

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Математические методы в строительстве»

С. В. Босаков  
О. В. Козунова  
К. В. Юркова

## ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

Практикум

для студентов специальностей

1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,

1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,

1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,

1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области строительства и архитектуры*

Минск  
БНТУ  
2020

УДК 624.04(075.8)  
ББК 38.112  
Б85

Рецензенты:  
доктор технических наук, профессор Белорусско-Российского  
университета *С. Д. Семенюк*;  
кафедра строительных конструкций Полоцкого государственного  
университета

**Босаков, С. В.**

Б85 Теория сооружений: практикум для студентов специальностей 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций» / С. В. Босаков, О. В. Козунова, К. В. Юркова. – Минск : БНТУ, 2020. – 245 с.

ISBN 978-985-583-361-2.

В практикуме приведены задачи и их решения по расчету на прочность, жесткость и устойчивость стержневых, пластинчатых и объемных конструкций и сооружений на действие различных воздействий.

Практикум предназначен для студентов строительных специальностей технических вузов.

УДК 624.04(075.8)  
ББК 38.112

ISBN 978-985-583-361-2

© С. В. Босаков, О. В. Козунова,  
К. В. Юркова, 2020  
© Белорусский национальный  
технический университет, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
Глава 1. Расчетные модели и их кинематический анализ.....	7
1.1. Краткие сведения из теории.....	7
1.2. Расчетные модели.....	10
1.3. Кинематический анализ конструкций и сооружений.....	14
1.4. Ответы и решения к главе 1.....	24
Библиографический список.....	48
Глава 2. Статические расчеты.....	49
2.1. Краткие сведения из теории.....	49
2.1.1. Основные неизвестные и общие уравнения теории сооружений.....	49
2.1.2. Формулировки и решения задач теории сооружений в общей постановке.....	51
2.1.3. Методы, основанные на вариационных принципах.....	53
2.1.4. Методы расчета стержневых систем.....	55
2.1.5. Расчет конструкций на упругом основании.....	58
2.2. Статически определимые системы.....	59
2.3. Статически неопределимые системы.....	70
2.4. Ответы и решения к главе 2.....	89
Библиографический список.....	136
Глава 3. Динамические расчеты.....	138
3.1. Краткие сведения из теории.....	138
Основные задачи динамических расчетов. Число степеней свободы.....	138
Динамические характеристики стержневых систем. спектр частот и форм собственных колебаний.....	139
3.2. Динамические расчеты стержневых систем и их элементов.....	142
3.3. Динамические расчеты пластинок.....	152
3.4. Ответы и решения к главе 3.....	155
Библиографический список.....	192
Глава 4. Расчеты на устойчивость.....	193
4.1. Краткие сведения из теории.....	193
4.2. Устойчивость стержневых систем.....	200
4.3. Ответы и решения к главе 4.....	207
Библиографический список.....	244

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория сооружений в лице строительной механики, теории упругости и пластичности – одна из важнейших областей механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Ее методы широко используются при проектировании, расчете и обследовании сооружений. Поэтому в Государственных образовательных стандартах и программах по подготовке инженерных кадров изучению строительной механики, теории упругости и пластичности уделяется большое внимание. С развитием общей науки МДТТ постоянно развивается и теория сооружений, расширяется круг решаемых ею задач, разрабатываются новые методы и алгоритмы расчета сооружений, реализуемые с использованием современных компьютерных технологий в стадии упругих и пластических деформаций.

Вместе с тем, в сегодняшних учебных программах постоянно уменьшается число часов, отводимое для изучения классических разделов теории сооружений. В результате этого усложняются задачи ознакомления будущего специалиста с теоретическими основами, методами и алгоритмами строительной механики, приемами и методами расчета сооружений на различные воздействия в упругой стадии работы, а также с учетом разного рода неоднородностей и нелинейностей в сооружении в целом.

Предлагаемый сборник охватывает *инженерные задачи* по всем курсам теории сооружений (строительная механика, теория упругости и пластичности), которые читаются в настоящее время на строительных специальностях вузов Республики Беларусь, и предназначен для студентов, бакалавров, магистрантов и аспирантов, изучающих эти дисциплины. Предполагается, что читатель в необходимом объеме владеет знаниями по высшей математике и теоретической механике. В приведенных примерах, если иного не оговорено, подразумеваются справедливость закона Гука и гипотезы малости деформаций и перемещений конструкций. Буквенные обозначения для размеров, геометрических характеристик сечений, жесткостей, нагрузок – общепринятые. Понятия метода Ритца и энергетического метода – идентичны. При расчетах на устойчивость метод сил в предлагаемых примерах не используется. Во всех задачах, доведенных до числа, применяется международная система единиц (кроме оригиналов).

Практикум является первым изданием в РБ по теории сооружений с подробным и основательным решением задач, включая задачи повышенной сложности, практически по всем разделам строительной механики, теории упругости и пластичности. Содержание книги сложилось в результате многолетнего опыта преподавания авторами этих курсов на кафедрах строительной механики Белорусского национального технического университета (БНТУ) и Белорусского государственного университета транспорта (БелГУТ).

Содержание книги предопределено современным уровнем развития вычислительной техники и компьютерных технологий и возросшими требованиями к уровню подготовки специалистов в области расчета и проектирования сооружений.

Задачи и вопросы настоящего задачника рассчитаны на студентов II ступени обучения (магистр технических наук) однако в содержании можно найти некоторые материалы для обучения I ступени.

Авторы стремились отразить, насколько возможно, современное состояние науки и учебного процесса. Хотя пособие сориентировано на классическую теорию сооружений по разделам строительной механики, теории упругости и пластичности, в нем также рассматриваются расчетные схемы (модели) простых стержневых конструкций (балки, рамы, арки, фермы) и пластин, позволяющие понять через их работу под нагрузкой работу более сложных сооружений и систем. Классические схемы и методы теории сооружений дают ясное представление о физическом смысле решаемых задач и формируют у студентов, магистрантов и аспирантов необходимое понимание работы сооружения под нагрузкой на уровне инженерной интуиции.

Сборник состоит из предисловия, четырех глав и списка литературы в конце каждой главы. Главы начинаются краткими сведениями из теории, затем следуют условия задач и потом приводятся подробные решения.

*В главе 1* рассматриваются задачи по составлению расчетных моделей отдельных конструкций и сооружений, их кинематическому анализу. *В главе 2* предлагаются задачи по статическому расчету стержней и пластинок, стержневых систем и объемных тел. *Глава 3* посвящена решению задач динамического расчета стержневых систем, пластинок с одной и многими степенями свободы, совершающих свободные и вынужденные колебания. *В главе 4* рассматрива-

ются задачи упругой устойчивости стержней, стержневых систем и пластинок.

Ряд задач, приведенных в сборнике, заимствованы авторами из ранее опубликованных изданий С. П. Тимошенко, В. И. Феодосьева, Н. И. Безухова и других. В этих случаях авторы стремились приводить и решения, данные этими авторами.

Между авторами материал в сборнике распределен следующим образом: д-р техн. наук, проф. С. В. Босаков – предисловие, теоретические сведения по главе 1, часть задач и решений глав 1–4; канд. техн. наук, доц. К. В. Юркова – теоретические сведения и часть задач по 1–2 главе; канд. техн. наук, доц. О. В. Козунова – теоретические сведения и часть задач по 3–4 главе, оформление сборника.

# Глава 1. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ И ИХ КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## 1.1. Краткие сведения из теории

Теория сооружений служит расчету и проектированию реальных сооружений, расчеты которых с учетом всех их особенностей являются сложной и, в большинстве случаев, практически неразрешимой задачей. Поэтому их упрощают, заменяя реальное сооружение его расчетной моделью.

*Расчетная модель сооружения* – это упрощенная, идеализированная схема реального сооружения, принимаемая для его расчета, в которой отражены только основные свойства сооружения, связанные с его геометрической схемой, опорными закреплениями, конструкционным материалом и внешней нагрузкой.

Воспринимать внешнюю нагрузку могут только геометрически неизменяемые системы. *Под геометрически неизменяемой плоской системой* понимается система соединенных между собой дисков, в которой относительные перемещения ее частей без их деформации не допускаются. Геометрическая неизменяемость систем устанавливается в ходе *кинематического анализа* сооружений, который должен предшествовать основному расчету и выполняется в два этапа:

1) определение числа степеней свободы  $W$  стержневой системы. *Под степенью свободы* понимается число независимых геометрических параметров (перемещений, координат), определяющих положение всех элементов сооружения на плоскости или в пространстве.

Для плоских стержневых систем **число степеней свободы** определяется по формуле

$$W = 3Д - 2Ш - C_{\text{оп}}, \quad (1.1)$$

где  $Д$  – число дисков в системе;

$Ш$  – число простых промежуточных (соединяющих два диска между собой) шарниров или кратность сложных шарниров;

$C_{\text{оп}}$  – число опорных связей.

Если  $W > 0$ , то система является изменяемой и не способной воспринимать нагрузку. При  $W = 0$  или  $W < 0$  следует ожидать,

что система геометрически неизменяема и может воспринимать нагрузку.

2) структурный анализ системы. Определить число степеней свободы системы по формуле (1.1) (формальный анализ) недостаточно. Необходимо обязательно выполнить **структурный анализ**, который исследует порядок соединения стержней системы между собой. Существует два основных правила образования плоских геометрически неизменяемых систем:

1. *Правило треугольников*, когда к основному стержневому треугольнику при помощи двух стержней последовательно добавляется новый узел. При этом присоединяемые стержни не должны находиться на одной прямой во избежание образования мгновенно изменяемой системы, в которой возникают неопределенные усилия от внешней нагрузки.

2. *Правило трех связей*, когда два геометрически неизменяемых диска соединяются между собой тремя стержнями (стержни или их продолжения не должны пересекаться в одной точке или быть параллельными) или стержнем и цилиндрическим шарниром (стержень или его продолжение не должен проходить через ось шарнира). Эти два ограничения не позволяют рассматриваемой стержневой системе быть мгновенно изменяемой системой.

Для плоских шарнирно стержневых систем (плоские фермы) число степеней свободы целесообразнее определять по более простой формуле

$$W = 2U - C - C_{\text{оп}}, \quad (1.2)$$

где  $U$  – число узлов плоской шарнирно-стержневой системы, включая и опорные;

$C$ ,  $C_{\text{оп}}$  – число стержней системы и опорных связей в ней. Отметим, что чаще всего плоские фермы образованы по правилу треугольника.

Число степеней свободы для плоских рам можно определить по универсальной формуле:

$$W = -(3K - Ш), \quad (1.3)$$

где  $K$  – число замкнутых контуров в системе;

$\Pi$  – число простых, одиночных шарниров в системе, включая опорные шарниры, а также кратность сложных.

Для пространственных стержневых систем общей формулы для определения степени свободы нет. Однако для пространственных шарнирно-стержневых систем (пространственные фермы) число степеней свободы можно найти по формуле

$$W = 3U - C - C_{\text{оп}}, \quad (1.4)$$

Простейшей геометрически неизменяемой пространственной шарнирно-стержневой системой является стержневой четырехгранник (тетраэдр). Если к его вершинам присоединить новый узел при помощи трех стержней, не лежащих в одной плоскости, то образуется новая геометрически неизменяемая пространственная шарнирно-стержневая система. Сетчатые системы также относятся к геометрически неизменяемым пространственным фермам.

Помимо геометрического метода структурного анализа, упомянутого выше, для проведения кинематического анализа существует и аналитический метод. Его суть в следующем: составляется система уравнений равновесия, матрица коэффициентов которой связывает вектор усилий в элементах системы и вектор внешних нагрузок. Если определитель этой матрицы оказывается отличным от нуля, то исследуемая конструкция является геометрически и мгновенно неизменяемой. Разновидностью аналитического метода структурного анализа можно считать метод нулевой нагрузки: равенство нулю усилий в элементах конструкции при отсутствии нагрузки говорит о неизменяемости системы, если же усилия оказываются неопределенными, то система изменяема.

Использование этих методов нецелесообразно при проведении компьютерного расчета сложных стержневых и пластинчатых систем с большим количеством узлов, стержней и опор. Для геометрически или мгновенно изменяемых систем расчетная программа не может получить решение и обычно указывает номера узлов и их степени свободы, на которые необходимо наложить связи, чтобы рассчитываемая система стала геометрически неизменяемой.

## 1.2. Расчетные модели

**Задачи 1.1–1.3.** Образовать расчётные модели деревянных сооружений, представленных на рис. 1.1–1.3 [1].

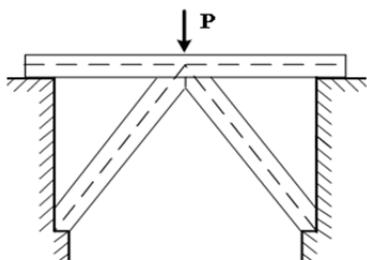


Рис. 1.1

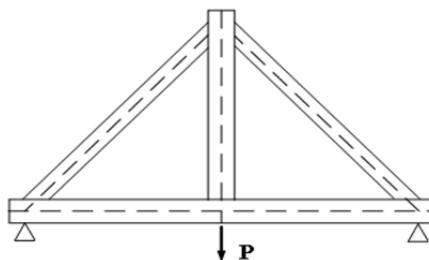


Рис. 1.2

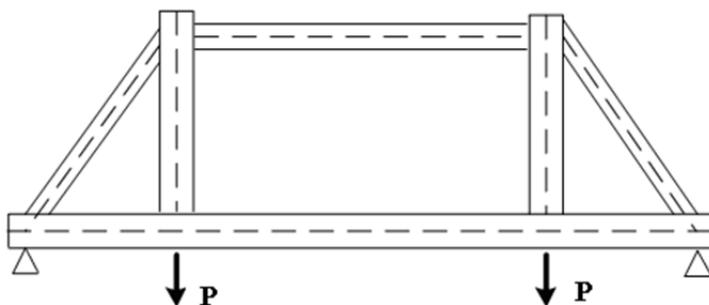


Рис. 1.3

**Задача 1.4.** При реконструкции птичника выявили коррозию и существенное снижение несущей способности балок крыши, выполненных из стальных швеллеров (рис. 1.4). Была выполнена очистка балок и их антикоррозийная обработка. С целью восстановления несущей способности возникла необходимость и конструктивного усиления балок. Предложите возможный вариант такого усиления и изобразите расчетную модель системы после усиления.



Рис. 1.4

**Задача 1.5.** Цех, стены которого выполнены из кирпича, перекрывался двухшарнирными арками с металлической затяжкой (рис. 1.5). При реконструкции цеха и установке нового оборудования затяжка стала мешать, и ее решили убрать. Начальник ОКСа завода выполнил расчеты на новые нагрузки и определил, что сечение арки при этом выдержит увеличение изгибающих моментов. Что произошло после удаления затяжки и нагружения арки?

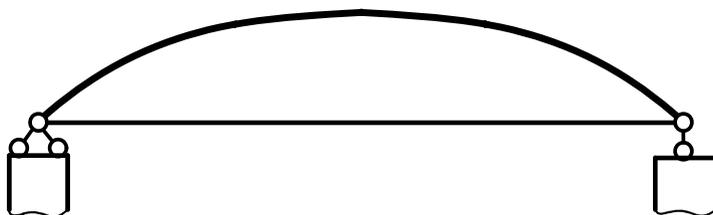


Рис. 1.5

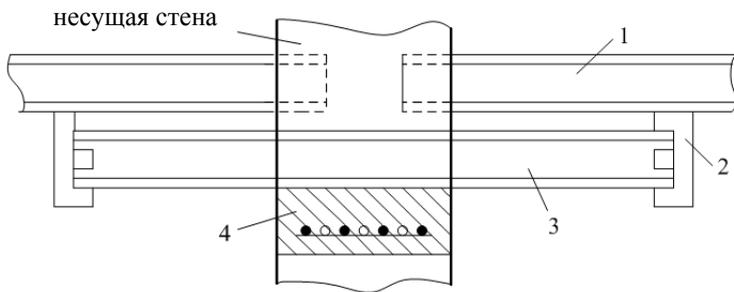
**Задача 1.6.** При ремонте жилого здания металлические балки 1 (рис. 1.6) были разгружены с помощью двухконсольной балки 3 [2].

Выполнить анализ работы балок и узла их соединения после реконструкции (рис. 1.6) и изобразить расчетную схему полученной системы.

**Задача 1.7.** При реконструкции здания, основной корпус которого перекрыт фермами, стены выложены из кирпича, а пристройка пролетом 5 м перекрыта наклонными деревянными балками, установили подкос под эти балки (рис. 1.7).

Что может произойти при нагружении пристройки?

а) Разрез



б) План

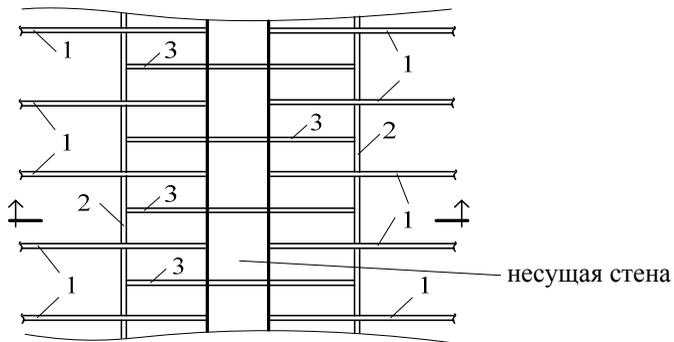


Рис. 1.6. 1 – существующие балки перекрытия; 2 – стальные поддерживающие балки; 3 – двухконсольные балки усиления; 4 – монолитная железобетонная плита (подушка)

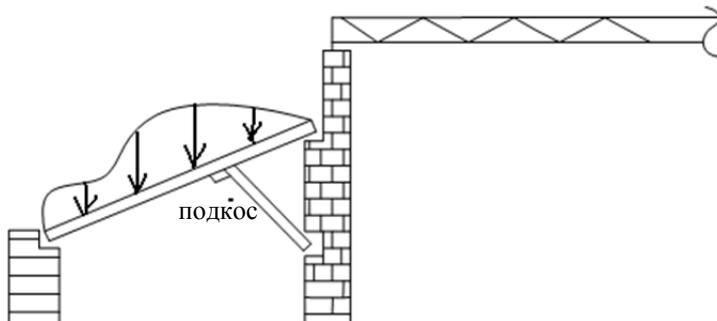


Рис. 1.7

**Задача 1.8.** Студент третьего курса строительного факультета приехал домой и сделал лестницу для сбора яблок (рис. 1.8).

Соседний студент, глядя на него, тоже сделал лестницу. Но так как он был более аккуратным, то он сделал несколько иначе (рис. 1.9). Проанализировать возможность использования обеих лестниц. А что изменилось бы, если поперечные планки были бы шире и соединялись с брусами при помощи четырех гвоздей?

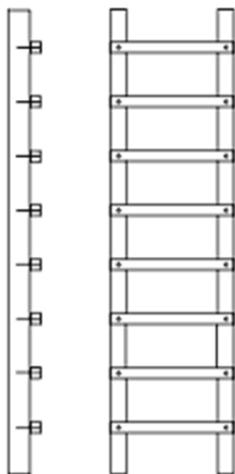


Рис. 1.8

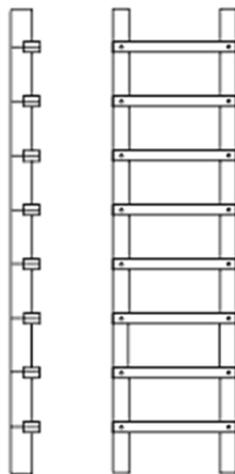


Рис. 1.9

**Задача 1.9.** В последнее время стремительными темпами развивается раздел науки, называемый биомеханикой. Какие примеры из живой природы, организмов, растений стали прообразами и аналогами инженерных сооружений, несущих конструкций и подобных устройств.

**Задача 1.10.** Одна из автомобильных дорог проходит под железнодорожным мостом, как показано на рис. 1.10. негабаритный груз однажды зацепился за нижнюю часть среднего пролета моста, в результате чего была повреждена (разорвана) нижняя арматура. Однако мост почему-то не разрушился и продолжает функционировать. Объясните, почему в данном случае не разрушился мост.

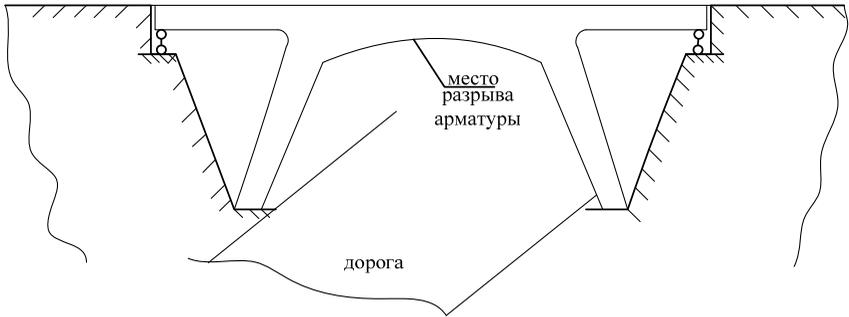


Рис. 1.10

**Задача 1.11.** Какой стержень можно удалить в системе, расчетная модель которой представлена на рис. 1.11, не нарушая геометрической неизменяемости системы?

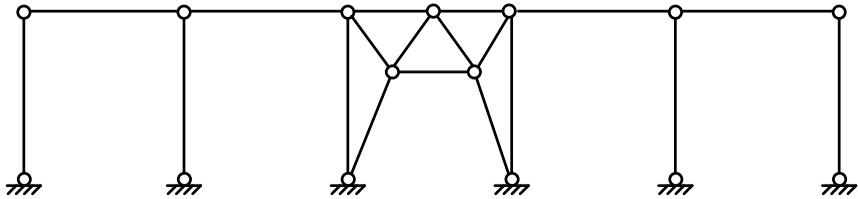


Рис. 1.11

### 1.3. Кинематический анализ конструкций и сооружений

**Задача 1.12.** Доказать, что при перемещениях балки как абсолютно твердого тела (рис. 1.12) в ней не возникают внутренние силы.

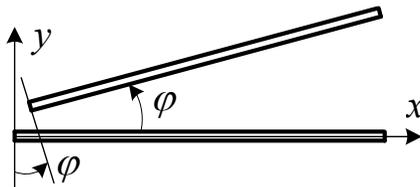


Рис. 1.12

**Задача 1.13.** Для увеличения жёсткости перекрытия, выполненного из сборных многопустотных плит, лежащих на ригелях, шарнирно опирающихся на колонны, в горизонтальной плоскости на уровне верха плит поставили горизонтальные перекрёстные металлические трубчатые связи, как показано на рис. 1.13 (вид сверху). Какие из этих связей можно убрать, не нарушая неизменяемость диска перекрытия?

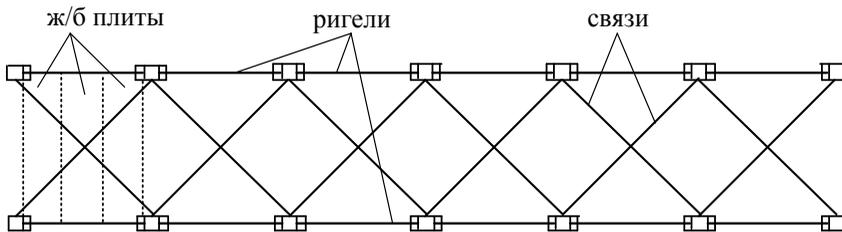


Рис. 1.13

**Задача 1.14.** Определить число степеней свободы системы, изображенной на рис. 1.14 тремя способами. Выполнить структурный анализ системы.

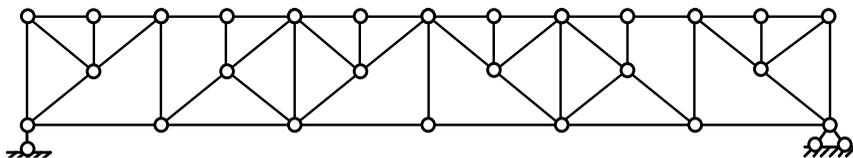


Рис. 1.14

**Задача 1.15.** При строительстве административного здания обрушилась плита козырька над входом в здание. Комиссия установила, что при монтаже плиты козырька прораб перепутал верх и низ плиты (рис. 1.15, а). Прорабу объяснили причину разрушения, он возместил причиненный ущерб, восстановил козырек и, так как обошлось без травм и жертв, его оставили работать в прежней должности. Через некоторое время на другом объекте при монтаже подобной плиты козырька тот же прораб для надежности укрепил козырек путем установки двух металлических стоек (рис. 1.15, б). Козырек опять разрушился. Почему?

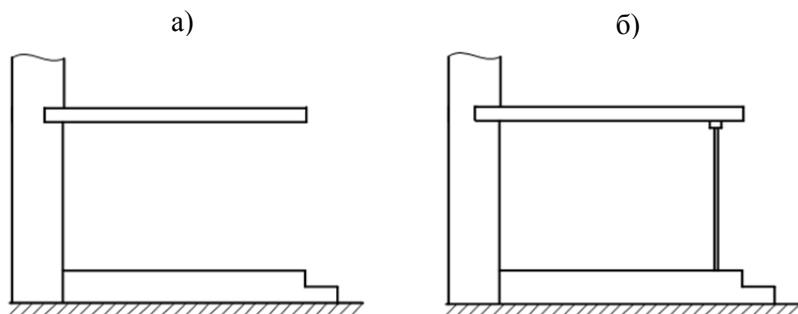


Рис. 1.15

**Задача 1.16.** Подрабатывая летом у одного дачника, студент строительного факультета перекрывал сарай с размерами в плане  $3 \times 4$  м деревянными фермами. Он изготовил 5 ферм (рис. 1.16), положил на длинные стены мауэрлат и задумался, каким образом в процессе монтажа ферм, при установке первой и каждой последующей фермы до их окончательной установки, образовать геометрически неизменяемую систему. Помогите студенту.

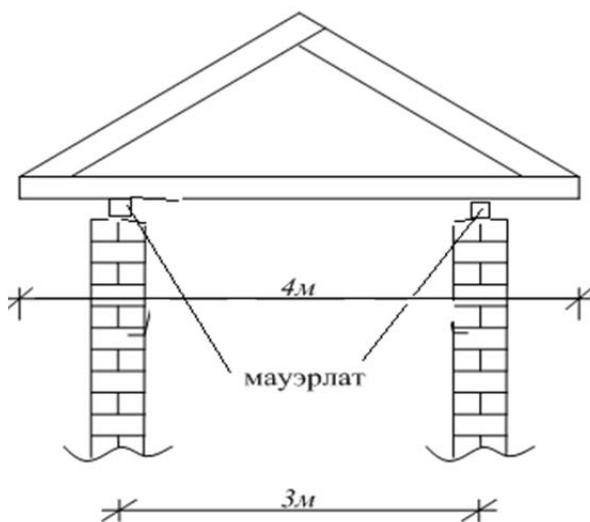


Рис. 1.16

**Задача 1.17.** Выполнить кинематический анализ шарнирно стержневых систем, представленных на рис. 1.17, *а*, *б*. Наружный контур системы на рис. 1.17, *б* представляет собой правильный восьмиугольник и стержни в системе соединяются между собой по концам шарнирами (в остальных точках пересечения стержней соединения между ними нет).

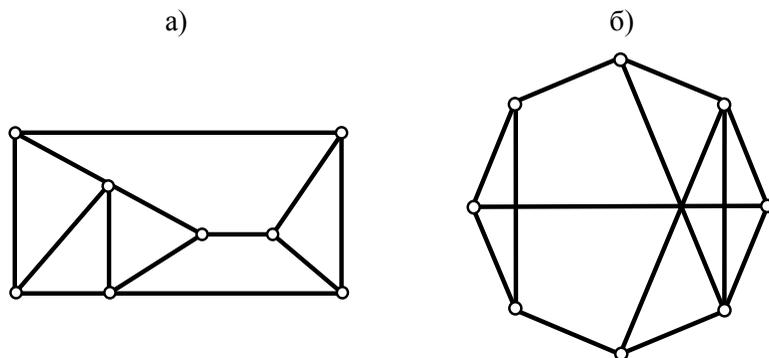


Рис. 1.17

**Задача 1.18.** Для усиления конструкций часто используют постановки дополнительных связей (затяжки, распорки). На рис. 1.18 приведены два варианта усиления конструкций путем постановки дополнительных стержней *a-b*. Выполнить анализ работы этих дополнительных связей в системах и указать отличия в их расчете.

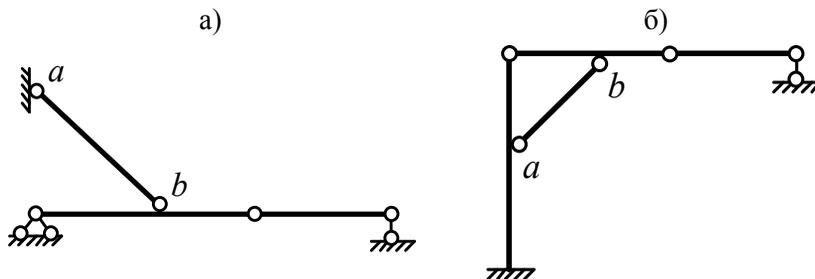


Рис. 1.18. *a* – усиление растяжкой; *б* – усиление подкосом

**Задача 1.19.** Сколько нужно якорей (под якорем здесь понимается гибкий проволочный или синтетический трос с закрепляющими устройствами), чтобы удержать лодку в стоячей воде в неподвижном состоянии на ее поверхности при действии на лодку, например, ветра (рис. 1.19)? А сколько нужно якорей в устойчиво текущей воде (на реке)?

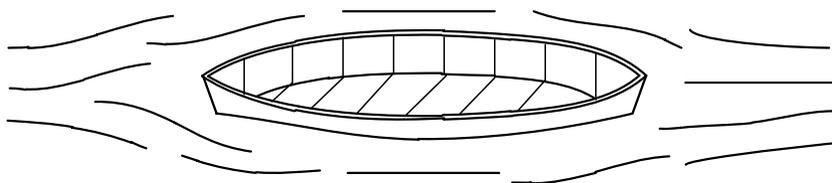


Рис. 1.19

**Задача 1.20.** Сколько нужно тросов, чтобы обеспечить геометрическую неизменяемость шарнирно опертой опоры ЛЭП (рис. 1.20), с учетом того, что вокруг своей оси опоры ЛЭП поворачиваться не может? Сколько нужно предварительно напряженных тросов?

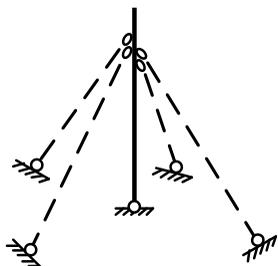


Рис. 1.20

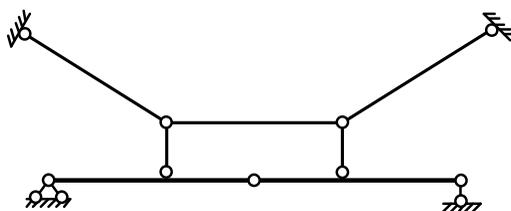


Рис. 1.21

**Задача 1.21.** Выполнить кинематический анализ системы, расчетная модель которой показана на рис. 1.21.

**Задача 1.22.** Выполнить кинематический анализ системы, представленной на рис. 1.22 [3].

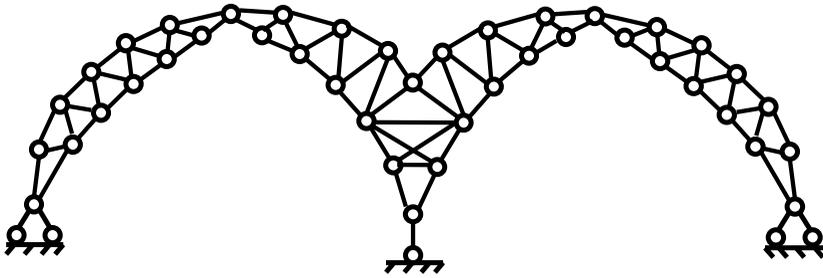


Рис. 1.22

**Задача 1.23.** Показать, что система, изображенная на рис. 1.23 [4], изменяема.

**Задача 1.24.** Какое нужно наименьшее количество брусков, чтобы сбить штукатурные козлы, если каждый брусок прибивается двумя гвоздями, по одному на край бруска (рис. 1.24)?

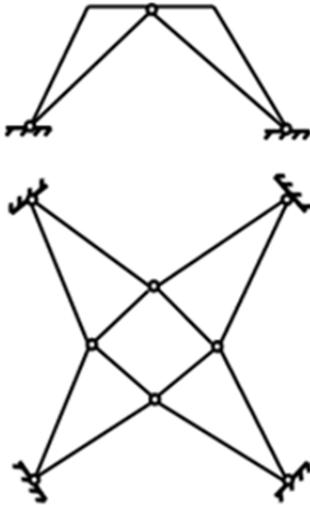


Рис. 1.23

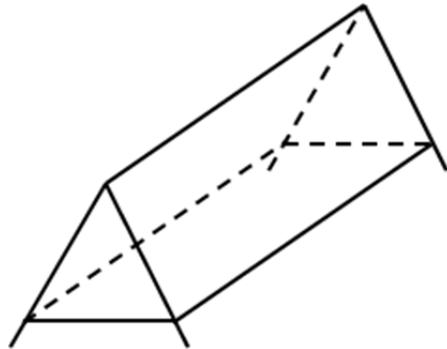


Рис. 1.24

**Задача 1.25.** Выполнить кинематический анализ стропильной системы (рис.1.25).

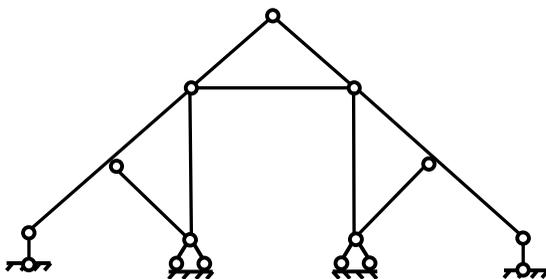


Рис. 1.25

**Задача 1.26.** Выполнить кинематический анализ рамы (рис. 1.26).

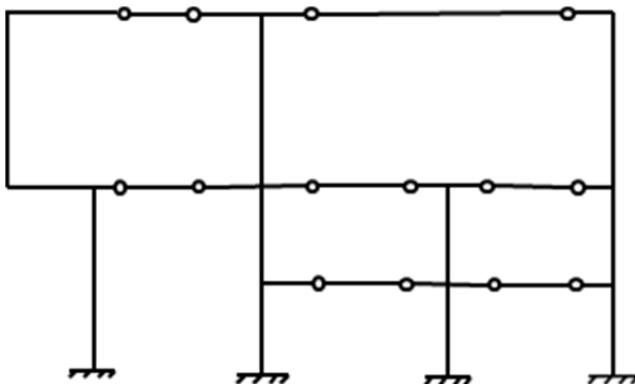


Рис. 1.26

**Задача 1.27.** Известно, что два плоских диска можно соединить в одно целое при помощи трех стержней (правило треугольников). Сколько вариантов существует для соединения стержнями двух объемных тел в одно целое?

**Задача 1.28.** Как образовать четырехпролетную статически определенную балку из трех брусьев длиной 8,3 м каждый?

**Задача 1.29.** Образовать все возможные варианты статически определенных многопролетных балок из заданной неразрезной балки (рис. 1.27).

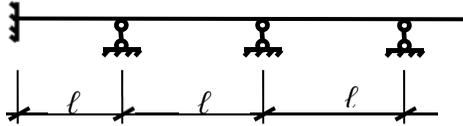


Рис. 1.27

**Задача 1.30.** Каменщик выкладывает карниз из кирпичей, выдвигая три наружных кирпича так, чтобы часть каждого из них выступала над нижележащим (рис. 1.28). Найти наибольшие возможные величины выступа кирпичей  $c_i$ , при которых они еще будут в равновесии, учитывая, что кладочный раствор не работает на растяжение, и что длина кирпича равна  $b$ , а вес —  $P$ .

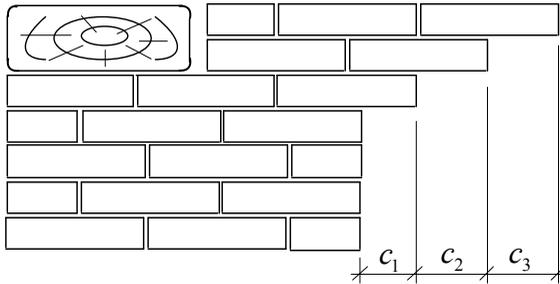


Рис. 1.28

**Задача 1.31.** При ремонте простенка в оконные проемы поставили по два вертикальных бревна, соединенных накрест двумя досками (рис. 1.29). Почему два бревна соединили не тремя связями? Доски соединены одним гвоздем между собой и бревнами.

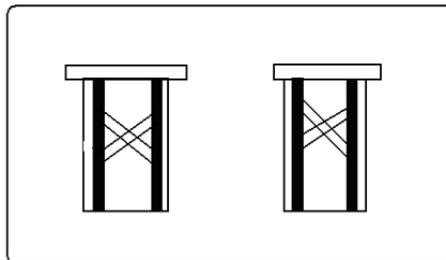


Рис. 1.29

**Задача 1.32.** Рассматриваются два варианта кирпичного здания, план которого показан на рис. 1.30: с продольными несущими стенами (вариант 1) и с поперечными несущими стенами (вариант 2).

Нагрузки на перекрытие, высота этажа, толщина и материал несущих стен для обоих вариантов одинаковы. Для какого варианта здание может быть возведено с бóльшим числом этажей?

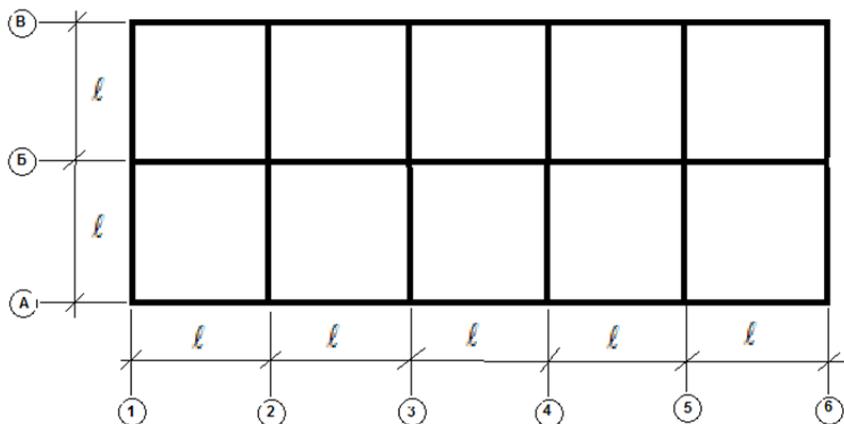


Рис. 1.30

**Задача 1.33.** В мостовой балке возникла трещина шириной 0,2 см от удара автомобиля с негабаритным грузом. Возможность дальнейшей эксплуатации балки с трещиной решили принять после расчета ее на ПК «Ли́ра». Однако, ввиду малой ширины раскрытия трещины и изгибной жесткости хомутов (рис. 1.31, а), коэффициенты матрицы жесткости метода перемещений по своим значениям имели большой разбег, что привело к значительным погрешностям программного счета.

Поэтому расчетную модель балки с трещиной выбрали в ином виде (рис. 1.31, б). Из какого условия необходимо назначить продольную жесткость  $EA$  введенных связей на рис. 1.31?

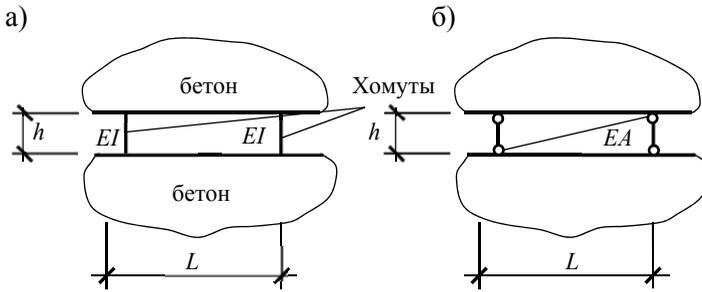


Рис. 1.31

**Задача 1.34.** В проектной организации необходимо было посчитать тонкую сжато-изогнутую плиту, работающую в условиях больших деформаций. Инженер выполнил сначала расчет плиты на изгиб, затем посчитал эту же плиту на действие продольной силы. Результаты расчета суммировал. Правильно ли он сделал?

**Задача 1.35.** Студент третьего курса приехал к родителям на каникулы и решил сделать стол в саду (рис. 1.32). Но так как грунт был слабый, и ножки сидели неглубоко в нем, вокруг стола по ножкам он прибил 4 доски, по 2 гвоздя на каждую. Проверить геометрическую неизменяемость системы. Что случилось, если бы он каждую доску прибил на 4 гвоздя?

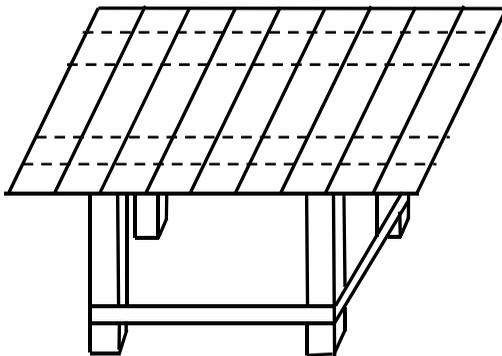


Рис. 1.32

**Задача 1.36.** Выполнить кинематический анализ стержневых систем (рис. 1.33–1.36) [5].

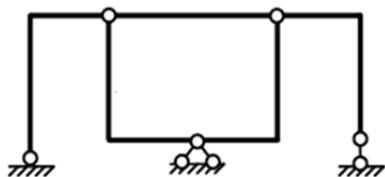


Рис. 1.33

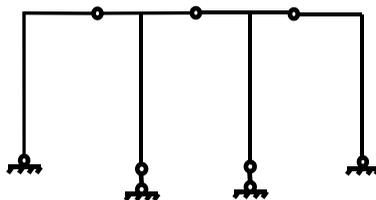


Рис. 1.34

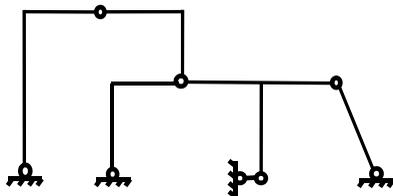


Рис. 1.35

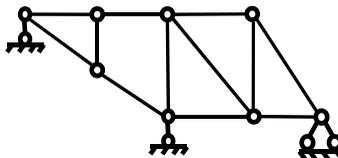


Рис. 1.36

## 1.4. Ответы и решения к главе 1

**Задачи 1.1–1.3.** При выборе расчетных моделей конструкций, изображенных на рис. 1.1–1.3, необходимо учитывать следующие факторы:

- отношение длин брусов к размерам их поперечных сечений – для определения вида элементов (стержни, балки, плиты и т. д.);
- целостность (неразрезность) брусов (как дисков) – для определения вида дисков и их соединений с другими дисками;
- особенности соединений брусов в стыках, выяснение того, допускают эти соединения угловые и линейные смещения брусов друг относительно друга в местах соединения или нет – для определения наличия или отсутствия связей и соответственно вида узловых соединений;
- условия опирания брусов на основание или другие конструкции – для определения наличия опорных связей и вида опор.

