

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= C_{16} + C_{18} r^{S_{12}} + u_{r1}^{(1)*}, \\ u_{\varphi 1}^{(1)} &= C_{12} h_{12} + C_{14} h_{14} r^{S_{12}} + u_{\varphi 1}^{(1)*}, \\ u_{r1}^{(2)} &= C_{12} + C_{14} r^{S_{12}} + u_{r1}^{(2)*}, \\ u_{\varphi 1}^{(2)} &= -C_{16} h_{12} - C_{18} h_{14} r^{S_{12}} + u_{\varphi 1}^{(2)*}, \end{aligned} \quad (6)$$

где
$$h_{12} = 1, \quad h_{14} = -\frac{\sqrt{a_1} \sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})} (a_2 + a_{13})}{\sqrt{a_{13}} (a_1 a_{13} - a_2^2 - 2a_2 a_{13})} - \frac{a_1^2 + a_1 a_{13}}{a_1 a_{13} - a_2^2 - 2a_2 a_{13}},$$

$$S_{12} = \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})}}{\sqrt{a_1 a_{13}}}.$$

Для ненулевого второго члена ряда (2) в разложении нагрузки искомые перемещения будут

$$\begin{aligned} u_{r2}^{(1)} &= C_{26} r^{S_{21}} + C_{28} r^{S_{22}} + u_{r2}^{(1)*}, \\ u_{\varphi 2}^{(1)} &= C_{22} h_{22} r^{S_{21}} + C_{24} h_{24} r^{S_{22}} + u_{\varphi 2}^{(1)*}, \\ u_{r2}^{(2)} &= C_{22} r^{S_{21}} + C_{24} r^{S_{22}} + u_{r2}^{(2)*}, \\ u_{\varphi 2}^{(2)} &= -C_{26} h_{22} r^{S_{21}} - C_{28} h_{24} r^{S_{22}} + u_{\varphi 2}^{(2)*}, \end{aligned} \quad (7)$$

где
$$S_{21} = \frac{\sqrt{2a_1^2 + a_1 a_{13} - 2a_2^2 - 4a_2 a_{13} - Q_2 / 2}}{\sqrt{a_1 a_{13}}}, \quad S_{22} = \frac{\sqrt{2a_1^2 + a_1 a_{13} - 2a_2^2 - 4a_2 a_{13} + Q_2 / 2}}{\sqrt{a_1 a_{13}}},$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= 4\sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})(a_1^2 - a_1a_{13} - a_2^2 - 2a_2a_{13})}, \\
h_{21} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} - Q_2/4)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13})S_{21})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}, \\
h_{22} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} - Q_2/4)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13})S_{21})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}, \\
h_{23} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} + Q_2/4)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13})S_{22})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}, \\
h_{24} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} + Q_2/4)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13})S_{22})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}.
\end{aligned}$$

Если в нагрузке два ненулевых члена ряда, то выражение для перемещений получим, просуммировав (6) и (7).

3. Частные решения системы уравнений равновесия. Получим решения $u_{rn}^{(1)*}(r)$, $u_{rn}^{(2)*}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)*}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)*}(r)$ в случае зависимости нагрузок от радиальной координаты в виде степенной функции. В результате, правые части системы дифференциальных уравнений (3) будут подобными функциями от радиуса. Частные решения были получены с помощью программного пакета Maple:

1. При постоянных нагрузках $p_{rn}^{(1)}(r) = p_{rn0}^{(1)}$, $p_{rn}^{(2)}(r) = p_{rn0}^{(2)}$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n0}^{(1)}$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r) = p_{\varphi n0}^{(2)}$ частные решения системы (3) будут

$$\begin{aligned}
u_{rn}^{(1)*} &= (n^2 a_1 p_{rn0}^{(1)} - n a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} + 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(2)} + n a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(1)}) D_1 r^2, \\
u_{\varphi n}^{(1)*} &= (n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} + 3n a_{13} p_{rn0}^{(2)} + n a_1 p_{rn0}^{(2)} + 2n a_2 p_{rn0}^{(2)} - 3a_1 p_{\varphi n0}^{(1)}) D_1 r^2, \\
u_{rn}^{(2)*} &= (n^2 a_1 p_{rn0}^{(2)} + n a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} - 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(1)} - n a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(2)}) D_1 r^2, \\
u_{\varphi n}^{(2)*} &= (n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} - 3n a_{13} p_{rn0}^{(1)} - n a_1 p_{rn0}^{(1)} - 2n a_2 p_{rn0}^{(1)} - 3a_1 p_{\varphi n0}^{(2)}) D_1 r^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где
$$D_1 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 4n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 4n^2 a_2^2 + 8n^2 a_2 a_{13} + 9a_1 a_{13}}.$$

2. При нагрузках линейно зависящих от радиальной координаты $p_{rn}^{(1)}(r) = p_{rn0}^{(1)}(r_0 - r)$, $p_{rn}^{(2)}(r) = p_{rn0}^{(2)}(r_0 - r)$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n0}^{(1)}(r_0 - r)$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r) = p_{\varphi n0}^{(2)}(r_0 - r)$ частные решения получены аналогично

$$\begin{aligned}
u_{rn}^{(1)*} &= (-n^2 a_1 p_{rn0}^{(1)} + n a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} - 3n a_2 p_{\varphi n0}^{(2)} - 2n a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} + 8a_{13} p_{rn0}^{(1)}) J_1 r^3 + \\
&\quad + (n^2 a_1 p_{rn0}^{(1)} - n a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} + 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(2)} + n a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(1)}) J_2 r^2, \\
u_{rn}^{(2)*} &= (-n^2 a_1 p_{rn0}^{(2)} - n a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} + 3n a_2 p_{\varphi n0}^{(1)} + 2n a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} + 8a_{13} p_{rn0}^{(2)}) J_1 r^3 + \\
&\quad + (n^2 a_1 p_{rn0}^{(2)} + n a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} - 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(1)} - n a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(2)}) J_2 r^2, \\
u_{\varphi n}^{(1)*} &= (8a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} - n a_1 p_{rn0}^{(2)} - 3n a_2 p_{rn0}^{(2)} - 4n a_{13} p_{rn0}^{(2)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)}) J_1 r^3 + \\
&\quad + (-3a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} + n a_1 p_{rn0}^{(2)} + 2n a_2 p_{rn0}^{(2)} + 3n a_{13} p_{rn0}^{(2)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)}) J_2 r^2,
\end{aligned}$$

$$u_{\varphi n}^{(2)*} = \left(8a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} + na_1 p_{rn 0}^{(1)} + 3na_2 p_{rn 0}^{(1)} + 4na_{13} p_{rn 0}^{(1)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) J_1 r^3 + \left(-3a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} - na_1 p_{rn 0}^{(1)} - 2na_2 p_{rn 0}^{(1)} - 3na_{13} p_{rn 0}^{(1)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) J_2 r^2, \quad (9)$$

где
$$J_1 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 9n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 9n^2 a_2^2 + 18n^2 a_2 a_{13} + 64a_1 a_{13}},$$

$$J_2 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 4n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 4n^2 a_2^2 + 8n^2 a_2 a_{13} + 9a_1 a_{13}}.$$

3. При квадратичной зависимости нагрузок от радиальной координаты $p_{rn}^{(1)}(r) = p_{rn 0}^{(1)}(r_0^2 - r^2)$, $p_{rn}^{(2)}(r) = p_{rn 0}^{(2)}(r_0^2 - r^2)$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n 0}^{(1)}(r_0^2 - r^2)$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r) = p_{\varphi n 0}^{(2)}(r_0^2 - r^2)$ частные решения

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)*} &= \left(-n^2 a_1 p_{rn 0}^{(1)} + na_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} - 4na_2 p_{\varphi n 0}^{(2)} - 3na_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} + 15a_{13} p_{rn 0}^{(1)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(n^2 a_1 p_{rn 0}^{(1)} - na_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} + 2na_2 p_{\varphi n 0}^{(2)} + na_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} - 3a_{13} p_{rn 0}^{(1)} \right) Y_2 r^2, \\ u_{rn}^{(2)*} &= \left(-n^2 a_1 p_{rn 0}^{(2)} - na_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} + 4na_2 p_{\varphi n 0}^{(1)} + 3na_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} + 15a_{13} p_{rn 0}^{(2)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(n^2 a_1 p_{rn 0}^{(2)} + na_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} - 2na_2 p_{\varphi n 0}^{(1)} - na_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} - 3a_{13} p_{rn 0}^{(2)} \right) Y_2 r^2, \\ u_{\varphi n}^{(1)*} &= \left(15a_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} - na_1 p_{rn 0}^{(2)} - 4na_2 p_{rn 0}^{(2)} - 5na_{13} p_{rn 0}^{(2)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(-3a_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} + na_1 p_{rn 0}^{(2)} + 2na_2 p_{rn 0}^{(2)} + 3na_{13} p_{rn 0}^{(2)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} \right) Y_2 r^2, \\ u_{\varphi n}^{(2)*} &= \left(15a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} + na_1 p_{rn 0}^{(1)} + 4na_2 p_{rn 0}^{(1)} + 5na_{13} p_{rn 0}^{(1)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(-3a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} - na_1 p_{rn 0}^{(1)} - 2na_2 p_{rn 0}^{(1)} - 3na_{13} p_{rn 0}^{(1)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) Y_2 r^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где
$$Y_1 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 16n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 16n^2 a_2^2 + 32n^2 a_2 a_{13} + 225a_1 a_{13}},$$

$$Y_2 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 4n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 4n^2 a_2^2 + 8n^2 a_2 a_{13} + 9a_1 a_{13}}.$$

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи и полученные частные решения при степенной зависимости нагрузок от радиуса позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной круговой пластины под действием неосесимметричных нагрузок, действующих в ее плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T19PM-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
2. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34, № 5 – С. 70–79.
3. Горшков, А. Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

4. Старовойтов, Э. И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э. И. Старовойтов, А. В. Попченко, Д. В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сборник. – Мн. : 2013. – Вып. 28. – С. 23–26.
5. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
6. Старовойтов, Э. И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24, №1. – С.392–406.
7. Зеленая, А. С. Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – №1 (38). – С. 45–49.
8. Зеленая, А. С. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – №6 (105). – С. 89–95.
9. Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2 – Режим доступа: <http://mathmod.esrae.ru/18-69>. – Дата доступа: 24.11.2019.
10. Старовойтов, Э. И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.
11. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. – № 4. – С. 55–62.
12. Нестерович, А. В. Осесимметричное растяжение-сжатие круговой трехслойной пластины в температурном поле // Современные вопросы механики сплошных сред 2019 : сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием; изд-во Чуваши. ун-та. – Чебоксары, 2019. – С.43–46.
13. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.
14. Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т. транспорта. – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
15. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АБРАЗИВНОГО БРУСКА ПРИ СУПЕРФИНИШИРОВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ ДЕТАЛИ

Г.И. Беляева, С.В. Самосюк

Белорусский национальный технический университет, Минск

Суперфиниширование является одним из наиболее совершенных производительных процессов обработки деталей и благодаря получению очень малой шероховатости $Ra = 0,063-0,008$ мкм применяется для финишной обработки поверхностей после шлифования с целью существенного увеличения эксплуатационных свойств. Суперфиниширование происходит при вращательном движении детали и поступательном смещении брусков с наложением колебательных движений. Амплитуда движения брусков составляет 1,5–6 мм, а частота 400–1200 колебаний в минуту. Контакт детали и инструмента осуществляется по поверхности, бруски придавливаются к детали с давлением $(0,3-3) \cdot 10^5$ Па, что обеспечивает микрорезание одновременно большим количеством абразивных зерен. В ходе обработки изменяются глубина и вид микронеровностей, поверхность приобретает сетчатый рельеф, обеспечивающий хорошие условия смазки при эксплуатации. Особенностью суперфиниширования является снижение интенсивности удаления материала после снятия гребешков исходной шероховатости с детали.

Достоинствами суперфиниширования являются:

- 1) простота применяемого оборудования;
- 2) возможность использования универсальных (токарных, шлифовальных) станков для проведения операции;
- 3) высокая производительность;
- 4) высокое качество получаемых поверхностей $Ra = 0,063-0,008$ мкм ;
- 5) большая фактическая опорная площадь поверхности (до 90 % от всей поверхности).

Суперфиниширование не устраняет погрешности формы (волнистость, конусность, овальность), полученные на предшествующей обработке. Это является единственным недостатком этого процесса.

Для суперфиниширования применяются головки с пневматическим, электромагнитным и механическим приводом осциллирования. Суперфинишные головки используются как на специальных, так и на универсальных станках. На схеме (рис. 1) показана электромагнитная головка, применяемая для обработки цилиндрических деталей. Она состоит из плоской пружины 1 жесткостью c , находящейся под воздействием включаемых попеременно электромагнитов 2, расположенных по обеим сторонам пружины. Установленному на конце пружины держателю абразивного бруска 3 массы m головка сообщает гармонические колебания под воздействием силы упругости, пропорциональной расстоянию от положения равновесия.

Определение движения бруска 3 производится для горизонтального расположения головки (сила тяжести не влияет на движение) и при условии, что другой конец плоской пружины совершает прямолинейные гармонические колебания с частотой электрической сети ν и амплитудой a .

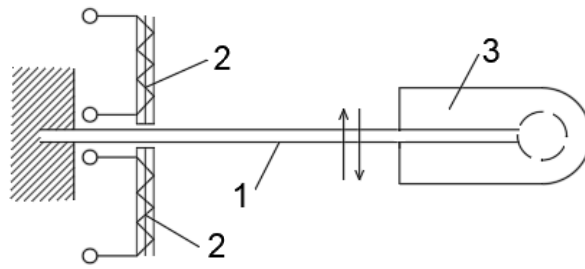


Рис. 1. Электромагнитная головка

Рассмотрим движение бруска как сложное движение точки. Дифференциальное уравнение движения точки по отношению к подвижной оси x_r (рис. 2):

$$m\ddot{x}_r = \sum F_{kx} + \Phi_{e_{x_r}};$$

$$\sum F_{kx} = -F = -x_r c,$$

где F сила упругости плоской пружины.

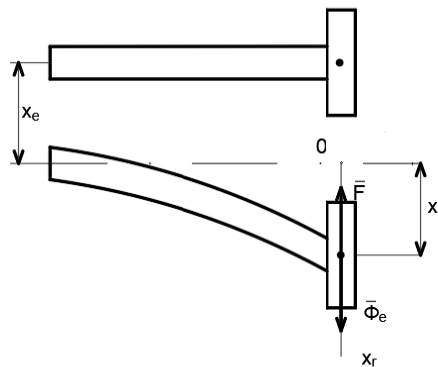


Рис. 2. Дифференциальное уравнение движения точки по отношению к подвижной оси x_r

Сила инерции в переносном движении

$$\Phi_{e_{x_r}} = ma_e; \quad a_e = \ddot{x}_e;$$

$$x_e = a \sin pt;$$

$$a_e = -ap^2 \sin pt;$$

$$\Phi_{e_{x_r}} = -map^2 \sin pt.$$

Подставим значения сил в дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{x}_r = -cx_r + map^2 \sin pt$$

$$\text{или } \ddot{x}_r + \frac{c}{m}x_r = ap^2 \sin pt.$$

Введем обозначения: $k^2 = \frac{c}{m}$; $h = ap^2$.

Тогда дифференциальное уравнение запишем в виде:

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = h \sin pt.$$

Решим это уравнение.

$$x_r = x_r^* + x_r^{**},$$

где x_r^* – общее решение однородного уравнения;

x_r^{**} – частное решение неоднородного уравнения.

$$x_r^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt;$$

$$x_r^{**} = A_r \sin pt \text{ при условии } k \neq p, i = \sqrt{-1};$$

$$\ddot{x}_r^{**} = -A_r p^2 \sin pt;$$

$$-A_r p^2 \sin pt + k^2 A_r \sin pt = h \sin pt.$$

Откуда

$$A_r = \frac{h}{k^2 - p^2}; x_r^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

$$x_r = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

При начальных условиях движения

$\dot{x}_{r0} = 0$; $x_r = 0$ определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

$$\dot{x}_r = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt;$$

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 = \frac{-hp}{(k^2 - p^2)k}.$$

Уравнение относительного движения бруска:

$$x_r = -\frac{hp}{(k^2 - p^2)k} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Определим амплитуду колебаний бруска в его абсолютном движении.

$$A = A_e + A_r = a + \frac{h}{k^2 - p^2} = a + \frac{ap^2}{\frac{c}{m} - p^2} = \frac{ac}{m(\frac{c}{m} - p^2)} = \frac{ac}{c - mp^2}.$$

С учетом частоты ν

$$T = \frac{1}{\nu}; p = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;$$

$$A = \frac{ac}{c - m(2\pi\nu)^2}.$$

Так как производительность процесса суперфиниширования цилиндрических поверхностей зависит от частоты и амплитуды колебаний бруска, то полученная зависимость может быть использована для прогнозирования режимов резания и времени обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дальский, А.М. *Технология конструкционных материалов* / А.М. Дальский, Т.М. Барсукова, Л.Н. Бухаркин – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с.
2. Никитин, Н.Н. *Курс теоретической механики: учебное пособие* / Н.Н. Никитин, А.В. Дубровский, Н.М. Щепина – М.: Высшая школа, 1990. – 608 с.
3. Миткевич, С.И. *Сборник специальных задач по разделу «Динамика» курса «Теоретическая механика» для студентов машиностроительных специальностей* / С.И. Миткевич, Г.И. Беляева, В.И. Глубокий – Минск: Ротапринт БПИ, 1991. – 23 с.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИНТЕТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ВЫСОКОПРОЧНОГО ЧУГУНА ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ЕГО МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Шаповалова М. И., Водка А. А.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина

Введение. Одним из материалов, широко применимых в машиностроении, является высокопрочный чугун. Его используют в ответственных узлах, таких как: зубчатые колеса, коробки передач, рычаги подвески и др. Основной особенностью такого чугуна является относительно простая микроструктура, состоящая из ферритной основы с включением зернистого графита сферической формы. Из литературы известны несколько основных подходов анализа макроструктуры подобных материалов. К первой группе [1–4], относятся экспериментальные исследования. Для них необходимо создать образец путем предварительной обработки, и провести эксперимент с приложением механической нагрузки [4], температуры [1–2], или других внешних факторов. В результате эксперимента анализируются показатели прочности, упругости, пластичности и делается вывод, какое влияние играет соответствующая микроструктура на: развитие трещин [1], фазовый состав [2], твердость исследуемого образца [3].

Вторую группу исследований [5–10], объединяет применения технологий компьютерного зрения. Распознавание образов изображения используют для классификации структуры по соответствующим признакам [5, 8]; оценки количества дефектов (вырожденных графитовых узелков [6]) сегментации сложных микроструктур [7], нахождение размеров частиц и распределение их на плоскости, для прогнозирования свойств материала в соответствии с изображением его микроструктуры [9–10].

Еще одно направление [11–14], предполагает моделирование исследуемой микроструктуры средствами метода конечных элементов. Однако геометрия структуры часто переносится в конечно-элементную модель полностью из изображения, или слишком упрощается, что ограничивает применение метода только соответствующей концентрацией и характером размещения включений.

В работе предлагается создать методику для исследований микроструктуры без дополнительного проведения натурального эксперимента, использовать преимущества компьютерного видения для распознавания микроструктуры. Предложенная методика опирается на генерацию статистически эквивалентной геометрии микроструктуры, не привязываясь к конкретному изображению. Анализ напряженно-деформированного состояния и эквивалентных упругих констант выполняется методом конечных элементов.

Постановка задачи. В качестве исходных данных для работы берутся изображения микроструктуры высокопрочного чугуна из ГОСТ 3443-87 [15]. Рассмотрены пять случаев концентрации шаровидного графита в материале: ШГ2 (2 %), ШГ4 (4 %), ШГ6 (6 %), ШГ10 (10 %), ШГ12 (12 %), для определения зависимости параметров прочности исследуемого материала от концентрации и размеров включений графита.

Работа предполагает моделирование структуры высокопрочного чугуна синтетическим путем, опираясь на действительные изображения его микроструктуры. Необходимо учитывать возможность случайного расположения включений на плоскости, и рассмотреть возможность вариации их концентрации в зависимости от размеров графита. Определить упругие свойства исследуемого материала путем моделирования конеч-

но элементной модели. Получить характеристики модуля упругости, сдвига и коэффициента Пуассона, как функции концентрации включений.

Обработка изображений. Обработка изображений микроструктуры реализуется на высокоуровневой языке программирования Python с использованием библиотеки компьютерного зрения OpenCV. Алгоритм обработки изображений позволяет избавиться от шумов и выполнить фильтрацию изображения микроструктуры чугуна, для удаления небольших темных пятен графита в феррите, и наоборот, закрытие светлых отверстий в графите. Для выявления границ перехода от одного типа материала к другому, применяется алгоритм Canny Edge Detection, многоступенчатый алгоритм библиотеки OpenCV. Во время исследования микроструктуры – делается предположение, что графитовые включения имеют круглую форму, поэтому поиск охватываемого контура осуществляется с помощью функции minEnclosingCircle. Для каждой такой области рассчитывается площадь и находится центр масс, который в свою очередь является центром найденного круга.

Генерация статистически эквивалентной микроструктуры шаровидного чугуна возможна благодаря установлению зависимости размеров включений от их концентрации. Для каждого случая концентрации получены данные по количеству и размерам включений графита на плоскости. Рассчитано среднее значение и разброс случайной величины относительно ее математического ожидания.

Полученные данные математического ожидания, дисперсии радиусов включений, и их количество на единицу площади, описываются функцией зависимости размера включений от концентрации. Используя модуль optimize.curve_fit библиотеки SciPy, проводится аппроксимация. Через коэффициенты аппроксимации, вышеуказанные показатели функции концентрации принимают вид (1). График зависимости математического ожидания радиусов $M[R]$ и их дисперсия $D[R]$ изображена на рис. 1.

$$M[R] = 18,308 \cdot (\psi - 0,048)^{0,123}; \quad \sqrt{D[R]} = 9,683 \cdot (\psi - 0,045)^{0,314} \quad (1)$$

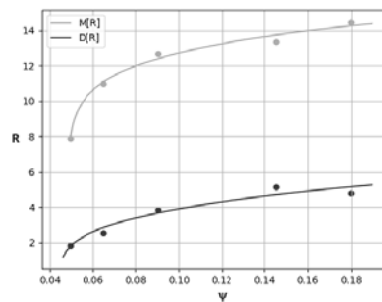


Рис. 1. Зависимость размера включений от их концентрации

Для подтверждения качества предлагаемой аппроксимации рассчитывается коэффициент детерминации. Для математического ожидания радиусов включений: $R^2_M = 0,988$, для дисперсии – $R^2_D = 0,943$, это свидетельствует о достаточно высоком качестве предлагаемой модели.