В представленных конструкциях по указанным факторам можно сделать следующие выводы:

- все элементы являются стержнями;
- бруски в местах соединения элементов продолжают далее, оставаясь целыми, являются дисками, а присоединяемые к ним элементы, соединяются с ними сбоку (сверху, снизу);
- в местах стыков концов элементов их соединения следует принять шарнирными.

Следовательно, расчетные модели рассматриваемых сооружений будут иметь вид, представленный на рис. 1.37–1.39.

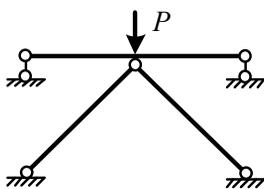


Рис. 1.37

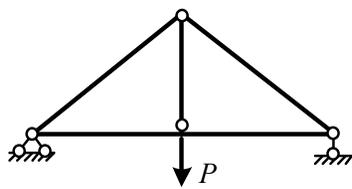


Рис. 1.38



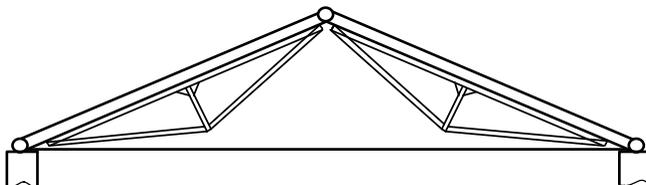
Рис. 1.39

**Задача 1.4.** Наиболее простым вариантом усиления будет увеличение размеров и, главное, высоты поперечного сечения балок путем приварки снизу стальных уголков или швеллеров.

Это приведет к увеличению площадей, моментов сопротивления поперечных сечений балок, которые становятся составными, к увеличению их изгибной жесткости и, соответственно, к повышению несущей способности балок. Расчетная модель системы при этом не изменится и будет представлять собой трехшарнирную систему, состоящую из двух балок, соединенных друг с другом в верхней части (у конька) крыши, и затяжки, которая опирается на колонны (стены).

Более эффективным вариантом будет усиление шпренгельной системой, выполненной, например, из стальных уголков согласно рис. 1.40, а. Расчетная модель после такого усиления будет иметь вид, показанный на рис. 1.40, б.

а)



б)

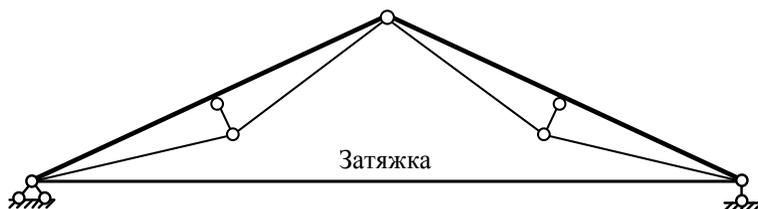


Рис. 1.40

Расчетная модель представляет собой статически неопределимую трехшарнирную (распорную) систему, состоящую из двух шпренгельных балок, соединенных друг с другом в ключевом шарнире, и затяжки. Число степеней свободы такой системы:

$$W = 3Д - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 9 - 2 \cdot (3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1) - 3 = 0.$$

**Задача 1.5.** После удаления затяжки пролет цеха стал перекрываться криволинейной балкой, правая опора которой является шарнирно-подвижной. Перемещения этой опоры передаются и на кирпичную стену, вызывая ее изгиб. Учитывая, что кирпичные стены и столбы на изгиб работают очень плохо (или вообще не работают), быстрее всего произойдет разрушение стен цеха (рис. 1.41).

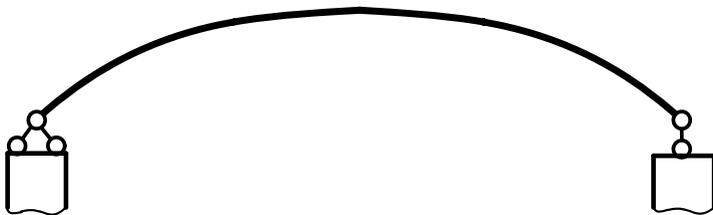


Рис. 1.41

**Задача 1.6.** Существующие балки работают в кирпичной стене как упруго защемленные (см. рис. 1.6), при этом определение величины податливости этих соединений является непростой задачей, так как требует экспериментального натурного исследования непосредственно на данном объекте в конкретных условиях.

С другой стороны, балки заделаны в стену на небольшую длину и долгое время уже работали под нагрузкой, поэтому опирание существующих балок перекрытия на кирпичную стену, с нашей точки зрения, следует принять шарнирным (упругая податливость соединения, уже имеющаяся, пойдет при этом в запас прочности). Балки усиления заделаны (защемлены) в стене насквозь, при этом, нагружение балок с двух сторон стены будет уравнивать их относительно оси симметрии стены, поэтому их можно принять защемленными в стене. Поддерживающие балки выполняют роль опор для существующих, передающих в местах контакта нагрузку на балки усиления.

Расчетная модель системы, полученной в результате усиления, с учетом сказанного для части ее (относительно оси стены) может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1.42.

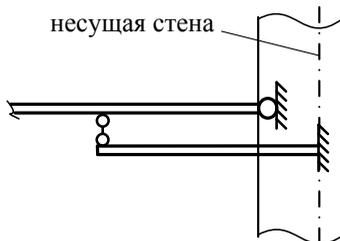


Рис. 1.42

**Задача 1.7.** Расчетная схема перекрытия пристройки при рассматриваемом нагружении (рис. 1.43, *а*) может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1.43, *б* (правая консольная часть балки в рассматриваемых условиях может подняться вверх и опираться на стену не будет).

В подкосо же будет возникать продольное сжимающее усилие, горизонтальная составляющая которого будет передаваться на кирпичную стену, что может вызвать изгиб стены и недопустимые растягивающие напряжения в кирпичной кладке. А это, в свою очередь, приведет к разрушению стены и здания в целом.

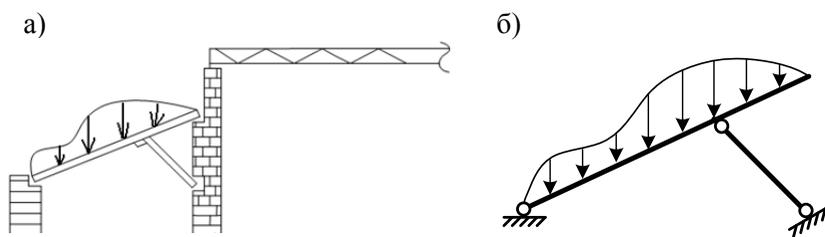


Рис. 1.43

**Задача 1.8.**

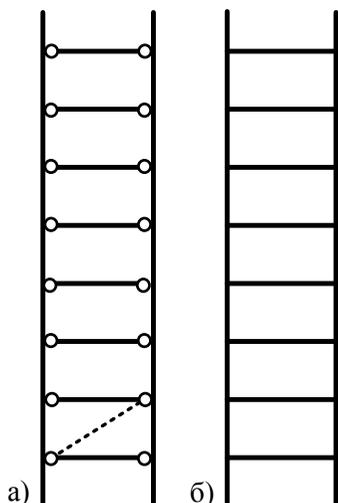


Рис. 1.44

Первая лестница представляет собой мгновенно изменяемую систему, так как два неразрезных бруса соединены друг с другом параллельными связями. Чтобы ликвидировать мгновенную изменяемость, необходимо в одной из ячеек (например, нижней) поставить диагональную связь (на расчетной модели лестницы на рис. 1.44, *а* эта связь показана пунктиром).

Во второй лестнице поперечные бруски врезаны в стойки. При хорошем качестве работы (при плотной врезке) соединение стоек и поперечных брусков можно считать жестким (рис. 1.44, *б*).

Лестницу второго студента можно эксплуатировать сразу, без увеличения числа гвоздей в соединениях поперечных планок с вертикальными брусками. Добавление же еще двух гвоздей на планку в соединениях только увеличит жесткость этих соединений.

**Задача 1.9.** Ниже приведены примеры природных объектов, явившихся прообразами и аналогами инженерных сооружений, несущих конструкций, устройств:

- 1) паутина  $\iff$  вантовая система;
- 2) скорлупа яиц  $\iff$  оболочка в безмоментном состоянии;
- 3) лепестки цветов  $\iff$  оболочки различной кривизны;
- 4) среднее ухо  $\iff$  мембрана;
- 5) усы винограда, огурцов, клубники  $\iff$  нити, тросы;
- 6) листья, плавники рыб  $\iff$  ребристые плиты;
- 7) дерево  $\iff$  консольный стержень переменного сечения;
- 8) кровеносный сосуд  $\iff$  анизотропная цилиндрическая оболочка.

**Задача 1.10.** Приведем два возможных объяснения того, что мост не разрушился.

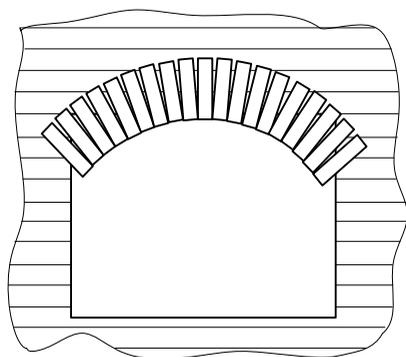


Рис. 1.45

Средний пролет моста представляет арочную систему с сечениями большой толщины. Поэтому, если считать разрыв арматуры нарушением контакта в среднем сечении моста, то при небольшом пролете моста и работе средней части в условиях сжатия под действием распора контакт восстановится, и мост будет работать как цельная система. Подобным образом работают арочные и клинчатые перемычки (рис. 1.45).

Второй возможный вариант. Можно предположить, что в месте разрыва арматуры возникло состояние шарнира, и система стала одношарнирной или трехшарнирной аркой. При наличии определенного запаса прочности такая система может еще работать и дальше, не разрушаясь.

**Задача 1.11.** Целесообразно удалить стержень  $a-b$  (рис. 1.46).

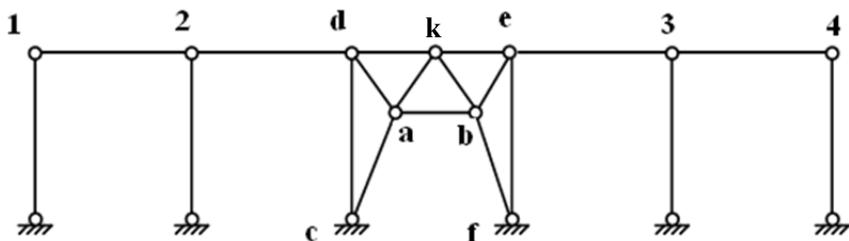


Рис. 1.46

Тогда система  $c-d-e-f$  будет состоять из двух дисков  $c-d-k-a$  и  $b-k-e-f$ , соединенных между собой шарниром  $k$ , и соединяющихся в свою очередь с основанием (как диском) шарнирами  $c$  и  $f$  (три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой), и будет представлять собой статически определимую и геометрически неизменяемую распорную ферму. К этой ферме и к основанию узлы 1, 2 и 3, 4 (рис. 1.46) присоединяются последовательно при помощи двух стержней, не лежащих на одной прямой.

**Задача 1.12.** Кривизна балки выражается через ее прогибы зависимостью

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}. \quad (1.5)$$

Уравнение перемещений жесткой балки есть уравнение прямой линии, то есть  $y = ax + b$ , тогда  $y' = a$ ;  $y'' = 0$ . Подставляя эти значения в (1.5), получим  $\frac{1}{\rho} = 0$ , то есть отсутствие деформирования. Соответственно и изгибающий момент, который определяется зависимостью  $M = \frac{EJ}{\rho}$ , в любом сечении балки будет равен нулю.

Из дифференциальной зависимости  $Q = \frac{dM}{dx}$  следует и равенство нулю поперечной силы в любом сечении балки.

**Задача 1.13.** Рассмотрим план перекрытия (рис. 1.47). Железобетонные плиты опираются на ригеля и наряду с перекрытием пролетов выполняют и роль горизонтальных связей (пунктирные линии), которые совместно с диагональными связями и ригелями будут образовывать неизменяемые системы. Поэтому в каждой ячейке перекрытия можно удалить по одной диагональной связи.

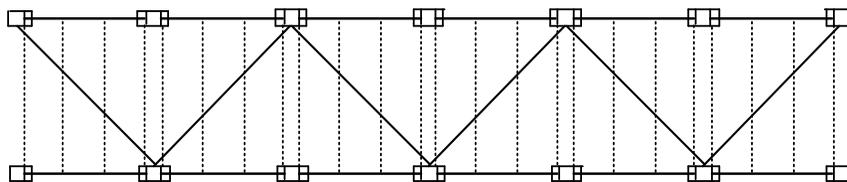


Рис. 1.47

**Задача 1.14.** Определяем степень свободы системы, изображенной на рис. 1.48, тремя способами:

а) как для плоской шарнирно-стержневой системы (фермы):

$$W = 2У - С - С_0 = 2 \cdot 26 - 49 - 3 = 0;$$

б) как для плоской системы, составленной из дисков (на рис. 1.48 кратность шарниров показана арабскими цифрами):

$$W = 3Д - 2Ш - С_0 = 3 \cdot 49 - 2(2 \cdot 11 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5) - 3 = 0;$$

в) по формуле, основанной на анализе замкнутых контуров системы, образованных стержнями, стержнями и основанием, жестко либо шарнирно соединенных между собой (на рис. 1.48 нумерация части контуров обозначена буквой К с индексом, соответствующим номеру контура; число простых шарниров, разрезающих контура, для большей части узлов совпадает с обозначенными для предыдущего расчета – там, где такого совпадения нет, число простых шарниров приведено в скобках):

$$W = -(3К - Ш) = -(3 \cdot 26 - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 6)) = 0.$$

Структура фермы представляет собой систему, состоящую из трех дисковых трехшарнирных треугольников, последовательно присоеди-

няющихся друг к другу. Так, диск  $D_1$ , диск  $D_2$  и диск (стержень)  $D_3$  соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуя новый диск, который соединяется опять тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, с дисками  $D_4$  и  $D_5$ , и так далее. Диск фермы соединен с основанием тремя опорными стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, создавая в целом неизменяемую систему.

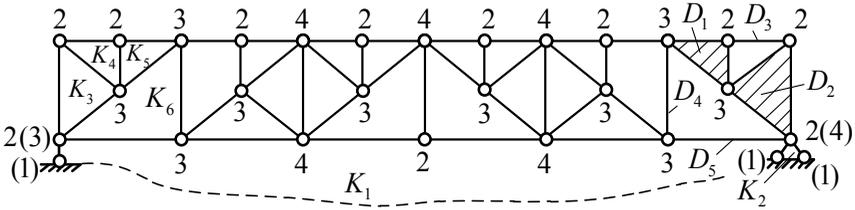


Рис. 1.48

**Задача 1.15.** Козырек на рис. 1.15, *a* работает как консольная пластинка, защемленная одной гранью и нагруженная вертикальной нагрузкой (снег), расчетная модель которой может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1.49, *a*. Растянутыми в такой плите являются верхние волокна, поэтому рабочая арматура в ней располагается вверху.

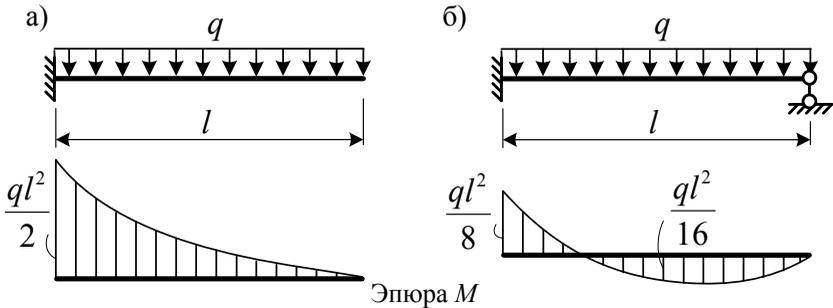


Рис. 1.49

Когда в консольной части (на его конце) были установлены опоры, козырек стал работать как пластинка с одной защемленной и другой

шарнирно опертой гранью. Примерная эпюра изгибающих моментов в пластинке козырька приведена на рис. 1.49, б. Как видно, после установки стоек появились растягивающие напряжения в нижних волокнах пластинки, где нет рабочей арматуры, что и привело к разрушению козырька.

**Задача 1.16.** Устанавливается крайняя ферма, ее нижний пояс прибивается гвоздями к мауэрлату (см. рис. 1.16), после чего закрепляется неподвижно двумя монтажными досками по нижним краям верхнего пояса фермы мауэрлата, зафиксировано ее вертикальное положение (жесткий блок). Затем последовательно устанавливаются другие фермы, сначала к мауэрлату, затем к предыдущей ферме двумя досками по краям ферм под уровень. Монтажные доски убираются после установки всех ферм, прибивки обрешетки и образования жесткого пространственного блока из двух соседних ферм.

**Задача 1.17.** Системы, приведенные на рис. 1.17 а, б, мгновенно изменяемые. На рис. 1.50, а два диска, образованные по принципу трехдискового трехшарнирного треугольника, соединены тремя параллельными стержнями.

На рис. 1.50, б два диска, образованные по правилу треугольников, соединены тремя стержнями, пересекающимися в одной точке.

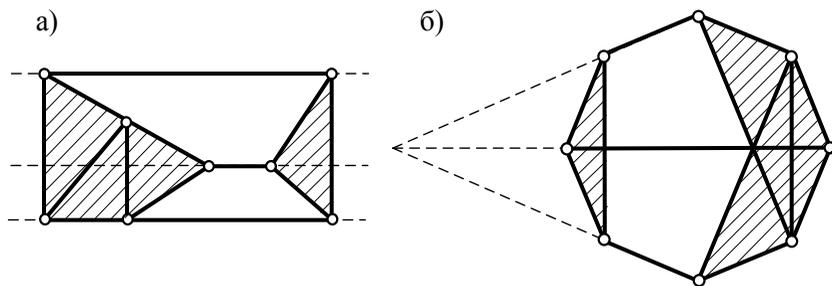


Рис. 1.50

**Задача 1.18.** На рис. 1.18, а элемент  $a-b$  (растяжка) работает на растяжение, уменьшая изгибающие моменты в первой балке, на рис. 1.18, б подкос  $a-b$  работает на сжатие. Следовательно, прочностной расчет подкоса должен включать расчет на устойчивость.

**Задача 1.19.** Для закрепления лодки на поверхности воды (диска в горизонтальной плоскости) рассматриваемыми якорями, которые являются односторонними связями [6], необходимо четыре якоря (четыре связи) (рис. 1.51, а). На течении можно ограничиться тремя, закрепляющими лодку так, как показано на рис. 1.51, б, где течение будет создавать силу  $P$ , натягивающую правый трос и удерживающую лодку в равновесии.

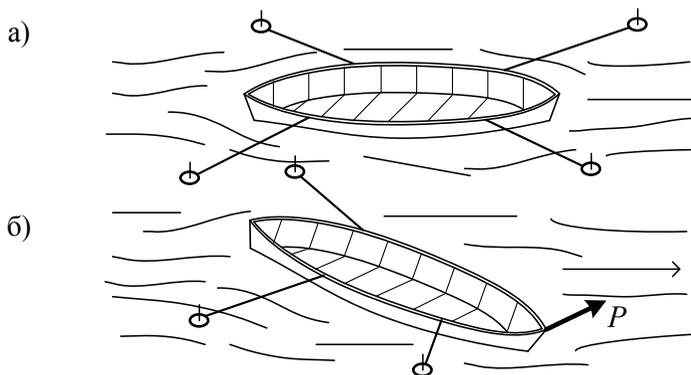


Рис. 1.51

**Задача 1.20.** Шарнирно опертая опора ЛЭП, не поворачивающаяся вокруг своей оси, имеет в пространстве две степени свободы – может поворачиваться относительно двух горизонтальных осей. Для обеспечения ее геометрической неизменяемости при этом необходимо три троса, так как они являются односторонними связями и работают только на растяжение. Число тросов не изменится, если они будут преднапряжены. Обычно такие опоры ЛЭП и закрепляют именно предварительно напряженными тросами.

**Задача 1.21.** Число степеней свободы системы (рис. 1.52) равно  $W = 3Д - 2Ш - С_0 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2) - 7 = 0$ , то есть, формально, система статически определима и геометрически неизменяема. Используя правило замены связей, (на рис. 1.52 заменяемые и вводимые связи показаны пунктирной линией), можно показать, что эта система (цепь с балкой жесткости) образована по закону трех связей и не является мгновенно изменяемой.

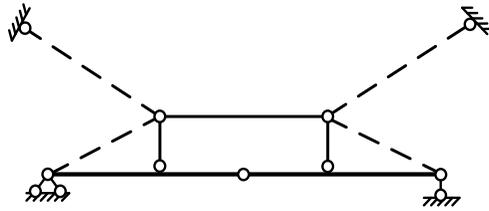


Рис. 1.52

**Задача 1.22.** Система является мгновенно изменяемой, так как три опорные реакции пересекаются в одной точке (рис. 1.53).

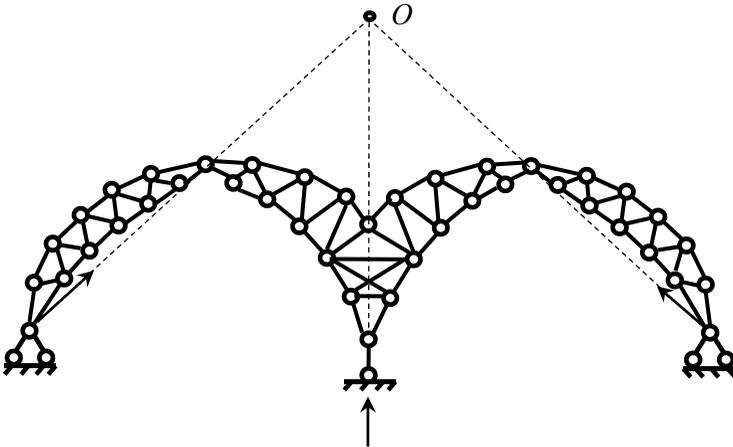


Рис. 1.53

**Задача 1.23.** Приводим без изменений доказательство проф. С. П. Тимошенко (рис. 1.54) [4]. Система эта при четырех узлах имеет 12 стержней, т. е., то число стержней, которое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Покажем, что здесь мы имеем дело с исключительным случаем\*.

---

\* Профессор С. П. Тимошенко доказывает, что данная система является мгновенно изменяемой, важнейшим признаком которой является наличие неопределенных усилий в стержнях системы при отсутствии внешней нагрузки.

Для этого достаточно доказать, что при отсутствии внешних сил возможно удовлетворить условиям равновесия всех узлов системы, приняв усилия в некоторых стержнях отличными от нуля. В каждом из узлов системы мы имеем по два стержня, лежащих в горизонтальной плоскости, и два наклонных к горизонту стержня. При отсутствии внешних сил равнодействующая усилий в горизонтальных стержнях какого-либо узла должна уравниваться с равнодействующей усилий в наклонных стержнях. Каждая из этих равнодействующих совпадает с линией пересечения горизонтальной плоскости  $abcd$  с плоскостью, определяемой наклонными стержнями. На рис. 1.54 эти линии пересечения указаны пунктиром.

Рассмотрим теперь стержни, сходящиеся в одном из узлов, например, узле  $b$ . Если предположить, что в стержне  $ab$  имеется растягивающее усилие  $S$ , то из того условия, что равнодействующая усилий  $ab$  и  $bc$  должна иметь направление  $mn$ , перпендикулярное бивектору угла  $abc$ , находим для стержня  $bc$  сжимающее усилие  $-S$ .

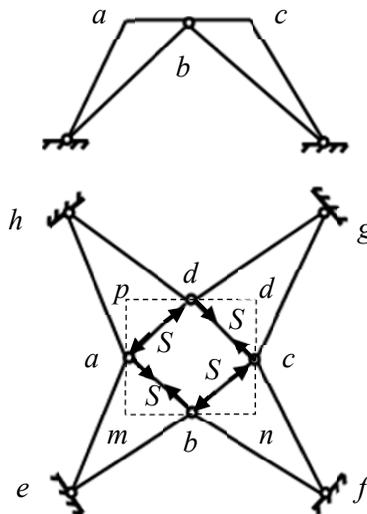


Рис. 1.54

Повторяя те же рассуждения для узлов  $c$  и  $d$ , найдем в стержне  $dc$  усилие  $S$  и в стержне  $ad$  усилие  $-S$ . Это последнее усилие с растяжи-

вающим усилием  $S$  стержня  $ab$  дадут в узле  $a$  равнодействующую, направленную по линии  $pq$ . Равнодействующие усилий горизонтальных стержней в каждом узле могут быть разложены по направлениям наклонных стержней. Таким образом, для данной пространственной фермы можно подобрать систему отличных от нуля и взаимно уравновешивающихся усилий в стержнях. Это показывает, что данная система геометрически изменяема.

**Задача 1.24.** Необходимо образовать из брусков пространственную сетчатую систему, на что потребуется 12 брусков (рис. 1.55).

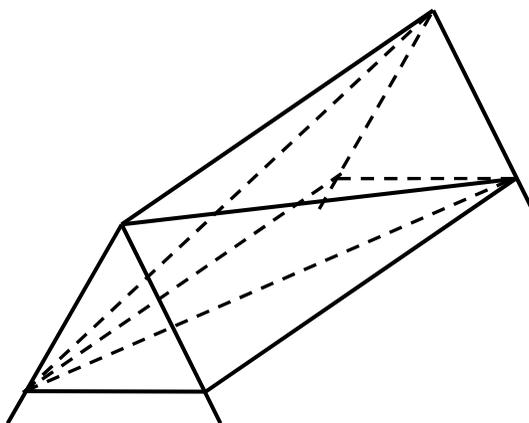


Рис. 1.55

**Задача 1.25.** Число степеней свободы:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 9 - 22 - 6 = -1.$$

Закон образования: коньковый узел 1 (рис. 1.56) присоединяется к неизменяемым дискам при помощи двух связей. Поэтому связь  $a-b$  является лишней с позиции метода сил. И, как следует из закона образования, данная система не является мгновенно изменяемой.

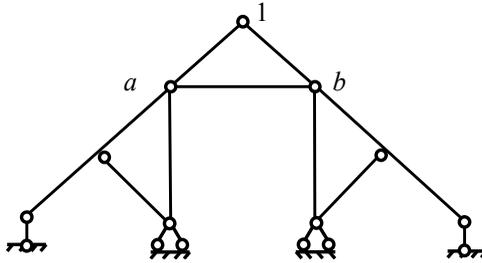


Рис. 1.56

**Задача 1.26.** Рама является статически неопределимой и геометрически неизменяемой. Действительно, число степеней свободы рамы равно  $W = 3Д - 2Ш - C_0 = -7$ .

Рама состоит из четырех консольных рам, соединенных распорками, которые и создают статическую неопределимость всей рамы.

**Задача 1.27.** Каждое массивное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы. Поэтому для соединения двух массивных тел в одно целое необходимо, как минимум, шесть связей. На рис. 1.57 показаны два возможных варианта соединения.

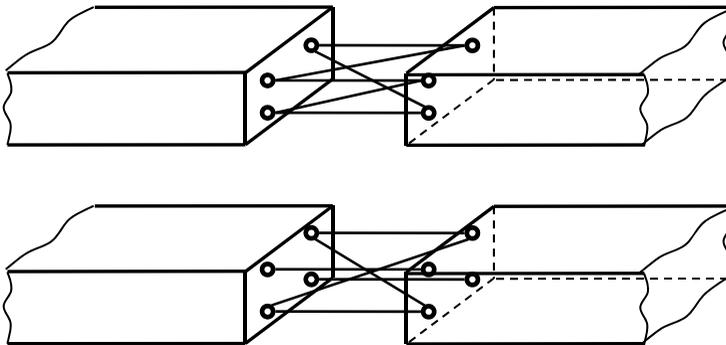


Рис. 1.57

**Задача 1.28.** На рис. 1.58, *a* показана раскладка брусьев, на *б* и *в* приводятся расчетная модель и поэтажная схема образованной балки.

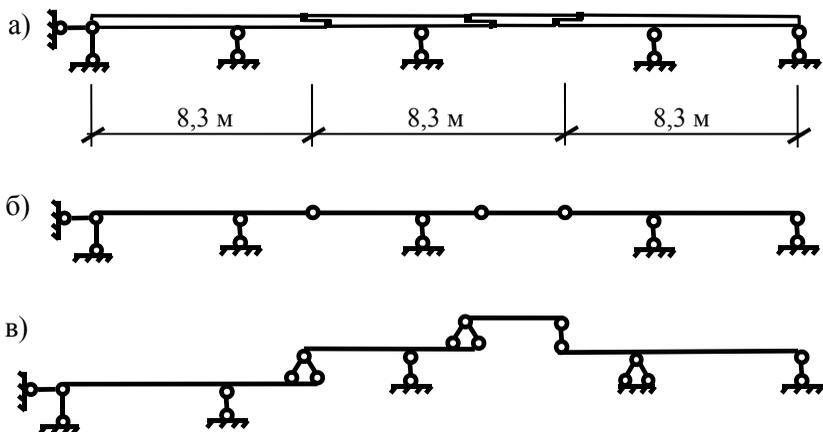


Рис. 1.58

**Задача 1.29.** Данная неразрезная балка трижды статически неопределима. Значит, нужно образовать статически определимую многопролетную балку путем постановки трех промежуточных шарниров. Варианты таких балок приводятся на рис. 1.59.

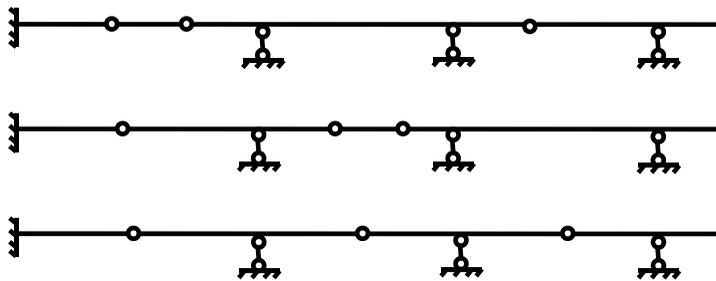


Рис. 1.59

**Задача 1.30.** Рассмотрим часть стены с карнизом (рис. 1.60–1.62).

Чтобы кирпич 3 не опрокинулся относительно ребра кирпича 2 (относительно точки  $O_3$ ) нужно (рис. 1.60), чтобы выполнялось неравенство:

$$\sum M_{O_3} = -P \left( \frac{b}{2} - c_3 \right) \leq 0, \quad \text{откуда} \quad c_3 \leq \frac{b}{2}.$$

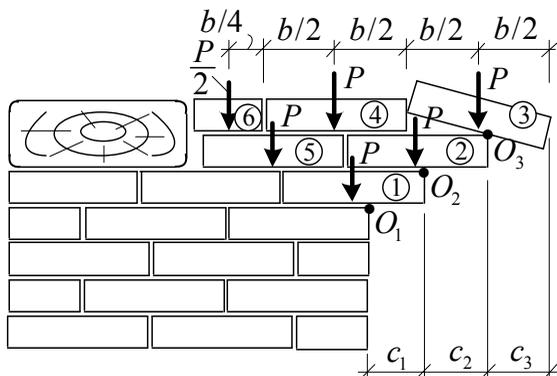


Рис. 1.60

Анализ возможного опрокидывания кирпича 2 относительно ребра кирпича 1 (относительно точки  $O_2$ ) показывает, что оно будет происходить вместе с кирпичами 3 и 4 (рис. 1.61).

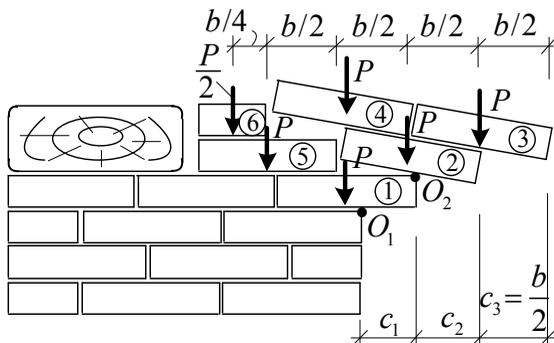


Рис. 1.61

Чтобы этого опрокидывания не было, должно выполняться неравенство:

$$\sum M_{O_2} = -P\left(\frac{b}{2} - c_2\right) - P\left(\frac{3b}{2} - c_2 - c_3\right) + P\left(c_2 + c_3 - \frac{b}{2}\right) \leq 0,$$

откуда с учетом полученной выше величины  $c_3$  найдем:  $c_2 \leq \frac{b}{2}$ .

Опрокидывание кирпича 1 относительно точки  $O_1$  будет происходить вместе кирпичами 2, 5 и 3, 4, 6 (рис. 1.62).

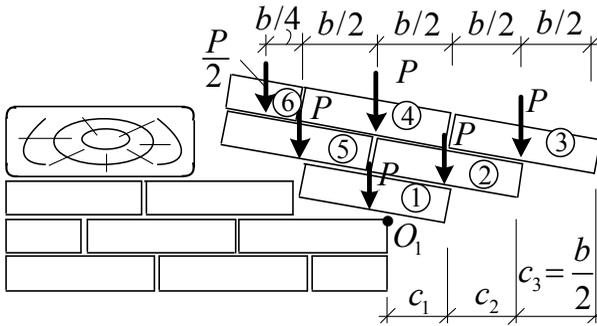


Рис. 1.62

Это опрокидывание не произойдет, если, в свою очередь, будет выполняться неравенство:

$$\begin{aligned} \sum M_{O_1} = & -P\left(\frac{b}{2} - c_1\right) - P\left(\frac{3b}{2} - c_1 - c_2\right) - P\left(\frac{3b}{2} - c_1 - c_2 - c_3\right) - \\ & - \frac{P}{2}\left(2b + \frac{b}{4} - c_1 - c_2 - c_3\right) + P\left(c_1 + c_2 - \frac{b}{2}\right) + P\left(c_1 + c_2 + c_3 - \frac{b}{2}\right) \leq 0, \end{aligned}$$

откуда с учетом полученных выше значений  $c_2$  и  $c_3$  найдем:  
 $c_1 \leq 0,386b$ .

Таким образом, рассматриваемый карниз будет находиться в равновесии, если выступы кирпичей будут удовлетворять условиям:

$$c_1 \leq 0,386b; \quad c_2 \leq \frac{b}{2}; \quad c_3 \leq \frac{b}{2}.$$

**Задача 1.31.** Два вертикальных бревна обычно расклинивают для разгрузки простенка. Поэтому можно дополнительно считать двумя горизонтальными связями перемычку и часть кирпичной стены ниже бревен.

**Задача 1.32.** Общая длина наиболее нагруженных стен (на которые опираются перекрытия двух смежных пролетов) для варианта 1 составляет  $5\ell$ , а для варианта 2 –  $8\ell$ . Следовательно, для варианта здания с поперечными несущими стенами число этажей может быть большим, чем для здания с продольными несущими стенами.

**Задача 1.33.** Из условия равенства  $Q = N$  и податливостей двух соединений. При единичном смещении  $Q = \frac{12EI}{h^3}$ ;  $N = \frac{EF}{L}$ ;  
 $EF = \frac{12EI}{h^3} L$ .

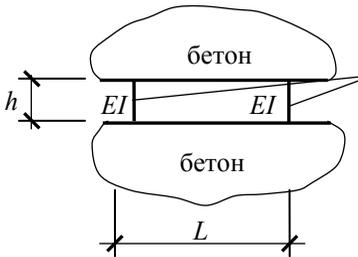


Рис. 1.63

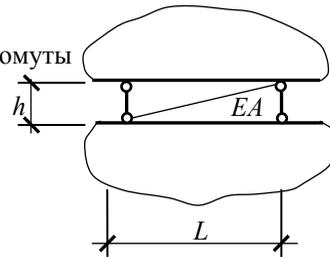


Рис. 1.64

На самом деле ввиду малости  $h$  по сравнению с  $L$  ( $h \ll L$ ) связь  $EA$  является горизонтальной (рис. 1.63, 1.64), и из уравнения равновесия поперечная сила в хомуте равна продольной силе во введенной связи.

**Задача 1.34.** В тонкой сжато-изогнутой плите, работающей на действие продольной и поперечной нагрузок, в условиях больших перемещений, возникают нелинейные деформации. Принцип независимости действия сил в условиях нелинейной работы конструкции не применим. То есть, результаты расчета рассматриваемой тонкой плиты, выполненные инженером, не являются правильными. Кроме того, продольная сила создает изгибающий момент на прогибах плиты от поперечной нагрузки.

**Задача 1.35.** Прибивая по одному гвоздю на край доски (см. рис. 1.32), мы создаем шарнирное (в плоскости доски) соединение доски с ножкой стола. Прибивая по два гвоздя на край доски, мы создаем жесткое соединение доски с ножкой стола, что повышает горизонтальную жесткость стола.

**Задача 1.36.** Приводим подробные рассуждения и выводы авторов [5] (п. ш. – простой шарнир).

*Пример 1.* Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.65, а. Определим степень свободы системы по формулам:

$$W = -(3K - Ш) = -(3 \cdot 4 - 12) = 0;$$

$$W = 3Д - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 = 0.$$

Результаты совпадают, как и должно быть.

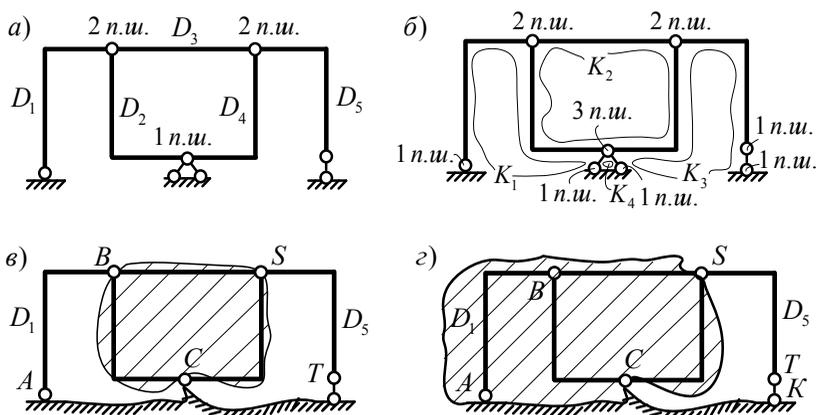


Рис. 1.65

Переходим ко второму этапу кинематического анализа – геометрическому анализу структуры системы (структурный анализ). Отметим, что основание (земля) является целостным объектом, то есть будет тоже диском.

Процедура геометрического анализа:

1) диски  $D_2$ ,  $D_3$  и  $D_4$  соединены тремя шарнирами  $B$ ,  $S$ ,  $C$ , не лежащими на одной прямой, и соответственно образуют неизменяемую систему, то есть диск (первый признак неизменяемости) (рис. 1.65, б и в);

2) шарнир  $C$  присоединен к диску земли двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, образуя вместе с ней неизменяемую систему (второй признак неизменяемости) (рис. 1.65, в);

3) диск  $D_1$ , диск земли и диск  $BSC$  соединены тремя шарнирами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рис. 1.65, з);

4) последний диск (вместе с основанием), диск  $D_5$  и опорный стержень  $TK$  (а это тоже диск) соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами  $S$ ,  $T$  и  $K$ , не лежащими на одной прямой, (рис. 1.65, з) и соответственно образуют в целом неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Таким образом, делаем вывод, что рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

*Пример 2.* Исследуем стержневую систему, представленную на рис. 1.66, а. Определяем число степеней свободы системы по формулам кинематического анализа: для стержневых систем (рис. 1.66, а) и для простых рам (рис. 1.66, б):

$$W = -(3K - Ш) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0;$$

$$W = 3Д - 2Ш - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск  $D_1$  соединяется с остальной системой двумя шарнирами  $A$  и  $K$  (рис. 1.66, в); в каждом из шарниров возникает одна реактивная сила, и таким образом, диск находится под действием двух сил. Известно, что в равновесии такой диск может находиться только в том случае, если указанные силы будут направлены по прямой, соединяющей точки приложения сил, навстречу друг другу (друг от друга); то есть диск  $D_1$  работает по существу как стержень  $AK$ ;

2) аналогично будет работать и диск  $D_4$  (как стержень  $UT$ ) (рис. 1.66, в);

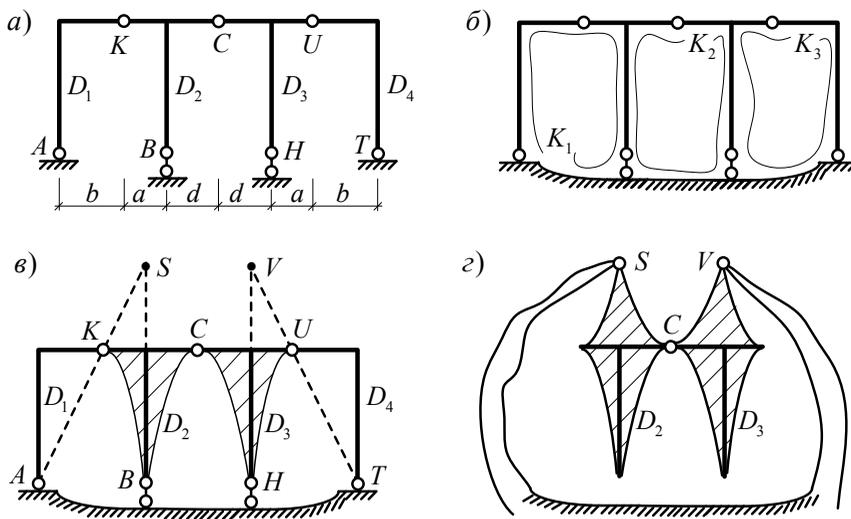


Рис. 1.66

3) получается, что диск  $D_2$  соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем  $AK$  и вертикальным стержнем шарнирно-подвижной опоры  $B$ , которые пересекаются в точке  $S$  (см. рис. 1.66, в); такое соединение этих дисков может быть заменено их соединением фиктивным шарниром в точке  $S$  (рис. 1.66, з);

4) аналогично диск  $D_3$  соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем  $UT$  и вертикальным стержнем шарнирно-подвижной опоры  $H$ , которые пересекаются в точке  $V$  (см. рис. 1.66, в), и такое соединение этих дисков можно заменить их соединением фиктивным шарниром в точке  $V$  (см. рис. 1.66, з);

5) в результате получаем, что три диска –  $D_2$ ,  $D_3$  и диск земли соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами  $S$ ,  $V$  и  $C$ , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и неизменяема.