Для генерации статистически эквивалентной искусственной микроструктуры шаровидного чугуна делается предположение, что характер включений подчиняется нормальному закону распределения случайной величины (2). Средствами библиотеки NumPy реализуется алгоритм случайной генерации радиусов включений методом numpy.random.normal. В качестве параметров функции выступают: математическое ожидание и дисперсия радиусов по формуле (1).

$$f(R) = \frac{1}{D[R]\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R-M[R])^2}{2D[R]^2}}, \quad (2)$$

где R – радиус включений; $M[R]$ – математическое ожидание размеров включений; $D[R]$ – дисперсия радиусов включений графита.

Предложенная схема формирует радиусы включений графита случайным образом до тех пор, пока их суммарная площадь, деленная на заданную площадь изображения, меньше желаемой концентрации (3). Количество таких радиусов N , определяется согласно (4), где N – количество радиусов R ; ψ – концентрация графита в чугуна; S – общая площадь исследуемой микроструктуры; $M[R]$ – математическое ожидание размеров включений.

$$\sum_N \frac{\pi \cdot R^2}{S} < \psi, \quad (3)$$

$$N = \frac{\psi \cdot S}{\pi \cdot M[R]^2}, \quad (4)$$

Размещение радиусов на плоскости моделируемой микроструктуры чугуна происходят также случайно, и реализуется функцией равномерного распределения величины –random.uniform. В качестве параметров – выступают заранее заданные размеры изображения.

Конечно-элементная модель. Построение конечно-элементной модели – основано на геометрии искусственно сгенерированной микроструктуре чугуна. Для построения сетки используется двухмерный 8-узловой конечный элемент с двумя степенями свободы в каждом узле. Для проведения вычислений считается, что феррит – это изотропный материал (табл. 1), графит – имеет гексагональную структуру кристаллической решетки. Соответствующие упругие константы приведены в табл. 2.

Таблица 1 – Свойства материала феррита

E, GPa	ν
210	0.3

Таблица 2 – Свойство материала графита

$E_x, E_z,$ GPa	$E_y,$ GPa	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}	$G_{xy}, G_{xz},$ GPa	$G_{yz},$ GPa
1025	36	0.34	0.012	0.16	0.18	4.35

На макроуровне, структурные элементы считаются однородными анизотропными материалами с усредненными упругими характеристиками. Физические зависимости анизотропного материала в общем случае анизотропии имеют вид (5).

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = A_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где A_{ijkl} – упругие константы эквивалентного однородного материала;

$\langle \sigma_{ij} \rangle, \langle \varepsilon_{ij} \rangle$ – среднее значение напряжений и деформаций, – определенное как интеграл по объему (6).

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (6)$$

В большинстве случаев структура исследуемого материала имеет соответствующую симметрию, поэтому усреднения упругих свойств позволяет рассматривать такой материал, как ортотропный. В случае, когда в координатных плоскостях принята система координат, параллельна плоскостям симметрии упругих свойств ортотропной материала, закон Гука можно представить в матричной форме. В качестве исследуемого образца берутся плоские искусственно смоделированные изображения микроструктуры чугуна, поэтому напряженное состояние рассчитывается на основе плоских моделей. Тогда закон Гука примет вид (7):

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{xx} \rangle \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle \\ \langle 2\varepsilon_{xy} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \sigma_{xx} \rangle \\ \langle \sigma_{yy} \rangle \\ \langle \sigma_{xy} \rangle \end{bmatrix}. \quad (7)$$

где E_x, E_y – модуль Юнга; ν_{xy}, ν_{yz} – коэффициент Пуассона; G_{xy} – модуль сдвига.

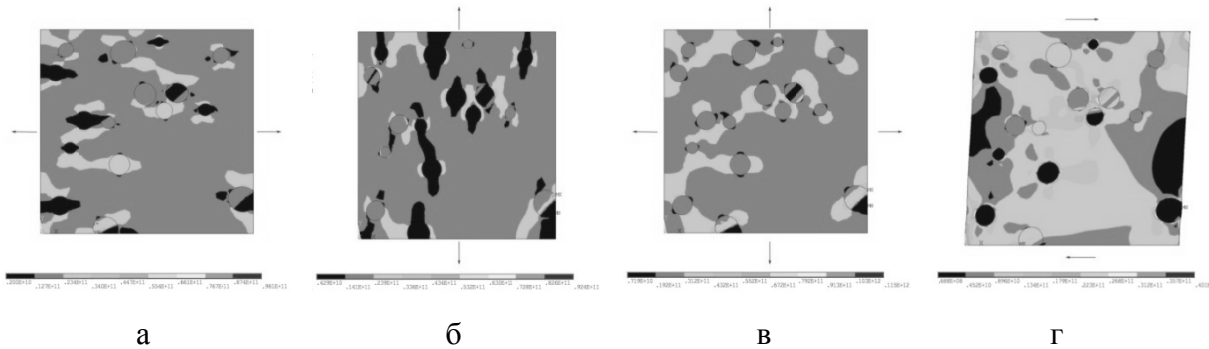


Рис. 2. Эквивалентные напряжения по Мизесу в микроструктуре при различных видах нагружения: а – растяжение вдоль X ; б – растяжения вдоль Y ; в – растяжение вдоль X и Y ; г – смещение в плоскости XY .

Получено симметричную матрицу, для нахождения всех констант необходимо выполнить четыре числовые эксперименты. На рис. 2 изображена схема нагружения модели, результаты которой позволяют создать систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициента Пуассона, модуля упругости и сдвига.

Результаты исследования микроструктуры чугуна. На рис. 2 изображены результаты расчета напряженно-деформированного состояния микроструктуры высокопрочного чугуна с включением сферического графита по четырем видам нагружения. Считая ориентацию включений произвольной, необходимо проводить серию численных экспериментов, для получения упругих констант. Не имея точных данных, относительно направленности включений, принято решение применять метод Монте-Карло для определения возможных вариантов напряженного состояния. В рамках этого метода ориентация кристаллов считается случайной. Было проведено 200 численных экспериментов для 17-ти значений различных концентраций включений. Полученные результаты для упругих констант статистически усредняются, и устанавливаются зависимости коэффициента Пуассона, модуля упругости и сдвига от концентрации включений (рис. 3). В качестве доверительного интервала для расчетных данных принимается зависимость (8), для нормального распределения случайной величины соответствует 99,7 % вероятности попадания результатов в указанной области.

$$\alpha_{int} = M \pm 3 \cdot \sqrt{D}; \quad (8)$$

где M та D – математическое ожидание и дисперсия упругих констант.

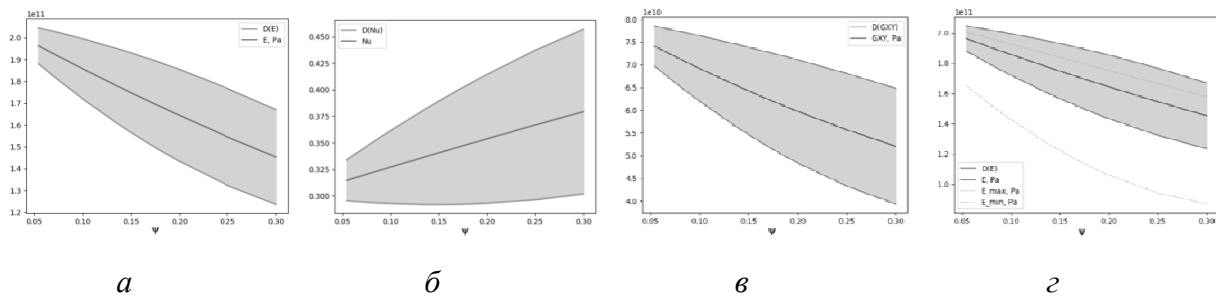


Рис. 3. Зависимость упругих характеристик материала от концентрации включений: а – модуль упругости $E(\psi)$; б – коэффициент Пуассона $\nu(\psi)$; в – модуль сдвига $G(\psi)$; г – правило смеси для модуля упругости $E(\psi)$.

Для оценки достоверности, полученные результаты усредненных упругих характеристик сравнивались с результатами полученными с помощью правила смеси (9). Такой подход дает возможность определить оценку верхней и нижней границы модуля упругости. Эти оценки соответствуют параллельным и перпендикулярным структурным элементам (рис. 3, г). Из анализа полученных результатов видно, что математическое ожидание эквивалентного модуля упругости находится между верхней и нижней границей оценки по правилу смеси, что подтверждает корректность построенных моделей. Однако из рис. 3, г хорошо видно, что верхняя граница доверительного интервала превышает верхнюю оценку модуля упругости. Это объясняется тем, что правило смеси не учитывает случайную ориентацию главных осей кристаллов графита, а сравнение возможно только по средним значениям. Также, что реальные свойства графита являются более сложными чем изотропные, как это предполагает правило смеси.

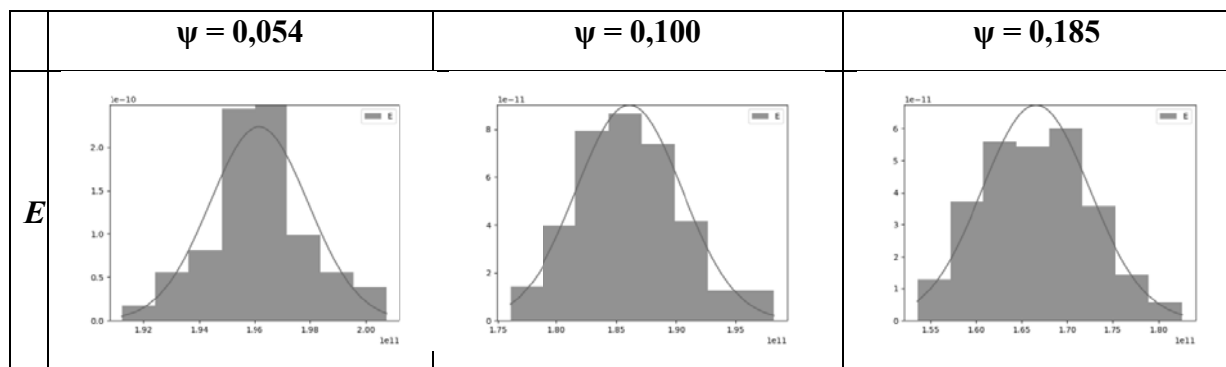
$$E_{max} = \psi \cdot E_g + (1 - \psi) \cdot E_f;$$

$$E_{min} = \left(\frac{\psi}{E_g} + \frac{1-\psi}{E_f} \right)^{-1}; \quad (9)$$

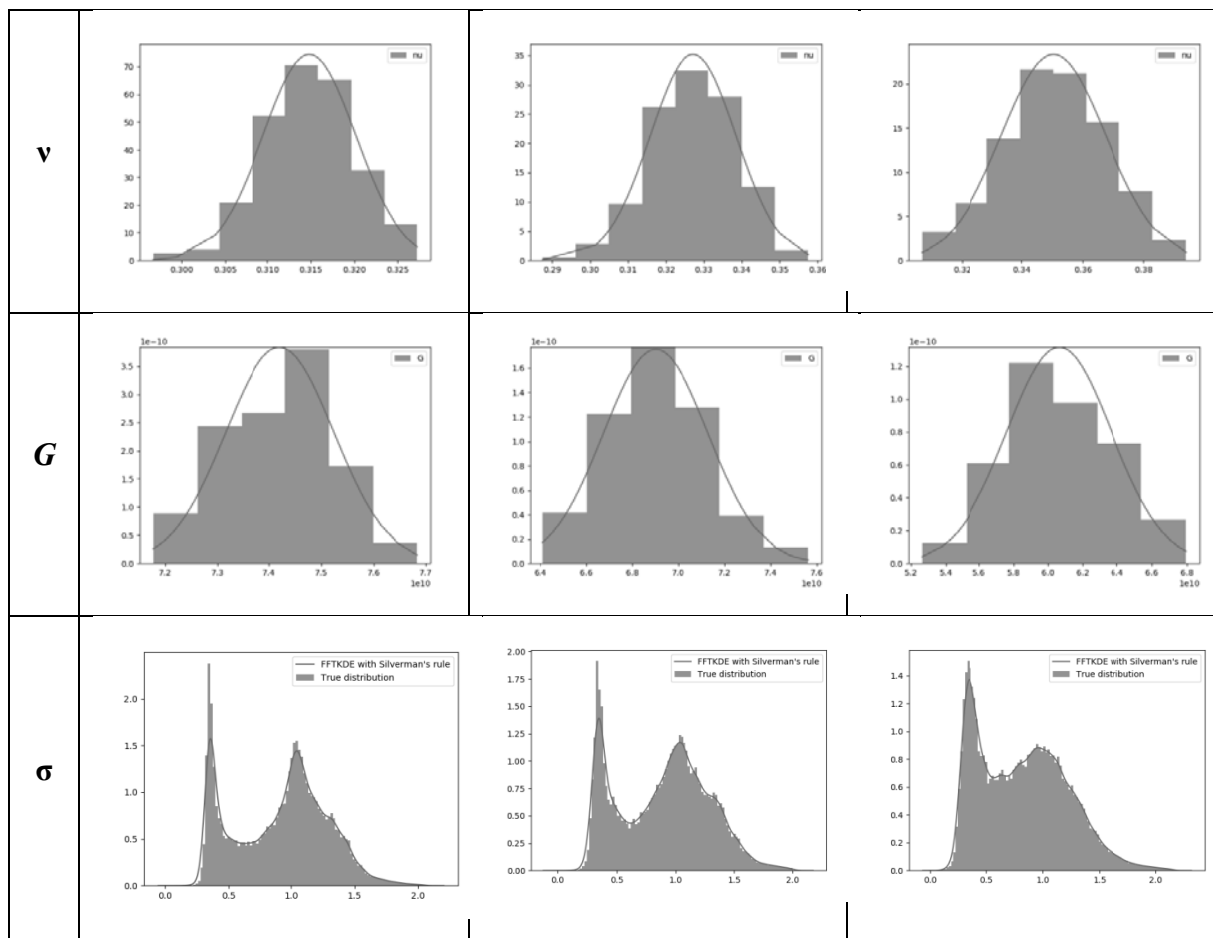
E_f – модуль упругости феррита.

Тесты статистической нормальности. Полученные результаты упругих характеристик исследуемого материала проверяются с помощью параметрического статистического метода. В ходе исследование считалось, что данные распределены нормально. В качестве графического метода качественной оценки результатов строятся гистограммы (табл. 3), для визуальной проверки принадлежности полученных результатов к нормальному распределению.

Таблица 3 – Гистограммы распределения модуля упругости, коэффициента Пуассона, модуля сдвига и эквивалентных напряжений при различных концентрациях включений графита



Продолжение таблицы 3



Приведенные гистограммы для упругих характеристик имеют приближенную колоколовидную форму, характерную нормальному распределению данных. Для статистической проверки нормальности, с помощью библиотеки SciPy, выполнен тест Шапиро-Уилки. В табл. 4 приведены результаты p -значений для упругих характеристик исследуемого материала при соответствующей концентрации включений. Уровень статистической значимости принимался $\alpha = 0,05$. Все полученные p -значения больше порогового уровня, нулевая гипотеза о нормальности распределений – принимается.

Для напряжений гистограмма имеет вид бимодального распределения с двумя пиками. Это соответствует структуре исследуемого чугуна с включениями графита. Для такого типа распределения применяется не параметрический метод оценки распределения плотности вероятности. С целью выбора лучшего результата в работе выполнено сравнение алгоритмов автоматического выбора полосы пропускания (рис. 4), средствами библиотеки KDEpy. Определено, что улучшенный метод Шезера-Джонса, дает чрезмерное зашумление гистограммы. С другой стороны, ядровая оценка плотности распределения случайной величины предложенные Скоттом и Сильверманом – дают более сглаженные и почти совпадающие между собой зависимости, лучше передающие общую тенденцию распределения. Для результатов по напряжениям в табл. 4 берутся ядровые оценки по правилу Сильвермана.

Таблица 4 – p -значения теста Шапиро-Уилки

	$\psi = 0,054$	$\psi = 0,100$	$\psi = 0,185$
$E(\psi)$	0,089	0,444	0,173
$\nu(\psi)$	0,154	0,738	0,128
$G(\psi)$	0,189	0,544	0,381

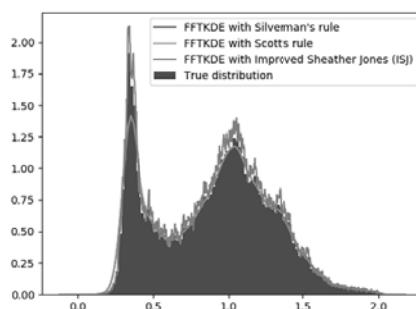


Рис. 4. Ядровая оценка плотности распределения

Выводы. В работе создан алгоритм исследования упругих механических свойств высокопрочного чугуна. Проведено распознавания сфероидальных включений графита на микроструктурных изображениях. Полученные зависимости размеров включений от их концентрации, и предложена методика искусственной генерации микроструктуры чугуна. Проведен конечно-элементный анализ созданной структурной модели, получены формулы определения модуля упругости, коэффициента Пуассона и модуля сдвига. Построенные зависимости упругих характеристик от содержания включений графита. Для оценки результатов применено правило смеси к усредненным показателям модуля упругости. Построены гистограммы распределения упругих характеристик и эквивалентных напряжений при различных концентрациях включений. Нормальность распределения данных проверена тестом Шапиро-Уилки. Для бимодального распределения эквивалентных напряжений применены алгоритм автоматического выбора полосы пропускания по правилу Сильвермана. Результаты численного моделирования показали хорошее соотношение расчетных значений коэффициента Пуассона, модуля упругости и сдвига со справочными данными.

Поддержка. Данная работа выполнена при поддержке МОН Украины в рамках реализации научно-исследовательской работы «Разработка методов математического моделирования поведения новых и композиционных материалов для оценки ресурса и прогнозирования надежности элементов конструкций» (№ ДР 0117U004969).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sikoraab, P. *Mechanical and microstructural properties of cement pastes containing carbon nanotubes and carbon nanotube-silica core-shell structures, exposed to elevated temperature* / P. Sikoraab, M. Elrahmanac, S.-Y. Chunga, K. Cendrowskid, E. Mijowskad, D. Stephana // *Cement and Concrete Composites*. – 2019. – № 95. – P. 193–204.

2. Xu, H. *Mechanical modeling of battery separator based on microstructure image analysis and stochastic characterization* / H. Xu, M. Zhu, J. Marcicki, X. G. Yang // *J. Power Sources*. – 2017. – № 345. – P. 137–145.
2. Seungwoo, S. *Investigation of the microstructure of laser-arc hybrid welded boron steel* / S. Seungwoo, Y. H. Lee, D.-W. Choi, K.-R. Cho, S. M. Shin, Y. Lee, S.-H Kang., Z. Lee // *JOM*. – 2018. – № 70 (8). – P. 1548–1553.
3. Zhang, Y. *Influence of graphite morphology on phase, microstructure, and properties of hot dipping and diffusion aluminizing coating on flake/spheroidal graphite cast iron*. *Metals*, April 2019. – № 9(4). – P. 450.
4. DeCost, B. L. *A computer vision approach for automated analysis and classification of microstructural image data* / B. L. DeCost, E. A. Holm // *Comput. Mater. Sci.* – 2015. – № 110. P. – 126–133.
5. Renato, F. *Automatic quantification of spheroidal graphite nodules using computer vision techniques* / F. Renato, Pereira Valberto E. R. da Silva Filho, B. Moura Lorena, N. K. Arun, R. de Alexandria Auzuir // *J Supercomput.* – 2018. – P. 1–14.
6. Campbell, A. *New methods for automatic quantification of microstructural features using digital image processing* / A. Campbell, P. Murray, E. Yakushina, S. Marshall, W. Ion // *Materials & Design*. – 2018. – № 141. – P. 395–406.
7. Kwon, O. *A deep neural network for classification of melt-pool images in metal additive manufacturing* / O. Kwon, H. Kim, M. Ham, W. Kim, G. Kim, J. Cho, N. Kim, K. Kim // *Journal of Intelligent Manufacturing*. – 2018. – P. 1–12.
8. DeCost, B. L. *High throughput quantitative metallography for complex microstructures using deep learning: A case study in ultrahigh carbon steel* / B. L. DeCost., B. Lei, T. Francis, E. A. Holm // *Microscopy and Microanalysis*. – 2019. – № 25 (1). – P. 21–29.
9. Shapovalova, M. I. *Image microstructure estimation algorithm of heterogeneous materials for identification their chemical composition* / M. I. Shapovalova, O. O. Vodka // *IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*. – 2019. Lviv, Ukraine.
10. Hua, F. *Elasto-plastic FEM analysis of residual stress in spun tube* / F. Hua, Y. Yang, D. Guo, W. Tong, Z. Hu // *J. Mater. Sci. Technol.* – 2004. – № 20. – P. 379–382.
11. Seriacopi, V. *Finite element analysis of the effects of thermo-mechanical loadings on a tool steel microstructure* / V. Seriacopi, N. K. Fukumasu, R. M. Souza, I. F. Machado // *Engineering Failure Analysis*. – 2019. – № 97. – P. 383–398.
12. Park, H. K. *Three-dimensional microstructure modeling of particulate composites using statistical synthetic structure and its thermo-mechanical finite element analysis* / H. K. Park, J. Jung, H. S. Kim // *Comput. Mater. Sci.* – 2017. – № 126. – P. 265–271.
13. Vodka, O. O. *Processing microsection images to determine elastic characteristics of cast iron* / O. O. Vodka // *IEEE Ukraine SYW-2018 Congress. Student, Young Professional and Women in Engineering*. – 2018. Kyiv, Ukraine.
14. ГОСТ 3443-87 *Отливки из чугуна различной формы графита. Методы определения структуры (ISO 945-75*)*. [Взамен ГОСТ 3443-77]. – М.: Стандартинформ, – 2005.