*Пример 3.* Исследуем стержневую систему из плоских рам, представленную на рис. 1.67, а. Определяем число степеней свободы

системы по формулам кинематического анализа: для стержневых систем (рис. 1.67, б) и для простых рам (рис. 1.67, а):

$$W = -(3K - \text{Ш}) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0;$$

$$W = 3Д - 2\text{Ш} - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 0.$$

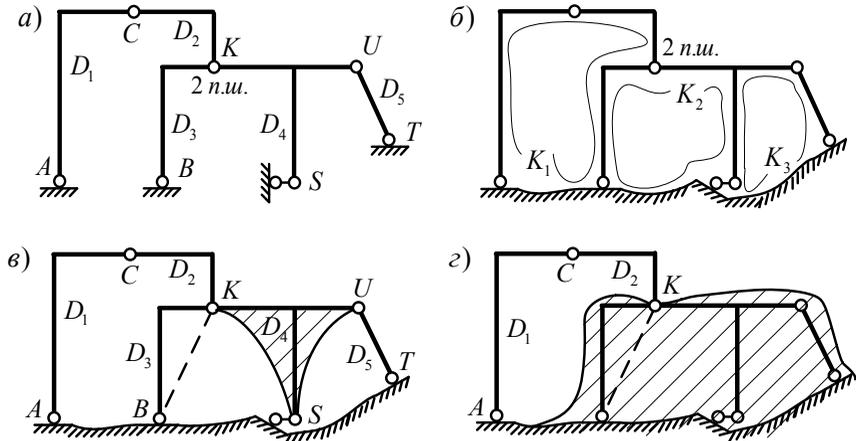


Рис. 1.67

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск  $D_3$  (рис. 1.67, в) соединяется с остальной системой двумя шарнирами  $B$  и  $K$ ; в каждом из шарниров возникает по реактивной силе, и таким образом, диск находится под действием двух сил; в равновесии диск будет находиться только в том случае, если эти силы будут направлены по прямой  $BK$  навстречу друг другу (друг от друга), тогда диск  $D_3$  будет работать как стержень;

2) диск  $D_4$  соединяется с диском земли тремя стержнями –  $BK$ ,  $UT$  и горизонтальным опорным стержнем в точке  $S$ , которые не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке, образуя вместе с основанием (с землей) неизменяемую систему, то есть диск (третий признак неизменяемости) (рис. 1.67, г);

3) последний диск и диски  $D_1$  и  $D_2$  соединены последовательно друг с другом тремя шарнирами  $A$ ,  $C$  и  $K$ , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (см. рис. 1.67, г).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

*Пример 4.* Исследуем стержневую систему, представленную на рис. 1.68, а. Определяем число степеней свободы системы по формулам кинематического анализа: для плоских шарнирно-стержневых систем (см. рис. 1.68, а) и для плоских стержневых систем (рис. 1.68, б):

$$W = 2Y - C - C_{\text{оп}} = 2 \cdot 8 - 12 - 4 = 0;$$

$$W = 3Д - 2Ш - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 16 - 4 = 0.$$

Геометрический анализ структуры системы:

1) рассматриваемая ферма в большей части имеет треугольную структуру, представляющую собой группы трех стержней (трех дисков), соединенных последовательно друг с другом тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемые блоки (согласно первому признаку неизменяемости).

Так, стержни 2–B, B–5 и 2–5 соединяются шарнирами B, 2 и 5, образуя диск; этот диск вместе со стержнями 2–3 и 3–5 соединяется шарнирами 2, 5 и 3, образуя вместе новый диск, который в свою очередь образует неизменяемую систему (диск  $D_1$ ) вместе со стержнями 3–C и 5–C (рис. 1.68, б), которые соединяются шарнирами 3, 5 и C. Аналогично по принципу треугольника соединены друг с другом стержни A–1, A–4 и 1–4 шарнирами A, 1 и 4, образуя диск  $D_2$ ;

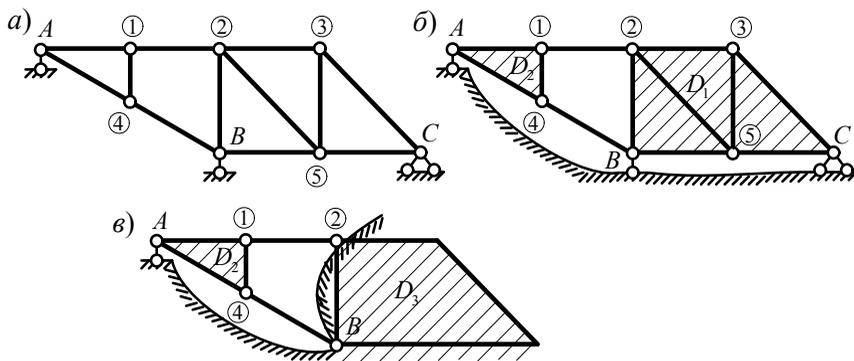


Рис. 1.68

2) диск  $D_1$  соединяется с землей тремя опорными стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя с основанием согласно третьему признаку неизменяемости диск  $D_3$  (рис. 1.68, б, в);

3) теперь диск  $D_2$  и диск  $D_3$  соединены друг с другом тремя стержнями 1–2, 4–В и вертикальным опорным стержнем в узле А, которые пересекаются в одной точке – в узле А, а это значит, что система мгновенно изменяема (третий признак мгновенной изменяемости) (см. рис. 1.68, в).

Вывод: рассматриваемая система мгновенно изменяема и не может применяться в строительных сооружениях.

### Библиографический список

1. Bickford W. B. Mechanics of Solids. Concept and Applications. Boston, MA 02116.

2. Капитальный ремонт жилых зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 207 с.

3. Рабинович, И. М. Основы строительной механики стержневых систем / И. М. Рабинович. – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.

4. Тимошенко, С. П. Курс статики сооружений. Ч. 1. – М.-Л.: Гостройиздат, 1933. – 365 с.

5. Игнатюк, В. И. Строительная механика / В. И. Игнатюк, И. С. Сыровашко. – Брест: БрГТУ, 2017. – 188 с.

6. Рабинович, И. М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями / И. М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1965. – 144 с.

7. Ржаницын, А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.

## Глава 2. СТАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

### 2.1. Краткие сведения из теории

#### 2.1.1. Основные неизвестные и общие уравнения теории сооружений

При действии на сооружение внешних нагрузок и воздействий в сечениях возникают напряжения, компоненты которого можно представить в виде тензора напряжений. При этом элементы сооружения испытывают перемещения и деформации. Тензоры напряжений  $T_H$  и деформаций  $T_d$ , характеризующие напряженное и деформированное состояние в точке конструкции, записываются в таком виде

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$
$$T_d = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Напряжения, деформации и перемещения являются неизвестными теории сооружений. Определение этих неизвестных необходимо для проверки сооружения на прочность, жесткость и устойчивость, либо для подбора сечений, обеспечивающих надежность и долговечность сооружения.

Для определения напряжений, деформаций и перемещений используются **общие уравнения теории сооружений**: статические, геометрические и физические. В случае объемного напряженного состояния при статическом нагружении указанные уравнения имеют вид:

*статические уравнения:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $X, Y, Z$  – проекции объемных сил в единице объема на координатные оси;

*геометрические уравнения:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

*физические уравнения (для изотропного тела):*

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $E$  и  $G$  – модули упругости при растяжении и сдвиге, а  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Для изотропного материала они связаны зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (2.5)$$

В случае плоской задачи теории упругости количество неизвестных и уравнений уменьшается до восьми, и уравнения имеют вид: *статические уравнения*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0; \end{aligned} \quad (2.6)$$

*геометрические уравнения*:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (2.7)$$

*физические уравнения (для изотропного тела)*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \sigma_y], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)\tau_{xy}}{E}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \sigma_x]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### **2.1.2. Формулировки и решения задач теории сооружений в общей постановке**

Основные уравнения могут быть разрешены в перемещениях (решение задачи в форме метода перемещений) или в напряжениях (решение задачи в форме метода сил).

При решении задачи в форме метода перемещений за неизвестные принимаются компоненты вектора перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Компоненты тензора напряжений (2.1) из (2.4) при помощи (2.3) записываются через перемещения, подставляются в (2.2) и задача сводится к определению  $u$ ,  $v$  и  $w$  из трех *уравнений Ляме*:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{X}{G}; \\
\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{Y}{G}; \\
\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{Z}{G},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ .

При решении задачи в форме метода сил за неизвестные принимаются компоненты тензора напряжений (2.1). Компоненты тензора деформаций (2.1), выраженные через компоненты тензора напряжений из (2.4), подставляются в уравнения совместности деформаций:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0; \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0; \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0; \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 0; \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 0; \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

и задача сводится к определению  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  из уравнений Бельтрами-Митчелла:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} &= 0, \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} = 0; \\
\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} &= 0, \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial z} = 0; \\
\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} &= 0, \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где  $S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  – первый инвариант  $T_n$  (2.1).

Рассмотренные выше группы уравнений вместе с условиями на поверхности тела образуют законченную формулировку задачи теории сооружений в **дифференциальной форме**. Однако это не единственная возможная формулировка задачи об отыскании напряженно-деформированного состояния тела. Задачу определения функций  $\sigma$ ,  $\epsilon$  и  $u$ , характеризующих это состояние, можно свести к определенному интегралу того или иного вида от этих функций, называемому функционалом, а сами функции, отражающие действительное состояние тела, найти из условия экстремума этого функционала.

Такой подход позволяет сформулировать задачу теории сооружений в **вариационной формулировке** [1].

### ***2.1.3. Методы, основанные на вариационных принципах***

На основе вариационных принципов в механике деформируемого твердого тела разработаны приближенные методы анализа работы деформируемых тел и систем таких тел.

*Принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа)* может быть сформулирован так: для истинных перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  функционал полной энергии деформированного тела имеет экстремальное (стационарное) значение, т. е. его первая вариация равна нулю:  $\delta \mathcal{E} = 0$ . Таким образом, функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , при которых выполняется условие  $\delta \mathcal{E} = 0$ , соответствуют истинным перемещениям тела для при заданной нагрузке и являются решением задачи в перемещениях [1].

В этом и состоит вариационная формулировка задачи теории сооружений с помощью принципа Лагранжа, которая используется главным образом в двух случаях. В первом на основе уравнения  $\delta \mathcal{E} = 0$

строятся *численные методы решения* этой задачи (метод Ритца, метод конечных элементов и т. п.). Все эти методы относят к классу прямых методов решения, не требующих в явной форме использования дифференциальных уравнений.

Идея метода, предложенного еще в начале века немецким ученым В. Ритцем, состоит в том, чтобы от континуальной формулировки перейти к дискретной, когда функционал  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w)$  заменяется функцией  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), зависящей от конечного числа аргументов  $\alpha_i$ . После этого задача определения экстремума функционала перейдет в стандартную задачу исследования указанной функции дискретного числа аргументов на экстремум. Технически метод Ритца может быть реализован в одной из форм метода конечных элементов (МКЭ). Преимущества последнего состоят в том, что окончательные разрешающие уравнения Ритца удается составлять, минуя операцию явного получения выражения полной энергии системы и его дифференцирования.

В отличие от принципа Лагранжа, в котором состояние деформированного тела характеризуется функциями перемещений, в *принципе Кастильяно* (более раннее название – принцип наименьшей работы) состояние тела характеризуется функциями напряжений, которые заведомо удовлетворяют условиям равновесия тела при данной внешней нагрузке и заданным перемещениям на поверхности тела [2]. Принцип Кастильяно из всех систем статически возможных напряжений определяет такие, которые обеспечивают не только равновесие, но и совместность деформаций тела и, таким образом, являются искомым единственным решением задачи теории сооружений.

Согласно этому принципу истинные напряжения сообщают дополнительной энергии тела стационарное значение. В частном случае линейно-упругого тела и отсутствия заданных смещений принцип Кастильяно принимает вид  $\delta U = 0$ . Непосредственное использование принципа позволяет получать уравнения совместности деформаций для статически неопределимых систем без обращения к геометрической трактовке этих условий. Решение, таким образом, сводится к решению задачи в обобщенных усилиях (реакциях).

Второй характерный случай применения вариационного подхода – это *получение дифференциальных уравнений и граничных условий*

рассматриваемой задачи как уравнений Эйлера соответствующего функционала. Такой путь оказывается оправданным для тел сложной формы и структуры (например, многослойные оболочки и др.), а также при переходе от одной системы координат к другой (от декартовой системы к полярной, криволинейной и др.).

В качестве метода приближенного решения краевых задач на практике также используется **метод конечных разностей (МКР)**, который особенно удобен при решении плоских задач и в задачах изгиба пластин. Он состоит в следующем. Вся область рассматриваемого тела покрывается сеткой линий, точки пересечения которых называют узлами. За неизвестные принимаются значения разыскиваемых функций в узлах сетки. Для этого строятся приближенные формулы для производных от функций, выраженные через узловые ординаты этих функций (конечно-разностные операторы производных). Эти операторы подставляются в дифференциальное уравнение, и требуется, чтобы дифференциальное уравнение выполнялось в каждом узле сетки. Граничные условия данной краевой задачи также формулируются с помощью конечно-разностных операторов. В итоге это приводит к алгебраической системе уравнений относительно узловых ординат разыскиваемых функций, решение которых и дает числовое поле определяемых в теле функций. Для линейных дифференциальных уравнений конечно-разностные уравнения образуют систему линейных алгебраических уравнений.

#### ***2.1.4. Методы расчета стержневых систем***

Для стержневых систем основные уравнения (2.2)–(2.4) значительно упрощаются. Для изгибаемой балки в силу общепринятых гипотез изгиба [3] уравнения принимают форму:

*статические*

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z); \quad (2.12)$$

*геометрические*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dz^2}; \quad (2.13)$$

*физические*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (2.14)$$

Теория расчета *стержневых систем* в линейной постановке разработана достаточно полно. На практике используются классические методы, позволяющие получить решение в первом (линейном) приближении с достаточной, в целом ряде случаев, для инженерных расчетов, точностью.

Проведение кинематического анализа (глава 1) позволяет выяснить принадлежность расчетной схемы рассматриваемой стержневой системы к статически определимым или статически неопределимым системам.

В **статически определимых** системах расчет по определению их НДС рационально проводить в следующем порядке: определяются усилия (напряжения), для поиска которых достаточно использовать только статические уравнения; затем из физических уравнений находят деформации, а из геометрических – перемещения.

Для определения усилий в статически определимых стержневых системах, как правило, применяют:

– статические методы, которые подразумевают составление статических уравнений в целом для системы или для отдельных ее частей (метод сечений);

– кинематический метод, подразумевает запись уравнения возможных работ для механизма, полученного из заданной системы путем отбрасывания связи, соответствующей рассматриваемому усилию.

В **статически неопределимых** системах определить усилия из решения только статических уравнений без привлечения физических или геометрических не удастся: внутренние усилия и перемещения зависят не только от внешней нагрузки, но и от геометрических характеристик и жесткостей. Поэтому расчет по определению параметров НДС статически неопределимой системы на практике, как правило, выполняется следующим образом:

- а) предварительно назначают материал и размеры элементов;
- б) находят внутренние усилия и перемещения;

в) проверяют прочность и жесткость системы;

г) при необходимости расчет повторяют, уточнив размеры сечений.

Для определения усилий в статически неопределимых стержневых системах в основном применяют метод сил, метод перемещений, или смешанный метод.

Идея о сведении заданной статически неопределимой конструкции к статически определимой лежит в основе **метода сил**: заданная статически неопределимая система освобождается от лишних связей, превращаясь в статически определимую; действие лишних связей заменяется соответствующими реакциями – неизвестными метода сил. Величины этих реакций подбираются так, чтобы перемещения точек новой системы были такими же, как и перемещения в заданной системе. Для этого составляются уравнения совместности деформаций, которые в развернутой форме записи представляют собой систему линейных канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Следует отметить, что применение вариационного принципа Кастильяно к расчету линейно-упругих стержневых систем позволяет получить точно такую же форму уравнений. Метод сил удобно применять для статически неопределимых систем, имеющих относительно небольшую степень статической неопределимости.

В **методе перемещений** в качестве неизвестных принимаются характерные перемещения системы. Например, перемещения ее узлов. Заданная система является кинематически неопределимой и сопоставляется с основной кинематически определимой системой, полученной из заданной путем добавления связей, ограничивающих неизвестные перемещения.

Условия эквивалентности заданной и основной систем записываются в виде канонических уравнений метода перемещений, каждое из которых отражает равенство нулю реакции во введенной дополнительной связи:

$$\begin{cases} r_{11}X_1 + r_{12}X_2 + \dots + r_{1n}X_n + R_{1F} = 0; \\ r_{21}X_1 + r_{22}X_2 + \dots + r_{2n}X_n + R_{2F} = 0; \\ \dots \\ r_{n1}X_1 + r_{n2}X_2 + \dots + r_{nn}X_n + R_{nF} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Эта система уравнений может быть получена также согласно вариационному принципу Лагранжа, применительно к линейно-упругим стержневым системам.

По найденным значениям перемещений несложно установить деформированное состояние конструкции и далее найти внутренние усилия. В настоящее время метод перемещений широко распространен в расчетной практике, особенно для сложных систем с большим количеством связей, обладающих малой подвижностью узлов.

Метод расчета статически неопределимых систем, в котором за неизвестные одновременно принимаются и перемещения и усилия, получил название **смешанного метода**. В одной части конструкции основная система смешанного метода образуется устранением связей, как в методе сил, в другой части – введением связей, как в методе перемещений.

При выборе рационального метода расчета статически неопределимых стержневых систем предпочтение отдают методу с наименьшим количеством неизвестных.

Для расчета стержневых систем на неподвижную нагрузку также может быть использована теория линий влияния.

### ***2.1.5. Расчет конструкций на упругом основании***

Отдельный класс задач теории сооружений представляют собой задачи о расчете конструкций на упругом основании, которые являются статически неопределимыми задачами с бесчисленным множеством неизвестных. Решение таких задач различной степени точности может осуществляться в рассматриваемых выше постановках и формах при использовании численных, аналитических и численно-аналитических методов [4].

Однако, для инженерных расчетов конструкций на упругом основании, порой достаточно найти распределение давлений по обла-

сти контакта, и, таким образом, сформулировать граничные условия в напряжениях на поверхности конструкции, а далее заняться решением более простой задачи по определению ее напряженно-деформированного состояния. В таких случаях могут использоваться методики расчета балок и плит на упругом основании, основанные, например, на гипотезе Винклера.

## 2.2. Статически определимые системы

**Задача 2.1.** На рис. 2.1 изображена зависимость  $\sigma - \varepsilon$  для бетона при сжатии. Определить физический смысл  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  и  $\int_0^{\varepsilon_0} \sigma d\varepsilon$ .

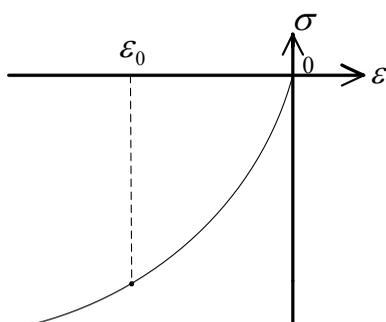


Рис. 2.1

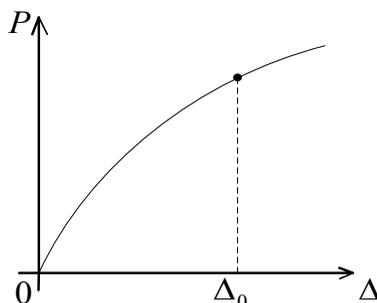


Рис. 2.2

**Задача 2.2.** На рис. 2.2 изображена зависимость осадки  $\Delta$  сваи от вертикальной нагрузки  $P$  на нее. Чему соответствует  $\frac{dP}{d\Delta}$  и

$$\int_0^{\Delta_0} P d\Delta?$$

**Задача 2.3.** На рис. 2.3 изображена зависимость момент–кривизна для сечения ж/б балки. Определить, чему соответствует

$$\frac{dM}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} \text{ и } \int_0^{\frac{1}{\rho_0}} M\left(\frac{1}{\rho}\right) d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

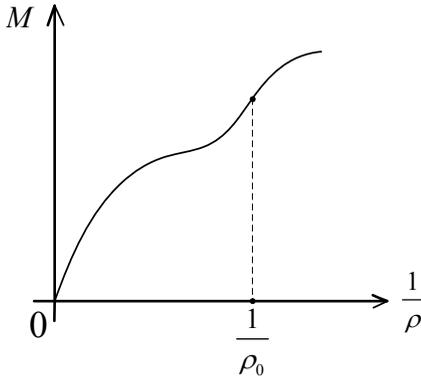


Рис. 2.3

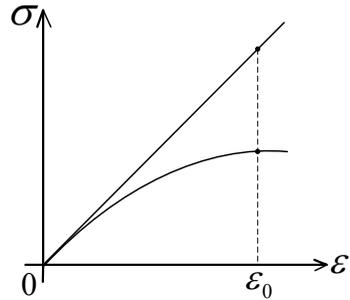


Рис. 2.4

**Задача 2.4.** На рис. 2.4 приведены зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  для линейно упругого и нелинейно упругого материалов. Считая, что деформации в стержне фермы из этого материала одинаковы и равны  $\varepsilon_0$ , определить, в каком случае будет больше усилия, в стержне из линейно упругого материала или нелинейно упругого?

**Задача 2.5.** При испытаниях статической нагрузкой горизонтально нагруженной металлической сваи измерялись линейные деформации  $\varepsilon_z$  в крайних волокнах сечения сваи. Также измерялись линейное и угловое перемещения вершины сваи (рис. 2.5). Как, зная размеры сваи, определить распределение реактивных давлений и построить эпюру горизонтальных перемещений по длине сваи? Считать, что материал сваи работает в упругой стадии.

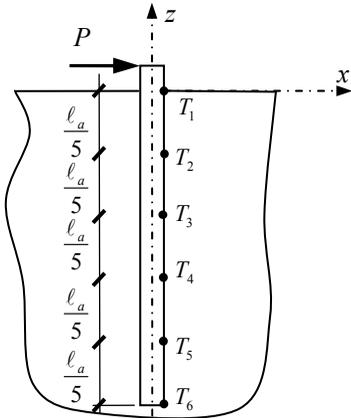


Рис. 2.5

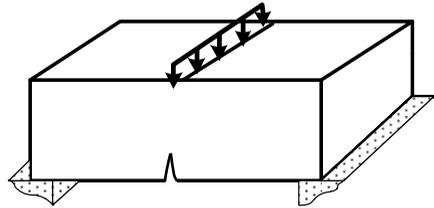


Рис. 2.6

**Задача 2.6.** При испытаниях обыкновенного глиняного кирпича на изгиб, не допускается наличие в образцах вертикальных трещин (рис. 2.6). Объясните почему?

**Задача 2.7.** На рис. 2.7 изображена балка и эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки, действующей на балку. Определить эту нагрузку.

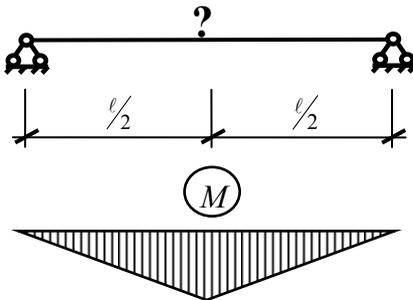


Рис. 2.7

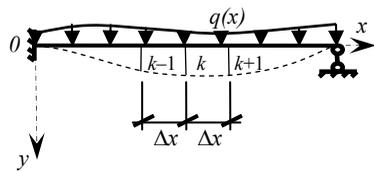


Рис. 2.8

**Задача 2.8.** Инженеру необходимо определить реальный изгибающий момент в сечении  $k$  балки (рис. 2.8). Он измерил сечения

балки, определил материал и нашел прогибы в трех точках. Каковы его дальнейшие действия?

**Задача 2.9.** Ширина ручья 4 м. Юноше весом 90 кг нужно перейти ручей к девушке весом 45 кг на противоположном берегу ручья. Как это сделать, если у каждого есть доска длиной 3,1 м (рис. 2.9)?

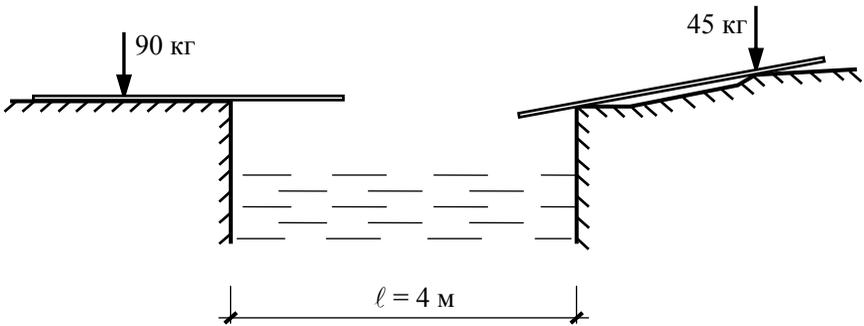


Рис. 2.9

**Задача 2.10.** При испытаниях металлической балки (с поперечным сечением I50) получена эпюра прогибов (рис. 2.10).

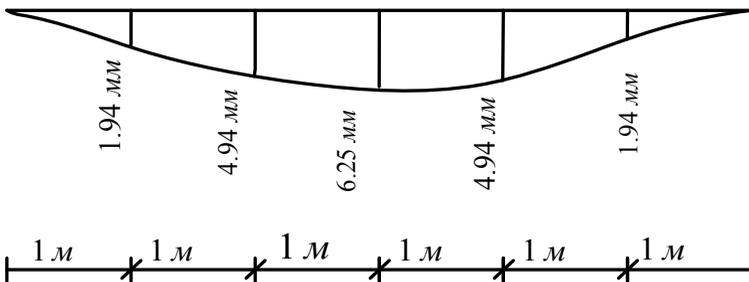


Рис. 2.10

Построить по этим данным эпюры  $M$  и  $Q$  в балке, определить внешнюю нагрузку, действующую на балку. Чему равен изгибающий момент в точке перегиба эпюры прогибов в балке?

**Задача 2.11.** Рассчитать нелинейно упругий растянутый стержень методом Ритца (рис. 2.11).

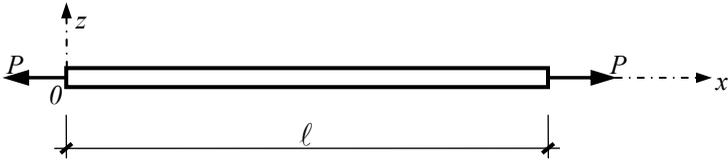


Рис. 2.11

**Задача 2.12.** Определить наиболее невыгодное загрузку треугольной линии влияния треугольной нагрузкой (рис. 2.12).

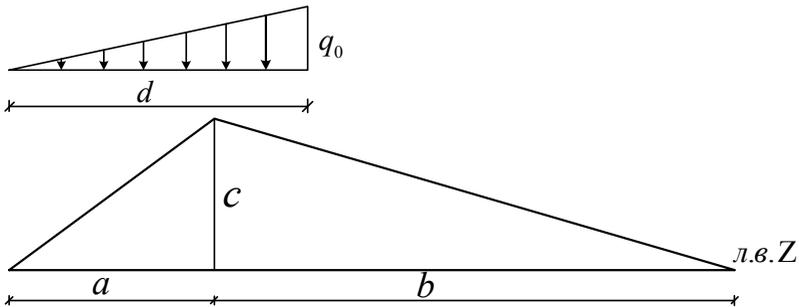


Рис. 2.12

**Задача 2.13.** При взвешивании тракторного прицепа с силосом, тракторист расположил трактор и прицеп на весы следующим образом (рис. 2.13). В чем заключается ошибка тракториста?

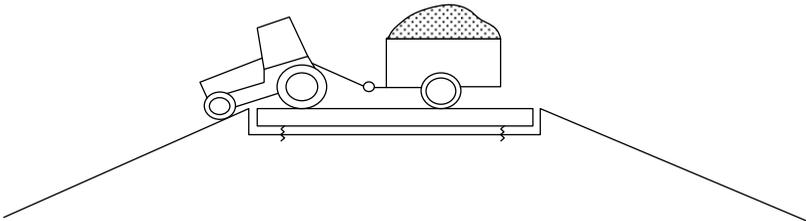


Рис. 2.13

**Задача 2.14.** При складировании силы преднапряжения изогнули ж/б балку постоянной жесткости с максимальным выгибом  $f$ . Определить момент преднапряжения, если длина балки  $l$  (рис. 2.14).

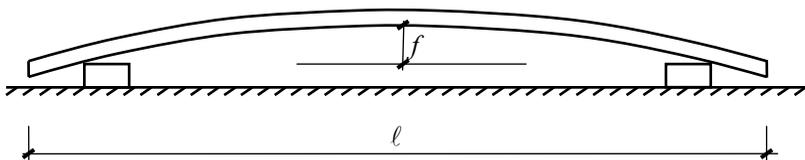


Рис. 2.14

**Задача 2.15.** В башне на металлических балках эксплуатировалась прямоугольная емкость с водой.

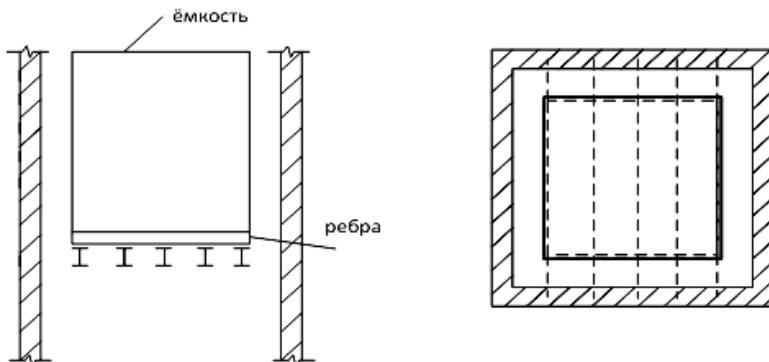


Рис. 2.15

Передача нагрузки от емкости к балкам осуществлялась через металлические ребра (рис. 2.15). Из-за проявившейся коррозии емкость заменили другой, новой без ребер. После заполнения ее водой балки обрушились. Произвести анализ причины разрушения.

**Задача 2.16.** У мастера на стройке кирпичного дома не хватило подмостей. Он решил использовать в качестве подмостей ж/б многопустотные плиты (рис. 2.16). При установке второго поддона с кирпичом на лоджии произошло обрушение плиты с человеческими жертвами. Объясните причину.

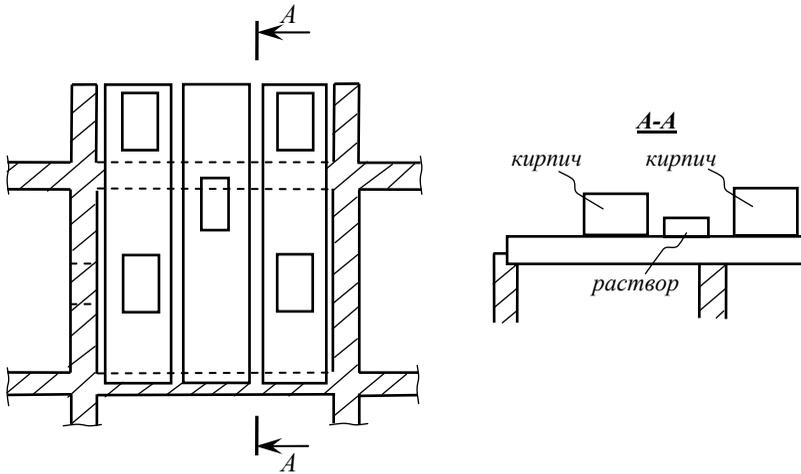


Рис. 2.16

**Задача 2.17.** Предельное выдерживающее усилие  $N$ , приложенное к отрезку арматуры периодического профиля, находящегося в бетоне, увеличилось вчетверо. Во сколько раз нужно увеличить длину анкеровки отрезка арматуры, если ее диаметр увеличили в 1,5 раза (рис. 2.17).

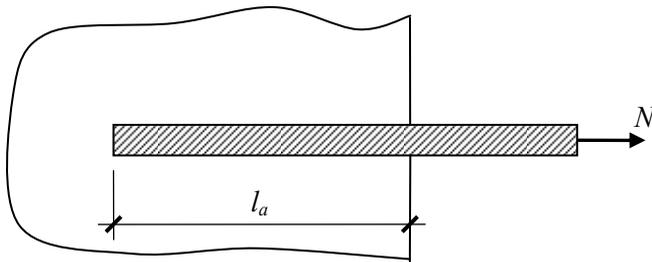


Рис. 2.17

**Задача 2.18.** При расчете свай на действие момента была принята следующая эпюра реактивных давлений при работе грунта в предельном состоянии (рис. 2.18). Показать сечение свай с наибольшей поперечной силой.

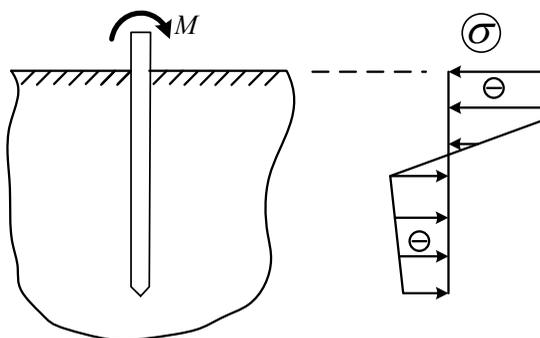


Рис. 2.18

**Задача 2.19.** Построить линию влияния опорной реакции  $V_A$  (рис. 2.19) при движении единичного груза по участку  $a - б$  рамы.

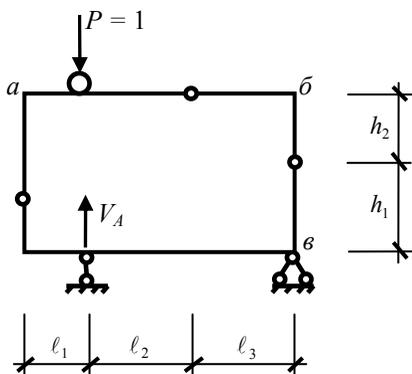


Рис. 2.19

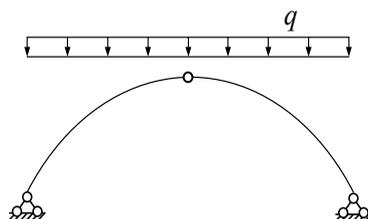


Рис. 2.20

**Задача 2.20.** Необходимо очистить от снега крышу, несущими элементами которой являются трехшарнирные арки параболического очертания (рис. 2.20). Как правильно убрать снег?

**Задача 2.21.** Определить направление смещения точки  $A$  (рис. 2.21) [5].

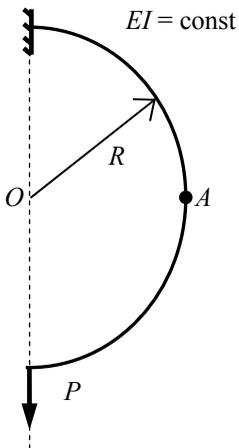


Рис. 2.21

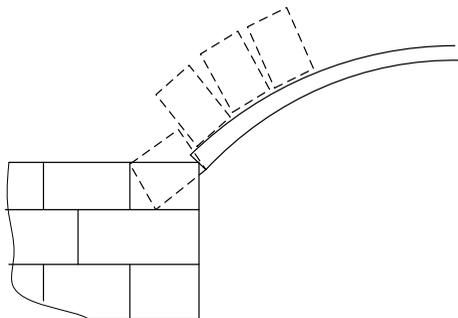


Рис. 2.22

**Задача 2.22.** При кладке арочной перемычки (рис. 2.22), изогнутая доска для опирания кирпичей (часть кружала) приподняла крайний кирпич простенка. Объяснить явление.

**Задача 2.23.** Проверить правильность формирования кирпичных устоев сводов (рис. 2.23).

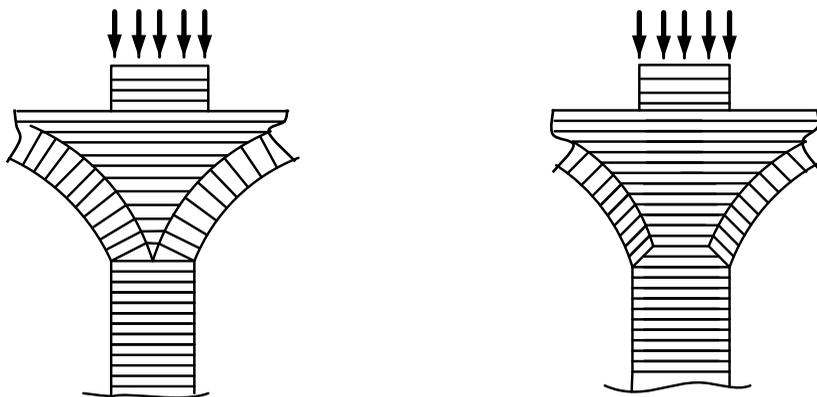


Рис. 2.23

**Задача 2.24.** Даны две одинаковые фермы (рис. 2.24). Где и на сколько больше вертикальное перемещение точки  $K$ ?

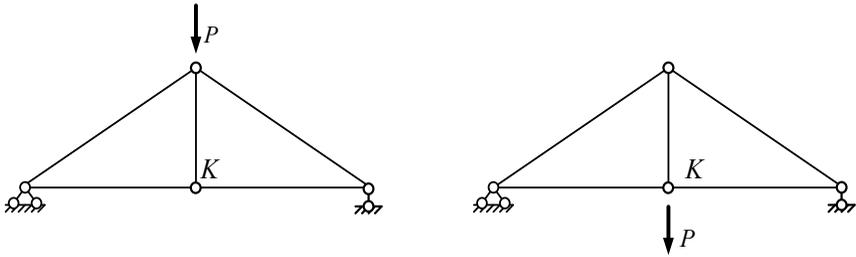


Рис. 2.24

**Задача 2.25.** Используя принцип Кастильяно, определить усилия в стержнях фермы (рис. 2.25), считая их продольную жесткость одинаковой.

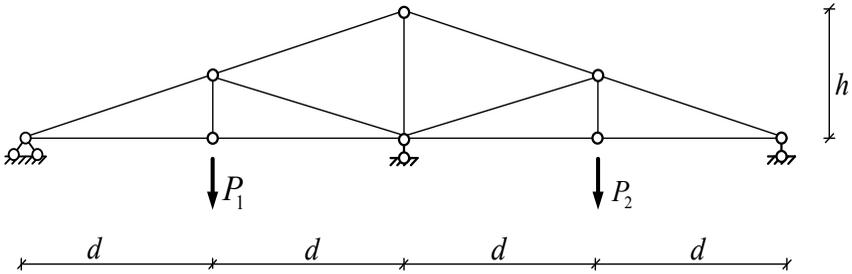


Рис. 2.25

**Задача 2.26.** Доказать, что фермочка 1–2–3 является шпренгелем, т. е. работает только на местную нагрузку (рис. 2.26).

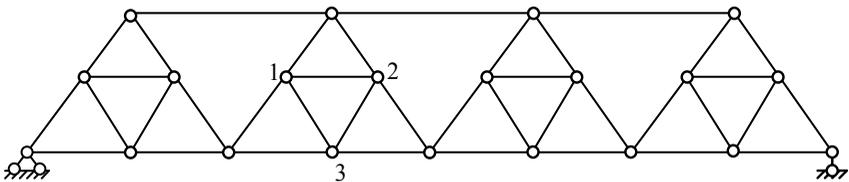


Рис. 2.26

**Задача 2.27.** При подъеме тяжелой балки весом 40 т обычно используют траверсу (рис. 2.27, а). Однако ввиду отсутствия траверсы, решили поднять балку стропами (рис. 2.27, б). С позиции строительной механики оценить все инженерные последствия принятого решения.

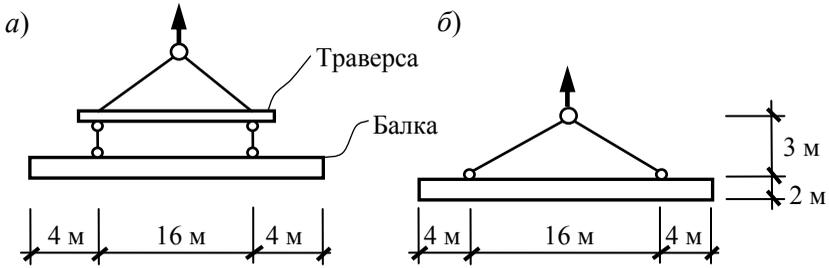


Рис. 2.27

**Задача 2.28.** Определить усилие в стержне 1–2 аналитически и по линии влияния (рис. 2.28).

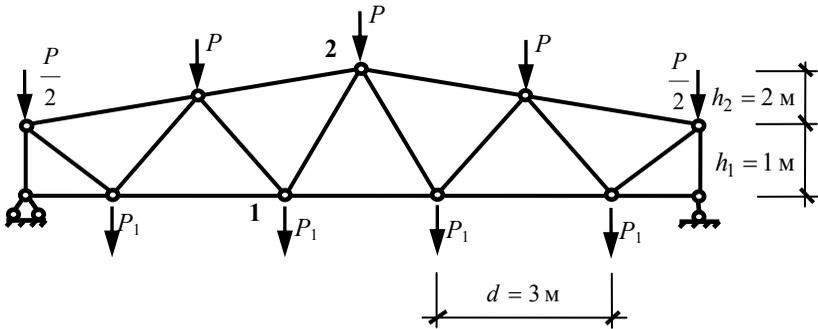


Рис. 2.28

**Задача 2.29.** При реконструкции начальник цеха решил подвесить на нижний пояс фермы блок для подъема небольших грузов (рис. 2.29). Как ему это сделать?