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.374

Плескачевский Ю.М., Журавков М.А., Старовойтов Э.И. **Термоупругий изгиб трехслойной металло-полимерной пластины параболической нагрузкой**// Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 3–11. Рассмотрен изгиб упругого трехслойного бруса в температурном поле под действием локально распределенных равномерных и параболических нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине трехслойного стержня приняты гипотезы ломаной линии. Решение краевой задачи термо-упруго-пластичности сведено к нахождению четырех искоемых функций: прогибов и продольных перемещений срединных поверхностей несущих слоев. Аналитическое решение получено методом упругих решений. Проведен его численный анализ в случае непрерывных, локально распределенных, сосредоточенных и циклических нагрузок. Приведены графики изменения напряжений и перемещений в трехслойной балке при изотермических и термосиловых нагрузках. – Ил. 3. Библиогр.: 19 назв.

УДК 531/534: [57+61]; 678.017: 621.891

Шилько С.В., Рябченко Т.В., Петроковец Е.М., Черноус Д.А., Целуева С.Н. **Деформационный анализ и оценка качества спортивных лыж из слоистых полимерных композитов**// Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 12–19. Статья содержит результаты статических механических испытаний по определению изгибной жесткости и линии прогиба спортивных лыж известных производителей. В условиях трехточечного изгиба испытаны также призматические фрагменты разрабатываемых композитных лыж в виде «сэндвичей» из различных материалов (полиэтилена, стеклопластика, древесины, пенополистирола). В статье даны результаты расчетов изгибной жесткости указанных слоистых конструкций по аналитической зависимости и на основе конечноэлементных моделей различной размерности. Сопоставление с экспериментальными данными показало, что наиболее точным является 3D конечноэлементное моделирование, учитывающее геометрическую форму лыжи и анизотропию армирующих слоев. – Ил. 9. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Шелег В.К., Неумержицкая Е.Ю., Москалев С.А. **Динамика функционирования амортизационных пружин в механических системах** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 20–29. Описана динамика функционирования амортизационных пружин в механических системах. – Ил. 3. Табл. 3. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Беляцкая Л.Н., Скворцов К.Г., Федотов Д.А. **Моделирование напряженного состояния в осесимметричной оболочке с учетом анизотропных свойств композиционного материала** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 30–36. Разработана механико-математическая модель по расчету напряженного состояния в осесимметричной оболочке с учетом анизотропных свойств материала, находящегося в состоянии препрега, и усилия натяжения ткани в процессе намотки. – Ил. 1. Табл. 3. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Коляскин И.И., Василевич Ю.В., Москалева М.В. **Реализация алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 37–44. Рассмотрено математическое моделирование контактного взаимодействия цилиндрической модели шины колеса с основанием, которое имеет ортотропные упругие характеристики; разработано приложение для расчета напряжений и перемещений в объемном теле заданной формы при действующем давлении и заданных областях контакта «массивная шина-дорожное покрытие». Проведена численная апробация решений. – Ил. 6. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Сафонов А.И., Можаровский В.В., Неумержицкая Е.Ю. **Результаты теоретических и экспериментальных исследований свойств препрегов, рекомендуемые при разработке изделий из композиционных материалов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 45–50. Изложены ключевые этапы создания изделий из композита с учетом полученных формул, описывающих количественные показатели результатов исследований. – Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Дудяк А.И., Хвасько В.М., Марченко И.С. **Стержень равного сопротивления при поперечном изгибе** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 51–54. В статье рассмотрен стержень равного сопротивления прямоугольного поперечного сечения при плоском поперечном изгибе. Установлен закон изменения площади поперечного сечения в зависимости от длины стержня на основании условий прочности по нормальным и касательным напряжениям. Приведен пример подбора размеров поперечного сечения для двухопорной балки, работающей в условиях равнопрочности. – Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

А.В. Яровая. **Вынужденные колебания трехслойной пластины под действием параболических нагрузок** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 55–61. Рассмотрены вынужденные осесимметричные поперечные колебания круглой упругой трехслойной пластины под действием локальных параболических поверхностных нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Аналитические решения получены с использованием функции Хевисайда. Проведен численный анализ полученных решений. – Ил. 3. Библиогр.: 18 назв.

УДК 539.3

Захарчук, Ю.В. **Перемещения в упругой круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 62–69. Рассмотрен изгиб несимметричной по толщине упругой круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем под действием осесимметричной нагрузки. Постановка задачи учитывает новую модель деформирования заполнителя, в которой радиальные перемещения и прогиб изменяются линейной по его толщине. Полученное аналитическое решение позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние при различных нагрузках и граничных условиях. – Ил. 1. Библиогр. – 15 назв.

УДК 539.3

Грибовский Г.В., Щербаков С.С. **Моделирование напряженно-деформированных состояний и объемной повреждаемости системы «автомобильная шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 70–77. В работе представлены результаты конечно-элементного моделирования напряженно-деформированного состояния системы «автомобильная шина–асфальтобетон», нагруженной различными комбинациями радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине. Были рассчитаны интенсивности напряжений, опасные объемы и повреждаемость в области контакта шины и асфальтобетона. Представлены зависимости максимальных напряжений, опасных объемов и повреждаемости в области контакта от различных значений радиальной нагрузки и внутреннего давления в шине. – Ил. 3. Библиогр. – 12 назв.

УДК 531.2+624.04

Хеук М.В., Холодарь Б.Г. **Графо-аналитическое определение реакций связей составной конструкции** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 78–80. Рассмотренный способ дает возможность быстро, точно и без решения систем уравнений равновесия получить значения реакций как внешних, так и внутренних связей в рассматриваемых статически-определимых системах. Он применим и к задачам с большим числом тел. Особенностью решения является разложение внешних реакций на “подходящие” направления. Процедура решения наглядная, не требует использования тригонометрических формул. – Ил. 3. Библиогр. – 2 назв.

УДК 621.762.4

Дудяк А.И., Дикан Ж.Г., Мелеховец П.А. **Определение нормальных напряжений в стержне, состоящем из двух разнородных материалов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 81–83. Рассмотрен случай чистого изгиба консольной балки прямоугольного сечения, состоящей из двух прочно соединенных между собой неоднородных материалов. Получены формулы для определения нормальных напряжений в любой зоне поперечного сечения с переменной изгибной жесткостью сечения. – Ил. 2. Библиогр. – 2 назв.

УДК 620.178.311

Сурич В.М., Пачинин В.И. **Оценка повреждений элементов, испытываемых на вибропрочность** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 84–90. Предложен способ оценки усталостных повреждений при испытании на синусоидальную вибрацию методом качающейся частоты воздействия. рассмотрено влияние механической доб-

ротности, частотного диапазона и зависимостей изменения частоты в частотном диапазоне на повреждаемость линейных колебательных систем. – Ил. 1. Табл. – 1. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.3

Мармыш Д.Е. **Сходимость метода аналитического граничного элемента при анализе напряженного состояния и состояния повреждаемости среды** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 91–97. Показана сеточная сходимость метода граничного элемента для распределенных нагрузок при вычислении напряженного состояния и состояния повреждаемости среды. – Ил. 4. Библиогр. 7 назв.

УДК 531.3

Борисов А.В., Кончина Л.В., Маслова К.С., Чигарев А.В. **Разработка плоской и пространственной моделей свободного и шарнирно закрепленного звена экзоскелета переменной длины с двумя весомами абсолютно твердыми участками** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 98–105. Разработана новая модель звена переменной длины экзоскелета с двумя участками постоянной длины, имеющими массу, и одним невесомым участком между ними, изменяющим свою длину. Рассмотрены плоский и пространственный случай, модели с шарнирным закреплением с неподвижной опорой и свободного незакрепленного звена. Составлены системы дифференциальных уравнений движения. Показаны различия в дифференциальных уравнениях предложенных моделей. – Ил. 4. Библиогр. 5 назв.

УДК 539.3

Козел А.Г. **Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 106–113. Приведена постановка и решение краевой задачи об осесимметричном изгибе упругопластической сэндвич-пластины на двухпараметрическом основании. Гипотезы Кирхгофа справедливы в тонких внешних слоях, для достаточно толстого легкого несжимаемого по толщине заполнителя применяется модель Тимошенко. Физические уравнения связи напряжений с деформациями в слоях соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях и перемещениях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Аналитическое итерационное решение получено методом упругих решений. Проведен численный анализ полученного решения. – Ил. 3. Библиогр. 15 назв.

УДК 539.3

Хвиевич В.М., Веремейчик А.И. **О некоторых особенностях механико-математического моделирования плоских краевых задач неоднородной термоупругости** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 114–123. Рассматривается решение плоских краевых задач стационарной термоупругости изотропных тел с учетом их неоднородности методом граничных интегральных уравнений теории потенциала. – Библиогр. 12 назв.

УДК 539.3

Акимов В.А., Андреев В.О., Рапинчук Д.В. **Решение задач по строительной механике с двумя осями симметрии** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 124–129. В данной работе рассмотрен подход к решению задач тонкостенных замкнутых колец под действием самоуравновешенной нагрузки, в нашем случае внутреннего давления, с двумя осями симметрии. Особенностью решения этих задач является то обстоятельство, что из неизвестных трех внутренних силовых факторов остается только изгибающий момент, для определения которого используется одно каноническое уравнение вместо трех и рассматривается четверть вместо половины кольца. В следствии этого решение задачи значительно упрощается. – Ил. 7. Библиогр. 1 назв.

УДК 620.178; УДК 621. 81: 621 – 192; УДК 681.3.06:629.114.2

Почтенный Е.К., Капуста П.П. **Анализ методов схематизации случайного нагружения** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 130–138. Примерами применения и основой для развития указанного подхода являются предложенные: комплексный метод и программа схематизации случайных процессов эксплуатационного нагружения несущих систем мобильных машин; метод схематизации с целью получения процесса, эквивалентного по повреждающему воздействию реальному нагрузочному процессу; алгоритмы новых методов схематизации и метода “падающего дождя”, а также программы для ПЭВМ, обеспечивающие возможность автоматизации обработки экспериментальных результатов эксплуатационных испытаний нагруженности несущих конструкций и деталей мобильных машин. – Ил. 10. Библиогр.: 16 назв.

УДК 539.3

Беляева Н.А. **Математическое моделирование отверждения изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 139–145. В настоящей работе рассматривается теоретическая часть математической модели формирования плоской пластины в процессе отверждения полимерной среды при наличии неоднородного температурного поля в рамках связанной теории. – Библиогр. 7 назв.

УДК 621.313.13

Кузнецов В.В., Марко А.Ф. **Формирования шаговых траекторий для реализации тригонометрической функции** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 146–149. При цифровом управлении мехатронными системами перемещений на дискретных приводах прямого действия в ряде случаев требуется вычислять текущее значение угла α между вращающимся радиусом и осями прямоугольной системы координат или значения некоторых элементарных функций. – Ил. 2. Библиогр. 5 назв.

УДК 378

Гончарова И.А., Кончина Л.В., Куликова М.Г. **Вопросы интенсификации в профессиональной подготовке при изучении дисциплин «инженерная графика», «детали машин», «основы расчета и конструирования»** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 150–153. В соответствии с последними стандартами образовательных программ предложена методика реализации принципов межпредметных связей и метапредметного подхода в образовании, адаптирующая функция довузовской подготовки, показаны факторы интенсификации высшего образования. – Ил. 2. Библиогр. 3 назв.

УДК 621.919.2.001.2

Беляева Г.И., Алехнович Н.Г., Паращенко К.М. **Анализ работоспособности сферической опоры при обработке отверстий протяжками** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 154–159. Приведен расчет параметров сферы. – Ил. 4. Библиогр. 3 назв.

УДК 539.3

Акимов В.А., Гончарова С.В. **О двух методах решения плоской задачи теории упругости протяжками** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 160–166. В данной работе рассматривается новый подход к решению задачи о равновесии плоского упругого прямоугольника. – Библиогр. 3 назв.

УДК 621.313.13

Карпович С.Е., Кузнецов В.В. **Алгоритмизация формирования шаговых траекторий для систем перемещений на шаговых двигателях** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 167–171. В статье рассмотрены методы формирования шаговых траекторий и их алгоритмизация для управляющих устройств мехатронных систем перемещений на шаговом приводе. – Ил. 3. Библиогр. 7 назв.

УДК 621.01

Омаров Т.И., Костюченко В.М., Карипбаев С.Ж., Маслова К.С. **Определение крутильной жесткости валов привода рельсовой машины** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 172–175. Привод механизма передвижения рельсовой машины включает в себя электродвигатель, муфты, валы, редукторы и ходовые колеса. При движении машины в приводе периодически формируется избыточная динамическая нагрузка – моменты сил упругости в трансмиссионных валах. Это доминирующая нагрузка привода. Изменение моментов сил упругости носит автоколебательный характер, движение машины сопровождается фрикционными автоколебаниями (проскальзыванием колес). Для математического описания движения системы с целью определения величин моментов сил упругости следует определить такие параметры: приведенные моменты инерции вращающихся деталей привода и приведенную крутильную жесткость валов привода. – Ил. 5. Библиогр. 6 назв.

УДК 539.3

Гончарова С.В., Акимов В.А., Якубовский Д.С. **О геометрическом подходе к энергетической теории формоизменения** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 176–179. В данной работе предпринята попытка оценить энергетические затраты, пошедшие на формоизменение с геометрической точки зрения. Получены полезные эмпирические формулы, которыми можно непосредственно пользоваться непосредственно

на практике для проведения конкретного расчета энергозатрат и температуры заготовок на выходе. – Ил. 2. Библиогр. 2 назв.

УДК 539.3

Миронов Д.Н., Гончаренко В.П. **Обучение нейронной сети сложной механической системы для определения вероятности ее безотказной работы** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 180–185. В результате двух способов получена зависимость для расчета вероятности безотказной работы единицы объема материала силового элемента, которая ложится в основу функции обучения нейронной сети. Используя полученные результаты можно с определенной степенью точности прогнозировать вероятность разрушения силовой системы (детали, агрегата) и с помощью нейронной сети постоянно отслеживать ее состояние. – Библиогр. 10 назв.

УДК 004.94

Дембовский И.Н., Богданович А.В. **Компьютерное моделирование трибофатической системы вал/вкладыш при трении скольжения** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 186–191. В докладе дано краткое описание трибофатической системы вал/вкладыш использующейся при испытаниях на фрикционно-механическую усталость. Сформулированы некоторые особенности математического моделирования данной системы при трении скольжения. – Ил. 5. Библиогр. 11 назв.

УДК 539.3

Николаенко В.Л., Сечко Г.В. **Повышение точности моделирования трибофатической системы «диск-автомобильная шина-асфальтобетон» с помощью радиочастотной идентификации** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 192–196. Выносятся на обсуждение предложение повысить точность моделирования трибофатической системы «диск-автомобильная шина-асфальтобетон» путем эксперимента, который может быть технически реализован с помощью методов радиочастотной идентификации. – Ил. 5. Библиогр. 10 назв.

УДК 539.3

Миронов Д.Н., Гончаренко В.П. **Оценка технического состояния и прогнозирование ресурса летательного аппарата** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 197–202. В работе выведена зависимость для определения ресурса летательных аппаратов по его тактико-техническим характеристикам. Точность вычислений удовлетворяет требованиям инженерных расчетов. – Библиогр. 10 назв.

УДК 621.3.07

Дайняк И.В., Титко Д.С., Дедков А.И. **Подходы к построению систем управления электромеханическими приводами в реальном времени** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 203–208. Рассмотрены подходы построения систем управления реальным временем для мехатронных систем перемещений. Предложена структура реализации системы управления на основе технологии EtherCAT. – Ил. 6. Библиогр. 6 назв.

УДК 621.313.13

Карпович С.Е., Поляковский В.В., Обиходов П.А., Димидко И.А., Евдаков А.А. **Мехатронные системы параллельной кинематики для фотолитографического оборудования** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 209–212. Рассмотрены исполнительные механизмы параллельной кинематики для прецизионного оборудования микроэлектроники и приборостроения. Изменение числа степеней свободы осуществляется реконфигурированием механизма параллельной кинематики и гибридного кольцевого привода. – Ил. 4. Библиогр. 4 назв.

УДК 621. 81: 001

Капушта П.П., Капушта П.П. **Метод проектного расчета осей по критерию сопротивления усталости** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 213–220. В конкурентных условиях, особую актуальность имеют вопросы повышения качества выпускаемых машин и деталей, их технического уровня, технологичности, технико-экономических характеристик и безопасности в эксплуатации. – Ил. 6. Библиогр. 7 назв.

УДК 620.178; УДК 621. 81: 621 – 192; УДК 681.3.06:629.114.2

Капушта П.П., Вихренко Д.В. **Моделирование концентраторов напряжений в виде галтелей с использованием метода конечных элементов** // Международный научно-технический сборник «Теорети-

ческая и прикладная механика», Минск, 2020, вып. 35, стр. 221–227. При конструировании сложных деталей машиностроения необходимо учитывать влияние на прочность и долговечность детали концентраторов напряжений. Одним из способов учета является расчет с применением современных пакетов трехмерного моделирования и конечноэлементного анализа, которые позволяют создавать трехмерные модели деталей с концентратором и, таким образом, сразу при расчете получать значение напряжений в зоне концентрации. – Ил. 7. Библиогр. 1 назв.

УДК 621.835-41

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н., Дьяченко О.В., Криуша С.М. **Повышение долговечности некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020 г., вып. 35., стр. 228–234. В статье описывается методика расчета нагрузок на некруглые зубчатые колеса в приводе колесно-шагающего движителя. Проведенные теоретические исследования обосновали необходимость лазерного упрочнения рабочих поверхностей некруглых зубчатых колес. – Библиогр. 7.

УДК 629.113.62-585.12

Цереня А.А., Грибков Ю.А., Шапилевич С.С., Миронов Д.Н. **Разработка инерционно-пружинного синхронизатора и предпосылки к его применению в трансмиссии тягово-транспортных машин** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020 г., вып. 35., стр. 235–245. Рассмотрено устройство предлагаемого синхронизатора и его работа, у которого физическая сущность синхронизации для фрикционного и инерционно-пружинного синхронизаторов различная. Элементы трения в синхронизаторе заменены упругоподатливыми элементами в виде пружин, которые синхронизируют угловые скорости вала и шестерни. Показаны принципы выбора основных параметров и уточнена формула расчета времени синхронизации. Установлено, что синхронизатор обладает высоким быстродействием. – Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3

Нестерович А.В. **Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020 г., вып. 35., стр. 246–252. Выведены уравнения равновесия в усилиях и перемещениях трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении в ее плоскости. Предложена постановка соответствующей краевой задачи. – Ил. 1. Библиогр. – 15 назв.

УДК 621.922.3

Беляева Г.И., Самосюк С.В. **Исследование движения абразивного бруска при суперфинишировании** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020 г., вып. 35., стр. 253–256. Приведен расчет амплитуды колебаний бруска в его абсолютном движении. – Ил.4. Библиогр. – 3 назв.

УДК 004.942

Шаповалова М.И., Водка А.А. **Компьютерные методы моделирования синтетической структуры высокопрочного чугуна для статистической оценки его механических свойств и прочностных характеристик** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2020 г., вып. 35., стр. 257–264. Предлагаемый подход позволяет построить параметрические статистически эквивалентные модели микроструктуры высокопрочного чугуна для анализа его упругих характеристик. Учтена возможность случайного расположения включений на плоскости, и вариация их концентрации в зависимости от размеров графита. Определены упругие свойства исследуемого материала путем моделирования конечно-элементной модели. Получены характеристики модуля упругости, сдвига и коэффициента Пуассона, как функции концентрации включений. Проведена проверка адекватности подхода с помощью коэффициента детерминации, правила смеси и тестов статистической нормальности. – Ил. 4. Табл. 4. Библиогр. – 15 назв.

A B S T R A C T S

UDC539.374

Pleskatshevsky Yu.M., Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. **Thermoelastic bending of three-layer metal-polymer beam by parabolic loads** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 3–11. The deformation in the temperature field of a circular three-layer plate is considered. To describe kinematic properties of an asymmetric through thickness pack we have accepted the hypotheses of a broken line as follows. The system of differential equations of equilibrium is obtained by the variational method. The analytical solution is given in Bessel functions for the cases of local continuous and ring loads. Numerical testing of solutions at different temperatures is carried out. – **Fig. 3. Ref.: 19 titles.**

UDC 531/534: [57+61]; 678.017: 621.891

Shil'ko S.V., Ryabchenko T.V., Petrokovets E.M., Chernous D.A., Tselueva S.N. **Strain analysis and quality rating of sport skis made of layered polymer composites**// International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 12–19. The article contains the results of static mechanical tests to determine the bending stiffness and the deflection line of sports skis of well-known manufacturers. Under conditions of three-point bending, prismatic fragments of the developed composite skis were also tested in the form of “sandwiches” from various materials (polyethylene, fiberglass, wood, polystyrene foam). The article presents the results of calculations of the bending stiffness of the indicated layered structures according to the analytical dependence and based on finite element models of various dimensions. Comparison with experimental data showed that the most accurate is 3D finite element modeling, taking into account the geometric shape of the ski and the anisotropy of the reinforcing layers. – **Fig. 9. Ref.: 8 titles.**

UDC 539.3

Vasilevich Yu.V., Sheleg V.K., Neumerzhytskaya E.Yu., Moskalev S.A. **Dynamics of the functioning of depreciation springs in mechanical systems** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 20–29. The dynamics of the functioning of depreciation springs in mechanical systems are described. – **Fig. 3. Table.3. Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3

Vasilevich Yu.V., Neumerzhytskaya E.Yu., Belyatskaya L.N., Skvortsov K.G., Fedotov D.A. **Modeling the stress state in an axisymmetric shell taking into account the anisotropic properties of the composite material** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 30–36. A mechanical-mathematical model has been developed for calculating the stress state in an axisymmetric shell, taking into account the anisotropic properties of the material in the prepreg state, and the tension of the fabric during winding. – **Fig. 1. Table.3. Ref.: 7 titles.**

UDC 539.3

Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S., Kolyashin I.I., Vasilevich Yu.V., Moskaleva M.V. **Implementation of algorithms for calculating the stress-strain state of machine elements and tribological systems** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 37–44. Mathematical modeling of contact interaction of a cylindrical model of a tire of a wheel with a base, which has orthotropic elastic characteristics, is considered; Here has been developed an application for calculating stresses and displacements in a volumetric body of a given shape at an effective pressure and predetermined contact areas “massive tire-road surface” The. Numerical testing of the results has been carried out. – **Fig. 6. Ref.: 14 titles.**