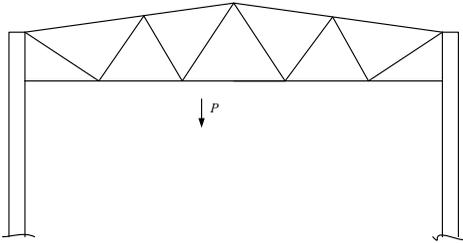


Рис. 2.29

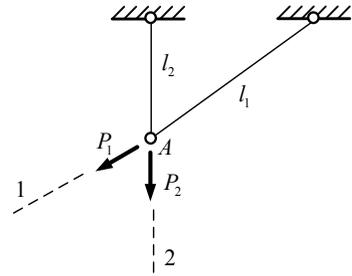


Рис. 2.30

**Задача 2.30.** Двухстержневая ферма нагружена одновременно силами  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 2.30). Найти полное перемещение точки  $A$ , если известны ее перемещения по направлениям сил  $P_1$  и  $P_2$  [5]?

### 2.3. Статически неопределимые системы

**Задача 2.31.** Без вычислений определить изгибающий момент на средней опоре двухпролетной балки (рис. 2.31).

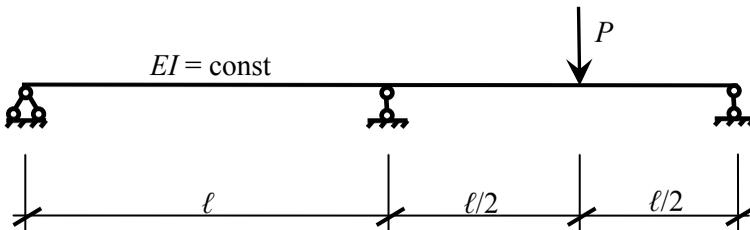


Рис. 2.31

**Задача 2.32.** Расчетная модель моста представляет трехпролетную неразрезную балку с одной осью симметрии. По оси симметрии моста с течением времени образовалась сквозная трещина с коррозией преднапряженной арматуры на 80 %. Считая, что наличие трещины эквивалентно образованию цилиндрического шарнира (рис. 2.32), определить прогиб в месте расположения шарнира и построить эпюры внутренних усилий в балке.

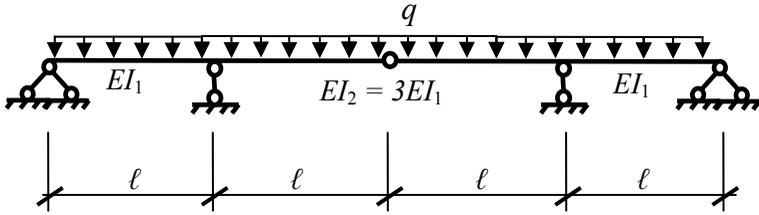


Рис. 2.32

**Задача 2.33.** Весьма длинная балка постоянной жесткости, состоящая из большого числа равных пролетов, загружена на левом конце моментом  $M$  (рис. 2.33). Определить изгибающий момент и угол поворота на  $i$ -й опоре [5].

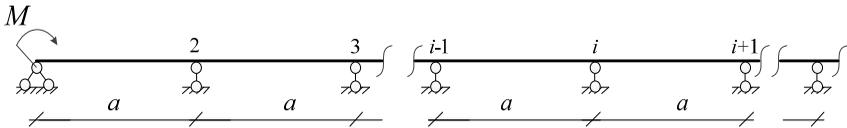


Рис. 2.33

**Задача 2.34.** Рациональным способом построить эпюру изгибающих моментов в балке (рис. 2.34).

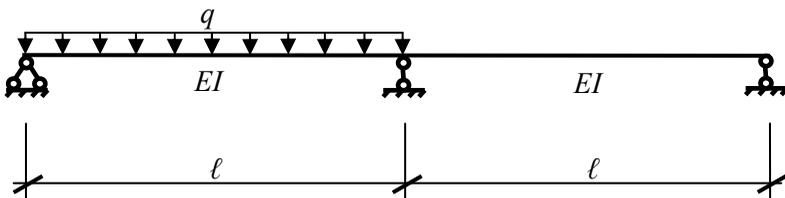


Рис. 2.34

**Задача 2.35.** Построить эпюру моментов в шарнирно опертой балке (рис. 2.35).

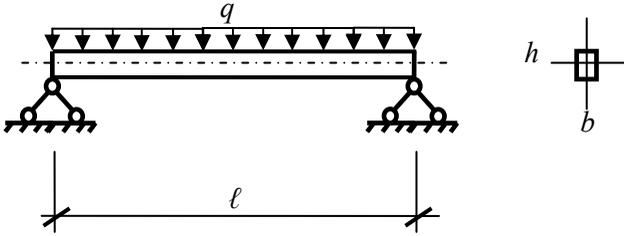


Рис. 2.35

**Задача 2.36.** Инженеру необходимо уменьшить изгибающий момент в защемлении (рис. 2.36, *a*). Он предложил два варианта (рис. 2.36, *б*, *в*). Разобрать достоинства и недостатки каждого варианта уменьшения изгибающего момента в защемлении.

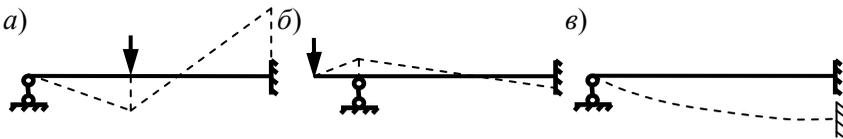


Рис. 2.36

**Задача 2.37.** Используя принцип наименьшей работы, найти изгибающий момент в защемлении при его повороте на  $\varphi = 1$  (рис. 2.37).

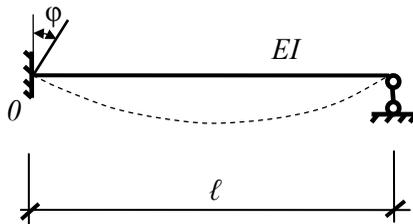


Рис. 2.37

**Задача 2.38.** Прорабу необходимо перекрыть два пролета, используя разрезную схему (рис. 2.38, *a*). Из-за отсутствия двух балок длиной  $\ell$ , он решил использовать одну балку длиной  $2\ell$ , сделав схе-

му неразрезной (рис. 2.38, б). После нагружения балки центральная опора разрушилась. Объясните, почему?

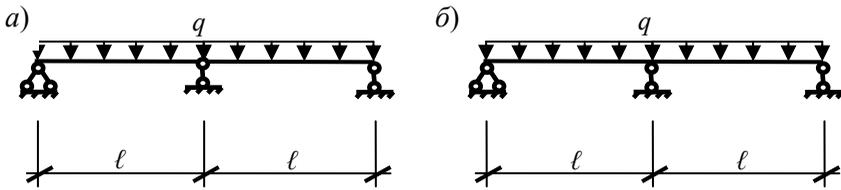


Рис. 2.38

**Задача 2.39.** Затяжка двухшарнирной арочной фермы футбольного манежа выполнена из арматурных стержней диаметром 40 мм и имеет длину 100 м (рис. 2.39). Для установления правильной величины предварительного натяжения затяжки необходимо знать ее длину с учетом прогибов от собственного веса. Дать оценку величины удлинения затяжки от собственного веса.

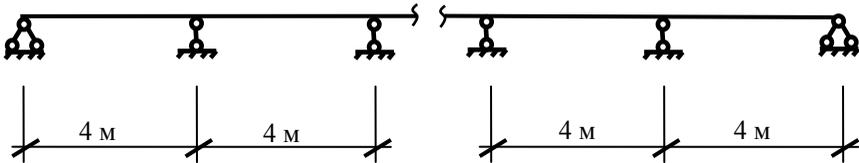


Рис. 2.39

**Задача 2.40.** Определить положение подвижной сосредоточенной силы  $P$ , вызывающей максимальную реакцию опоры  $B$  (рис. 2.40).

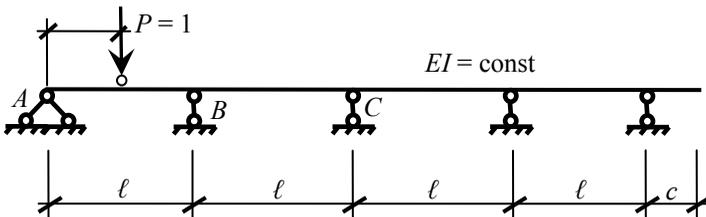


Рис. 2.40

**Задача 2.41.** Определить опорную реакцию шарнирно-опертой с одного конца балки на основании Винклера под действием сосредоточенных сил (рис. 2.41)\*.

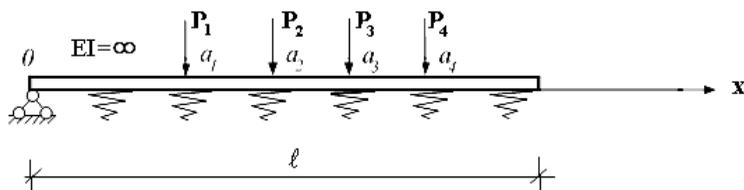


Рис. 2.41

**Задача 2.42.** Построить участок линии влияния опорной реакции  $B$  (рис. 2.42) при движении единичного груза по консоли.

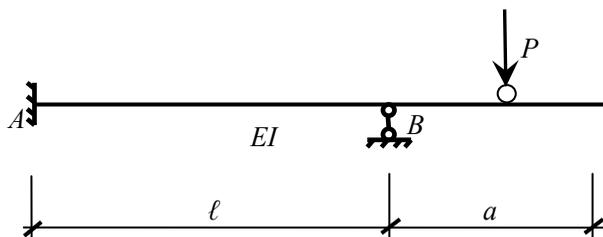


Рис. 2.42

**Задача 2.43.** Определить наиболее нагруженные сваи в кусте, объединенных общим ростверком и нагруженных горизонтальной силой (рис. 2.43). Грунт считать однородным изотропным полупространством.

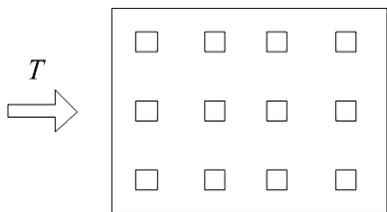


Рис. 2.43

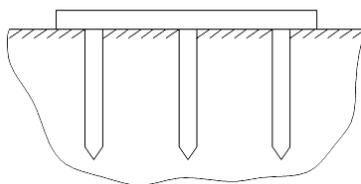


Рис. 2.44

\* Практическим аналогом этой задачи является переходная балка при строительстве мостов.

**Задача 2.44.** Жесткая прямоугольная фундаментная плита размерами в плане  $L \times H$  лежит на свайном основании и одновременно на основании Винклера с коэффициентом постели  $K$  (рис. 2.44). Дать оценку вертикальной податливости фундаментной плиты.

**Задача 2.45.** Найти значение угла  $\varphi$  (рис. 2.45), при котором взаимное перемещение точек  $B$  и  $C$  будет наименьшим [5].

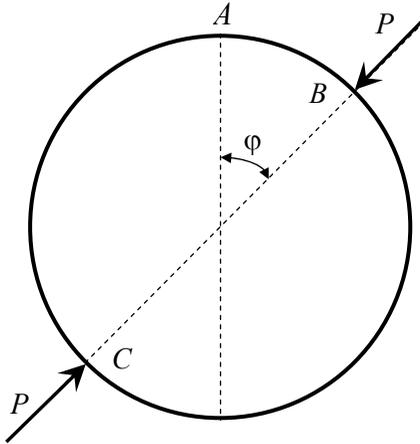


Рис. 2.45

**Задача 2.46.** Построить эпюры усилий в бесшарнирной арке, очерченной по квадратной параболе, под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 2.46).

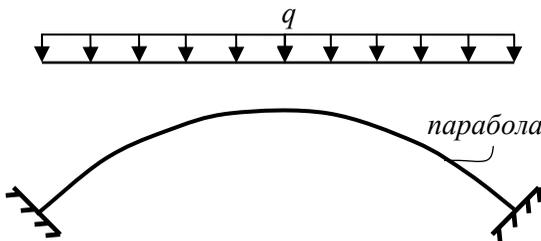


Рис. 2.46

**Задача 2.47.** Определить усилие в затяжке  $AB$  (рис. 2.47, а, б).

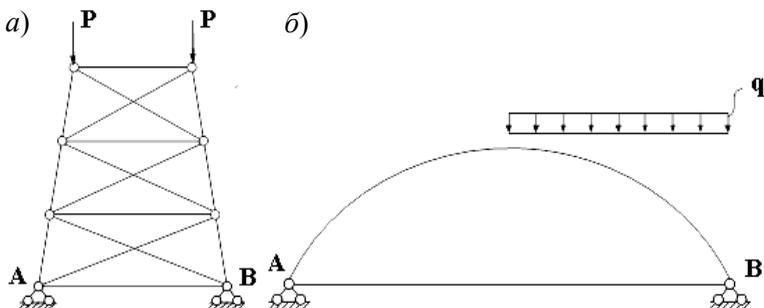


Рис. 2.47

**Задача 2.48.** Доказать, что усилия в стержнях 1–4, 2–3 статически неопределимой фермы равны 0 (рис. 2.48).

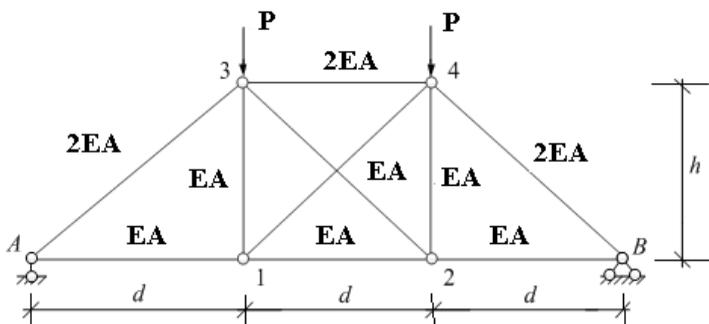


Рис. 2.48

**Задача 2.49.** В какой стойке возникает максимальный опорный момент (рис. 2.49) от действия температурного перепада в  $18^\circ\text{C}$ ?

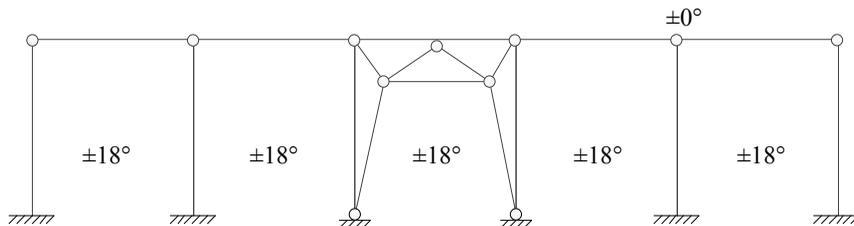


Рис. 2.49

**Задача 2.50.** В безраскосной железобетонной ферме стойки рамы фонаря опирались между узлами 1–2 и 2–3 верхнего пояса (рис. 2.50). В процессе эксплуатации в этих стержнях появились трещины в местах опирания стоек рамы фонаря. С целью недопущения дальнейшего раскрытия трещин были поставлены раскосы из металлических уголков (на рисунке показаны пунктирной линией). Как изменились усилия в стержнях 1–2 и 2–3?

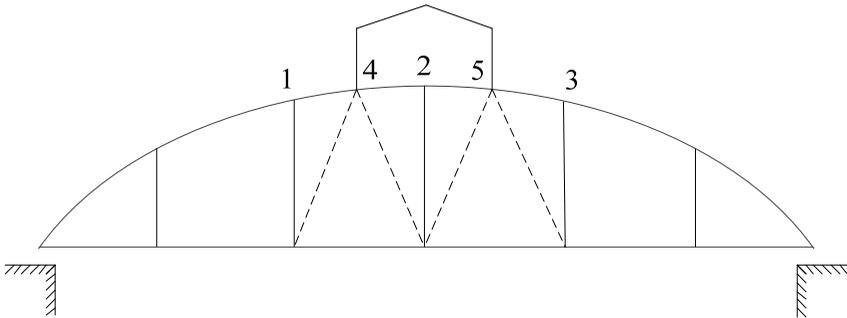


Рис. 2.50

**Задача 2.51.** Три одинаковые резиновые тяги (рис. 2.51, а) нагружены силой  $P$  [5]. Определить перемещение узловой точки в зависимости от силы  $P$ , если диаграмма растяжения каждой тяги задана в виде кривой, изображенной на рис. 2.51, б.

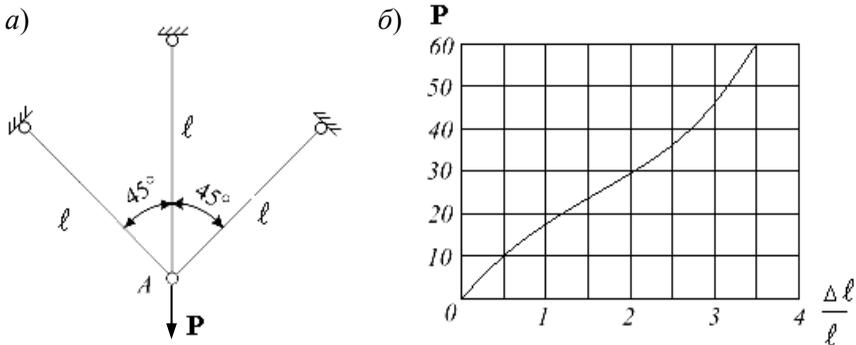


Рис. 2.51

**Задача 2.52.** Построить эпюру изгибающих моментов в раме (рис. 2.52) наиболее простым путем.

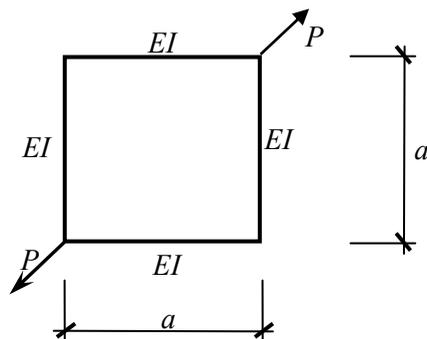


Рис. 2.52

**Задача 2.53.** Для усиления балконов применили стойки и подкосы (рис. 2.53). Дать заключение о последствиях этого решения.

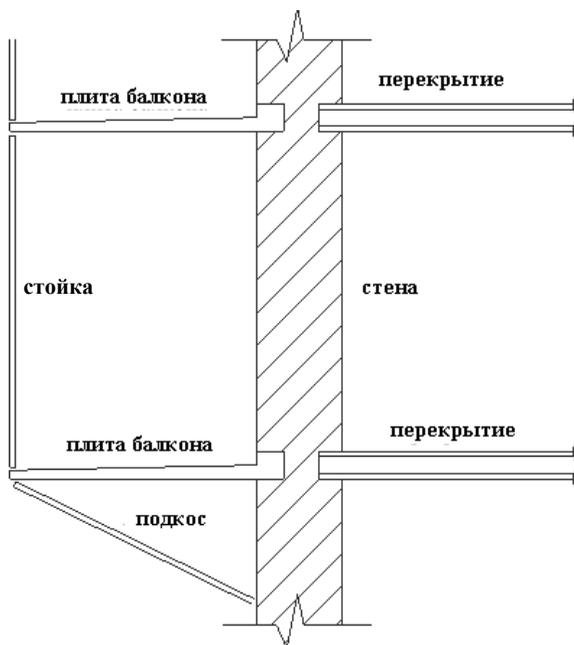


Рис. 2.53

**Задача 2.54.** Даны две одинаковые рамы под действием горизонтальной нагрузки (рис. 2.54, а и б). В каком случае горизонтальное перемещение узла  $k$  будет больше?

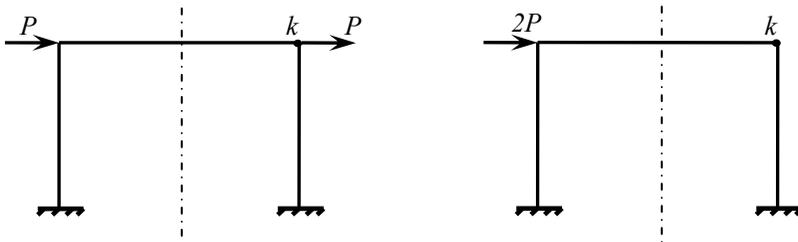


Рис. 2.54

**Задача 2.55.** Будет ли в сечении  $I-I$  рамы (рис. 2.55) возникать изгибающий момент, если использовать:

- традиционные способы расчета рам;
- деформационный расчет рам?

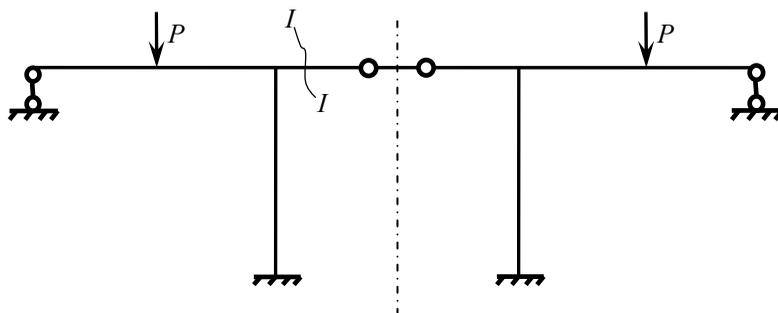


Рис. 2.55

**Задача 2.56.** Расчет рамы на действие температуры выполнили при двух высотах стоек  $2h$  и  $h$  (рис. 2.56, а, б). Оценить примерно, во сколько раз изменились  $M$  и  $N$  при втором расчете по сравнению с первым?

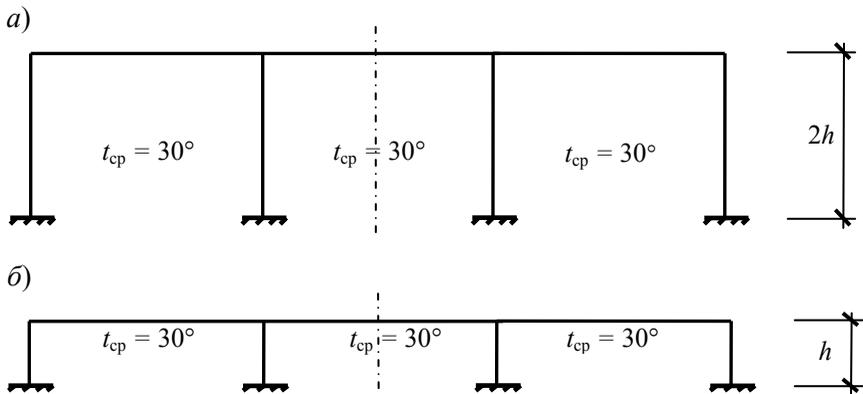


Рис. 2.56

**Задача 2.57.** Определить усилие в опорной стойке рамы (рис. 2.57) при условии, что ригель I30 работает в упругой стадии, а стойка П18 – в нелинейно-упругой по закону  $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} \varepsilon^3$ .

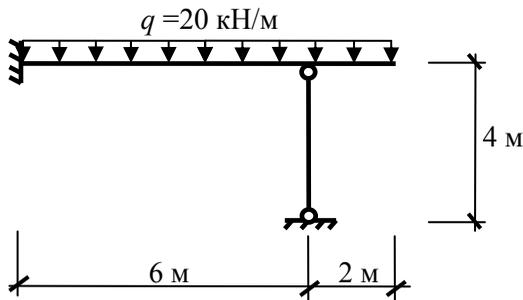


Рис. 2.57

**Задача 2.58.** Рама, показанная на рис. 2.58, нагружена силой  $P$ . Растянут или сжат стержень  $AB$ ? [5]

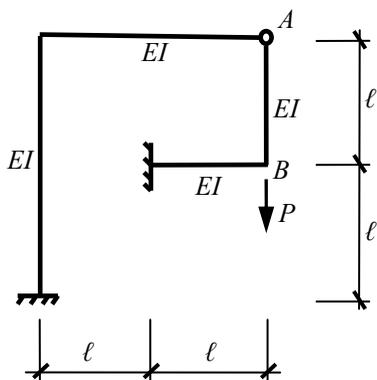


Рис. 2.58

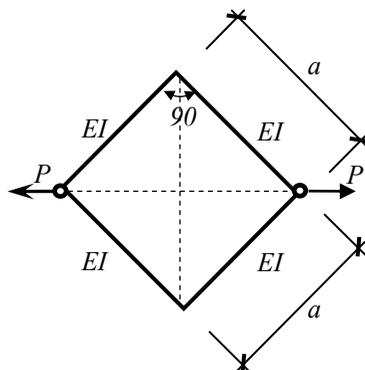


Рис. 2.59

**Задача 2.59.** Построить эпюру изгибающих моментов в раме (рис. 2.59) рациональным (наиболее простым) способом.

**Задача 2.60.** Для расчета статически неопределимой рамы (рис. 2.60, а) студент расчленил ее на две части (рис. 2.60, б). Рассчитал сначала часть I методом сил, затем часть II на действие сил  $H_1$  и  $V_1$ . Укажите ошибки студента.

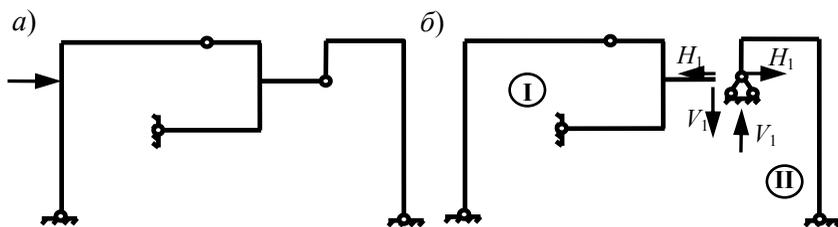


Рис. 2.60

**Задача 2.61.** Выяснить, может ли эпюра моментов в неразрезной балке на протяжении двух смежных пролетов иметь один и тот же знак.

**Задача 2.62.** На рис. 2.62 изображена схема складирования железобетонных лотков [6]. Пояснить, почему рекомендована именно такая схема складирования.

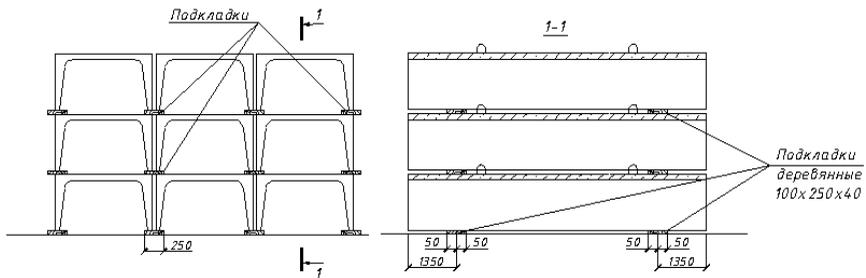


Рис. 2.62

**Задача 2.63.** Построить эпюру изгибающих моментов в неразрезной балке (рис. 2.63).

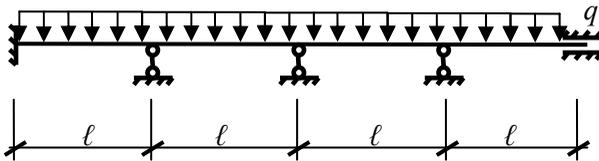


Рис. 2.63

**Задача 2.64.** Показать положение трещины в бетонном стержне прямоугольного поперечного сечения при действии на него крутящего момента (рис. 2.64).

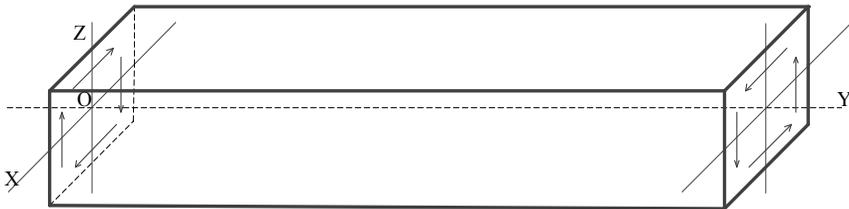


Рис. 2.64

**Задача 2.65.** При каком соотношении  $\frac{h}{\ell}$  участок местного бетонирования не нуждается в армировании (рис. 2.65).

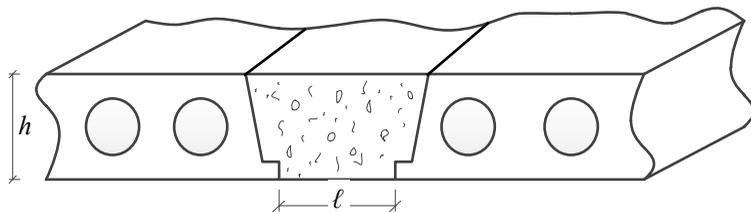


Рис. 2.65

**Задача 2.66.** Проверить правильность расположения арматуры в железобетонном лестничном марше (рис. 2.66, а и б).

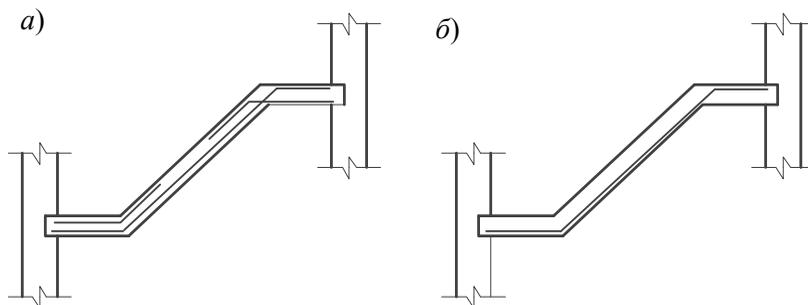


Рис. 2.66

**Задача 2.67.** При монолитном бетонировании железобетонной плиты, находящейся в условиях плоской деформации (рис. 2.67, а), возникла необходимость сделать перерыв. Где и почему можно выполнить рабочий шов на время перерыва? Дать ответ на этот вопрос и для случая монолитного бетонирования неразрезной железобетонной балки (рис. 2.67, б).

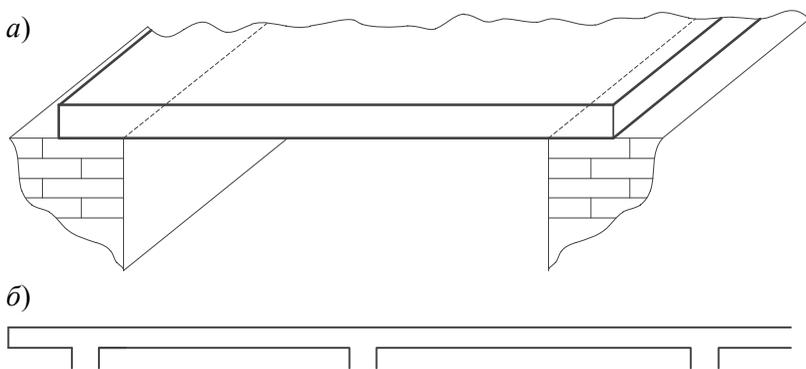


Рис. 2.67

**Задача 2.68.** Почему для определения механических свойств стали поврежденных конструкций рекомендуется вырезать заготовки из поврежденных элементов в определенных местах (рис. 2.68, а, б)?

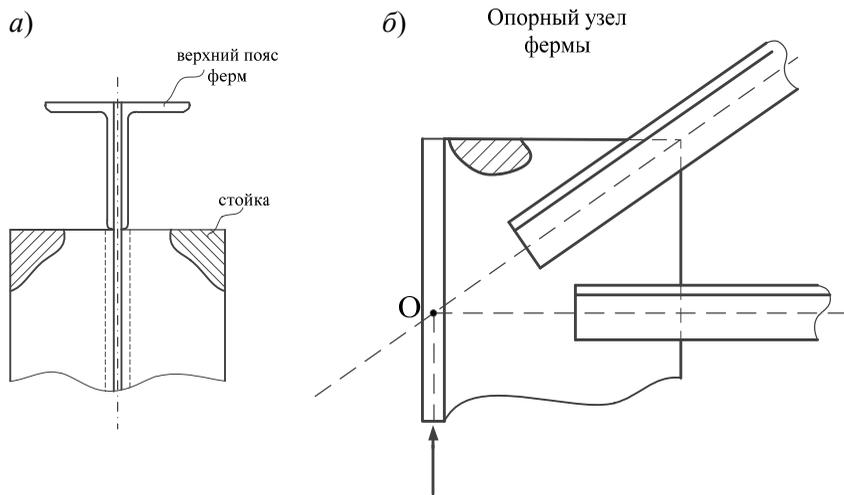


Рис. 2.68

**Задача 2.69.** Двускатную железобетонную балку покрытия усилили подпружиненной системой (рис. 2.69). Почему у опор угол наклона металлических тяг принят равным  $45^\circ$ ?

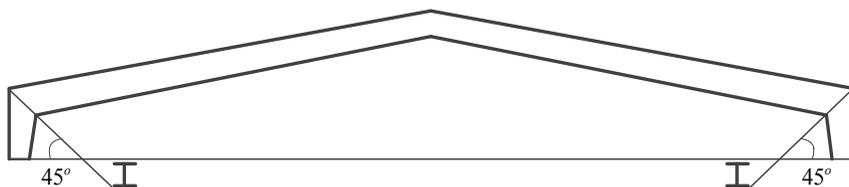


Рис. 2.69

**Задача 2.70.** Во сколько раз изменилась крутильная жесткость при сварке противоположных сторон сечения кругового очертания из листовой стали (рис. 2.70)?

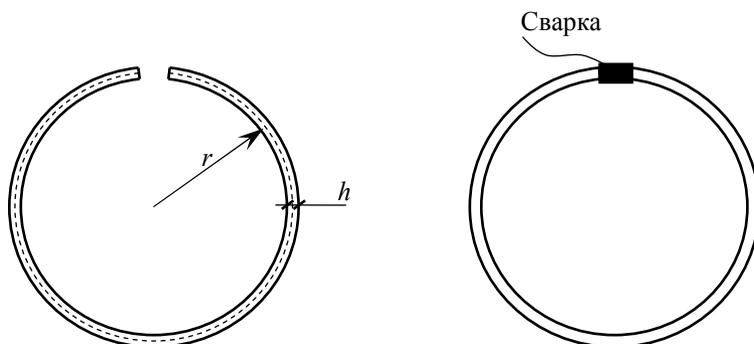


Рис. 2.70

**Задача 2.71.** В качестве балочной плиты с прямоугольным противопожарным отверстием (рис. 2.71) использовали предварительно напряженную железобетонную многупустотную плиту. После ее установки и вырезания отверстия по плите пошли трещины. Покажите их направления.

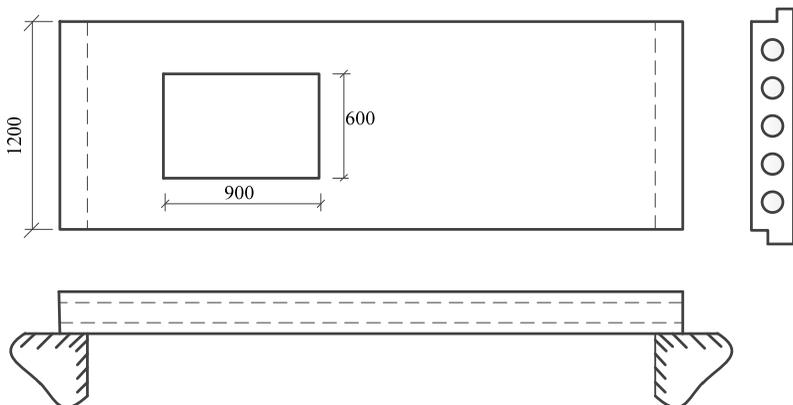


Рис. 2.71

**Задача 2.72.** При расчете пластинки с помощью ПК «Лира» были определены перемещения (прогибы) узлов конечно-элементной модели. Как по прогибам пяти смежных узлов модели (рис. 2.72) инженеру найти изгибающие моменты в центральной точке пластинки толщиной  $h = 14$  см и изготовленной из бетона класса  $C^{20/25}$ ?

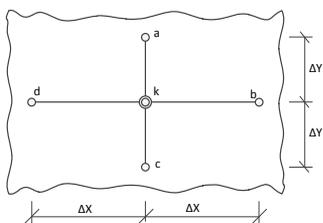


Рис. 2.72

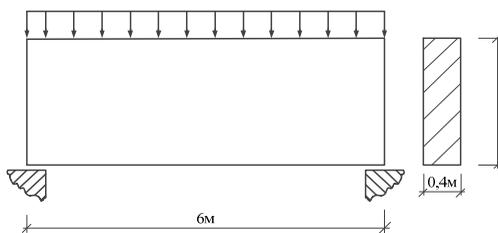


Рис. 2.73

**Задача 2.73.** Для перекрытия проезда в многоэтажном панельном доме была использована балка-стенка (рис. 2.73). Показать примерно, где будут возникать наибольшие касательные напряжения в ней.

**Задача 2.74.** В неограниченном бетонном массиве находится металлический стержень из стали периодического профиля (рис. 2.74). К стержню приложена вырывающая сила  $P$ . Построить эпюру  $\sigma$  в стержне.

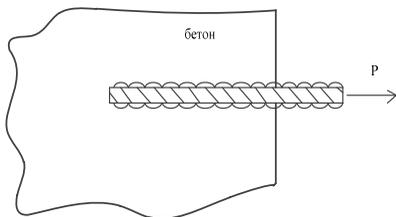


Рис. 2.74

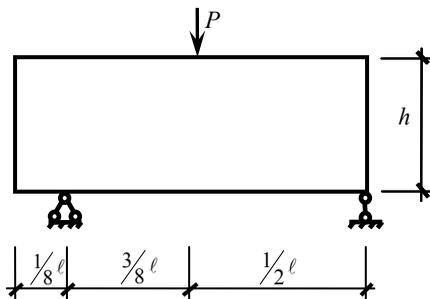


Рис. 2.75

**Задача 2.75.** Инженеру необходимо рассчитать балку-стенку (рис. 2.75). Какой примерно должна быть эпюра нормальных напряжений в вертикальном сечении посередине балки-стенки?

**Задача 2.76.** Двухопорная балка прямоугольного сечения [7] загружена посередине сосредоточенным грузом, причем превышен предел упругого сопротивления изгибу для того же сечения балки (рис. 2.76). Определить прогиб посередине пролета.

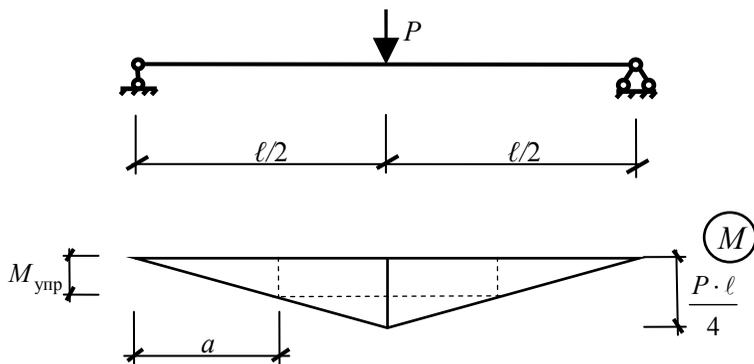


Рис. 2.76

**Задача 2.77.** Левый конец прямоугольной полосы, ранее ничем не нагруженный (рис. 2.77), подвергся воздействию со стороны заделки, которая выпучиваясь симметрично относительно оси  $Ox$ , привела в напряженно-деформированное состояние всю полосу [7]. Известен закон выпучивания стены  $u^0 = a - by^2$ . Выяснить в первом приближении поле напряжений и поле смещений в полосе.

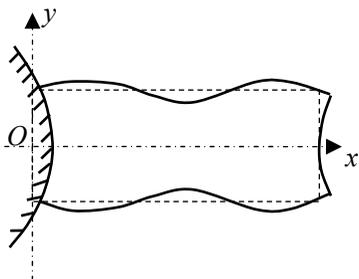


Рис. 2.77

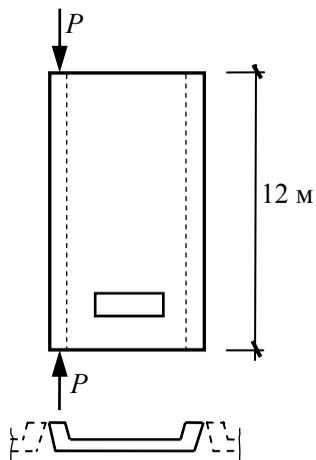


Рис. 2.78

**Задача 2.78.** При натурных испытаниях панелей-колонн (рис. 2.78) в нагруженной панели с отверстием появились трещины. Где они появились и почему?

**Задача 2.79.** Составная балка [8] понтонного моста располагается на трех опорах (понтонах)  $ABC$  (рис. 2.79). Исследовать изгиб балки при различных положениях груза  $P$ , если жесткость балки  $EI$  и площадь сечения понтона по уровню воды заданы.

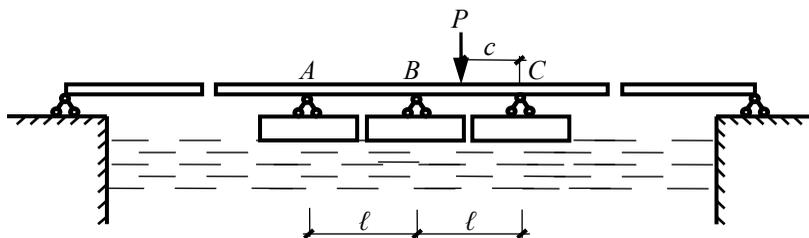


Рис. 2.79

**Задача 2.80.** Определить опорный момент в однопролетной балке с шарнирной и упруго-зашемленной опорой (рис. 2.80).

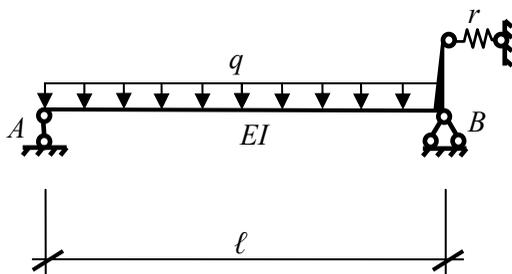


Рис. 2.80

## 2.4. Ответы и решения к главе 2

**Задача 2.1.** Производная  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  определяет касательный модуль упругости (рис. 2.81). Заштрихованная площадь  $S$  дает энергию деформаций в единице объема (плотность энергии) [3].

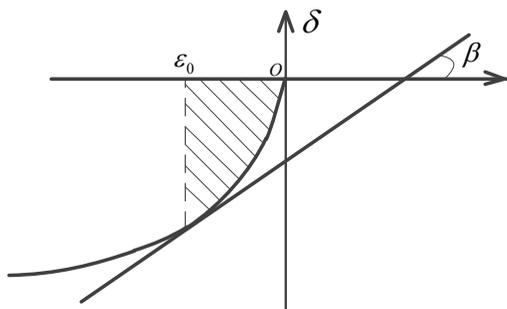


Рис. 2.81

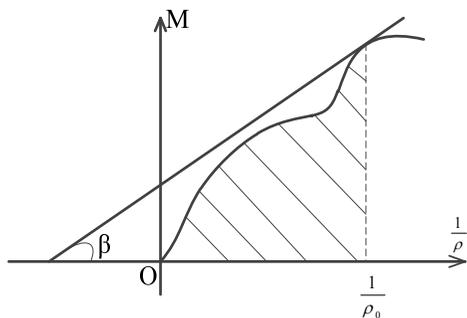
$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg}\beta = E_k;$$

$$S = \int_0^{\varepsilon_0} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon.$$

**Задача 2.2.** Соответствует вертикальной жесткости сваи при  $\Delta = \Delta_0$  и работе внешней нагрузки на перемещении  $\Delta_0$  сваи.

**Задача 2.3.** Из известной [3] дифференциальной зависимости при плоском изгибе  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$  следует, что  $\frac{dM}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}$  дает касательную

жесткость (рис. 2.82), а интеграл  $\int_0^{\frac{1}{\rho_0}} M \left( \frac{1}{\rho} \right) d \left( \frac{1}{\rho} \right)$ , равный заштрихованной площади  $S$ , дает погонную энергию деформаций изгиба [16].



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dM}{d \left( \frac{1}{\rho} \right)} = EI_k;$$

$$S = \int_0^{\frac{1}{\rho_0}} M \left( \frac{1}{\rho} \right) d \left( \frac{1}{\rho} \right).$$

Рис. 2.82

**Задача 2.4.** Однозначно на поставленный вопрос ответить нельзя. Если ферма является статически определимой, то усилия в ее стержнях не зависят от продольных жесткостей стержней. Для статически неопределимой фермы ответ на вопрос может дать только расчет.

**Задача 2.5.** Свая работает в условиях плоского изгиба, т. е. в любом сечении сваи действуют  $\sigma_z$  и  $\tau_{xz}$ . Поэтому по закону Гука находим нормальные напряжения в крайних волокнах  $\sigma_z^i = E \cdot \varepsilon_z^i$  и изгибающие моменты  $M_i = W_y \cdot \sigma_z^i$ , где  $W_y$  – момент сопротивления сечения сваи (рис. 2.83).

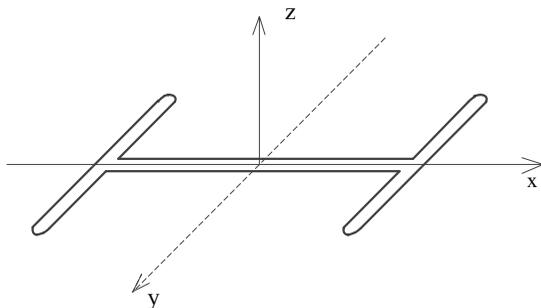


Рис. 2.83

После определения изгибающих моментов в шести точках по длине сваи находятся реактивные давления в этих точках по зависимости:

$$q = \frac{d^2 M}{dz^2}, \text{ т. е. } q_i = \frac{d^2 M_i}{dz^2} \approx \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{\left(\frac{\ell}{5}\right)^2}, \quad (i = 2-5).$$

Для крайних точек  $i = 1, 6$  реактивные давления будут найдены после определения горизонтальных перемещений  $u_i$  ( $i = 1-6$ ). Последовательность определения перемещений следующая. Составляется система линейных алгебраических уравнений:

$$M_1 = \frac{u_{-1} - 2u_1 + u_2}{(\ell/5)^2} \cdot El_y = 0,$$

$$M_2 = \frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{(\ell/5)^2} \cdot El_y,$$

$$M_3 = \frac{u_2 - 2u_3 + u_4}{(\ell/5)^2} \cdot El_y,$$

$$M_4 = \frac{u_3 - 2u_4 + u_5}{(\ell/5)^2} \cdot El_y,$$

$$M_5 = \frac{u_4 - 2u_5 + u_6}{(\ell/5)^2} \cdot El_y,$$

$$M_6 = \frac{u_5 - 2u_6 + u_{-6}}{(\ell/5)^2} \cdot El_y = 0.$$

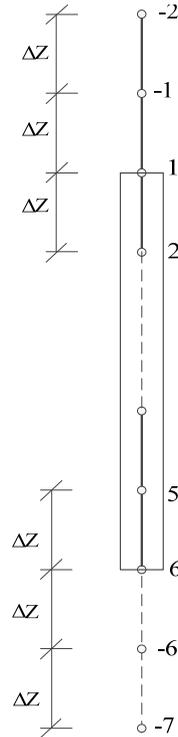


Рис. 2.84

В данной системе  $u_{-1}, u_{-6}$  – перемещения законтурных точек (рис. 2.84);  $u_1$  – известно из эксперимента. Кроме того, известно угловое перемещение вершины сваи:

$$\varphi_1 = \frac{du_1}{dz} \approx \frac{u_{-1} - u_2}{2 \cdot \ell / 5}.$$

Получается 7 уравнений. Неизвестных тоже 7:  $u_{-1}, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_{-6}$ , что позволяет однозначно найти горизонтальные перемещения точек сваи.

Для определения  $q_1$  и  $q_6$  составляются выражения для поперечных сил в точках 1, 6:

$$Q_1 = \frac{d^3 u_1}{dz^3} EI_y = \frac{u_{-2} - 2u_{-1} + 2u_2 - u_3}{2(\ell/5)^3} = P,$$

$$Q_6 = \frac{d^3 u_6}{dz^3} EI_y = \frac{u_4 - 2u_5 + 2u_{-6} - u_{-7}}{2(\ell/5)^3} = 0.$$

Из этих уравнений определяются значения перемещений в законтурных точках  $u_{-2}$  и  $u_{-7}$ .

Тогда

$$q_1 = -\frac{d^4 u_1}{dz^4} EI_y = EI_y \frac{u_{-2} - 4u_{-1} + 6u_1 - 4u_2 + u_3}{(\ell/5)^4},$$

$$q_6 = -\frac{d^4 u_6}{dz^4} EI_y = EI_y \frac{u_4 - 4u_5 + 6u_6 - 4u_{-6} + u_{-7}}{(\ell/5)^4},$$

$$\Delta z = \ell / 5.$$

В процессе решения этой задачи использовались формулы численного дифференцирования [9].

**Задача 2.6.** Данный вид трещины является опасным концентратором напряжений, значительно снижающим прочность кирпича на изгиб.

**Задача 2.7.** Парадоксально, но данная задача имеет не единственное решение [10], хотя напрашивается решение в виде сосредоточенной силы, приложенной к балке. Рассмотрим бесконечно малый элемент балки под действием внешней нагрузки и внутренних сил (рис. 2.85). Уравнение равновесия моментов внешних и внутренних сил относительно точки  $O$  дает:

$$\frac{dM}{dx} = Q + m.$$

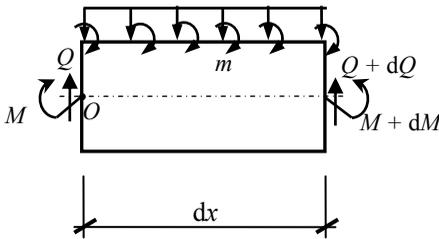


Рис. 2.85

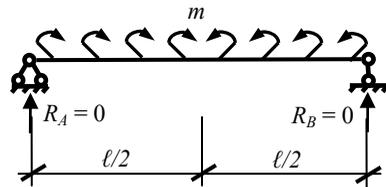


Рис. 2.86

И при отсутствии сосредоточенной силы на балке такую эпюру моментов создают распределенные моменты (рис. 2.86). Но эпюра  $Q$  в данном случае отсутствует. Поэтому, чтобы правильно определить внешнюю нагрузку на балку, помимо эпюры  $M$ , нужно знать эпюру  $Q$  [10].

**Задача 2.8.** Использует зависимость  $M = -EI \frac{d^2 y_i}{dx^2}$ , которая в конечных разностях (см. пример 2.5) записывается так:

$$M_k = -EI_k \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta x^2}.$$

**Задача 2.9.** Им необходимо поступить так, как изображено на рис. 2.87, а. Расчетная модель такой переправы приведена на рис. 2.87, б. Из линии влияния опорной реакции  $R_D$  (рис. 2.87, в) следует, что при любом положении подвижного груза 90 кг опорная реакция  $R_D \geq 0$ , т. е. край доски не отходит от грунта.

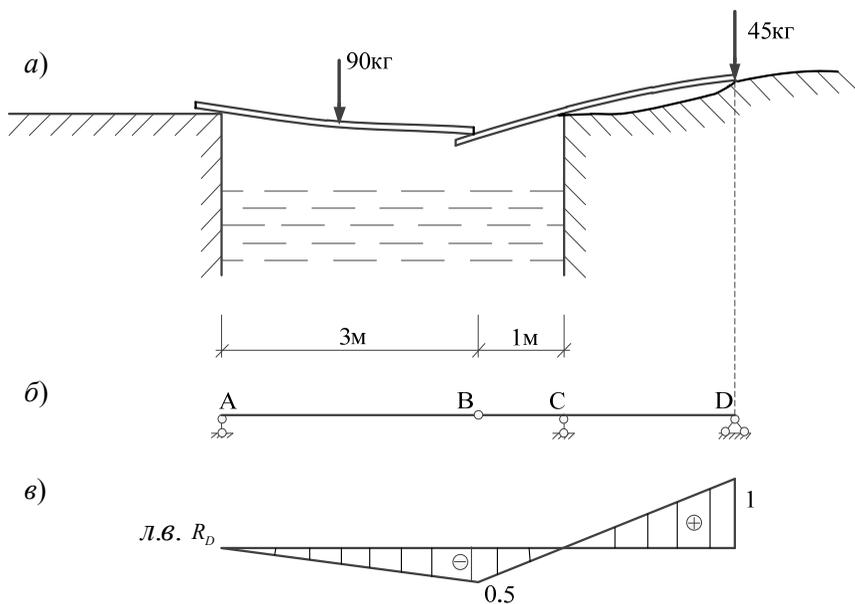


Рис. 2.87

**Задача 2.10.** Использовать дифференциальные зависимости при изгибе, записанные в форме конечных разностей (см. задачи 2.5, 2.8). Из эпюры прогибов видно, что балка зашцевлена по концам, поэтому перемещения законтурных точек (рис. 2.88) из граничного условия для угла поворота в точке 1:

$$\varphi_1 = \frac{dy_1}{dx} \approx \frac{y_2 - y_{-1}}{2} = 0,$$

т. е.  $y_{-1} = y_2$ .

В точке перегиба кривизна функции прогибов равна нулю, поэтому изгибающий момент в этой точке обращается в ноль.

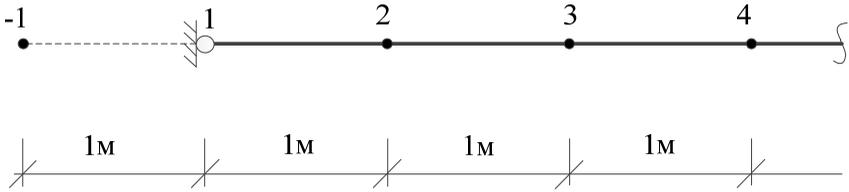


Рис. 2.88

**Задача 2.11.** Обозначим:  $A$  – площадь поперечного сечения стержня и вначале решим задачу в линейной постановке. Задаемся перемещениями в направлении оси  $Ox$ :

$$U = B \cdot \frac{x}{\ell},$$

где  $B$  – неизвестный коэффициент.

Энергия продольных деформаций стержня:

$$U = A \int_0^{\ell} \int_0^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon dx = \frac{EA \cdot \ell}{2} \left( \frac{B}{\ell} \right)^2,$$

так как  $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{B}{\ell}$ , а  $\sigma(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon$  по закону Гука.

Работа силы  $P$  (считаем, что в начале координат имеется опора, поэтому горизонтальное перемещение стержня в этом месте равно нулю) равна  $-P \cdot B$ .

Полная энергия  $\mathcal{E} = \frac{E \cdot A \cdot \ell}{2} \left( \frac{B}{\ell} \right)^2 - P \cdot B$ . В состоянии статического равновесия  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B} = 0$  и  $B = \frac{P \ell}{EA}$ .

При нелинейной зависимости [11]  $\sigma(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon - \frac{4}{27} \cdot \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} \cdot \varepsilon^3$ ,

опять примем  $U = B \cdot \frac{x}{\ell}$  (постоянному напряжению соответствует постоянная деформация). Полная энергия:

$$\mathcal{E} = A \int_0^{\ell} \int_0^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon dx - P \cdot B = A \cdot \ell \left[ \frac{E}{2} \cdot \left( \frac{B}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{27} \cdot \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} \cdot \left( \frac{B}{\ell} \right)^4 \right] - P \cdot B,$$

откуда для нахождения  $B$  имеем кубическое уравнение:

$$\frac{B}{\ell} - \frac{4}{27} \cdot \frac{E^2}{\sigma_{\text{lim}}^2} \cdot \left( \frac{B}{\ell} \right)^3 = \frac{P}{EA},$$

которое имеет три действительных корня (рис. 2.89):

$B_1 = -0,00864861$ ,  $B_2 = 0,00216766$ ,  $B_3 = 0,00648095$  при  $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\ell = 3 \text{ м}$ ;  $A = 0,005 \text{ м}^2$ ;  $\sigma_{\text{lim}} = 210 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ;  $P = 7 \cdot 10^5 \text{ Н}$ .

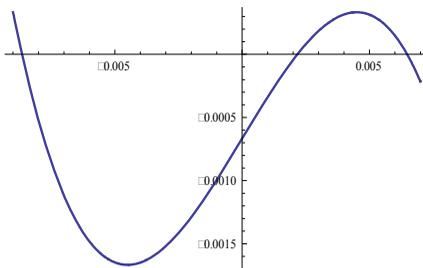


Рис. 2.89

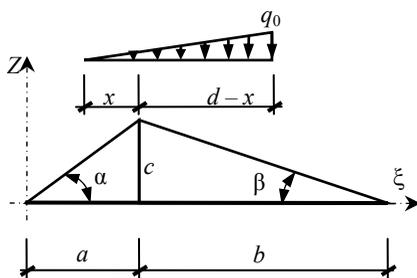


Рис. 2.90

Из физических соображений отбрасываем  $B_1 = -0,00864861$ , которое соответствует укорочению стержня и  $B_3 = 0,00648095$ , которое соответствует отрицательному касательному модулю упругости (см. задача 2.1).

В линейной постановке решением будет:  $B = 0,002$ .

**Задача 2.12.** В соответствии с обозначениями на рис. 2.90 запишем выражение для величины  $Z$ :

$$\begin{aligned}
 Z(x) &= \left[ \int_{a-x}^a \left( \xi + \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{q_0}{d} (\xi - a + x) \right) d\xi \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{влияние треугольной} \\ \text{части нагрузки} \end{array} \right\} + \\
 &+ \left[ \frac{a}{b} \operatorname{tg}\alpha \int_a^{a+d-x} (a+b-\xi) \cdot \frac{q_0}{d} (\xi - a + x) d\xi \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{влияние} \\ \text{трапецидальной} \\ \text{части нагрузки} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{q_0}{d} \operatorname{tg}\alpha \int_{a-x}^a (\xi^2 - a\xi + x\xi) d\xi + \frac{q_0}{d} \frac{a}{b} \operatorname{tg}\alpha \int_a^{a+d-x} (\xi - a + x) \cdot (-\xi + a + b) d\xi.
 \end{aligned}$$

Находим аргумент  $x$ , соответствующий максимальному значению  $Z$ :

$$\frac{dz}{dx} = 0 = \frac{q_0}{d} \cdot \operatorname{tg}\alpha \left[ ax - \frac{x^2}{2} + \frac{a}{b} \left( \frac{d^2}{2} - bx - \frac{x^2}{2} \right) \right], \quad x = d \sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

**Задача 2.13.** Расчетная модель трактора с прицепом представляет статически определимую двухпролетную балку (рис. 2.91). Если ось колеса прицепа совпадает с направлением и точкой приложения равнодействующей нагрузки на прицепе, то взвешивание будет правильным при условии отсутствия задних колес трактора на весах.

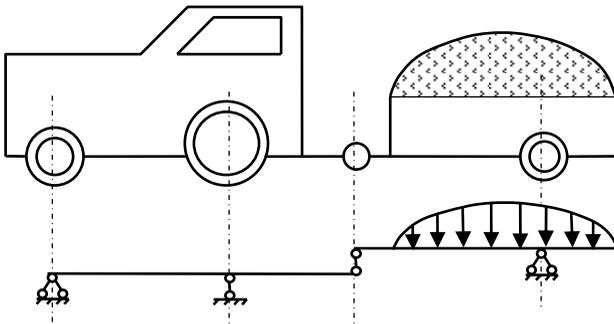


Рис. 2.91

**Задача 2.14.** Рассматривая балку под действием сил собственного веса  $q$  и преднапряжения (рис. 2.92), запишем выражения для прогиба середины пролета балки:

$$f = \frac{M \ell^2}{8EI} - \frac{5}{384} \cdot \frac{q \ell^4}{EI},$$

от действия момента и распределенной нагрузки. Это позволит найти величину  $M$  при работе балки в упругой стадии.

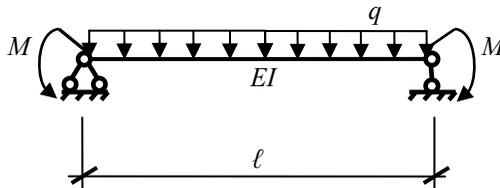


Рис. 2.92

**Задача 2.15.** Когда на емкости с водой были приварены ребра, то нагрузка от нее на балки передавалась через два ребра (рис. 2.93). При отсутствии ребер нагрузка непосредственно передавалась на балки (рис. 2.94), что привело к увеличению изгибающего момента в середине балок и стало причиной обрушения.

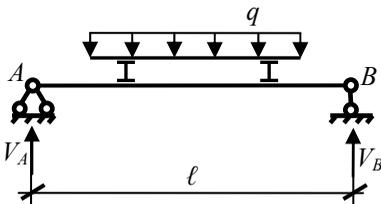


Рис. 2.93

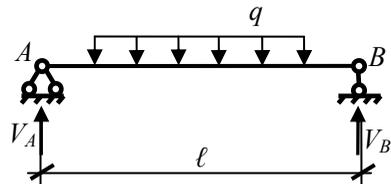


Рис. 2.94

**Задача 2.16.** Многopустотные ж/б плиты могут работать только как однопролетные шарнирно-опертые балки (рис. 2.95). Причем, при любой нагрузке растянутые волокна должны быть снизу. При использовании их в качестве подмостей (рис. 2.96) на правой опоре

появились растянутые волокна сверху, что привело к немедленному обрушению плиты.



Рис. 2.95

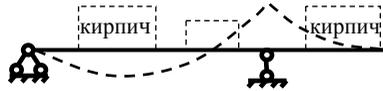


Рис. 2.96

**Задача 2.17.** Рассмотрим предельное равновесие отрезка арматуры (рис. 2.97). Если считать распределение касательных напряжений по длине  $\ell_a$  и по окружности диаметром  $d$  постоянным\*, то при увеличенном диаметре  $d$  составим уравнение равновесия:  $4N = \pi \cdot 1,5d \cdot \tau \cdot \ell_a$ , откуда  $\ell_a = \frac{4}{1,5} \cdot \frac{N}{\pi \cdot d \cdot \tau}$ , то есть в  $\frac{4}{1,5}$  раза необходимо увеличить длину стержня арматуры.

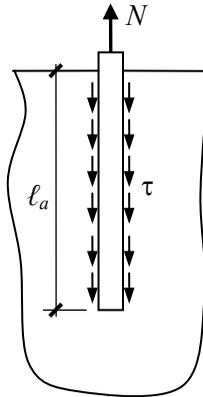


Рис. 2.97

**Задача 2.18.** В месте перемены знака у  $\sigma$ .

**Задача 2.19.** Данная рама является статически определимой, составной. Однако, несмотря на это, линия влияния  $V_A$  будет идентична линии влияния  $V_A$  в однопролетной балке (рис. 2.98). Чтобы

\* Это утверждение является не совсем точным. См., например, [12].

убедиться в этом, достаточно составить выражение для определения  $V_A$  при действии на раму единичной силы.

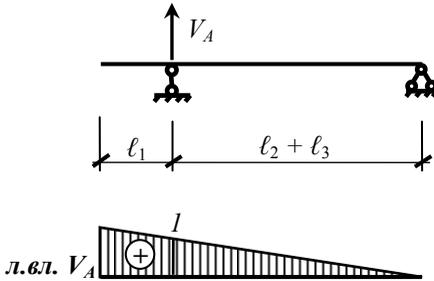


Рис. 2.98

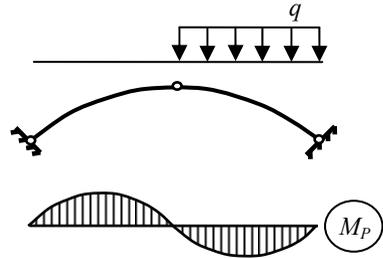


Рис. 2.99

**Задача 2.20.** Очертание трехшарнирной арки по параболе является рациональным при действии равномерно распределенной нагрузки. Если убирать снег с крыши с одной стороны, то может возникнуть ситуация (рис. 2.99) наиболее опасного нагружения трехшарнирной арки. Поэтому убирать следует снег одновременно с двух сторон в разные стороны.

**Задача 2.21.** Для решения поставленной задачи используем полярные координаты (рис. 2.100, а).

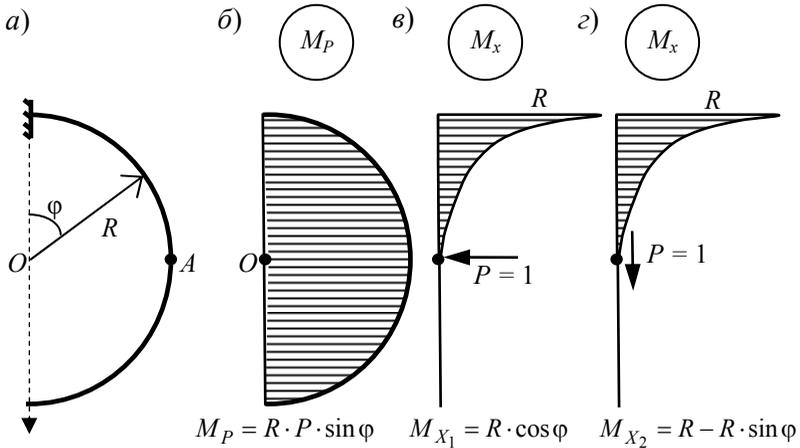


Рис. 2.100

В этих координатах строим грузовую эпюру  $M_P$  и единичные эпюры  $M_{X_1}$  и  $M_{X_2}$  (рис. 2.100, б, в, г). Находим горизонтальное перемещение точки  $A$ :

$$\Delta_{AP}^{\text{гориз}} = -P \int_0^{\pi/2} \frac{R \cdot \sin \varphi \cdot R \cdot \cos \varphi}{EI} R \cdot d\varphi = -\frac{P \cdot R^3}{2EI}.$$

Точка  $A$  перемещается вправо.

Находим вертикальное перемещение точки  $A$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{AP}^{\text{верт}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{M_P \cdot M_{X_2}}{EI} ds = -P \int_0^{\pi/2} \frac{R \cdot \sin \varphi \cdot R \cdot (1 - \sin \varphi)}{EI} R \cdot d\varphi = \\ &= \frac{P \cdot R^3}{2EI} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Точка  $A$  перемещается вверх.

Таким образом, точка  $A$  полуокружности перемещается вправо и вверх.

**Задача 2.22.** В изогнутой доске возникает горизонтальная составляющая опорной реакции  $H$ , которая приподымает кирпич (рис. 2.101). Вертикальная составляющая опорной реакции  $V$  мала по сравнению с  $H$  при отсутствии на доске кирпичей.

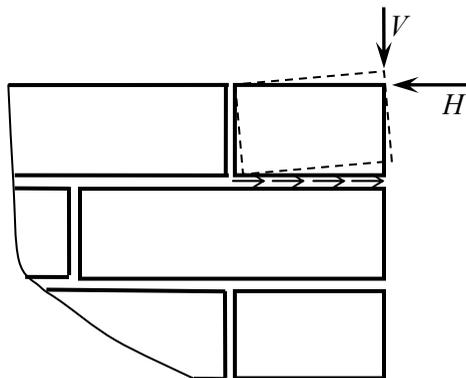


Рис. 2.101

**Задача 2.23.** Правильной кладке свода соответствует второй рисунок. Кладка по левому рисунку ведет к ослаблению несущей способности кирпичной колонны [13].

**Задача 2.24.** Усилия в приопорных стержнях обеих ферм будут одинаковы, так как одинаковы опорные реакции (рис. 2.102). В первой ферме усилие в вертикальном стержне равно 0, во втором  $-P$ . Поэтому разница в вертикальных перемещениях точки  $k$  будет  $\frac{P\ell}{EA}$ , где  $EA$  – продольная жесткость вертикального стержня. Следовательно, и перемещение будет больше во второй ферме.

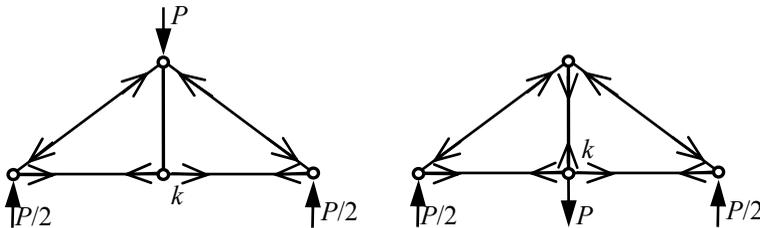


Рис. 2.102

**Задача 2.25.** Данная ферма внешне однажды статически неопределима (рис. 2.103). Последовательность определения усилий в стержнях фермы по принципу Кастильяно (принцип наименьшей работы) следующая:

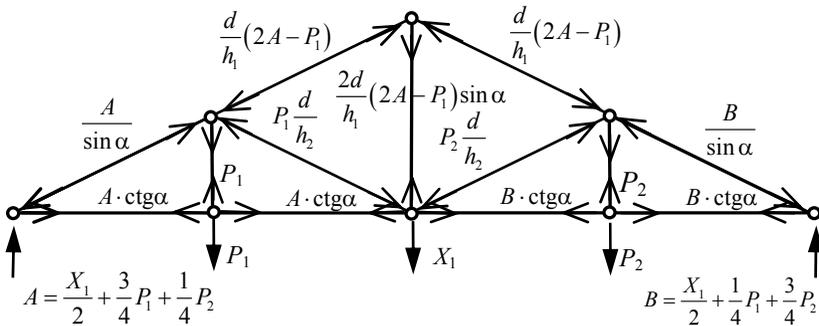


Рис. 2.103

а) Обозначая вертикальную реакцию средней опоры через  $X_1$ , находим усилия во всех стержнях фермы. Здесь  $h_1 = h_2 = 2d \cdot \sin \alpha$ .

б) Записываем потенциальную энергию фермы (функционал Кастильяно):

$$U = \sum_{k=1}^{13} \frac{N_k^2 \cdot \ell_k}{E \cdot A_k}.$$

в) Дифференцируем энергию  $U$  по неизвестному  $X_1$  и приравняем полученную производную к нулю (в состоянии статического равновесия потенциальная энергия имеет минимум):

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0.$$

Полученное уравнение линейно относительно  $X_1$ , что позволяет сразу найти усилия во всех стержнях. Для проверки правильности вычислений можно выполнить кинематическую проверку. На рис. 2.104 показаны усилия в стержнях фермы от  $X_1 = 1$ .

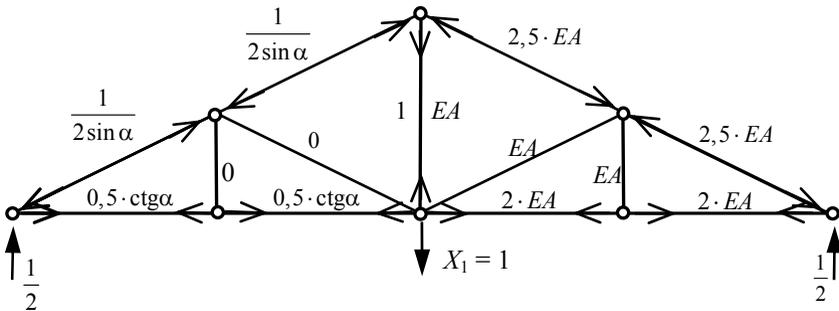


Рис. 2.104

При  $d = 2$  м,  $h = 3$  м,  $P_1 = 10$  кН,  $P_2 = 10$  кН,  $EA$  – по рис. 2.104, получаем:

$$U = 323,611 + 0,5486 \left[ -20 + 4 \left( 1 + \frac{X_1}{2} \right)^2 \right] + 6,3333 \left( 10 + \frac{X_1}{2} \right)^2,$$

$$X_1 = -14,1912 \text{ кН.}$$

Кинематическая проверка дала  $\sum_{k=1}^{13} \frac{N \cdot N_1 \cdot \ell_k}{E \cdot A_k} = -0,00018 \frac{1}{EA}$ .

**Задача 2.26.** Вырежем замкнутым сечением фермочку 1–2–3 (рис. 2.105). Для каждого из узлов 1, 2, 3 составим уравнение равновесия, как сумму усилий  $N_{12}$ ,  $N_{23}$ ,  $N_{13}$ , на направление, перпендикулярное стержням фермы, показанных на рис. 2.105, *a* пунктиром. Получается система из трех линейных алгебраических уравнений с нулевыми свободными членами. Откуда следует  $N_{12} = N_{23} = N_{13} = 0$ . Свободный член появится, когда к узлу 3 будет приложена вертикальная сила. Тогда эти усилия будут отличны от нуля.

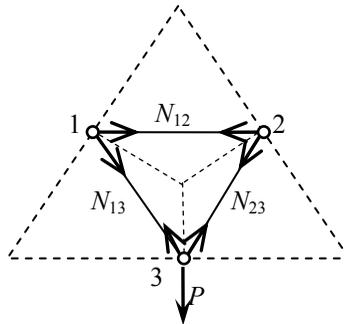


Рис. 2.105

**Задача 2.27.** При подъеме без траверсы усилия в стропях  $S''$  значительно превышают усилия в стропях при подъеме с траверсой  $S'$  (рис. 2.106), так как  $\alpha > \beta$ .

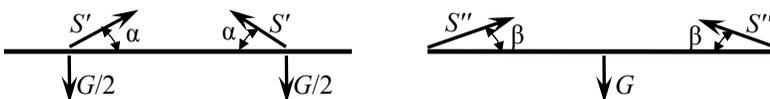


Рис. 2.106

**Задача 2.28.** Аналитически усилие в стержне 1–2 найдем по методу сечений. Опорные реакции от неподвижной нагрузки, расположенной симметрично, будут равны между собой и имеют значение:  $V_A = V_B = 2P + 2P_1$ .

Проводим сечение I–I через стержень 1–2. Рассматриваем равновесие левой части фермы:

$$\begin{aligned} \sum M_O^{\text{лев}} = & -V_A \cdot 3,75 + \frac{P}{2} \cdot 3,75 + P \cdot (3,75 + 3,75) + P_1 \cdot (3,75 + 3) + \\ & + P_1 \cdot (3,75 + 6) - N_{12} \cdot \sin \alpha \cdot (3,75 + 6) = 0, \end{aligned}$$

где  $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{1,5^2 + 3^2}} = 0,894$ .

Откуда:  $N_{12} = 0,215 \cdot P + 1,033 \cdot P_1$ .

Строим линии влияния усилия в стержне 1–2 при езде понизу и поверху (рис. 2.107). Проводим сечение I–I через стержень 1–2.

Для построения правой ветви составим уравнение:

$$\sum M_O^{\text{лев}} = -V_A \cdot 3,75 - N_{12} \cdot \sin \alpha \cdot (3,75 + 6) = 0.$$

Откуда:  $N_{12}^{\text{прав}} = \frac{-V_A \cdot 3,75}{\sin \alpha \cdot (3,75 + 6)} = -0,43 \cdot V_A$ .

Правая ветвь пересекает левую под моментной точкой  $O$  и проходит через левую опору  $A$ . Уравнение правой ветви можно получить, составляя уравнение:

$$\sum M_O^{\text{лев}} = -V_B \cdot (15 + 3,75) - N_{12} \cdot \cos \alpha \cdot 3 + N_{12} \cdot \sin \alpha \cdot (3,75 + 7,5) = 0,$$

где  $\cos \alpha = \frac{1,5}{\sqrt{1,5^2 + 3^2}} = 0,447$ .

Откуда:  $N_{12}^{\text{лев}} = \frac{V_B \cdot (3,75 + 15)}{-\cos \alpha \cdot 3 + \sin \alpha \cdot (3,75 + 7,5)} = 2,15 \cdot V_B$ .

По линиям влияния с учетом действия сил  $P$  и  $P_1$  по разным поясам

$$N_{12} = P \cdot \left( 0,54 - 0,215 - \frac{0,215}{2} \right) + P_1 \cdot \left( \frac{0,86}{2} + 0,86 - 0,172 - \frac{0,172}{2} \right) =$$

$$= 0,215 \cdot P + 1,0333 \cdot P_1.$$

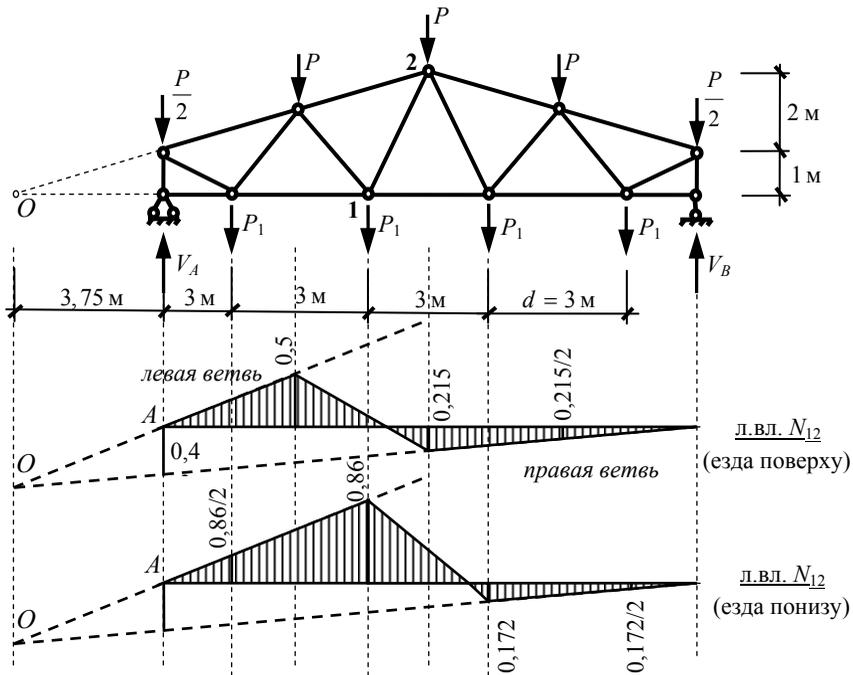


Рис. 2.107

**Задача 2.29.** Необходимо исключить возможность работы стержня 1–2 на растяжение с изгибом. Для этого устраивается шпренгель (рис. 2.108).

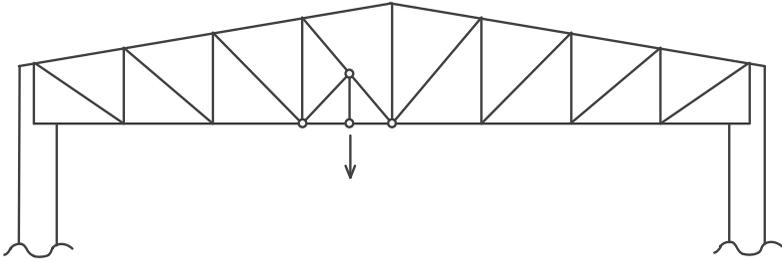


Рис. 2.108

**Задача 2.30.** Нужно найти такое направление полного перемещения, чтобы точки  $B$  и  $D$  совпали (рис. 2.109), так как  $u_1$ ,  $u_2$  – проекции полного перемещения на оси 1 и 2. То есть, точка  $C$  конца вектора полного перемещения есть точка пересечения перпендикуляров, восстановленных из концов отрезков  $u_1$  и  $u_2$ .

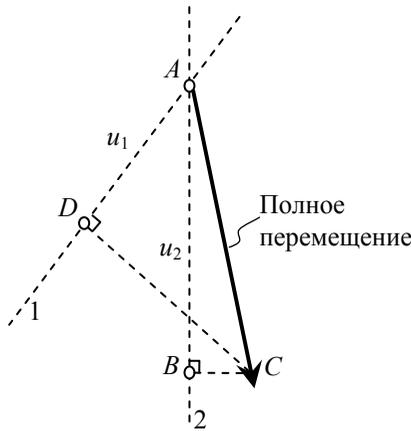


Рис. 2.109

**Задача 2.31.** Раскладываем нагрузку на симметричную и антисимметричную (рис. 2.110,  $a$  и  $b$ ). Тогда симметричное нагружение силами  $P/2$  соответствует загрузению однопролетной балки силой  $P/2$  (см. рис. 2.110,  $a$ ), а антисимметричное – загрузению шарнир-

но-опертой однопролетной балки силой  $P/2$ . Поэтому искомый изгибающий момент будет равен моменту в защемлении однопролетной балки от силы  $P/2$ .

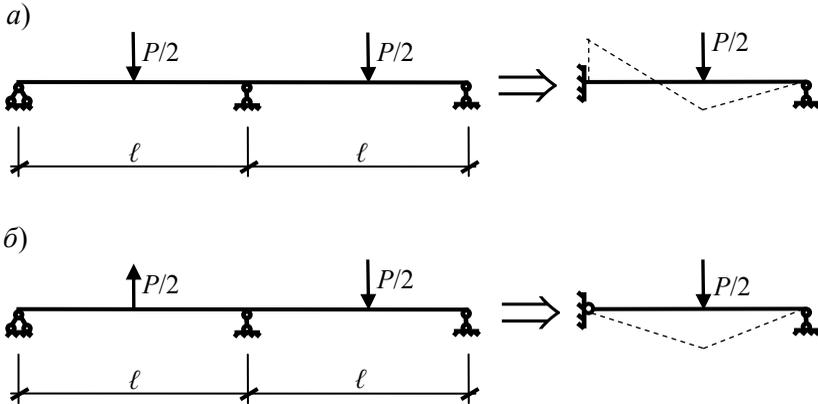


Рис. 2.110

**Задача 2.32.** Из условий симметрии поперечная сила в шарнире (неизвестное метода сил) равна нулю. Поэтому искомые величины можно определить из расчета однопролетной балки с консолью (рис. 2.111).

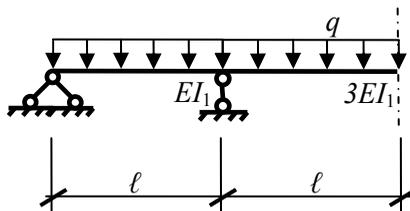


Рис. 2.111

**Задача 2.33.** Так как балка длинная, то отношение опорных изгибающих моментов в середине балки (правые фокусные отношения [14]) можно считать постоянным и равным  $k'$  (рис. 2.112).

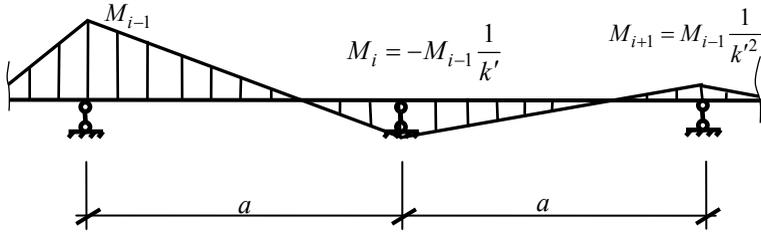


Рис. 2.112

Составим уравнение трех моментов для опоры  $i$ :

$$M_{i-1}a + 2M_i(a + a) + M_{i+1}a = 0$$

или

$$M_{i-1}a \left( 1 - 4\frac{1}{k'} + \frac{1}{k'^2} \right) = 0,$$

откуда следует  $k' = 2 \pm \sqrt{3}$ .