UDC 539.3

Vasilevich Yu.V., Safonov A.I., Mozharovsky V.V., Neumerzhytskaya E.Yu. **Results of theoretical and experimental studies of properties recommended in the development of products from composite materials** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 45–50. The key stages of creating composite products are outlined, taking into account the received formulas describing the quantitative indicators of the results of the studies. – **Ref.: 6 titles.**

UDC 539.3

Dudyak A.I., Khvasko V.M., Marchenko I.S. **The rod of equal resistance in lateral bending** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 51–54. The article considers a rod of equal resistance of rectangular cross section with a flat transverse bend. The law of changing the cross-sectional area depending on the length of the rod is established on the basis of strength conditions for normal and shear stresses. An example of the selection of cross-sectional dimensions for a double-beam beam working under equal strength conditions is given. – **Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3

Yarovaya A. V. **Forced oscillations of a three-layer plate under the action of parabolic loads** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 55–61. Forced axisymmetric transverse oscillations of a round elastic three-layer plate under the action of local parabolic surface loads are considered. The kinematics of a plate package asymmetric in thickness is described by the polyline normal hypotheses. Filler is easy. Analytical solutions are obtained using the Heaviside function. The numerical analysis of the obtained solutions is carried out. – **Fig. 3. Ref.: 18 titles.**

UDC 539.3

Zakharchuk Yu.V. **Displacements in an elastic circular three-layer plate with compressible filler** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 62–69. The bending of an asymmetric in thickness elastic circular three-layer plate with a light compressible filler under the action of an axisymmetric load is considered. The problem statement takes into account a new model of aggregate deformation, in which the radial displacements and deflection change linear in its thickness. The obtained analytical solution allows us to calculate the stress-strain state under various loads and boundary conditions. – **Fig. 1. Ref.: 15 titles.**

UDC 539.3

Gribovskii G.V., Sherbakov S.S. **Stress-strain state and damageability simulation of «car tire–asphalt-concrete» system under various combinations of radial load on the rim and internal pressure in tire** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 70–77. Finite element modeling of stress-strain state of «car tire–asphalt-concrete» system for the various combinations of internal pressure in the tire and axle load on the rim was made. Stress intensity, dangerous volumes and damageability in the contact area of tire and asphalt-concrete were calculated. The dependencies of stress intensity maximum value, dangerous volumes and damageability under different combinations of radial load on the rim and internal pressure in tire are presented. – **Fig. 3. Ref.: 12 titles.**

UDC 531.2 + 624.04

Kheuk M.V., Kholodar B.G. **Graph-analytical determination of coupling reactions of a composite structure** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 78–80. The considered method makes it possible to quickly, accurately and without solving systems of equilibrium equations to obtain the reaction values of both external and internal bonds in the considered statically determinate systems. It is applicable to tasks with a large number of bodies. A feature of the solution is the decomposition of external reactions into “suitable” directions. The solution procedure is visual, does not require the use of trigonometric formulas. – **Fig. 3. Ref.: 2 titles.**

UDC 621.762.4

Dudyak A.I., Dikan Zh.G., Melekhovets P.A. **Determination of normal stresses in a rod consisting of two dissimilar materials** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 81–83. The case of pure bending of a cantilever beam of rectangular cross section, consisting of two inhomogeneous materials firmly connected to each other, is considered. Formulas are obtained for determining normal stresses in any zone of a cross section with a variable bending stiffness of a section. – **Fig. 2. Ref.: 2 titles.**

UDC 620.178.311

Surin V.M., Pachinin V.I. **Assessment of damage to elements tested for vibration resistance** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 84–90. A method for assessing fatigue damage when tested for sinusoidal vibration by the method of the sweeping frequency of exposure is proposed. The influence of mechanical Q, the frequency range, and the dependences of frequency changes in the frequency range on the damage to linear vibrational systems is considered. – **Fig. 1. Table. 3. Ref.: 6 titles.**

UDC 539.3

Marmysh D.E. **Convergence of the analytical boundary element method in the analysis of the stress state and the damage state of the medium** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 91–97. The grid convergence of the boundary element method for distributed loads in the calculation of the stress state and the damage state of the medium is shown. – **Fig. 4. Ref.: 7 titles.**

UDC 531.3

Borisov A.V., Konchina L.V., Maslova K.S., Chigarev A.V. **Development of a plane and spatial models of a free and hinged-mounted exoskeleton link of a variable length with two weighted absolutely solid sites** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 98–105. A new model of the exoskeleton variable-link unit with two sections of constant length having mass and one weightless section between them, changing its length, has been developed. The flat and spatial case, models with hinge fastening

with a fixed support and a free loose link are considered. The systems of differential equations of motion are compiled. The differences in the differential equations of the proposed models are shown. – **Fig. 4. Ref.: 5 titles.**

UDC 539.3

Kozel A.G. **Nonlinear of bending sandwich-plate on the basis of Pasternak** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 106–113. The formulation and solution of the boundary-value problem of axisymmetric bending of an elastoplastic sandwich plate on a two-parameter base is presented. Kirchhoff's hypotheses are valid in thin outer layers; for a sufficiently thick light incompressible thickness filler, the Tymoshenko model is used. The physical equations for the relationship of stresses with strains in the layers correspond to the theory of small elastoplastic strains. Differential equations of equilibrium in forces and displacements are obtained using the variational Lagrange method. The analytical iterative solution is obtained by the elastic solution method. The numerical analysis of the obtained solution is carried out. – **Fig. 3. Ref.: 15 titles.**

UDC 539.3

Hvisevitch V.M., Verameichyk A.I. **On some features of mechanical and mathematical modeling of plane boundary value problems of inhomogeneous thermoelasticity** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 114–123. The solution of the plane boundary value problems of stationary thermo-elasticity of isotropic bodies with account of their heterogeneity by the method of boundary integral equations of the potential theory is considered. – **Ref.: 12 titles.**

UDC 539.3

Akimov V.A., Andreev V.O., Rapinchuk D.V. **Solving problems in structural mechanics with two axes of symmetry** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 124–129. In this paper, we consider an approach to solving problems of thin-walled closed rings under the action of a self-balanced load, in our case of internal pressure, with two axes of symmetry. A feature of solving these problems is the fact that of the unknown three internal force factors, only the bending moment remains, to determine which one canonical equation is used instead of three and a quarter is considered instead of half the ring. As a consequence, the solution of the problem is greatly simplified. – **Fig. 7. Ref.: 1 titles.**

UDC 620.178; UDC 621. 81: 621 – 192; UDC 681.3.06:629.114.2

Pochtennyi E.K., Kapusta P.P. **Analysis of Methods of Schematization of Random Science** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 130–138. Based on the conducted comparative analysis of methods of schematization of case loading processes, principles and methods of schematization of random loading processes of structures and parts of machines are proposed, taking into account the time factor of current loads. Examples of the application and basis for the development of this approach are the integrated method and program of schematic random processes of operational loading of carrier systems of mobile machines; Method of schematization for the purpose of process reduction, which is effective according to the damaging effect of the real load activity; Algorithms of new methods of schematization and method of "heavy rain," as well as programs for PC, which provide possible automation of processing of experimental results of operation tests of load of bearing structures and parts of mobile machines. – **Fig. 10. Ref.: 16 titles.**

UDC 539.3

Belyaeva N.A. **Mathematical modeling of product cure under the conditions of the associated theory of thermoviscoelasticity** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 139–145. In this paper, we consider the theoretical part of the mathematical model of the formation of a flat plate in the process of curing a polymer medium in the presence of an inhomogeneous temperature field in the framework of the bound theory. – **Ref.: 7 titles.**

UDC 621.313.13

Kuznetsov V.V., Marko A.F. **Formation of step paths for implementation trigonometric functions** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 146–149. In digital control of mechatronic movement systems on discrete direct-acting drives, in some cases it is necessary to calculate the current value of the angle α between the rotating radius and the axes of a rectangular coordinate system or the values of some elementary functions. – **Fig. 2. Ref.: 5 titles.**

UDC 378

Goncharova I.A., Konchina L.V., Kulikova M.G. **The issues of intensification in vocational training in the study of disciplines “Engineering graphics”, “Machine parts”, “Fundamentals of calculation and design”** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 150–153. In accordance with the latest standards of educational programs, a methodology for implementing the principles of inter-

subject communications and a meta-subject approach in education is proposed, an adaptive function of pre-university training, factors of intensification of higher education are shown. – **Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

UDC 621.919.2.001.2

Belyaeva G.I., Alechnovitsch N. A., Parashchanka K. M. **The analysis of efficiency of the spherical support while broaching holes.** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 154–159. The calculation of the parameters of the sphere is given in the text. – **Fig. 4. Ref.: 2 titles.**

UDC 539.3

Akimov V.A., Goncharova S.V. **On two methods for solving the plane problem of the theory of elasticity by broaches** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 160–166. This paper considers a new approach to solving the equilibrium problem of a flat elastic rectangle. – **Ref.: 3 titles.**

UDC 621.313.13

Karpovich S.E., Kuzniatsova V.U **Algorithmization of step trajectory methods for the displacement systems on the stepping drivers** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 167–171. In the paper step trajectory methods and its algorithmization for controlling devices of mechatronic displacement systems on the step driver are considered. – **Fig. 3. Ref.: 7 titles.**

UDC 621.01

Omarov T.I., Kostyacyenko V.M., Karipbaev C.G., Maslova K.S. **Determination of torsional stiffness of drive shafts of a rail car** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 172–175. The drive mechanism for the movement of a rail machine includes an electric motor, couplings, shafts, gearboxes and running wheels. When the car moves in the drive, an excessive dynamic load is periodically formed – moments of elastic forces in the transmission shafts. This is the dominant drive load. Changing the moments of elastic forces is self-oscillating, the movement of the machine is accompanied by frictional self-oscillations (wheel slippage). For a mathematical description of the movement of the system in order to determine the values of the moments of elastic forces, one should determine the following parameters: reduced moments of inertia of the rotating parts of the drive and reduced torsional rigidity of the drive shafts. – **Fig. 5. Ref.: 6 titles.**

UDC 539.3

Goncharova S.V., Akimov V.A., Yakubovsky D.S. **On the geometric approach to the energy theory of form change** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 176–179. In this paper, an attempt is made to estimate the energy costs that went to form change from a geometric point of view. Useful empirical formulas have been obtained that can be directly used directly in practice for a specific calculation of the energy consumption and temperature of the workpieces at the outlet. – **Fig. 2. Ref.: 2 titles.**

UDC 539.3

Mironov D.N., Goncharenko V.P. **The neural network training is a complex mechanical system to determine the probability of its failure-free operation** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 180–185. As a result of two methods, the dependence for calculating the probability of failure-free operation of the unit volume of the material of the force element, which lies in the basis of the training function of the neural network, is obtained. Using the results obtained, it is possible to predict with a certain degree of accuracy the probability of destruction of the power system (part, unit) and with the help of a neural network to constantly monitor its condition. – **Ref.: 10 titles.**

UDC 004.94

Dembovski I.N., Bogdanovich A.V. **Computer simulation of tribo-fatigal shaft / liner system with sliding friction** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 186–191. A brief description of the tribo-fatigal shaft / liner system used in friction-mechanical fatigue tests. Some features of mathematical modeling of this system during slip friction are formulated. – **Fig. 5. Ref.: 11 titles.**