Моментное фокусное отношение всегда  $> 2$  [14], поэтому действительным фокусным отношением является  $k' = 2 + \sqrt{3}$ . Изгибающий момент на  $i$ -й опоре примерно будет равен

$$M_i = \frac{M}{(2 + \sqrt{3})^{i-1}}.$$

Угол поворота  $\varphi_i$  на  $i$ -й опоре определяется перемножением грузовой эпюры (рис. 2.112) на единичную (рис. 2.113), то есть по правилу Симпсона:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{M \cdot a}{6EI} \left[ \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{i-1}} + 4 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2(2 + \sqrt{3})^{i-1}} - \frac{1}{2(2 + \sqrt{3})^i} \right) \right] = \\ &= \frac{M \cdot a}{6EI} \left[ \frac{2}{(2 + \sqrt{3})^{i-1}} - \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^i} \right] = \frac{M \cdot a}{6EI} \left[ \frac{\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})^{i-1}} \right]. \end{aligned}$$

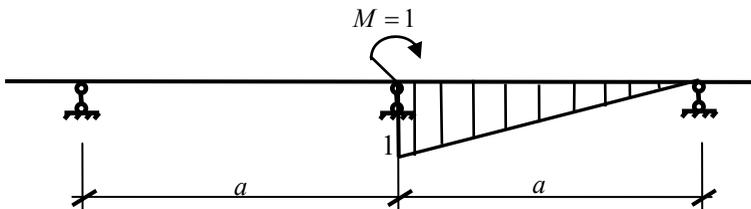


Рис. 2.113

**Задача 2.34.** См. решение задачи 2.31.

**Задача 2.35.** Данная система однажды статически неопределима, поэтому расчет будем вести методом сил, выбрав за основное неизвестное горизонтальную составляющую реакции на левой опоре (рис. 2.114).

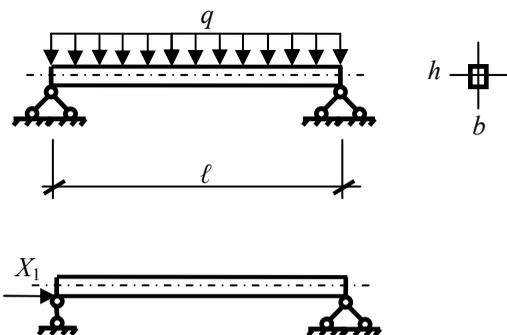


Рис. 2.114

Так как  $X_1$  действует с эксцентриситетом относительно оси балки, то от его действия возникают усилия  $M_1$  и  $N_1$  (рис. 2.115). Найдем коэффициенты уравнения метода сил  $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0$ , выражающее условие отсутствия горизонтального перемещения низа балки на левой опоре.

$$\text{Получено: } \delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{EI} + \int_0^l \frac{N_1^2 dx}{EA} = \frac{l}{E} \cdot \frac{4}{bh};$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{M_1 M_P dx}{EI} = -\frac{l}{2E} \cdot \frac{ql^2}{bh^2}, \text{ откуда } X_1 = \frac{ql^2}{8h}.$$

Окончательная эпюра  $M$  представлена на рис. 2.115.

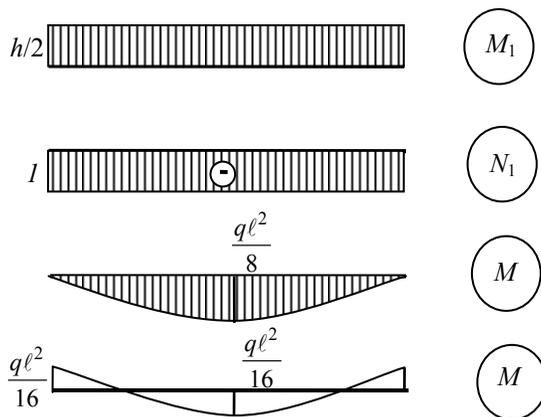


Рис. 2.115

**Задача 2.36.** Достоинства и недостатки обоих вариантов сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вариант 1	Вариант 2
Уменьшился момент в защемлении $\oplus$	Уменьшился момент в защемлении $\oplus$
Возникает опорный момент на левой опоре $\ominus$	–
Увеличивается реакция левой опоры $\ominus$	Увеличивается реакция левой опоры $\ominus$
Увеличилась длина балки $\ominus$	–
–	Сместилась вниз правая опора $\ominus$

Примечание: знак  $\oplus$  обозначает достоинство варианта уменьшения изгибающего момента в защемлении, а знак  $\ominus$  – недостатки.

**Задача 2.37.** Обозначим (рис. 2.116)  $A, M_A$  – величины опорных реакций. Тогда  $M(x) = M_A - A \cdot x$  и дополнительная энергия, при условии  $A = \frac{M_A}{\ell}$ , равна  $U = \int_0^{\ell} \frac{(M_A - A \cdot x)^2}{2EI} dx - M_A \cdot \varphi$ .

Из условия  $\frac{\partial U}{\partial M_A} = 0$ , получаем  $M_A = \frac{3EI}{\ell}$ .

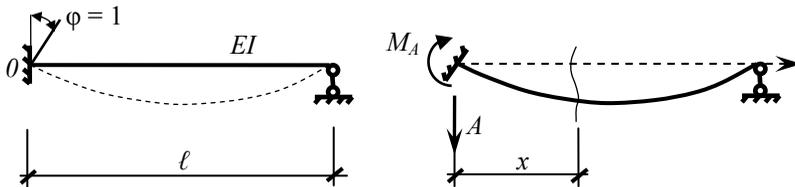


Рис. 2.116

**Задача 2.38.** Опорная реакция средней опоры при разрезной схеме опирания равна  $q\ell$ . При неразрезной схеме опирания эта реакция равна  $\frac{5}{4}q\ell$ . Это послужило причиной разрушения средней опоры.

**Задача 2.39.** Рассмотрим затяжку в пределах одного пролета (рис. 2.117).

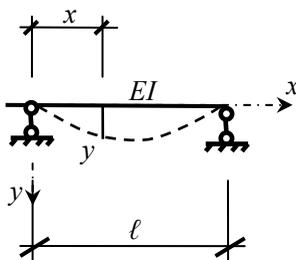


Рис. 2.117

Зададимся  $y(x) = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI} \sin \frac{\pi x}{\ell}$ .

Тогда удлинение затяжки  $\Delta S$  будет удовлетворять неравенству:

$$\Delta S \leq 25 \int_0^{\ell} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx - 5\ell.$$

После подстановки  $q = 98,7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ ;  $EI = 26389 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$  для одного арматурного стержня, и интегрирования, получим  $\Delta S \leq 0,0024 \text{ м}$ .

**Задача 2.40.** Необходимо построить линию влияния опорной реакции  $B$  (рис. 2.118), причем она строится через линии влияния опорных моментов [14] на основании формулы:

$$R_B = R_B^0 + \frac{M_C}{\ell_2} - \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2}\right) M_B,$$

где  $M_C$ ,  $M_B$  – линии влияния опорных моментов;

$R_B^0$  – линия влияния опорной реакции  $B$  в основной системе метода сил.

После вычислений внешний вид линии влияния  $B$  приведен на рис. 2.118, из которого видно, что максимум достигается при положении единичного груза слева от опоры  $B$ .

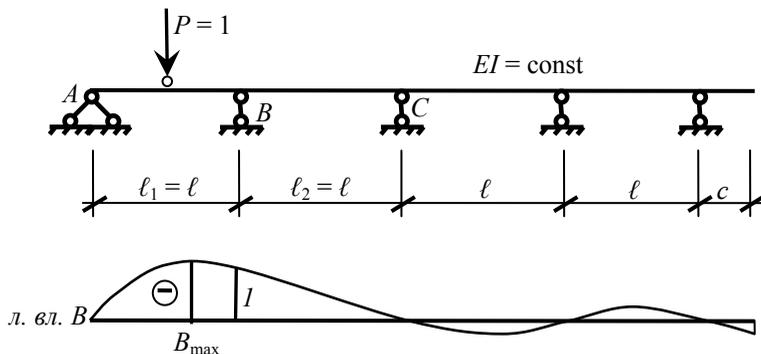


Рис. 2.118

**Задача 2.41.** Под действием внешних сил балка поворачивается относительно точки  $O$  на угол  $\varphi$  (рис. 2.119). Величину угла определим на основании принципа возможных перемещений. Обозначим  $y$  – бесконечно малое перемещение правого конца балки от положения равновесия. Тогда из гипотезы Винклера следует:

$$\sum_{i=1}^4 P_i a_i \varphi = \frac{1}{3} \varphi^2 k \ell^3 \Rightarrow \varphi = \frac{3 \sum_{i=1}^4 P_i a_i}{k \ell^3}.$$

Уравнение равновесия дает возможность определить  $R$ :

$$\sum Y = R + \frac{3}{2\ell} \sum_{i=1}^4 P_i a_i - \sum_{i=1}^4 P_i = 0, \Rightarrow R = \sum_{i=1}^4 \left( 1 - \frac{3 a_i}{2 \ell} \right) P_i.$$

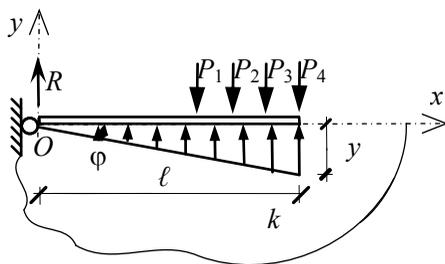


Рис. 2.119

Читателю предоставляется возможность построить линию влияния опорной реакции  $R$  на основании полученных выше результатов.

**Задача 2.42.** Известно [14], что эпюра изгибающих моментов в балке (рис. 2.120, б) имеет строго определенный вид.

Поэтому поперечная сила определится  $Q_{AB} = -\frac{3 P \cdot x}{2 \ell}$ .

Значит  $A = -\frac{3 P \cdot x}{2 \ell}$ . Из уравнения равновесия:

$$-\frac{3 P \cdot x}{2 \ell} + V_B - 1 = 0 \Rightarrow V_B = 1 + \frac{3 P \cdot x}{2 \ell},$$

т. е.  $V_B$  меняется по линейному закону (рис. 2.120, в).

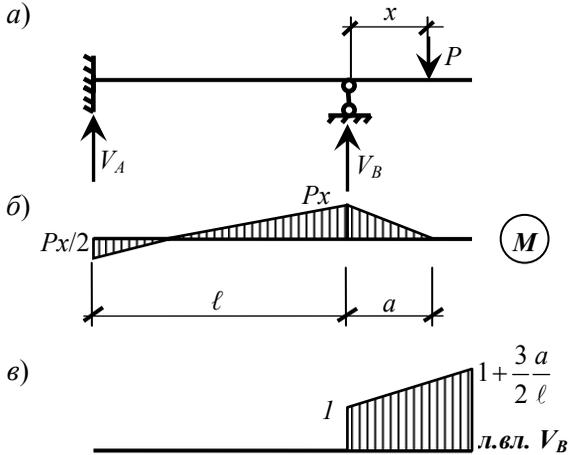


Рис. 2.120

**Задача 2.43.** Наиболее нагружены сваи, обладающие наибольшей горизонтальной жесткостью в кусте. Этим свойством обладают крайние правые сваи, так как по направлению нагрузки за ними находится не ослабленное наличием свай полупространство\* (рис. 2.121).

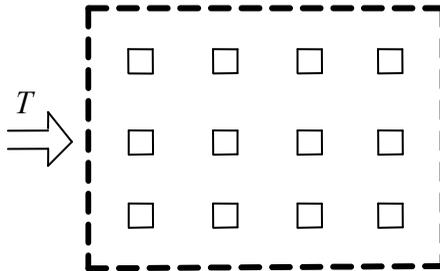


Рис. 2.121

\* Необходимо учитывать, что при действии горизонтальной нагрузки на вертикальную сваю между свай и грунтом образуется разрыв сплошности.

**Задача 2.44.** Следует исходить из жесткости системы параллельных упругих пружин [4]. Жесткость прямоугольной плиты:

$$r_1 = kLH.$$

Жесткость одной сваи квадратного сечения, считая ее опертой на полупространство [4]:

$$r_2 = \frac{E_0 b}{0,92(1 - \nu_0^2)}.$$

Суммарная жесткость системы, состоящей из плиты и  $n$  свай:

$$R = kLH + n \frac{E_0 b}{0,92(1 - \nu_0^2)}.$$

Искомая податливость системы

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{kLH + n \frac{E_0 b}{0,92(1 - \nu_0^2)}}.$$

**Задача 2.45.** Если в замкнутое кольцо врезан шарнир, то жесткость кольца может только уменьшиться. В крайнем случае, она останется равной жесткости замкнутого кольца. Последнее будет иметь место только в том случае, когда шарнир окажется в точке, где изгибающий момент для замкнутого кольца равен нулю [5]. Поэтому нужно рассчитать замкнутое кольцо на действие уравновешенных сил  $P$  (рис. 2.122, 2.123).

Приведем это решение, основываясь на принципе Кастильяно [15]. Можно заметить, что по второй оси симметрии поперечная сила равна 0, а продольная –  $P/2$ . Поэтому изгибающий момент в произвольном сечении замкнутого кольца равен  $M(\varphi) = M + \frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi)$ ;

энергия изгиба –  $4 \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\varphi)}{2EI} R \cdot d\varphi.$

Взяв этот интеграл и продифференцировав энергию по неизвестному  $M$ , получим  $M = -PR \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$ .

Откуда  $M(\varphi) = \frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi) - PR \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$ . Приравняв это выражение к нулю, получим  $\varphi = \arccos \frac{2}{\pi}$ .

Эпюра изгибающих моментов от действия сил  $P$  показана на рис. 2.122 пунктиром.

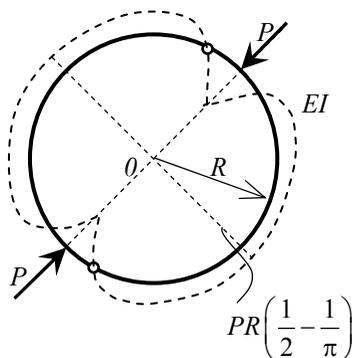


Рис. 2.122

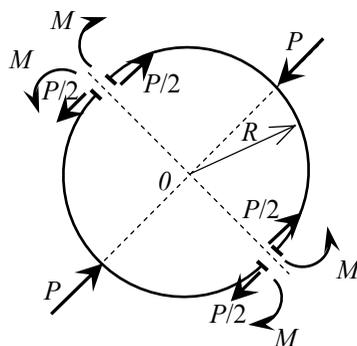


Рис. 2.123

**Задача 2.46.** Бесшарнирная арка (рис. 2.124, *a*), трижды статически неопределима. Выбирая в качестве основной системы трехшарнирную арку (рис. 2.124, *б*), убеждаемся, что свободные члены канонических уравнений метода сил равны нулю, т. к. основная система является аркой рационального очертания. Поэтому все неизвестные метода сил равны нулю, эпюры изгибающих моментов и поперечных сил отсутствуют.

Отсюда следует вывод, что бесшарнирная арка параболического очертания является аркой рационального очертания при действии равномерно распределенной нагрузки, т. е. в ее сечениях действует только продольная сила как и в трехшарнирной арке.

**Задача 2.47.** В этих системах затяжки просто не работают, так как обе опоры системы шарнирно неподвижные.

**Задача 2.48.** Если в точке пересечения стержней 2–3 и 1–4 образовать шарнир, то усилия в этих стержнях не изменятся (рис. 2.125, а).

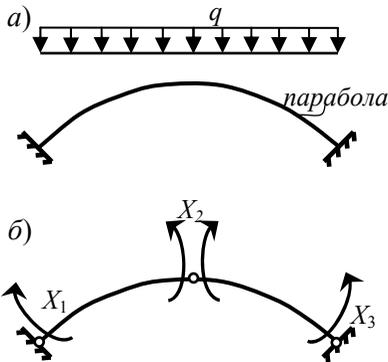


Рис. 2.124

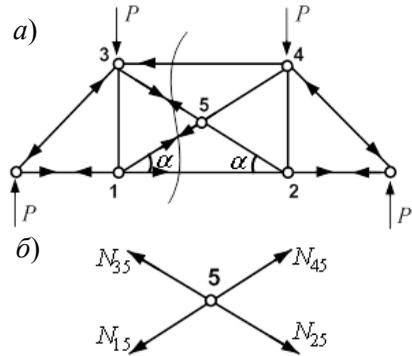


Рис. 2.125

Проведя вертикальное сечение I–I, составим уравнение равновесия

$$N_{35} \cdot \sin \alpha - N_{15} \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда  $N_{35} = N_{15}$ .

Вырежем узел 5 (рис. 2.125, б). Видим, что уравнения равновесия для него тождественно удовлетворяются. Рассматривая сумму моментов относительно точки 5 для первой части фермы (см. рис. 2.125, а), и учитывая, что пара сил уравнивается только парой сил, находим  $N_{12} = -N_{34}$ .

Тогда, рассматривая опять равновесие левой части фермы, получаем:

$$\begin{cases} \sum X = -N_{35} \cdot \cos \alpha - N_{15} \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum Y = N_{35} \cdot \sin \alpha - N_{15} \cdot \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Эта система может иметь решение только в том случае, когда:

$$N_{35} = N_{15} = N_{34} = N_{52} = 0.$$

**Задача 2.49.** Горизонтальные стержни  $ab$  и  $bc$  от действия положительной температуры по оси центров тяжести сечений удлиняются (рис. 2.126). Вертикальные стойки  $bd$  и  $ce$  от этого удлинения искривляются.

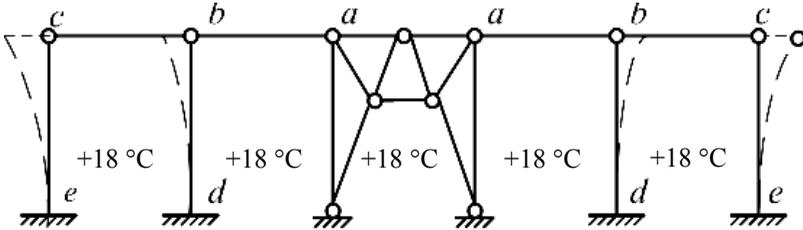


Рис. 2.126

Стойка  $ce$  дополнительно искривляется от разности температур по противоположным граням ее сечения. Поэтому наибольший изгибающий момент от действия температуры возникает в защемлении стоек  $ce$ .

**Задача 2.50.** Стержни верхнего пояса 1–4 и 4–2, 2–5 и 5–3 стали работать только на сжатие. При отсутствии раскосов (1–2 и 2–3) они работали на сжатие с изгибом.

**Задача 2.51.** Рассматриваем систему стержней в деформированном состоянии (рис. 2.127) и, задаваясь перемещением точки  $A$ , ищем силу  $P$  по рис. 2.128.

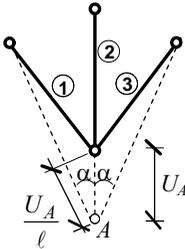


Рис. 2.127

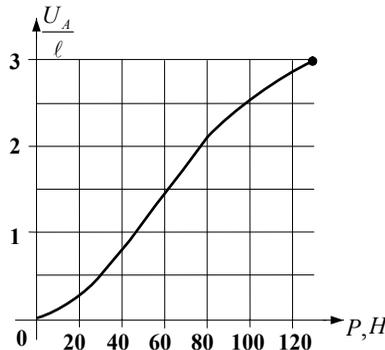


Рис. 2.128

По чертежу (см. рис. 2.127) измеряем угол  $\alpha$ ,  $\frac{\Delta\ell_1}{\ell}$  и  $\frac{U_A}{\ell}$ . По кривой рис. 2.128 (см. условие задачи) находим усилия  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующие удлинениям  $\frac{\Delta\ell_1}{\ell}$  и  $\frac{U_A}{\ell}$ . Сила  $P$  определится из условия равновесия:  $P = 2P_1 \cos \alpha + P_2$ .

Задаваясь несколькими значениями  $U_A$ , можно построить зависимость  $U_A(P)$ . Полученная кривая  $U_A(P)$  для заданной диаграммы растяжения показана на рис. 2.128.

**Задача 2.52.** Для решения задачи воспользуемся принципом наименьшей работы. Для этого выразим энергию деформаций рамы через усилия в ее стержнях (рис. 2.129, а). Вырежем узел  $A$  и  $B$  (рис. 2.129, б).

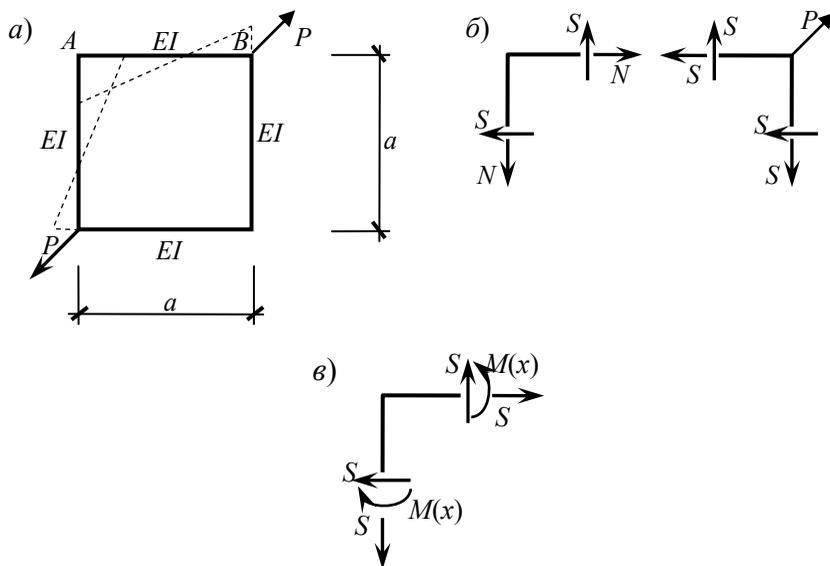


Рис. 2.129

Очевидно, из условий двойной симметрии, во всех стержнях рамы возникают одинаковые продольные силы  $N$  и поперечные силы  $S$ .

Из уравнения равновесия узла  $A$  следует  $S = N$ . Из уравнения равновесия узла  $B$  следует  $S = \frac{P}{2\sqrt{2}}$ . Изгибающий момент в сечении  $x$

(рис. 2.129, *в*)  $M(x) = M - S \cdot x = M - \frac{P}{2\sqrt{2}} \cdot x$ .

Тогда энергия деформаций  $U = 4 \int_0^a \frac{\left(M - \frac{P}{2\sqrt{2}} \cdot x\right)^2}{2EI} dx$  и имеет ми-

нимум в состоянии статического равновесия. Поэтому  $\frac{\partial U}{\partial M} = 0$ , отку-

да следует  $M = \frac{Pa}{4\sqrt{2}}$ .

Окончательная эпюра моментов приведена на рис. 2.129, *а* пунктиром.

**Задача 2.53.** На рис. 2.130, *а* и *б* приведены расчетные модели балконных плит до и после усиления.

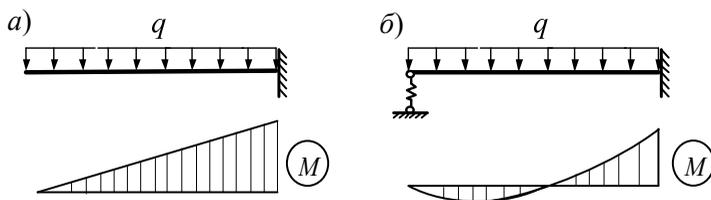


Рис. 2.130

Основной нагрузкой для балконной плиты является равномерно-распределенная. Во втором случае реакция пружины, которая моделирует действие элементов усиления, вызывает на части плиты растягивающие напряжения в нижних волокнах, что недопустимо, так как рабочая арматура располагается в балконных плитах в верхней зоне сечения. Однако может случиться, что жесткость пружины мала и конструктивная арматура в нижней зоне плиты способна воспринять этот момент. Окончательное решение следует принимать по результатам расчета.

**Задача 2.54.** Разложим силу  $2P$  (рис. 2.131, *a*) на симметричную и антисимметричную нагрузку (рис. 2.131, *б* и *в*). Сравнение с рис. 2.131, *a* говорит о том, что горизонтальное перемещение точки  $k$  во втором случае будет меньше на величину продольного укорочения ригеля от действия сил  $P$  (рис. 2.131, *б*).

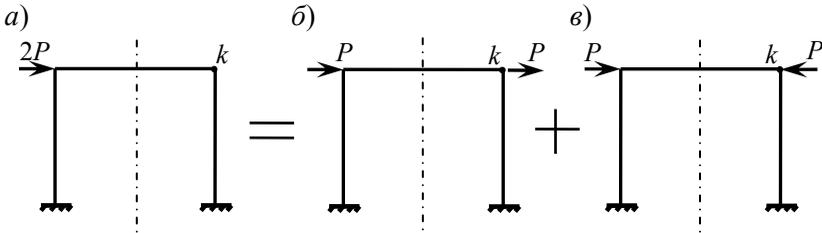


Рис. 2.131

**Задача 2.55.** По обычной теории (учитываются только деформации изгиба) в сечении I–I изгибающий момент отсутствует. Если рассчитывать по уточненной теории, то из-за поворота жесткого узла против часовой стрелки (рис. 2.132) в сечении I–I возникнет изгибающий момент от продольной силы в стержне  $ab$ .

**Задача 2.56.** Горизонтальные перемещения узлов рамы от температурного удлинения ригелей для двух вариантов одинаковы. Из теории метода перемещений известно, что единичное перемещение конца консольной балки вызывает момент в защемлении (рис. 2.133), равный  $\frac{3EI}{\ell^2}$ . Отсюда следует, что из-за температурных деформаций ригелей изгибающие моменты уменьшатся вчетверо. На это решение накладываются изгибающие моменты от температурных деформаций стоек, которые также уменьшатся.

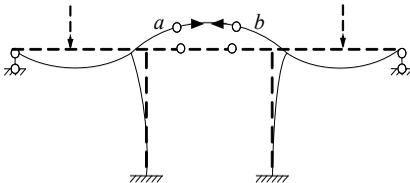


Рис. 2.132

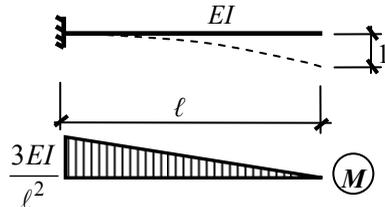


Рис. 2.133

**Задача 2.57.** Очевидно (рис. 2.134, а), что усилие в стойке постоянно по длине стойки. Значит, постоянным будет напряжение  $\sigma$  и деформация  $\varepsilon$ . Расчет будем вести методом сил (рис. 2.134, б) итерационным путем. Находим коэффициенты канонического уравнения метода сил (рис. 2.134, в и г).

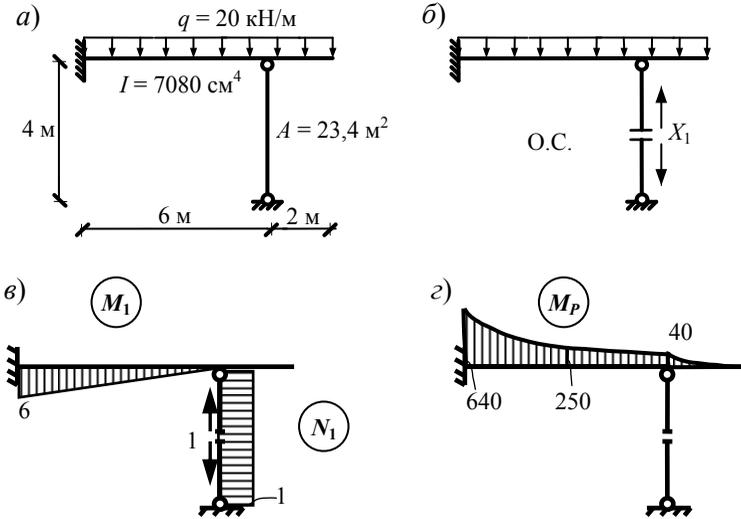


Рис. 2.134

Принято:  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  $\sigma_{\text{lim}} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ .

Получено в результате перемножения эпюр:

$\Delta_{1P} = -0,460048 \text{ м}$ ;  $\delta_{11} = 0,84262 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}$  (учитывались только деформации изгиба).

I итерация –  $X_1^{(1)} = 95000 \text{ Н}$ ;

$$\sigma^{(1)} = 4,059 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2; \quad \varepsilon^{(1)} = 0,000194;$$

$$E^{(1)} = E - \frac{4}{9} \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} \varepsilon^2 = 2,065 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$\delta_{11}^{(1)} = \delta_{11} + \frac{4}{E^{(1)} A} = 4,85089 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}.$$

II итерация –  $X_1^{(2)} = 94838 \text{ Н}$ ;

$$\sigma^{(2)} = 4,0529 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2; \quad \varepsilon^{(1)} = 0,0001974;$$

$$E^{(2)} = 2,0303 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$\delta_{11}^{(2)} = \delta_{11} + \frac{4}{E^{(2)}A} = \dots$$

III итерация –  $X_1^{(3)} = \dots$

$$\sigma^{(3)} = \dots; \quad \varepsilon^{(3)} = \dots;$$

$$E^{(3)} = \dots;$$

$$\delta_{11}^3 = \dots$$

Все эти цифровые результаты рекомендуется просчитать самостоятельно и оформить в виде таблицы или графика, где наглядно видна сходимость решения.

**Задача 2.58.** Стержень  $AB$  сжат. Для того, чтобы убедиться в этом необходимо раскрыть статическую неопределимость системы. Усилия в шарнире (рис. 2.135) будут:

$$X_1 = -\frac{11}{285}P; \quad X_2 = \frac{48}{285}P.$$

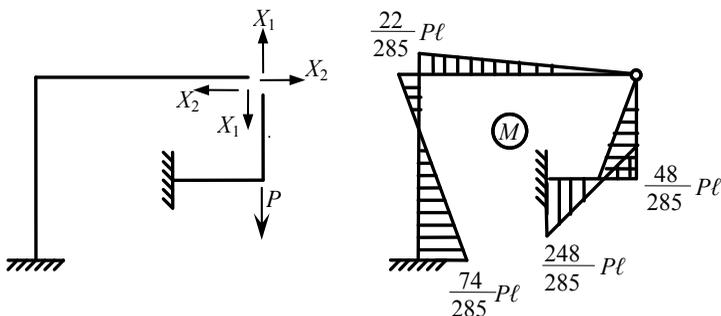


Рис. 2.135

**Задача 2.59.** Несмотря на то, что данная рама без опор (рис. 2.136, *a*) однажды статически неопределима, наличие двух осей симметрии позволяет из уравнений равновесия построить эпюру изгибающих моментов. Рассмотрим равновесие узла *A* и *B* (рис. 2.136, *б*)

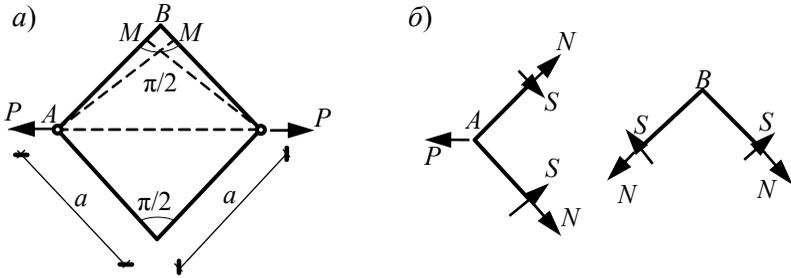


Рис. 2.136

Если обозначить через  $M$  – момент в узле  $B$ , то поперечная сила на участке  $AB$ :  $Q_{AB} = S = \frac{M}{a}$ . Если рассмотреть равновесие узла  $B$ , то можно получить  $N = S$ . Равновесие узла  $A$  дает:

$$4 \frac{M \sqrt{2}}{a} = P \Rightarrow M = \frac{Pa}{2\sqrt{2}}.$$

**Задача 2.60.** Студент совершил несколько грубых ошибок:

Ошибка 1. Данная система является однажды статически неопределимой, а не составной, где можно выделить основную и второстепенную части.

Ошибка 2. Усилия  $V_1$  и  $H_1$  не вызывают в части II никаких  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , так как они приложены к опоре.

Ошибка 3. Часть II также является однажды статически неопределимой.

**Задача 2.61.** Нет, не может, так как упругая линия балки не может быть выпуклой (вогнутой) на протяжении двух смежных пролетов.

**Задача 2.62.** При таком расположении деревянных прокладок горизонтальные железобетонные части лотков испытывают нагрузку только от собственного веса.

**Задача 2.63.** Рассчитывая данную балку методом перемещений, можно показать, что углы поворота сечений на каждой опоре отсутствуют. Поэтому эпюры изгибающих моментов в пределах каждого пролета будут одинаковы и равны эпюрам изгибающих моментов в однопролетной балке с зашеченными опорами от действия равномерно распределенной нагрузки.

**Задача 2.64.** Будем считать, что трещина образуется в тех местах стержня, где главное растягивающее напряжение  $\sigma_1$  достигает расчётного сопротивления бетона на растяжение  $f_{ct}(R_{bt})$ . Для этого рассмотрим равновесие элементарного параллелепипеда, вырезанного из стержня в окрестности точки  $A$  (рис. 2.137). По его граням действуют только касательные напряжения  $\tau_{xy}$  [1].

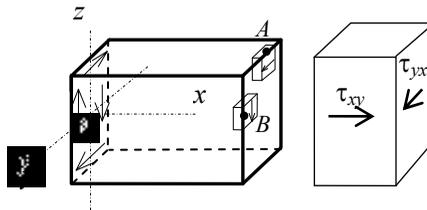


Рис. 2.137

Напряженное состояние в этой точке стержня описывается тензором напряжений:

$$T_H = \begin{pmatrix} 0 & b^2 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_{xy} = b^2.$$

Инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = 0; \quad I_2 = -b^4; \quad I_3 = 0.$$

Главные напряжения:

$$\sigma_1 = b^2; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -b^2.$$

Находим направляющие косинусы первой главной площадки из системы уравнений:

$$\begin{cases} -b^2 \ell_1 + b^2 m_1 = 0, \\ b^2 \ell_1 - b^2 m_1 = 0, \\ -b^2 n_1 = 0, \\ \ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 = -m_1; & n_1 = 0; \\ m_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; & \ell_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

На рис. 2.138, *a* показано направление действия  $\sigma_1$  в этой точке стержня. Очевидно, трещина в этой точке образуется перпендикулярно направлению действия  $\sigma_1$ .

Рассматривая равновесия второго элементарного параллелепипеда в окрестности точки *B* (рис. 2.138, *б*) и повторяя предыдущие операции для тензора напряжений в этой точке бетонного стержня, получим последовательно

$$T_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_{xz} = -c^2;$$

$$\sigma_1 = -c^2; \quad \ell_1 = -n_1 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad m_1 = 0.$$

Направление действия  $\sigma_1$  в этой точке показано на рис. 2.138, *в*.

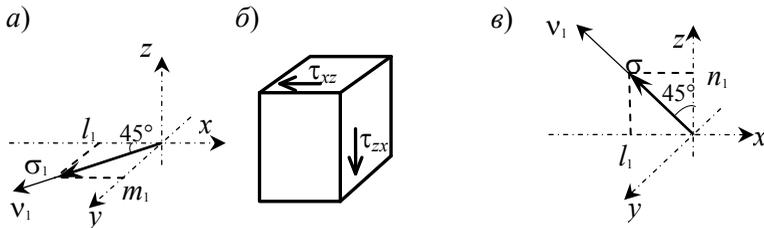


Рис. 2.138

Эти два решения позволяют показать направление и положение трещины, образующейся при действии крутящего момента на бетонный стержень (рис. 2.139).

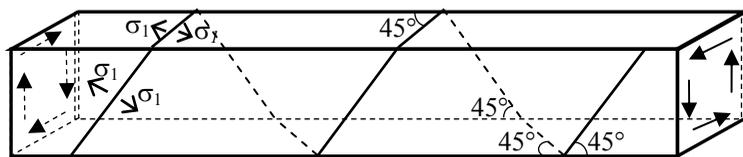


Рис. 2.139

**Задача 2.65.** Участок местного бетонирования при действии вертикальной нагрузки можно рассматривать как балку-стенку, работающую в условиях плоской деформации (рис. 2.140).

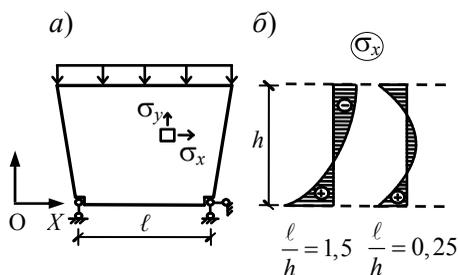


Рис. 2.140

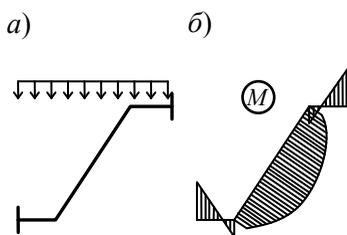


Рис. 2.141

В зависимости от отношения  $\frac{l}{h}$  эпюра нормальных напряжений может иметь различное очертание (рис. 2.140, б) [1]. Поэтому при определенных значениях  $\frac{l}{h}$  можно не ставить арматуру в направлении  $0x$  рассматриваемой балки-стенки.

**Задача 2.66.** Расчетная модель лестничного марша (марш испытывает действие вертикальных нагрузок) показана на рис. 2.141, а, эпюра изгибающих моментов на рис. 2.141, б. Армирование выполнено правильно на первом рисунке условия задачи.

**Задача 2.67.** Для железобетонной плиты, находящейся в условиях плоской деформации, рабочий шов выполняется перпендикулярно опорным поверхностям плиты для того, чтобы обеспечить состояние плоской деформации, являющееся предпосылкой расчета, и во время перерыва.

В неразрезной железобетонной балке рабочий шов устраивается в местах нулевых значений изгибающих моментов от расчетной нагрузки с целью сохранить положение растянутых волокон в соответствии с расчетом.

**Задача 2.68.** Во время выреза заготовок нужно пользоваться принципом Сен-Венана [1]. Первая заготовка (рис. 2.142, а) из стойки фермы и вторая заготовка (рис. 2.142, б) из опорного узла фермы испытывают действие уравновешенной системы сил, напряжения от которых быстро убывают по мере удаления от места приложения этих сил. На рисунках к условию задачи точка приложения уравновешенной системы сил обозначена через  $O$ .

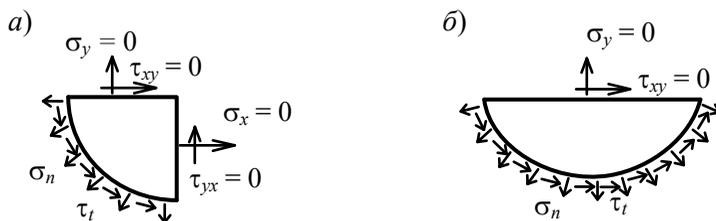


Рис. 2.142

**Задача 2.69.** В приопорных зонах двухопорных балок главные растягивающие напряжения  $\sigma_1$  направлены под углом  $45^\circ$  к горизонтальной оси балки (см. задачу 2.64).

**Задача 2.70.** При  $r \gg h$  крутильную жесткость первого сечения следует считать по формуле [1]:

$$GT = G \cdot \frac{1}{3}bh^3 = G \cdot \frac{1}{3}2\pi rh^3 = \frac{2\pi}{3}Grh^3.$$

Во втором случае [3]:

$$GT = G \cdot \frac{\pi}{4} (2\pi r)^3 h = 2\pi Gr^3 h,$$

то есть увеличилась в  $\frac{2\pi Gr^3 h}{\frac{2\pi}{3} Grh^3} = 9 \frac{r^2}{h^2}$  раз.

**Задача 2.71.** Для решения поставленной задачи можно использовать решение Кирша о растяжении бесконечной пластины с круглым отверстием [1] (рис. 2.143, а). Балконная плита по краям сжата силами предварительного напряжения, прямоугольное отверстие имеет четыре входящих угла (зоны естественной концентрации напряжений). Это позволяет ориентировочно показать положение трещин (рис. 2.143, б).

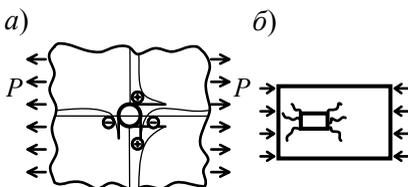


Рис. 2.143

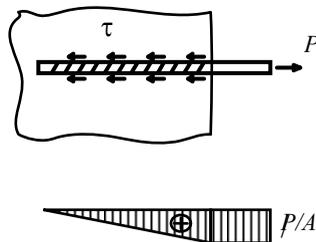


Рис. 2.144

**Задача 2.72.** Изгибающие моменты в пластине в декартовых координатах определяются по формулам [1]:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Используя теорию конечных разностей и учитывая, что для бетона  $C^{20/25}$   $E = 2,9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0,2$ , находим:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad M_x = -D \left( \frac{w_b - 2w_k + w_d}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_a - 2w_k + w_c}{\Delta y^2} \right).$$

**Задача 2.73.** Вблизи опор, так как в этих местах действуют вертикальные опорные реакции (см. задачу 2.69).

**Задача 2.74.** Эпюра нормальных напряжений в стержне будет повторять эпюру продольных сил в этом стержне, ординаты которой разделены на постоянную величину, равную площади поперечного сечения стержня (см. рис. 2.144) (см. задачу 2.17).

**Задача 2.75.** Очертание эпюры нормальных напряжений в вертикальном сечении балки-стенки будет зависеть от отношения  $\frac{3/8+1/2}{h} \ell$  (см. задачу 2.65). Если это отношение больше 2–3, то эпюра нормальных напряжений будет приближаться к эпюре нормальных напряжений по решению сопротивления материалов для балок [13].

**Задача 2.76.** Балка разбивается на три участка (рис. 2.145), два крайних, находящихся в упругом состоянии, и средний – в упруго-пластическом.

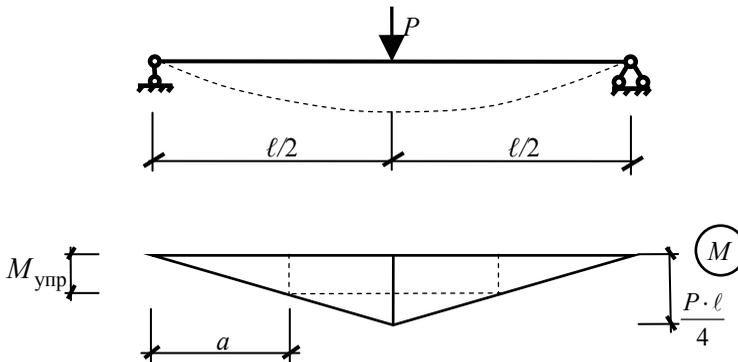


Рис. 2.145

Протяжения упругих участков  $a = \frac{2M_{\text{упр}}}{P}$ . Для них дифференциальное уравнение изогнутой оси:  $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ , где  $M = \frac{P}{2}x$ .

Для среднего участка, находящегося в упруго-пластическом состоянии дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{M_{\text{упр}}}{EI \sqrt{3 - \frac{P \cdot x}{M_{\text{упр}}}}}.$$

После интегрирования и использования граничных условий

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y_1 &= 0, \\ x = a, \quad y_1' &= y_2', \quad y_1 = y_2, \\ x = \frac{\ell}{2}, \quad y_2 &= 0, \end{aligned}$$

имеем: 
$$f = \frac{M_{\text{упр}}}{3P^2 EI} \left[ 20 - \left( 12 + \frac{P \cdot \ell}{M_{\text{упр}}} \right) \sqrt{3 - \frac{P \cdot \ell}{M_{\text{упр}}}} \right].$$

При  $P = P_{\text{упр}} = \frac{4M_{\text{упр}}}{P}$  (предельное упругое состояние) получаем

общеизвестное выражение: 
$$f = \frac{P_{\text{упр}} \ell^3}{48EI}.$$

При  $P = P_{\text{пл}} = \frac{4M_{\text{пл}}}{P}$  (предельное пластическое состояние среднего сечения балки, так называемое состояние «пластического шарнира»), где для прямоугольного сечения  $M_{\text{пл}} = \frac{3}{2} M_{\text{упр}}$ ,

имеем: 
$$f = \frac{M_{\text{упр}}}{3P_{\text{пл}}^2 EI} = \frac{5}{27} \frac{M_{\text{упр}} \cdot \ell^2}{EI} = \frac{P \cdot \ell^3}{21,6EI}.$$

При найденном  $f$  еще возможно равновесие между внешним и внутренними усилиями, распределенными по среднему сечению балки.

Малейшее превышение силой значения  $P_{\text{пл}}$  при отсутствии способности материала к упрочнению означает неограниченный рост деформации.

**Задача 2.77.** Приводим без изменения решения Н. И. Безухова [7]. Задаваясь в первом приближении для компонентов смещения сле-

дующими выражениями (вытекающими из качественной картины деформации полосы, показанной на рис. 2.146):

$$u = u_0 e^{-n_1 x}, \quad v = c \cdot y \cdot e^{-n_2 x} \sin kx,$$

и, обеспечивая для крайних точек 1 и 2 условия  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0, y=h/2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0, y=h/2}$

(это потребует равенства  $c = \frac{2b}{k}$ ), составляем далее выражение для компонентов деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -n_1 u_0 e^{-n_1 x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = c \cdot e^{-n_2 x} \sin kx;$$

$$\gamma_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2b y e^{-n_1 x} + c y e^{-n_2 x} [-n_2 \sin kx + k \cos kx]$$

и, наконец, выражение для энергии

$$\Theta = G \iint \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy.$$

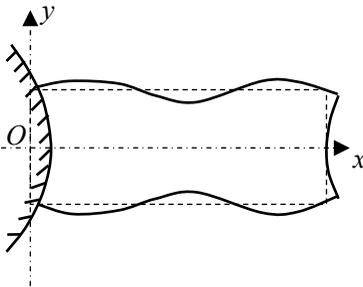


Рис. 2.146

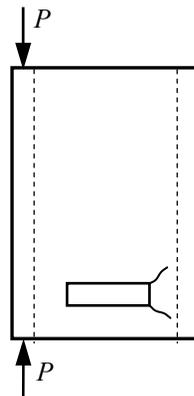


Рис. 2.147

Из условия минимума энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_2} = 0$$

найдем значения  $n_1$  и  $n_2$ .

В зависимости от величины напряжений, которые в результате указанного приближенного решения окажутся на правом конце (относительно напряжений в окрестности левого торца), которых в действительности нет, будет решен вопрос о практической достаточности выполненного решения или необходимости дальнейших приближений.

**Задача 2.78.** Данная панель имеет прямоугольное отверстие с четырьмя входящими углами, которые являются зонами концентрации напряжений (рис. 2.147). Значит, трещины должны выходить из вершины отверстия. Так как левая сторона панели сжата, а правая, вследствие внецентренного приложения нагрузки, растянута, то трещины возникнут у двух правых входящих углов отверстия.

**Задача 2.79.** Приводим решение С. П. Тимошенко [8] для данной задачи с комментариями авторов (в скобках). Устраним среднюю опору и найдем прогиб точки  $B$  (данная многопролетная балка однажды статически неопределима). Он будет зависеть от искривления оси балки и от погружения понтонов. Первая часть прогиба равна

$$f_1 = \frac{P \cdot c}{48EI} \left[ 3(2\ell)^2 - 4c^2 \right] \text{ (найдено путем перемножения эпюр).}$$

Погружение крайних понтонов будет:

$$f_A = \frac{P \cdot c}{2\ell F}; \quad f_C = \frac{P \cdot (2\ell - c)}{2\ell F},$$

где  $\frac{P \cdot c}{2\ell}$ ;  $\frac{P \cdot (2\ell - c)}{2\ell}$  – опорные реакции в средней балке без средней опоры от действия силы  $P$ .

Погружение понтона под действием единичной силы, то есть податливость понтона  $\delta$ , удовлетворяет уравнению  $\gamma_0 F \delta = 1$ , откуда

$$\delta = \frac{1}{\gamma_0 \cdot F} \quad (\gamma_0 - \text{объемный вес воды, равный } 1).$$

Вторая часть искомого прогиба будет равна  $f_B = \frac{f_A + f_C}{2} = \frac{P}{2F}$ .

При наличии средней опоры в точке  $B$  будет действовать снизу вверх опорная реакция  $X$  (основное неизвестное метода сил). Она уменьшит вычисленный выше прогиб  $f_B$  на величину  $\frac{X}{2F} + \frac{X(2\ell)^3}{48EI}$ .

Получившееся, таким образом, окончательное значение прогиба, очевидно, должно равняться осадке среднего понтона, равной  $\frac{X}{F}$ .

Для определения  $X$  получаем уравнение

$$\frac{P \cdot c}{48EI} [3(2\ell)^2 - 4c^2] + \frac{P}{2F} - \frac{X}{2F} - \frac{X \cdot (2\ell)^3}{48EI} = \frac{X}{F}.$$

**Задача 2.80.** Обозначим  $r$  – реактивный момент, возникающий в опоре  $B$  (рис. 2.148) при ее повороте на единичный угол. Решаем задачу методом перемещений.

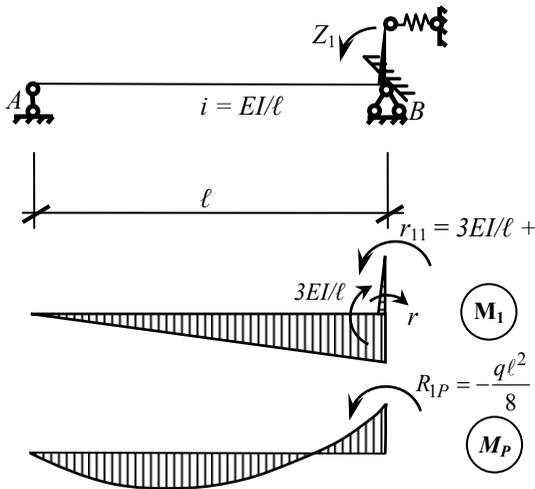


Рис. 2.148

На рис. 2.148 показаны: основная система метода перемещений, единичная и грузовая эпюры в основной системе метода перемещений, направления и значения единичной и грузовой реакций.

Следовательно, неизвестная метода перемещений:

$$Z_1 = \frac{q\ell^2}{8\left(\frac{3EI}{\ell}\right)},$$

а опорный момент вычисляется по выражению

$$M_B = r\varphi = r \frac{q\ell^2}{8\left(\frac{3EI}{\ell}\right)}.$$

В предельных случаях: при  $r = 0$  (шарнирная опора)  $M_B = 0$ ;

при  $r \rightarrow \infty$  (жесткое защемление)  $M_B = \frac{q\ell^2}{8}$ .

### Библиографический список

1. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 398 с.
2. Щербо, А. Г. Основы теории упругости и пластичности: учебно-метод. комплекс для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» / А. Г. Щербо. – Новополюк: ПГУ, 2008. – 240 с.
3. Александров, А. В. Сопротивление материалов: учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 4-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
4. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова. – изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1973. – 627 с.
5. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 368 с.

6. Руководство по перевозке автомобильным транспортом строительных конструкций / Центр, н.-и. и проектно-эксперим. ин-т организов., механиз. и технич. помощи стр-ву Госстроя СССР. – М.: Стройиздат, 1980. – 114 с.

7. Безухов, Н. И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести: учебное пособие / Н. И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1965. – 320 с.

8. Тимошенко, С. П. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / С. П. Тимошенко; ред. Е. В. Пулькина. – 10-е изд., стереотип. – Л.; М.: Гостехтеориздат, 1934. – 224 с.

9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / сост.: М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

10. Кончковский, З. Плиты. Статические расчеты: пер. с польск. / З. Кончковский. – М.: Стройиздат, 1984. – 480 с.

11. Лукаш, П. А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.

12. Мурашев, В. И. Железобетонные конструкции. Общий курс / В. И. Мурашев, Э. Е. Сигалов, В. Н. Байков. – М.: Госстройиздат, 1962. – 639 с.

13. Как избежать ошибок при строительстве индивидуального дома: научно-популярная литература / Ф. Сэги; пер. с венг. С. С. Попова; под ред. Ю. А. Муравьева. – Москва: Стройиздат, 1987. – 190, [2] с.

14. Рабинович, И. М. Курс строительной механики стержневых систем: в 2 ч / И. М. Рабинович. – 2-е изд., перераб. – Москва: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – Ч. 2: Статически неопределимые системы.

15. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – М.: Наука. – 363 с.

16. Босаков, С. В. Об одном свойстве зависимости «момент – кривизна» для балок и его использовании в инженерных расчетах / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Строительная наука и техника. – 2006. – № 1. – С. 58–61.

17. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.]; под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.

## Глава 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

### 3.1. Краткие сведения из теории

#### *Основные задачи динамических расчетов.*

#### *Число степеней свободы*

*Колебания* представляют одну из наиболее распространенных форм движения. Колеблются здания и сооружения от ветра, землетрясения, от работы различных машин и механизмов. При колебании сооружения величины и знаки внутренних усилий (напряжений) непрерывно меняются, что может привести к быстрому разрушению отдельных элементов, частей или всего сооружения.

Динамика сооружений изучает механические колебания сооружений. Как теоретическая наука, она разрабатывает различные методы и алгоритмы расчета сооружений на динамические воздействия. В то же время она является прикладной наукой и решает конкретные задачи.

Среди решаемых динамикой сооружений задач самыми важными являются *четыре задачи динамических расчетов* инженерной системы и ее элементов:

- 1) определение частот и форм собственных колебаний;
- 2) проверка на резонанс;
- 3) проверка динамической прочности;
- 4) проверка динамической жесткости.

Под степенью свободы в динамике сооружений понимается возможность в определенном направлении независимого перемещения отдельной массы. В отличие от понятия степени свободы в статике сооружений (например, при кинематическом анализе), при определении динамических степеней свободы учитываются деформации элементов.

Число динамических степеней свободы  $W_{\text{дин}}$  – это наименьшее число параметров, необходимое для определения положения всех масс системы в любой момент времени.

Различают стержневые системы: с одной степенью свободы (рис. 3.1, *а*), с несколькими степенями свободы (рис. 3.1, *б*) и с бесконечным числом степеней свободы (рис. 3.1, *в*).

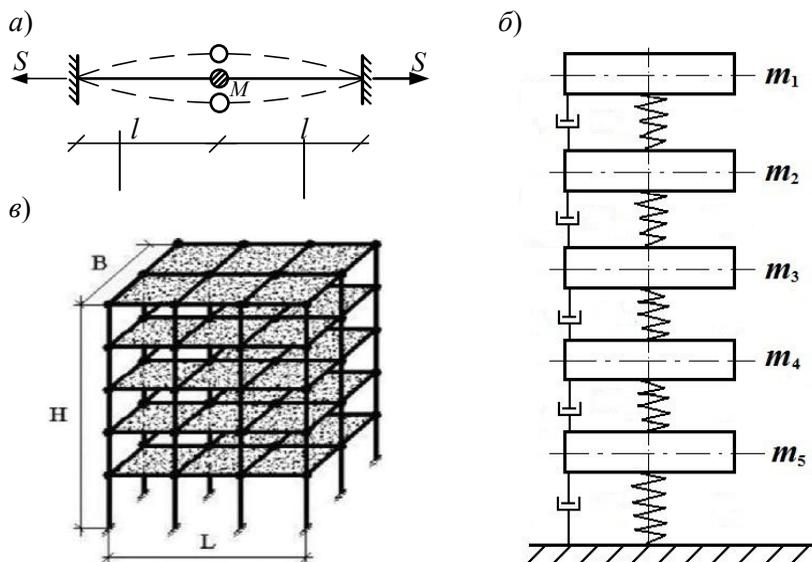


Рис. 3.1

При моделировании реальных сооружений и их элементов в строительной механике используются динамические расчетные схемы (модели) этих сооружений и их элементов с соответствующим количеством степеней свободы (см. рис. 3.1).

***Динамические характеристики стержневых систем.  
Спектр частот и форм собственных колебаний***

Частоты и формы собственных колебаний наряду со степенью свободы, коэффициентом диссипации и реакцией линейного осциллятора являются важнейшими динамическими характеристиками стержневой системы с несколькими степенями свободы. Спектр собственных частот такой системы  $\omega_k$  без учета сил сопротивления находится из обращения в ноль определителя

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}M_1 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12}M_2 & \dots & \delta_{1k}M_k \\ \delta_{21}M_1 & \delta_{22}M_2 - \frac{1}{\omega^2} & \dots & \delta_{2k}M_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1}M_1 & \delta_{r2}M_2 & \dots & \delta_{kk}M_k - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

где  $k$  – число степеней свободы масс, расположенных на системе. Может не совпадать с количеством масс, но всегда равно или больше этого количества;

$\delta_{ik}$  – перемещения от единичной силы, которые определяются обычными методами строительной механики. Физический смысл  $\delta_{ik}$  – перемещение точки приложения  $i$ -й единичной силы, вызванное действием  $k$ -й единичной силы по направлению колебаний;

$M_k$  – величина массы, расположенной на системе, с номером  $k$ .

После нахождения частот собственных колебаний определяются с точностью до постоянного множителя формы собственных колебаний, соответствующие каждой частоте собственных колебаний.

При применении энергетического способа определения частот собственных колебаний стержня задаются его формой колебаний, обязательно удовлетворяющей геометрическим граничным условиям, и используют формулу

$$\omega^2 = \frac{EI \int_0^{\ell} (Y'')^2 dx}{\int_0^{\ell} m(x) (\dot{Y})^2 dx + \sum_{i=1}^k M_i (\dot{Y}_i)^2}, \quad (3.2)$$

где  $m(x)$  – закон изменения распределенной массы по длине стержня;

$M_i$  – величина сосредоточенной массы в точке  $i$  стержня;

$\dot{Y}_i$  – амплитудное значение скорости сосредоточенной массы, расположенной в точке  $i$ .

Формула для определения первой (основной) частоты собственных колебаний системы

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} \quad (3.3)$$

справедлива для определения частоты собственных колебаний прямоугольной или круглой пластинки с одной степенью свободы, а также, для любых инженерных конструкций, замененных соответствующей эквивалентной системой с одной степенью свободы.

Как правило, первая частота собственных колебаний системы имеет решающее значение при динамических расчетах и поэтому она называется основной.

Силы инерции колеблющихся масс при вынужденных гармонических колебаниях системы с  $k$ -степенями свободы без демпфирования определяются из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \delta_{11} - \frac{1}{M_1 \theta^2} \right) Z_1 + \delta_{12} Z_2 + \dots + \delta_{1k} Z_k + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} Z_1 + \left( \delta_{22} - \frac{1}{M_2 \theta^2} \right) Z_2 + \dots + \delta_{2k} Z_k + \Delta_{2p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{k1} Z_1 + \delta_{k2} Z_2 + \dots + \left( \delta_{kk} - \frac{1}{M_k \theta^2} \right) Z_k + \Delta_{kp} = 0, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

где  $\theta$  – круговая частота вынужденных колебаний;

$Z_i$  – сила инерции колеблющейся массы  $M_i$ ;

$\Delta_{ip}$  – перемещение массы  $M_i$  по направлению  $i$ -й степени свободы от амплитудного значения внешней гармонической нагрузки.

При использовании уравнений (3.4) не следует забывать, что все массы колеблются с одной частотой вынужденных колебаний.

При вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы из уравнений (3.4) естественно получается выражения для дина-

мического коэффициента, через который вычисляются динамические перемещения и усилия.

### 3.2. Динамические расчеты стержневых систем и их элементов

**Задача 3.1.** Определить энергетическим методом первую частоту собственных колебаний балки с изгибной жесткостью  $EI = \infty$  (рис. 3.1). Жесткость упруго-податливых опор принять равной  $r$ .

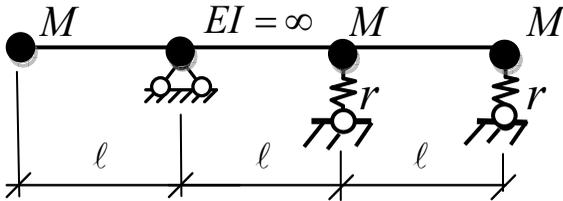


Рис. 3.1

**Задача 3.2.** Определить энергетическим методом основную частоту шарнирно опертой балки с равномерно распределенной массой  $m$  (рис. 3.2) и правой упругой опорой жесткостью  $r$ .

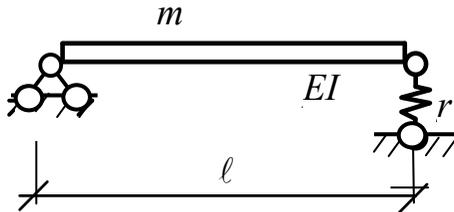


Рис. 3.2

**Задача 3.3.** Для оценки первой частоты собственных колебаний девятиэтажного дома, возводимого в сейсмически опасном районе, конструктор создал плоскую расчетную модель дома (рис. 3.3). Определить  $\omega_1$ , считая изгибную жесткость стержней расчетной модели равной  $\infty$ . Решить задачу двумя способами.

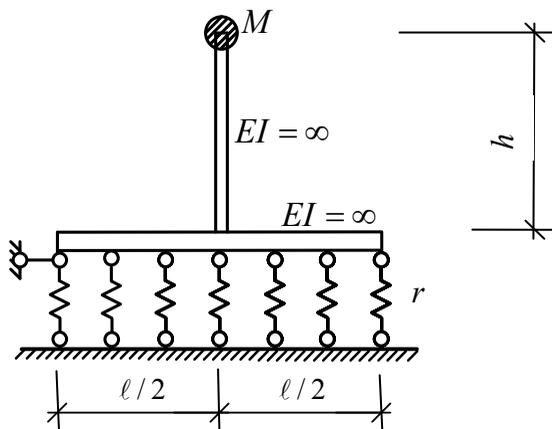


Рис. 3.3

**Задача 3.4.** Найти закон колебаний массы  $M$  (рис. 3.4), расположенной на двухопорной балке с упругими опорами, если ее вертикальные опоры колеблются по закону  $y_0(t) = y_0 \cdot \sin \theta t$ .

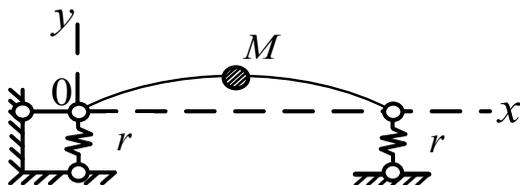


Рис. 3.4

**Задача 3.5.** Для системы с одной степенью свободы найдена частота собственных колебаний  $\omega = \sqrt{738,5}$  рад/с. Определить перемещение массы от собственного веса по направлению колебаний.

**Задача 3.6.** Осадка фундаментной плиты высотного здания составила 0,039 м. Определить частоты вертикальных и вращательных колебаний здания, рассматривая его как жесткую раму (рис. 3.5) на упругом основании, моделью которого конструктором выбрано основание Винклера. Масса здания –  $M$ .

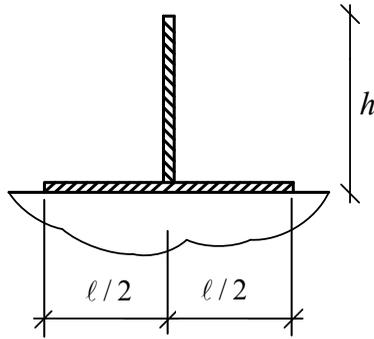


Рис. 3.5

**Задача 3.7.** Определить частоту маятниковых колебаний [1] пологой нити (рис. 3.6).

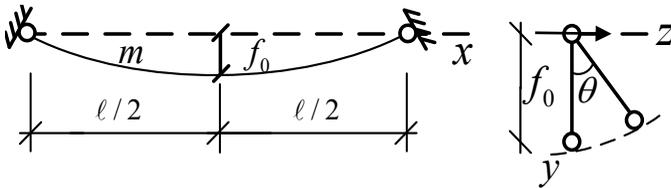


Рис. 3.6

**Задача 3.8.** Методом Ритца определить основную изгибную частоту собственных колебаний сжатого стержня с непрерывно распределенной массой  $m$  (рис. 3.7).

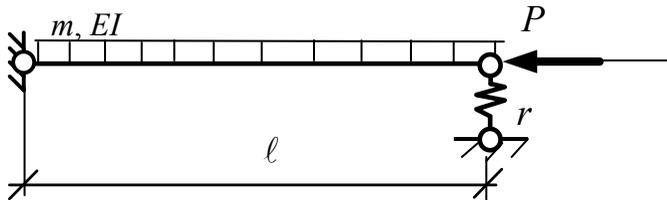


Рис. 3.7

**Задача 3.9.** Тяжелый цилиндр насажен на невесомый вертикальный стержень (рис. 3.8). Определить частоту крутильных колебаний цилиндра ( $GT$  – крутильная жесткость стержня).

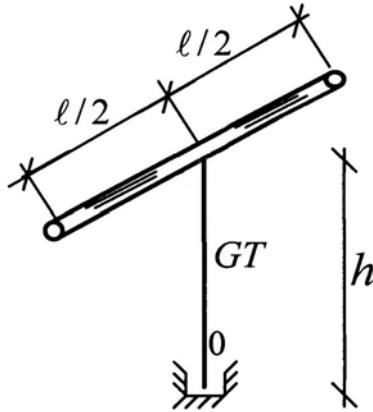


Рис. 3.8

**Задача 3.10.** Определить частоту собственных вертикальных колебаний поплавка (рис. 3.9).

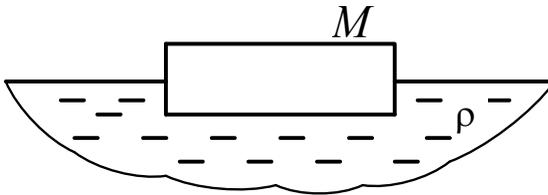


Рис. 3.9

**Задача 3.11.** Определить первую частоту продольных колебаний стержня (рис. 3.10) с учетом нелинейно упругой зависимости

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} \varepsilon^3.$$

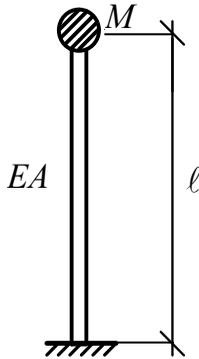


Рис. 3.10

**Задача 3.12.** Вертикальная осадка здания составила 14 см. Рассматривая грунт как линейно деформируемое основание, определить частоту вертикальных колебаний здания, рассматривая его как систему с одной степенью свободы.

**Задача 3.13.** На горизонтальную пластинку, совершающую вертикальные колебания с частотой 500 Гц по вертикали, насыпан мелкий песок. Найти амплитуду колебаний пластинки, если песчинки подсакаивают на величину  $h = 3$  мм относительно положения, в котором они находились на неподвижной пластинке [2].

**Задача 3.14.** Найти первые две частоты собственных продольных колебаний консольного стержня с распределенной массой приближенным способом (рис. 3.11).

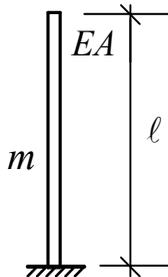


Рис. 3.11

**Задача 3.15.** Пользуясь энергетическим подходом, найти первую частоту поперечных колебаний натянутой струны постоянного сечения [3] (рис. 3.12).

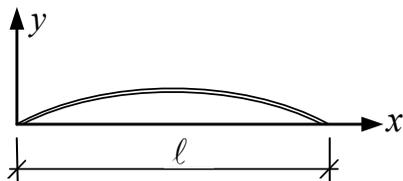


Рис. 3.12

**Задача 3.16.** Необходимо выполнить расчет многоэтажного жилого дома со связевым каркасом на ветровую пульсацию. Вид здания в плане изображен на рис. 3.13.

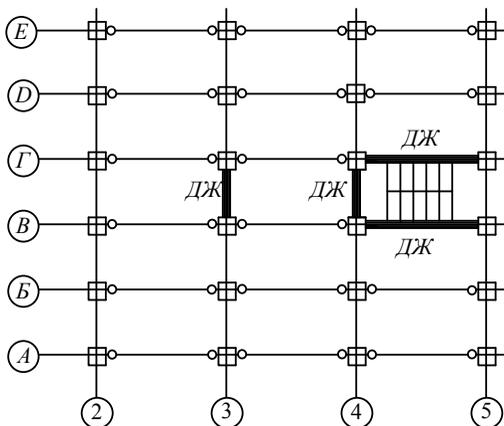


Рис. 3.13

Выяснить, почему нельзя при определении частот и форм собственных колебаний здания заменить его консольным стержнем с сосредоточенными массами на уровне каждого этажа?

**Задача 3.17.** Сваебойная установка работает вблизи спорт-комплекса, спортзал которого перекрыт металлическими фермами.

На рис. 3.14 даны положения установки в разрезе и плане относительно спорткомплекса, масса которого равна  $M$ . Считая энергию падающего молота равной  $\Pi$ , дать оценку последствий работы сваебойной установки.

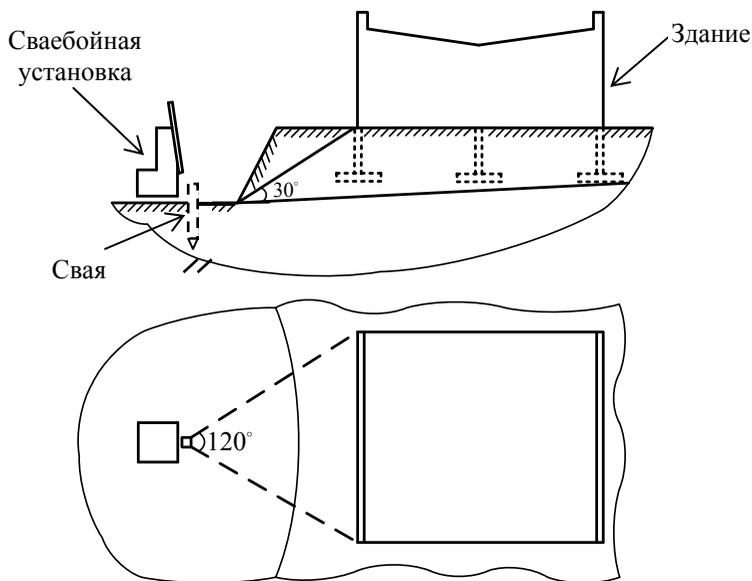


Рис. 3.14

**Задача 3.18.** В балках ж/б мостов в результате ползучести железобетона часто развиваются большие прогибы, и, если мост имеет много равных пролетов, эти прогибы могут привести к возникновению гармоничных колебаний при прохождении транспорта по проезжей части моста с постоянной скоростью. Рессоры и амортизаторы автомобиля можно рассматривать как систему виброизоляции, которая ограничивает вертикальные перемещения, передаваемые пассажирам. На рис. 3.15 показана идеализированная модель такой системы [4].

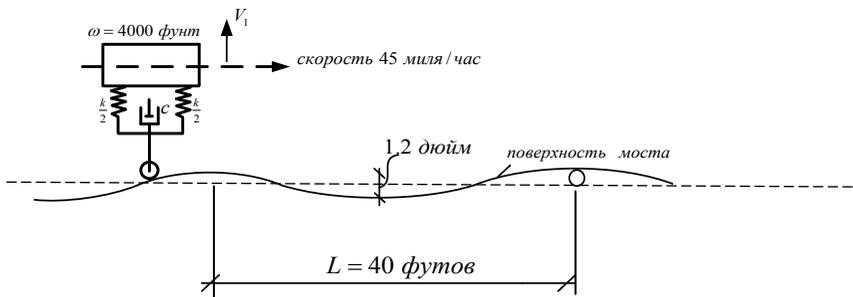


Рис. 3.15

Требуется определить параметры установившихся вертикальных колебаний автомобиля при затухании, равном 40 % критической величины [4]\*.

**Задача 3.19.** Свободно опертая неразрезная балка (рис. 3.16) внезапно лишается средней опоры  $B$ . Найти уравнение ее движения [5]\*\*.

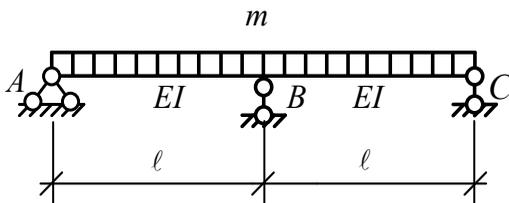


Рис. 3.16

**Задача 3.20.** Груз весом  $W$  опускается равномерно со скоростью  $V$  и внезапно останавливается (рис. 3.17). Определить максимальное растягивающее напряжение в тросе [5].

\* Авторы задачи под критической величиной коэффициента затухания понимают такое его значение, при котором колебательное движение отсутствует.

\*\* В современной отечественной нормативной литературе подобный расчет носит название расчета на прогрессирующее разрушение.

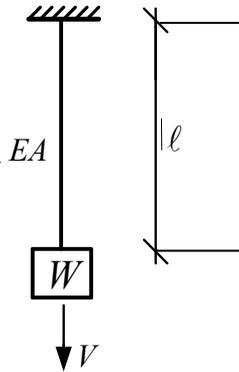


Рис. 3.17

**Задача 3.21.** Груз весом  $W = 5,45 \cdot 10^4$  Н установлен в середине пролета шарнирно-опертой балки (рис. 3.18), изготовленной из двух стальных швеллеров ( $I = 1,45 \cdot 10^{-4}$  м<sup>4</sup>). Пренебрегая весом балки, определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний груза  $W$ , если к концу балки приложен изгибающий момент  $M(t) = M \sin \theta t$  и дано:  $\theta = 0,9$  рад/с;  $M = 1,16 \cdot 10^3$  Нм [5].

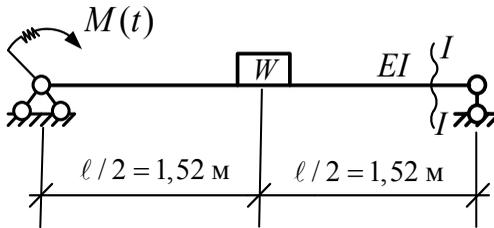


Рис. 3.18

**Задача 3.22.** Определить частоту собственных колебаний массы, подвешенной на двух пружинах (рис. 3.19) [5].

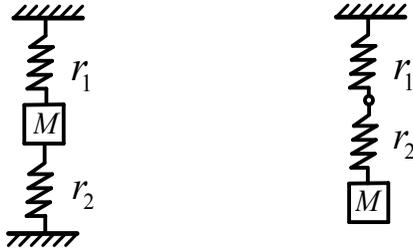


Рис. 3.19

**Задача 3.23.** Груз весом  $\omega$  (рис. 3.20) поднимается подъемным механизмом с постоянной скоростью  $V$ . Определить максимальное напряжение в тросе, когда во время движения внезапно останавливается барабан, наматывающий его верхний конец [5].



Рис. 3.20

**Задача 3.24.** Свободно опертая балка изгибается силой  $P$ , приложенной посередине (рис. 3.21). Какие колебания балки возникнут, если сила  $P$  будет внезапно снята?

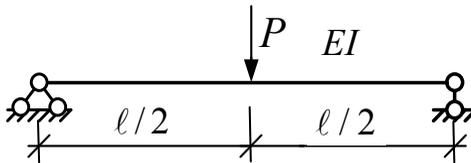


Рис. 3.21

**Задача 3.25.** В начальный момент времени  $t = 0$  ось шарнирно опертой балки (рис. 3.22) прямолинейна, но вследствие удара задана начальная скорость  $V$  короткому участку  $\delta$  балки, расположенному на расстоянии  $c$  от левой опоры. Найти закон колебаний балки после удара [5].

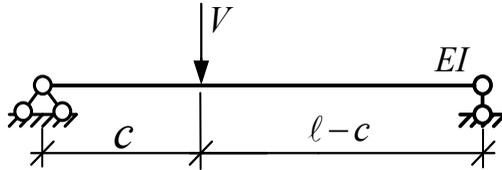


Рис. 3.22

**Задача 3.26.** Небольшой шар массой  $M$  прикреплен к середине туго натянутого троса длиной  $2l$  (рис. 3.23). Трос не сопротивляется изгибу и имеет большое предварительное натяжение  $S$ .

Определить период колебаний массы  $M$  [5].

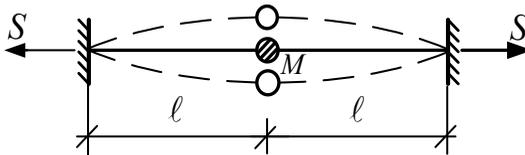


Рис. 3.23

### 3.3. Динамические расчеты пластинок

**Задача 3.27.** Нормами [6] рекомендуется транспортировка стеновых панелей в вертикальном (рабочем) положении (рис. 3.24) на панелевозах. Объяснить, почему эти панели нельзя перевозить в горизонтальном положении?

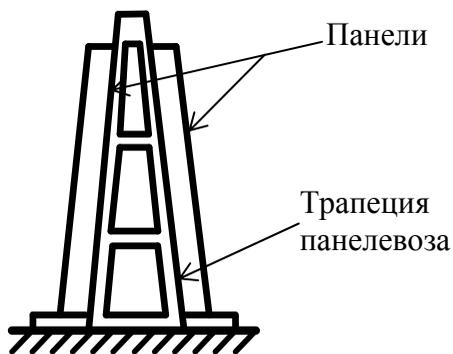


Рис. 3.24

**Задача 3.28.** Сравнить частоты основного тона свободных колебаний плиты прямоугольной формы в случае свободного опирания (рис. 3.25) и в случае защемления по контуру (рис. 3.26) [7].

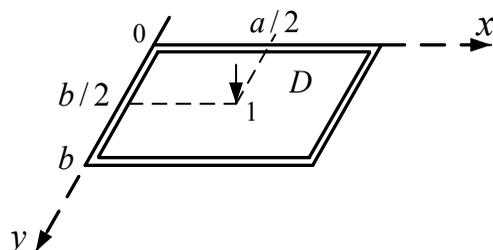


Рис. 3.25

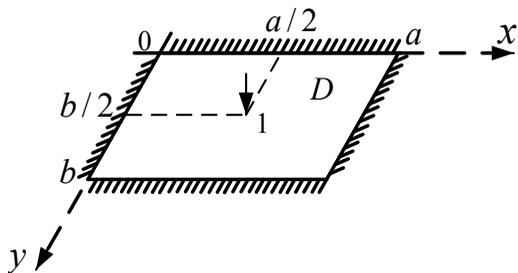


Рис. 3.26

**Задача 3.29.** Квадратная плита со стороной  $2a$  опирается по четырем углам (рис. 3.27). Определить частоту основного тона ее свободных колебаний [7].

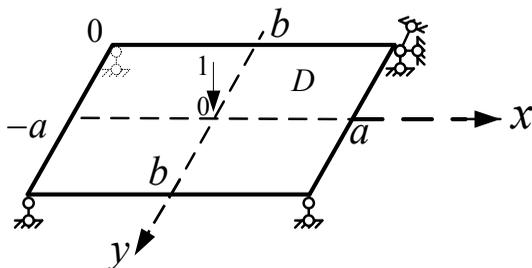


Рис. 3.27

**Задача 3.30.** Определить частоту основного тона свободных колебаний круглой плиты (рис. 3.28), защемленной по контуру [5].

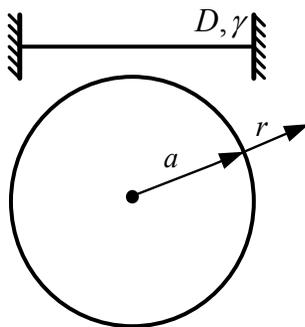


Рис. 3.28

**Задача 3.31.** Полуокруг (рис. 3.29) совершает колебательные движения, перекачиваясь без трения по горизонтальной плоскости. Определить круговую частоту малых колебаний, если  $r$  – радиус полуокруга,  $c$  – координата центра тяжести,  $i^2 = \frac{I_g}{w}$  – квадрат радиуса инерции относительно центральной оси [5].

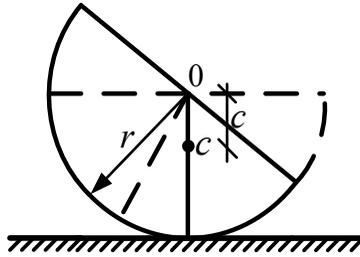


Рис. 3.29

### 3.4. Ответы и решения к главе 3

**Задача 3.1.** Учитывая невозможность изгибных колебаний стержня, задаемся  $y(x) = Ax$  (рис. 3.30).

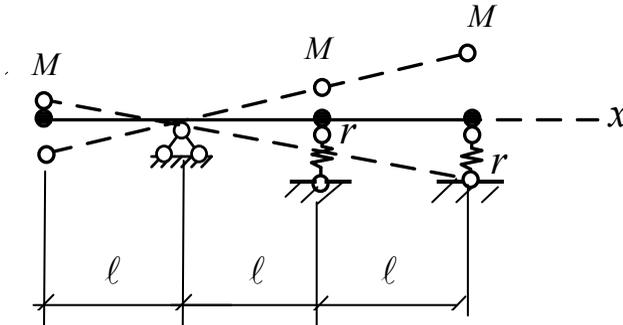


Рис. 3.30

Тогда максимальное значение потенциальной энергии колеблющихся масс будет равна потенциальной энергии пружин

$$u = \frac{1}{2} r (A\ell)^2 + \frac{1}{2} r (A \cdot 2\ell)^2.$$

Максимальное значение кинетической энергии колеблющихся масс

$$K = \frac{\omega^2}{2} \left[ (A\ell)^2 \cdot 2 + (A \cdot 2\ell)^2 \right] \cdot M.$$

Откуда получаем для частоты вращательных колебаний

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}r \left[ (A\ell)^2 + (2A\ell)^2 \right]}{M \frac{1}{2} \left[ 2(A\ell)^2 + (2A\ell)^2 \right]} = \frac{5r}{6M}.$$

**Задача 3.2.** Задаемся формой колебаний (рис. 3.31)

$$y(x) = a_1 \frac{x}{\ell} + a_3 \frac{x^3}{\ell^3} + a_5 \frac{x^5}{\ell^5}.$$

Потребуем, чтобы при  $x=0$  выполнялись граничные условия для перемещений  $x=0$ :  $y=0$  и для изгибающих моментов при

$$x=0, \ell: \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

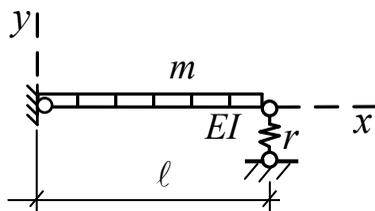


Рис. 3.31

Граничное условие для перемещений и моментов при  $x=0$  выполняется автоматически. Оставшееся граничное условие дает связь между коэффициентами  $a_3$  и  $a_5$

$$a_5 = -\frac{3}{10}a_3.$$

Поэтому базисная функция, удовлетворяющая нулевому прогибу при  $x=0$  и отсутствию моментов по краям балки примет вид

$$y(x) = a_1 \frac{x}{\ell} + a_3 \left( \frac{x^3}{\ell^3} - \frac{3}{10} \frac{x^5}{\ell^5} \right).$$

Частота собственных колебаний определяется из выражения

$$\omega^2 = \frac{\frac{EI}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{r}{2} y^2(\ell)}{\frac{m}{2} \int_0^{\ell} y^2 dx}.$$

Будем искать такие значения коэффициентов  $a_1, a_3$ , которые сообщают этому выражению наименьшие значения, что приводит к условию обращения в ноль определителя, из которого можно найти  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

$$\begin{vmatrix} 2r - \frac{2}{3} m \ell \omega^2 & \frac{7}{5} r - \frac{11}{35} m \ell \omega^2 \\ \frac{7}{5} r - \frac{11}{35} m \ell \omega^2 & \frac{49}{50} r + \frac{192}{35} \cdot \frac{EI}{\ell^3} - \frac{1949}{11550} m \ell \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Задача 3.3.** Необходимо определить частоты, соответствующие вертикальным и вращательным колебаниям. Для вертикальных колебаний имеем ( $r$  – погонная жесткость).

$$\omega_{\text{верт}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g \ell r}{Mg}} = \sqrt{\frac{\ell r}{M}}.$$

Для вращательных колебаний находим кинетическую энергию колеблющейся массы, считая, что она колеблется по закону  $\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \nu)$  (рис. 3.32). Тогда кинетическая энергия массы будет равна

$$K = \frac{M v^2}{2} = \frac{M}{2} \cdot [h \omega \varphi_0 \sin(\omega t + \nu)]^2.$$

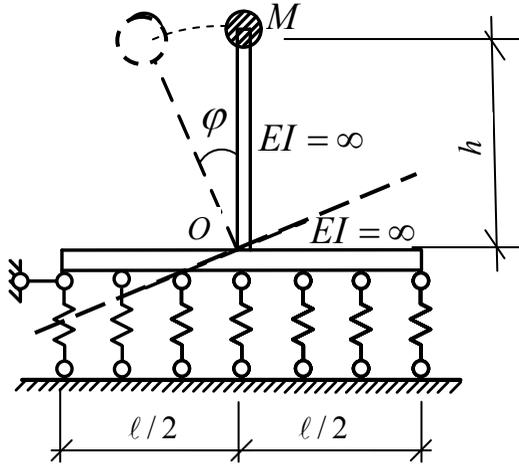


Рис. 3.32

Потенциальная энергия упругого основания

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} r [x \cdot \varphi_0 \sin(\omega t + \nu)]^2 dx = \frac{r\varphi_0^2 \ell^3}{24} \sin^2(\omega t + \nu).$$

Приравняв максимальные значения кинетической и потенциальной энергий, получаем

$$\omega_{\text{гор}} = \frac{\ell}{h} \sqrt{\frac{r\ell}{12M}}.$$

Вращательную частоту собственных колебаний можно найти по общей формуле

$$\omega_{\text{гор}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}},$$

где  $\delta_{11}$  – есть горизонтальное перемещение от единичной силы, приложенной к массе (рис. 3.33).