UDC 539.3

Nikolaenko V.L., Sechko G.V. **Improving the accuracy of modeling the tribo-fatigue system “disk-car tire-asphalt concrete” using radio frequency identification** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 192–196. A proposal is made for discussion to improve the accuracy of modeling the tribo-static system “disk-car tire-asphalt concrete” through an experiment that can be technically implemented using radio frequency identification methods. – **Fig. 5. Ref.: 10 titles.**

UDC 539.3

Mironov D.N., Goncharenko V.P. **Assessment of the technical condition and forecasting of the life of an aircraft** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 197–202. In the work, the dependence for determining the aircraft resource by its tactical and technical characteristics is derived. The accuracy of the calculations satisfies the requirements of engineering calculations. – **Ref.: 10 titles.**

UDC 621.3.07

Dainiak I.V., Titko D.S., Dedkov A.I. **Approaches to the construction of control systems for electromechanical drives in real time** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 203–208. The approaches of real time management system creation for the mechatronic displacement systems are considered. The structure of realization management system on the base of EtherCAT technology is proposed. – **Fig. 6. Ref.: 6 titles.**

UDC 621.313.13

Karpovich S.E., Poliakovski V.V., Obihodov P.A., Dimidko I.A., Evdakov A.A. **Actuators of parallel kinematics on a hybrid ring drive** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 209–212. The executive mechanisms of parallel kinematics for precision equipment of microelectronics and instrument engineering are considered. The change in the number of degrees of freedom is performed by reconfiguring the parallel kinematics mechanism and the hybrid ring drive. – **Fig. 4. Ref.: 4 titles.**

UDC 621.81: 001

Kapusta P.P., Kapusta P.P. **The method of design calculation of axes according to the criterion of fatigue resistance** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 213–220. In competitive conditions, issues of improving the quality of manufactured machines and parts, their technical level, manufacturability, technical and economic characteristics and safety in operation are of particular relevance. – **Fig. 6. Ref.: 7 titles.**

UDC 620.178; UDC 621. 81: 621 - 192; UDC 681.3.06: 629.114.2

Kapusta P.P., Vikhrenko D.V. **Modeling of stress concentrators in the form of fillets using the finite element method** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 221–227. When designing complex parts of mechanical engineering, it is necessary to take into account the influence on the strength and durability of the part of stress concentrators. One of the methods of accounting is the calculation using modern packages of three-dimensional modeling and finite element analysis, which allow you to create three-dimensional models of parts with a concentrator and, thus, immediately when calculating to obtain the stress value in the concentration zone. – **Fig. 7. Ref.: 1 titles.**

UDC 621.835-41

Skojbeda A.T., Zhukavets V.M., Dyachenko O.V., Kriusha S.M. **Improving the durability of non-circular gears in the drive of the wheel-step mover** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 228–234 . The article describes the method of calculating the loads on non-circular gears in the drive of the wheel-step mover. Theoretical studies have justified the need for laser hardening of the working surfaces of non-circular gears. – **Ref.: 7 titles.**

UDC 629.113.62-585.12

Tserenya A.A., Hrybkov Y.A., Shapilevich S.S., Mironov D.N. **Development of an inertial-spring synchronizer and the prerequisites for its use in the transmission of traction and transport vehicles** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 235–245 . The device of the proposed synchronizer and its operation, in which the physical essence of synchronization for the friction and inertial-spring synchronizers are different, are considered. The friction elements in the synchronizer are replaced by resilient elements in the form of springs that synchronize the angular velocity of the shaft and gears. The principles of choosing the main parameters are shown and the formula for calculating the synchronization time is refined. It is established that the synchronizer has high speed. – **Fig. 3. Ref.: 9 titles.**

UDC 539.3

Nesterovich A. V. **Non-axisymmetric loading of a three-layer circular plate in its plane** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 246–252 . The equations of equilibrium in the forces and displacements of a three-layer circular plate under non-axisymmetric loading in its plane are derived. The formulation of the corresponding boundary value problem is proposed. – **Fig. 1 Ref.: 15 titles.**

UDC 621.922.3

Belyaeva G.I., Samasiuk S.V. **The analysis of the movement of the abrasive bar during superfinishing** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 253–256. The calculation of the amplitude of oscillations in absolute motion. – **Fig. 4. Ref. 2 titles.**

UDC 004.942

Shapovalova M.I., Vodka O.O. **Computer methods for modeling the synthetic structure of high-strength cast iron for statistical evaluation of its mechanical properties and strength characteristics** // International Journal of Theoretical and Applied mechanics, Minsk, 2020, vol. 35, p. 257–264. The paper consider the problem of computer methods for constructing parametric statistically equivalent models of high-strength cast iron microstructure to analyze it's elastic characteristics. The metallographic images of the material are studied using the OpenCV library. A finite element model is built to find the elastic characteristics of the material. The results obtained for elastic constants are statistically averaged. The dependences of the Poisson coefficient, elastic modulus, and displacement on the concentration of inclusions are established. – **Fig. 4. Ref. 15 titles.**

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Плескачевский Ю.М., Журавков М.А., Старовойтов Э.И.</i> Термоупругий изгиб трехслойной металлополимерной пластины параболической нагрузкой	3
<i>Шилько С.В., Рябченко Т.В., Петроковец Е.М., Черноус Д.А., Целуева С.Н.</i> Деформационный анализ и оценка качества спортивных лыж из слоистых полимерных композитов	12
<i>Василевич Ю.В., Шелег В.К., Неумержицкая Е.Ю., Москалев С.А.</i> Динамика функционирования амортизационных пружин в механических системах	20
<i>Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Беляцкая Л.Н., Скворцов К.Г., Федотов Д.А.</i> Моделирование напряженного состояния в осесимметричной оболочке с учетом анизотропных свойств композиционного материала	30
<i>Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Коляскин И.И., Василевич Ю.В., Москалева М.В.</i> Реализация алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем	36
<i>Василевич Ю.В., Сафонов А.И., Можаровский В.В., Неумержицкая Е.Ю.</i> Результаты теоретических и экспериментальных исследований свойств препрегов, рекомендуемые при разработке изделий из композиционных материалов	44
<i>Дудяк А.И., Хвасько В.М., Марченко И.С.</i> Стержень равного сопротивления при поперечном изгибе	50
<i>Яровая А.В.</i> Вынужденные колебания трехслойной пластины под действием параболических нагрузок	54
<i>Захарчук Ю.В.</i> Перемещения в упругой круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем	61
<i>Грибовский Г.В., Щербаков С.С.</i> Моделирование напряженно-деформированных состояний и объемной повреждаемости системы «автомобильная шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине	70
<i>Хеук М.В., Холодарь Б.Г.</i> Графоаналитическое определение реакций связей составной конструкции	78
<i>Дудяк А.И., Дикан Ж.Г., Мелеховец П.А.</i> Определение нормальных напряжений в стержне, состоящем из двух разнородных материалов	81
<i>Сурин В.М., Пачинин В.И.</i> Оценка повреждений элементов, испытываемых на вибропрочность	84
<i>Мармыш Д.Е.</i> Сходимость метода аналитического граничного элемента при анализе напряженного состояния и состояния повреждаемости среды.....	91
<i>Борисов А.В., Кончина Л.В., Маслова К.С., Чигарев А.В.</i> Разработка плоской и пространственной моделей свободного и шарнирно закрепленного звена экзоскелета	

переменной длины с двумя весомыми абсолютно твердыми участками	98
<i>Козел А.Г.</i> Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака	106
<i>Хвиевич В.М., Веремейчик А.И.</i> О некоторых особенностях механико-математического моделирования плоских краевых задач неоднородной термоупругости	114
<i>Акимов В.А., Андреев В.О., Рапинчук Д.В.</i> Решение задач по строительной механике с двумя осями симметрии	124
<i>Почтенный Е.К., Капуста П.П.</i> Анализ методов схематизации случайного нагружения	130
<i>Беляева Н.А.</i> Математическое моделирование отверждения изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости	139
<i>Кузнецов В.В., Марко А.Ф.</i> Формирование шаговых траекторий для реализации тригонометрической функции	146
<i>Гончарова И.А., Кончина Л.В., Куликова М.Г.</i> Вопросы интенсификации профессиональной подготовке при изучении дисциплин «Инженерная графика», «Детали машин», «Основы расчета и конструирования»	150
<i>Беляева Г.И., Алехнович Н.Г., Паращенко К.М.</i> Анализ работоспособности сфериче- ской опоры при обработке отверстий протяжками	154
<i>Акимов В.А., Гончарова С.В.</i> О двух методах решения плоской задачи теории упругости	160
<i>Карпович С.Е., Кузнецов В.В.</i> Алгоритмизация формирования шаговых траекторий для систем перемещений на шаговых двигателях	167
<i>Омаров Т.И., Костюченко В.М., Карипбаев С.Ж., Маслова К.С.</i> Определение крутильной жесткости валов привода рельсовой машины	172
<i>Гончарова С.В., Акимов В.А., Якубовский Д.С.</i> О геометрическом подходе к энергетической теории формоизменения	176
<i>Мионов Д.Н., Гончаренко В.П.</i> Обучение нейронной сети сложной механической системы для определения вероятности ее безотказной работы	180
<i>Дембовский И.Н., Богданович А.В.</i> Компьютерное моделирование трибофатической системы вал/вкладыш при трении скольжения	186
<i>Николаенко В.Л., Сечко Г.В.</i> Повышение точности моделирования трибофатической системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон» с помощью радиочастотной идентификации	192
<i>Мионов Д.Н., Гончаренко В.П.</i> Оценка технического состояния и прогнозирование ресурса летательного аппарата	197
<i>Дайняк И.В., Титко Д.С., Дедков А.И.</i> Подходы к построению систем управления электромеханическими приводами в реальном времени	203
<i>Карпович С.Е., Поляковский В.В., Обиходов П.А., Димидко И.А., Евдаков А.А.</i> Исполнительные механизмы параллельной кинематики на гибридном кольцевом приводе	209
<i>Капуста П.П., Капуста П.П. (млад.)</i> Метод проектного расчета осей по критерию сопротивления усталости	213
<i>Капуста П.П., Вихренко Д.В.</i> Моделирование концентраторов напряжений в виде галтелей с использованием метода конечных элементов	221

<i>Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н., Дьяченко О.В., Криуша С.М.</i> Повышение долговечности некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего двигателя	228
<i>Цереня А.А., Грибков Ю.А., Шапелевич С.С., Миронов Д.Н.</i> Разработка инерционно-пружинного синхронизатора и предпосылки к его применению в трансмиссии тягово-транспортных машин	235
<i>Нестерович А.В.</i> Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости	246
<i>Беляева Г.И., Самосюк С.В.</i> Исследование движения абразивного бруска при суперфинишировании	253
<i>Шапалова М.И., Водка А.А.</i> Компьютерные методы моделирования синтетической структуры высокопрочного чугуна для статистической оценки его механических свойств и прочностных характеристик	257
РЕФЕРАТЫ	265
ABSTRACTS	271

Научное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 35

Оформление и компьютерная верстка *А. В. Савицкая*

Подписано в печать 13.05.2020. Формат 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 32,55. Уч.-изд. л. 12,73. Тираж 100. Заказ 205.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.