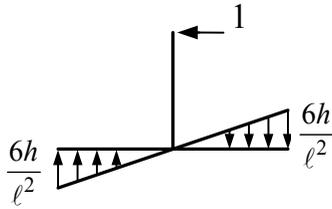


Рис. 3.33

Несложно получить  $\delta_{11} = \frac{12h^2}{r\ell^3}$ . Остается выбрать из  $\omega_{\text{верт}} = \sqrt{\frac{\ell r}{M}}$

и  $\omega_{\text{гор}} = \frac{\ell}{h} \sqrt{\frac{\ell r}{12M}}$  наименьшую частоту.

**Задача 3.4.** На рис. 3.34 показаны составляющие полного перемещения массы  $M$  при ее колебаниях.

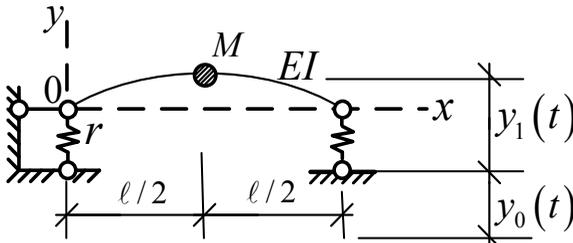


Рис. 3.34

$y_0(t)$  – перемещение опор балки (кинематическое перемещение);

$y_1(t)$  – перемещение, вызванное изгибной деформацией балки и деформацией упругой опоры.

Сила инерции колеблющейся массы  $y_1(t) = y_1 \cdot \sin \theta t$ .

$$I(t) = -M\ddot{y}(t) = -M[\ddot{y}_1(t) + \ddot{y}_0(t)].$$

Примем  $y_0(t) = y_0 \cdot \sin \theta t$ , то тогда  $y(t) = (y_0 + y_1) \sin \theta t$ .

Так как расчет системы с одной степенью свободы на кинематическое возбуждение сводится к расчету системы на действие динамической силы [8]

$$P(t) = M\theta^2 y_0 \sin \theta t,$$

то перемещение массы  $M$  будет равно

$$y(t) = \delta_{11} \cdot I_1(t) + y_0(t) + \Delta_{1p}(t),$$

где  $\Delta_{1p}(t)$  – перемещение массы, вызванное силой  $P(t)$ .

$\delta_{11}$  – перемещение массы от статического действия единичной силы. Определяется по формуле (пренебрегается кривизной балки).

$$\delta_{11} = \frac{\ell^3}{48EI} + \frac{\ell}{2r}$$

Очевидно

$$I(t) = M\theta^2 (y_0 + y_1) \sin \theta t$$

и для амплитудных значений

$$y_0 + y_1 = \frac{I_1(t)}{M\theta^2 \sin \theta t} = \frac{I_1}{M\theta^2};$$

$$I_1 = -\frac{y_0 + \Delta_{1p}}{\delta_{11} - \frac{1}{M\theta^2}}.$$

Для амплитуды перемещений массы  $\left( \delta_{11} = \frac{1}{M\omega^2} \right)$

$$y = \Delta_{1p} + y_0 - \frac{y_0 + \Delta_{1p}}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \cdot \delta_{11} = (\Delta_{1p} + y_0) \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \right) =$$

$$= \frac{\Delta_{1p} + y_0}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} = \mu (\Delta_{1p} + y_0),$$

где  $\mu = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}}$  – динамический коэффициент.

Таким образом, колебания массы совершаются по закону

$$y(t) = \frac{\Delta_{1p} + y_0}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \sin \theta t.$$

Причем  $\Delta_{1p} = \delta_{11} \cdot M \theta^2 y_0$ ;  $\delta_{11} = \frac{\ell^3}{48EI} + \frac{\ell}{2r}$ ;  $\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}M}$ .

**Задача 3.5.** Необходимо воспользоваться формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}.$$

Откуда  $\Delta_{ст} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,81 \text{ м/с}^2}{738,5 \frac{1}{\text{с}^2}} = 0,013 \text{ м}$ .

**Задача 3.6.** Определим коэффициент постели (рис. 3.35) грунтового основания из формулы

$$\frac{Mg}{\ell \cdot b} = k \cdot 0,039, \quad k = \frac{Mg}{0,039 \cdot \ell \cdot b}.$$

Круговая частота вертикальных колебаний здания

$$\omega_B = \sqrt{\frac{9,81}{0,039}} = 15,86 \text{ рад/с.}$$

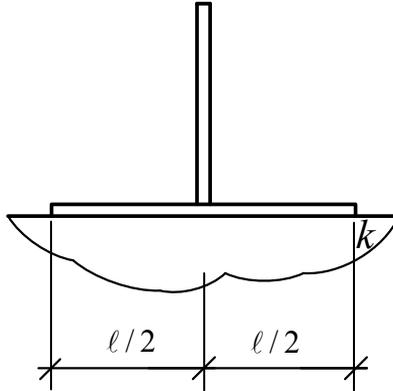


Рис. 3.35

Будем рассматривать здание как жесткую систему с одной степенью свободы (рис. 3.36). При вращательных колебаниях горизонтальная скорость массы  $v = \varphi \cdot h_c$  и кинетическая энергия при крутильных колебаниях ( $\varphi$  – угловая скорость)

$$K = \frac{Mv^2}{2} = \frac{M \cdot h_c^2}{2} \cdot \varphi^2.$$

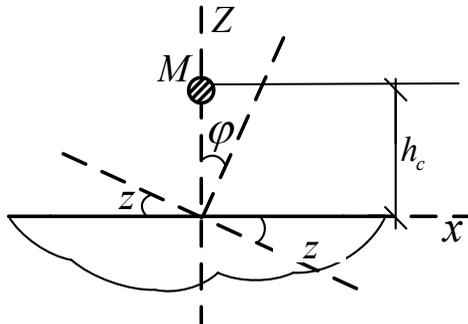


Рис. 3.36

Максимальное значение кинетической энергии при условии  $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \nu)$  равно  $\frac{M \cdot h_c^2}{2} \cdot \omega^2 \varphi_0^2$ .

Потенциальная энергия определяется как энергия деформации упругого основания Винклера и равна (см. рис. 3.36)\*

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} bkz^2 dx = \frac{bk}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} [\varphi_0 x \sin(\omega t + \nu)]^2 dx = \varphi_0^2 \frac{kb\ell^3}{24} \sin^2(\omega t + \nu);$$

$$\Pi_{\max} = \varphi_0^2 \frac{kb\ell^3}{24}.$$

Приравнявая максимальное значение кинетической и потенциальной энергий, получаем для частоты вращательных колебаний здания

$$\omega^2 = \frac{kb\ell^3}{12Mh_c^2}.$$

**Задача 3.7.** Маятниковые колебания нити – это колебания нити вокруг оси (хорды), соединяющей точки ее подвеса [1]. При этом колеблющаяся нить всегда находится в плоскости, проходящей через точки ее подвеса (рис. 3.37).

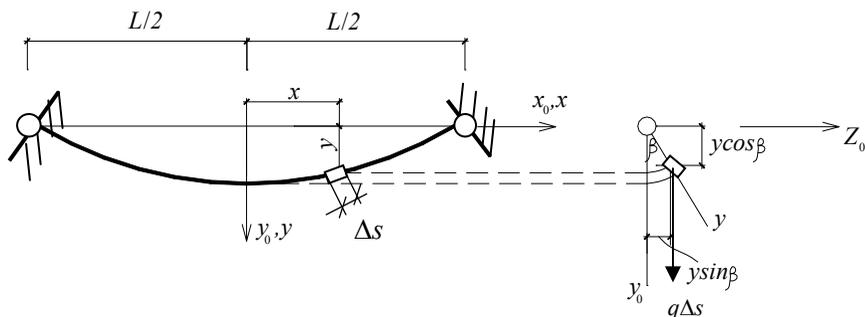


Рис. 3.37

\*  $b$  – ширина здания. Здесь рассматриваются плоские вращательные колебания.

Это допущение позволяет использовать уравнение плоских колебаний математического маятника [1].

Зададимся отклонением положения плоскости нити на угол  $\beta$ . Рассмотрим движение элементарного отрезка нити с координатами  $x$ ,  $y$  (см. рис. 3.37). Пренебрегая влиянием сил трения, запишем уравнение движения в виде

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{\ell} \sin \beta = 0,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;

$$\ell = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} y^2 ds}{\int_{-L/2}^{L/2} y ds} - \text{длина эквивалентного маятника.}$$

Для нити, провисающей по цепной линии,

$$\ell = \frac{24fk^2 - L^2(2k - f)}{24k^2 - L^2\left(\frac{k}{f} - 1\right)},$$

для пологих нитей при  $\frac{f}{L} \leq 0,1$ , когда кривую провисания можно принять за параболу,

$$\ell = 0,5f,$$

где  $k = \frac{H}{q}$ ;

$H$  – натяжение в самой нижней точке;

$q$  – нагрузка на единицу длины нити;

$f$  – стрела провеса нити;

$L$  – пролет нити.

В предельном случае, когда стрела прогиба нити значительно превосходит длину ее пролета ( $f \ll L$ ):

$$\ell \approx 0,576f.$$

Для малых углов отклонения  $\beta$  получаем линейное уравнение колебаний:

$$\ddot{\beta} + \omega^2\beta = 0,$$

где частота собственных колебаний плоскости нити

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (3.5)$$

Решение этого уравнения при начальных условиях  $t = 0$ ,  $\beta = \beta_0$ ,  $\dot{\beta} = \dot{\beta}_0$ , имеет вид

$$\beta = \beta_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\beta}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (3.6)$$

или

$$\beta = \beta_{\text{амп}} \sin(\omega t + \varphi),$$

где

$$\beta_{\text{амп}} = \sqrt{\beta_0^2 + \left(\frac{\dot{\beta}_0}{\omega}\right)^2}; \quad \varphi = -\arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\beta_0} \omega.$$

Период колебаний определяется по формуле

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Частота малых колебаний  $\omega$  не зависит от начальных условий и определяется только длиной эквивалентного маятника.

Для получения приближенного решения уравнения при больших  $\beta$  заменяют  $\sin\beta$  его разложением в ряд и, ограничиваясь первыми двумя членами, получают уравнение вида

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta\left(1 - \frac{\beta^2}{6}\right) = 0.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях  $t = 0$ ,  $\beta = \beta_0$ ,  $\dot{\beta} = 0$ , запишется в виде

$$\beta = \beta_0 \cos \omega t + \frac{1}{192}\beta_0^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t),$$

где значение  $\omega$  дано формулой (3.5).

Полученное решение отличается от решения (3.6) на величину третьего порядка, уменьшенную множителем  $\frac{1}{192} \approx 0,005$ .

При углах  $\beta < 60^\circ$  период можно определять по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\beta_0^2}{16}\right).$$

Период маятниковых колебаний с любой конечной амплитудой выражается уравнением [1]:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}K.$$

Значения  $K$  и множителя  $1 + \frac{\beta_0^2}{16}$  приведены в табл. 3.1.

Как видно из таблицы, при  $\beta_0 < 20^\circ$  ошибка, которую мы делаем, определяя период колебаний, не превосходит

$$\frac{1,5828 - 1,5708}{1,5708} \approx 0,8 \%$$

Таблица 3.1

$\beta_0$ в град.	$K$	$1 + \frac{\beta_0^2}{16}$
0	1,5708	1,0000
5	1,5715	1,0005
10	1,5738	1,0019
20	1,5828	1,0076
40	1,6200	1,0304
60	1,6258	1,0684
90	1,8541	–
120	2,1565	–
150	2,7681	–

**Задача 3.8.** Примем уравнение изогнутой оси стержня (рис. 3.38) в момент потери устойчивости (см. задачу 3.2) в виде

$$y(x) = a_1 \frac{x}{\ell} + a_3 \left( \frac{x^3}{\ell^3} - \frac{3}{10} \frac{x^5}{\ell^5} \right).$$

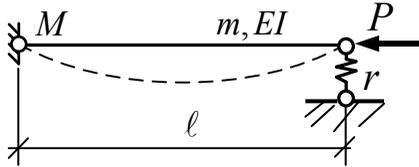


Рис. 3.38

Величина критических сил определяется из системы линейных уравнений, полученных из условия минимума частного для определения частоты собственных колебаний стержня с учетом действия продольных сил\*.

$$\omega^2 = \frac{\frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{r}{2} y^2(\ell) - \frac{P}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx}{\frac{m}{2} \int_0^l y^2 dx}. \quad (3.7)$$

\* Сжимающая продольная сила уменьшает частоты собственных колебаний стержня.

После подстановки  $y(x)$  в эту дробь и решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial a_1} - \omega^2 \frac{\partial z}{\partial a_1} = 0; \\ \frac{\partial \chi}{\partial a_3} - \omega^2 \frac{\partial z}{\partial a_3} = 0, \end{cases}'$$

где  $\chi$  – числитель дроби (3.7);

$z$  – знаменатель дроби (3.7).

Опуская промежуточные вычисления, для  $\omega^2$  получаем квадратное уравнение

$$\begin{vmatrix} 2r - \frac{2P}{\ell} - \frac{2}{3}m\ell\omega^2 & \frac{7}{5}r - \frac{7P}{5\ell} - \frac{11}{35}m\ell\omega^2 \\ \frac{7}{5}r - \frac{7P}{5\ell} - \frac{11}{35}m\ell\omega^2 & \frac{192EI}{35\ell^3} - \frac{107P}{70\ell} + \frac{49}{50}r - \frac{1949}{11550}m\ell\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда определяются две первые частоты собственных колебаний сжатого стержня.

Обращаем внимание читателей на то, что задачи расчета сжатых стержней на устойчивость рассматриваются в главе 4 данного сборника. Несмотря на это, авторы считают корректным привести продолжение решения данной задачи, в части определения критической силы.

Для определения  $P_{кр}$  уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2r - \frac{2P}{\ell} & \frac{7}{5}r - \frac{7P}{5\ell} \\ \frac{7}{5}r - \frac{7P}{5\ell} & \frac{192EI}{35\ell^3} - \frac{107P}{70\ell} + \frac{49}{50}r \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $P_1 = r\ell$ ;  $P_2 = \frac{10EI}{\ell^2}$ .

Нужно отметить, что критическая сила  $P_1$  соответствует потери устойчивости стержня за счет только деформации пружины; критическая сила  $P_2$  – за счет только деформации изгиба шарнирно-опертого стержня (точное решение  $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ ).

**Задача 3.9. 1 способ.** Используем формулу  $\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}}$ , где  $\delta_{11}$  – угловое перемещение конца стержня от действия единичного крутящего момента;  $M$  – момент инерции вращающего цилиндра относительно оси вращения. В нашем случае [9] (см. рис. 3.8)

$$\delta_{11} = \frac{h}{GT}; \quad M = \frac{m\ell^3}{12}$$

и получаем  $\omega = \sqrt{\frac{12GT}{m\ell^3h}}$ .

**2 способ.** Решаем задачу методом Ритца. Задаемся законом крутильных колебаний цилиндра

$$\varphi = A \sin \omega t,$$

где угловая скорость  $\frac{d\varphi}{dt} = A\omega \cos \omega t$ .

Кинетическая энергия вращающегося цилиндра [9]

$$K = \frac{1}{2} \frac{m\ell^3}{12} \cdot A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t.$$

Изменение угла закручивания по длине вертикального стержня (см. рис. 3.8)

$$\theta = \frac{\varphi}{h} \cdot y.$$

Энергия деформации кручения вертикального стержня

$$\Pi = \frac{GT}{2} \int_0^h \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 dy = \frac{GT}{2h} A^2 \sin^2 \omega t.$$

Приравнивая максимальные значения кинетической и потенциальной энергий, получаем

$$\frac{m\ell^3}{12} \omega^2 = \frac{GT}{h},$$

откуда следует ранее полученный результат.

**Задача 3.10.** Вертикальное перемещение поплавка от единичной вертикальной силы (рис. 3.39) на основании закона Архимеда

$\delta_{11} = \frac{1}{\rho g S}$ , где  $S$  – площадь (горизонтальная) контакта поплавка с водой;  $\rho$  – плотность воды.

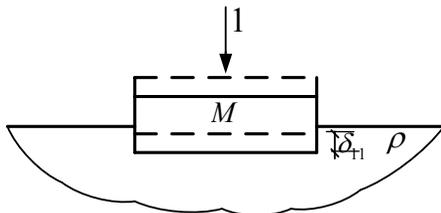


Рис. 3.39

Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M}} = \sqrt{\frac{\rho g S}{M}}.$$

**Задача 3.11.** При определении первой частоты продольных колебаний стержня (рис. 3.40) с учетом нелинейно упругой зависимости (см. условие задачи) некорректно применять формулу  $\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M}}$

в силу нелинейности продольных колебаний стержня. Поэтому используем метод Ритца. Принимаем  $x = A \cos \omega t$  и поперечное сечение стержня прямоугольным.

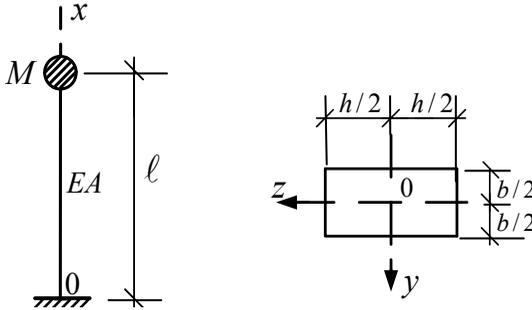


Рис. 3.40

Тогда максимальное значение потенциальной энергии продольных деформаций стержня [10] при постоянном  $\varepsilon$ , равном  $\frac{A}{\ell}$ , получаем

$$U_{\max} = \int_0^{\ell} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \ell b h \left[ E \frac{A^2}{2\ell^2} - \frac{1}{27} \frac{E^3 A^4}{\sigma_{\text{lim}}^2 \ell^4} \right].$$

Максимальное значение кинетической энергии при скорости  $\dot{x} = -A\omega \sin \omega t$  выражается

$$K_{\max} = M \frac{v^2}{2} = M \cdot \frac{A^2 \omega^2}{2}.$$

Приравнявая  $K_{\max} = U_{\max}$ , получаем

$$\omega^2 = \frac{E \ell^2 - \frac{2}{27} \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} A^2}{M \ell^4} \ell b h,$$

то есть частота продольных колебаний зависит от начальных условий.

Так как  $A$  – характеризует отклонение массы в начальный момент времени, это явление называется *неизохронностью* [11].

**Задача 3.12.** При решении задачи используем формулу

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,14}} = 8,37 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1,3329 \text{ Гц.}$$

**Задача 3.13.** Принимаем: масса песчинки  $m$ , закон ее колебаний  $z = z_0 \sin \omega t$ . Потенциальная энергия песчинки в наиболее высоком положении –  $mgh$ , максимальная кинетическая энергия –  $\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} z_0^2 \omega^2 (\cos^2 \omega t = 1)$ .

Приравниваем эти максимальные значения  $\frac{m}{2} z_0^2 \omega^2 = mgh$  и получаем

$$z_0 = \sqrt{\frac{2gh}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,003}{4\pi^2 500^2}} \approx 0,08 \text{ мм.}$$

**Задача 3.14.** На рис. 3.41 показаны сосредоточенные массы, к которым приведена распределенная по стержню масса.

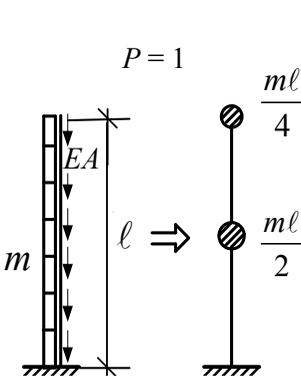


Рис. 3.41

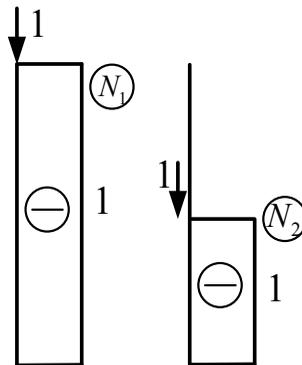


Рис. 3.42

На рис. 3.42 – единичные эпюры для определения  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$ .  
Условие для нахождения двух частот собственных продольных колебаний стержня имеет вид определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\ell}{EA} - \frac{4}{m\ell\omega^2} & \frac{\ell}{2EA} \\ \frac{\ell}{2EA} & \frac{\ell}{2EA} - \frac{2}{m\ell\omega^2} \end{vmatrix} = 0; \quad \omega_1 = \frac{1,531}{\ell} \sqrt{\frac{EA}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{13,657}{\ell} \sqrt{\frac{EA}{m}}.$$

**Задача 3.15.** Предположим, что гибкая струна натянута между двумя точками  $O$  и  $A$  на расстоянии  $\ell$  (рис. 3.43), и величина натяжения равна  $T$  [3]. Определим работу сил натяжения  $T$  струны

$$A = T \int_0^{\ell} (ds - dx) dx \approx \frac{T}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

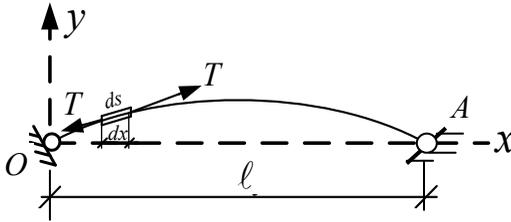


Рис. 3.43

Это является потенциальной энергией струны. Кинетическая энергия колеблющейся струны равна

$$K = \frac{\rho}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dx,$$

где  $\rho$  – погонная плотность материала струны.

Задаваясь законом колебаний струны в наиболее простой форме

$$y(x, t) = Ax(\ell - x) \cos \omega t,$$

можно найти

$$\omega^2 = \frac{T \cdot \frac{1}{3} \ell^3}{\rho \frac{1}{30} \ell^5} = \frac{10T}{\rho \ell^2}.$$

Точное значение [3]

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{T}{\rho} \approx 9,86 \frac{T}{\ell^2 \rho}.$$

**Задача 3.16.** Одной из первых реальных форм собственных колебаний модели жилого дома будет крутильная (или изгибно-крутильная). Модель в виде консольного стержня с сосредоточенными точечными массами не позволяет определить эти формы и соответствующие им частоты.

**Задача 3.17.\*** Определяем ориентировочно часть энергии удара  $\Pi$ , которая в виде волны доходит до фундаментов комплекса (см. рис. 3.14)

$$U = \frac{30^\circ}{180^\circ} \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \Pi = \frac{\Pi}{18}.$$

Считаем, что вся энергия  $U$  заставляет колебаться спорткомплекс с максимальной амплитудой виброскорости  $v_0$

$$U = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{18} \Pi; \quad v_0 = \sqrt{\frac{\Pi}{9M}}.$$

Если принять динамическое воздействие волн на фундаменты спорткомплекса гармоническим с частотой  $f$

$$v = v_0 \sin \omega t = v_0 \cdot \sin 2\pi f t = \sqrt{\frac{\Pi}{9M}} \sin 2\pi f t.$$

---

\* Авторы отдают себе отчет в приближенности предлагаемого ими решения, однако точное решение этой задачи до настоящего времени им неизвестно.

Тогда виброускорение комплекса

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\pi f \sqrt{\frac{\Pi}{9M}} \cos 2\pi ft.$$

Максимальное значение виброускорения

$$a_{\max} = 2\pi f \sqrt{\frac{\Pi}{9M}} = \frac{2}{3} \pi f \sqrt{\frac{\Pi}{M}}.$$

Суммарная сила инерции, приходящаяся на массу всего спорт-комплекса, равна

$$I = a_{\max} \cdot M = \frac{2}{3} \pi f \sqrt{\Pi M}.$$

Примем для примера:

$$M = 4\,000\,000 \text{ кг} = 4000 \text{ т};$$

$$\Pi = 25\,000 \text{ Нм} = 25 \text{ кНм}; \quad f = \frac{1}{20} \text{ Гц}.$$

Тогда получим

$$I = \frac{10^4}{3} \sqrt{10} \text{ Н} \approx 10\,541 \text{ Н} = 10,541 \text{ кН}.$$

**Задача 3.18.** Приводим без изменения решение этой задачи, данное в [4]. Автомобиль имеет вес 4000 фунтов (1,812 т), и жесткость его рессор по результатам эксперимента характеризуется прогибом 0,08 дюйма (0,203 см) при дополнительной нагрузке 100 фунтов (45,3 кг). Профиль моста (см. рис. 3.15) представлен синусоидой с длиной волны 40 футов (12,19 м) (длина пролетного строения моста) и амплитудой 1,2 дюйма (3,05 см). Для этих исходных данных требуется определить параметры стационарных вертикальных колебаний внутри автомобиля, когда он движется со скоростью 45 миль в час (72,4 км/ч) при затухании, равном 40 % критической величины.

Передаточное число для этого случая определяется выражением (3.38) из [4], и амплитуда вертикальных колебаний равна:

$$v_{\text{макс}}^t = v_{g0} \left[ \frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{1/2}.$$

Когда автомобиль движется со скоростью 45 миль в час (72,4 км/ч) = 66 футов в секунду (20,1 м/с), период возмущения

$$T_p = \frac{40 \text{ фут}}{66 \text{ фут/с}} = 0,606 \text{ с},$$

а период собственных колебаний автомобиля

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\omega}{kg}} = 0,572 \text{ с}.$$

Следовательно,  $\beta = T / T_p = 0,572 / 0,606 = 0,944$  и при  $\xi = 0,4$  амплитуда реакции

$$V_{\text{макс}}^t = \begin{cases} 1,2 \cdot 1,642 = 1,97 \text{ дюйм}; \\ 3,05 \cdot 1,642 = 5,01 \text{ см}. \end{cases}$$

Следует также отметить, что при нулевом затухании ( $\xi = 0$ ) амплитуда была бы

$$V_{\text{макс}}^t = V_{g0} \frac{1}{1 - \beta^2} = \begin{cases} \frac{1,2}{0,11} = 10,9 \text{ дюйм}; \\ \frac{3,05}{0,11} = 27,7 \text{ см}. \end{cases}$$

Эта величина превышает возможности деформирования рессор и не имеет практического смысла, но наглядно иллюстрирует способность амортизаторов удара ограничивать колебания от неровностей поверхности дороги.

**Задача 3.19.\*** Решение дифференциального уравнения свободных колебаний шарнирно опертой балки пролетом  $2\ell$  с равномерно распределенной массой (рис. 3.44)

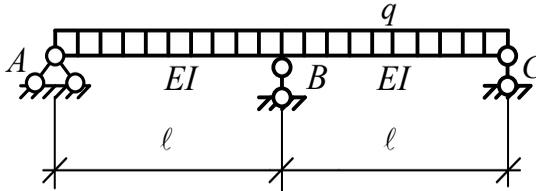


Рис. 3.44

при начальных условиях  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$  имеет вид [5]

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \omega_k t \sin \frac{k\pi x}{2\ell}.$$

Перемещение шарнирно-опертой балки от статического действия равномерно распределенной нагрузки  $q$  и центрально приложенной силы  $P$  (рис. 3.45).

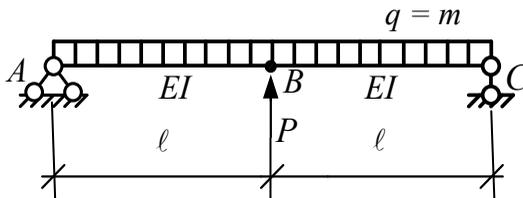


Рис. 3.45

$$y_1(x) = \frac{64q\ell^4}{\pi^5 EI} \cdot \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{2\ell}}{k^5} - \frac{16P\ell^3}{\pi^4 EI} \cdot \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{2\ell}}{k^4}.$$

\* В современной отечественной нормативной литературе подобный расчет носит название расчета на прогрессирующее разрушение.

Выполняем начальное условие  $t=0$ :  $y(x,0) = y_1(x)$ , что приводит к уравнению  $\left(P = \frac{5}{4}q\ell\right)$

$$\frac{4q\ell^4}{\pi^4 EI} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \left( \frac{16}{\pi k} - 5 \right) - c_k \right] \frac{\sin \frac{k\pi x}{2\ell}}{k^4} = 0.$$

Откуда

$$c_k = \left( \frac{16}{\pi k} - 5 \right) \frac{4q\ell^4}{\pi^4 EI}$$

и уравнение колебаний

$$y(x,t) = \frac{4q\ell^4}{\pi^4 EI} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{16}{\pi k} - 5 \right) \frac{\sin \frac{k\pi x}{2\ell}}{k^4} \cos \omega_k t.$$

**Задача 3.20.** После остановки груза он начинает колебаться около положения статического равновесия (рис. 3.46). Частоту колебаний можно определить по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{EA}{M\ell}}, \quad W = Mg.$$

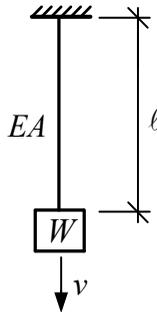


Рис. 3.46

Закон колебаний соответствует колебанию системы с одной степенью свободы

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где  $A, B$  определяются из начальных условий при  $t = 0; y = 0; \dot{y} = v$ , что дает  $y(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$ .

Сила инерции колеблющегося груза

$$I = -M \frac{d^2 y}{dt^2} = M \cdot v \omega \sin \omega t = v \sqrt{\frac{EA \cdot M}{\ell}} \sin \sqrt{\frac{EA}{M \ell}} t.$$

Максимальное растягивающее напряжение в тросе

$$\sigma_{\max} = \frac{W + I}{A} = \frac{W}{A} \left( 1 + v \frac{\omega}{g} \right).$$

**Задача 3.21.** В монографии [5] дано решение задачи о действии гармонической силы  $P = P_0 \sin \theta t$ , приложенной на расстоянии  $c$  от левой опоры шарнирно опертой балки (рис. 3.47).

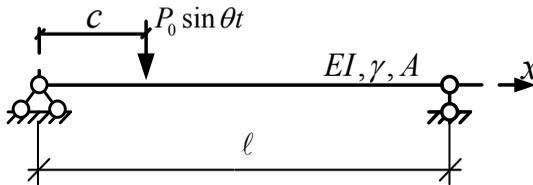


Рис. 3.47

В случае установившихся колебаний

$$y(x, t) = \frac{2P_0 g \ell^3}{A \gamma} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{\pi c}{\ell} \sin \frac{k \pi x}{\ell}}{k^4 \pi^4 a^2 - \theta^2 \ell^4} \sin \theta t, \quad \left( a^2 = \frac{EI g}{A \gamma} \right).$$

Из этого решения можно получить выражение для установившихся колебаний балки, когда к левой опоре приложен гармонический момент  $M \sin \theta t$ .

В результате получаем

$$y\left(\frac{\ell}{2}, t\right) = \frac{2\pi M \ell^2}{A\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \theta t}{k^4 \pi^4 a^2 - \theta^2 \ell^4}.$$

Таким образом, середина балки, где находится груз  $W$ , совершает гармонические колебания по закону

$$y\left(\frac{\ell}{2}, t\right) = \frac{2\pi M \ell^2}{A\gamma} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k \frac{\pi}{2}}{k^4 \pi^4 a^2 - \theta^2 \ell^4} \sin \theta t.$$

Нетрудно заметить, что  $k$  принимает только нечетные значения  $k = 1, 3, 5, \dots$ . Обозначим полное перемещение груза  $y = y_1 + \Delta$ ,

$$\text{где } \Delta = \frac{2\pi M \ell^2}{A\gamma} \cdot \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k \sin k \frac{\pi}{2}}{k^4 \pi^4 a^2 - \theta^2 \ell^4} \sin \theta t;$$

$y_1$  – дополнительное перемещение груза [5].

Суммарная сила инерции

$$I = -\frac{W}{g} \cdot \ddot{y}.$$

Вызванный ею дополнительный прогиб получим в виде

$$y = \delta_{11} \cdot I = -\delta_{11} \frac{W}{g} (\ddot{y}_1 + \ddot{\Delta}).$$

Отсюда получаем

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = -\frac{2\pi M \ell^2 \theta^2}{A\gamma} \cdot \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k (-1)^{k+1} \sin \theta t}{k^4 \pi^4 a^2 - \theta^2 \ell^4}; \quad \omega^2 = \frac{g}{w \delta_{11}}.$$

Обозначим

$$\frac{Q}{M} = -\frac{2\pi M \ell^2}{A\gamma} \cdot \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}}{k^4 \pi^4 a^2 - \theta^2 \ell^4}.$$

Тогда решение уравнения

$$y_1 + \omega^2 y_1 = \frac{Q}{m} \sin \theta t,$$

для установившегося режима колебаний известно [8]

$$y_1(t) = \frac{Q}{M} \frac{\sin \theta t}{\omega^2 - \theta^2}.$$

Откуда амплитуда установившихся колебаний будет равна

$$\frac{Q}{M} \frac{1}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{2\pi M \ell^2}{A\gamma} \cdot \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^4 \pi^4 a^2 - \theta^2 \ell^4} \cdot \frac{1}{\frac{q}{\omega \delta_{11}} - \theta^2} \approx 1,475 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

**Задача 3.22.** В случае 1 (рис. 3.48) складываются жесткости пружин

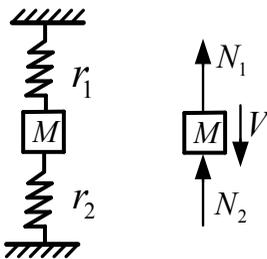


Рис. 3.48

и частота собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{M}} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{M}}.$$

В случае 2 (рис. 3.49) складываются податливости пружин

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Mg}{r_1} + \frac{Mg}{r_2}$$

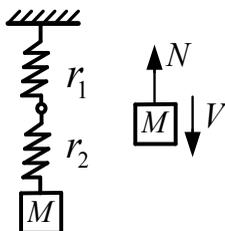


Рис. 3.49

и частота собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{M(r_1 + r_2)}}.$$

**Задача 3.23.** При равномерном движении [5] растягивающая сила в тросе равна весу груза  $W$  и удлинение троса в любой момент времени  $\delta_{\text{ст}} = \frac{W\ell}{EA}$ . Благодаря начальной скорости  $\dot{x}_0$  поднимаемый груз не остановится сразу, а будет колебаться на тросе. Отсчитывая время от некоторого произвольного момента, видим, что перемещение поднимаемого груза от положения равновесия в рассматриваемый момент времени равно нулю, тогда как скорость равна  $\dot{x}_0$  (рис. 3.50). Из общего решения колебаний системы с одной степенью свободы

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t$$

следует, что амплитуда колебаний будет равна  $\frac{v}{\omega}$ , где

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{gEA}{W\ell}}.$$

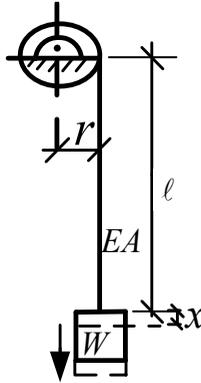


Рис. 3.50

Тогда максимальное удлинение троса  $\delta_{\max} = \delta_{\text{ст}} + \frac{\dot{x}}{\omega}$ , а максимальное напряжение в тросе  $\sigma_{\max} = \frac{\delta_{\text{ст}} + \frac{\dot{x}}{\omega}}{\ell} \cdot E$ .

**Задача 3.24.** Используя метод Ритца, можно описать прогибы балки под действием статически приложенной силы  $P$  [5]

$$y(x) = \frac{2P\ell^3}{\pi^4 EI} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^4} \sin \frac{\pi kx}{\ell}.$$

С другой стороны, после снятия силы свободные колебания балки описываются уравнением [5, формула 136]

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{\ell}}{\ell} (C_i \cos \omega_i t + D_i \sin \omega_i t),$$

где  $\omega_i$  – собственные частоты колебаний балки.

В нашем случае начальные условия следующие

$$t = 0: y_0 = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2P\ell^3}{\pi^4 EI} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^4} \sin \frac{\pi kx}{\ell}; \quad v_0 = \frac{dy}{dt} = 0.$$

Из второго условия сразу следует  $D_i = 0$ , а первое условие дает

$$\frac{2P\ell^3}{\pi^4 EI} \cdot \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^4} \sin \frac{\pi kx}{\ell} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\sin \frac{i\pi x}{\ell}}{\ell}.$$

Приравнивая коэффициенты при синусах кратных углов, получаем

$$C_i = \frac{2P\ell^4}{\pi^4 EI} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i^4}.$$

И свободные колебания балки описываются рядом

$$y(x, t) = \frac{2P\ell^3}{\pi^4 EI} \cdot \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i^4} \sin \frac{i\pi x}{\ell} \cos \omega_i t.$$

**Задача 3.25.** Закон колебаний балки в случае начальных условий

$$t = 0: \quad y(x, t) = y(x, 0) = y_0 = 0,$$

$$v = \frac{dy}{dt} = v_0,$$

определяется уравнением [5]

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sin \frac{i\pi x}{\ell} \sin \omega_i t.$$

Так как

$$D_i = \frac{2}{\ell \omega_i} \int_0^{\ell} v_0 \sin \frac{i\pi x}{\ell} dx = \frac{2v_0}{\ell \omega_i} \int_c^{c+\delta} \sin \frac{i\pi x}{\ell} dx = \frac{2v_0}{\omega_i i\pi} \frac{i\pi(2c + \delta)}{\ell} \sin \frac{i\pi\delta}{2\ell}.$$

Если  $\delta \ll c$ , то

$$D_i = \frac{2\nu_0\delta}{\ell\omega_i} \sin \frac{i\pi c}{\ell} \quad \text{и} \quad y(x, t) = \frac{2\nu_0\delta}{\ell} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{\ell} \sin \omega_i t}{\omega_i} \sin \frac{i\pi c}{\ell}.$$

В случае  $c = \frac{\ell}{2}$ , то

$$y(x, t) = \frac{2\nu_0\delta}{\ell} \cdot \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\omega_i} \sin \frac{i\pi x}{\ell} \sin \omega_i t.$$

Этот результат можно записать в иной форме, если подставить

$$\omega_i = \frac{i^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

собственные частоты шарнирно-опертой балки с равномерно распределенной массой.

**Задача 3.26.** Определим усилие, действующее на шар со стороны троса (см. рис. 3.23). Горизонтальная проекция усилия в тросе постоянна и равна  $S$ . Обозначим  $\Delta$  – удлинение троса при колебаниях, тогда усилие в нем  $\frac{EA}{\ell} \cdot \Delta$ , а вертикальная проекция усилия в тросе равна  $\left( S + \frac{EA}{\ell} \Delta \right) \cdot \sin \theta$  (рис. 3.51).

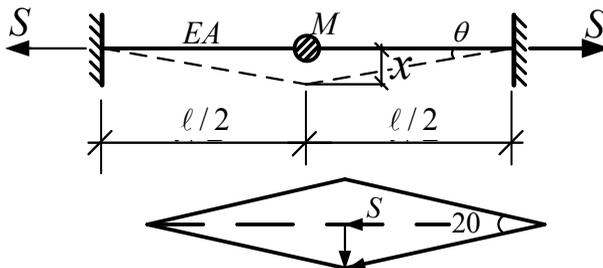


Рис. 3.51

Поэтому уравнение колебаний шара будет описываться нелинейным дифференциальным уравнением

$$M\ddot{x} + 2\left(S + \frac{EA}{\ell}\Delta\right)\sin\theta = 0.$$

$$\text{Но } \Delta = \sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell; \quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}.$$

При малых значениях аргумента  $x$   $\sin\theta \approx \text{tg}\theta = \frac{x}{\ell}$ ;  $\Delta = \sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell \approx 0$  и уравнение колебаний становится линейным

$$M\ddot{x} + 2\frac{Sx}{\ell} = 0,$$

откуда следует

$$\omega^2 = \frac{2S}{M\ell}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M\ell}{2S}}.$$

Можно получить более точное решение, если принять

$$\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell = \ell\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{\ell^2}} - 1\right) = \ell\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{3}{8}\frac{x^4}{\ell^4} + \dots - 1\right) \approx \frac{x^2}{2\ell} \approx \sin\theta \approx \frac{x}{\ell}.$$

Получается так называемое уравнение Дюффинга

$$M\ddot{x} + \frac{2S}{\ell}x + \frac{EA}{\ell^3}x^3 = 0,$$

решение которого выражается через эллиптические функции [5].

**Задача 3.27.** В вертикальном положении при транспортировке стеновая панель работает как балка-стенка, то есть, как в составе здания, где она будет монтироваться и в дальнейшем эксплуатироваться (рис. 3.52).



Рис. 3.52

При транспортировке в горизонтальном положении стенная панель работает как изгибаемая пластинка на нагрузку от собственного веса  $G$  и сил инерции  $I$ , перпендикулярную плоскости стеновой панели. На такой вид нагрузки стеновые панели не проектируются (рис. 3.53) и не рассчитываются.

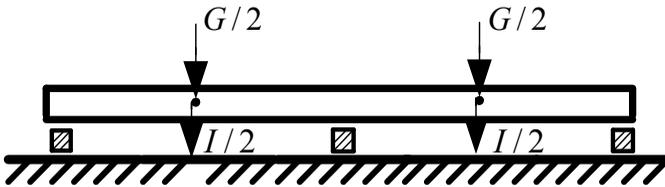


Рис. 3.53

**Задача 3.28.** Прогиб центра плиты от единичной силы, приложенной в ее центре, определяется выражением [7] в случае свободного опирания (рис. 3.54)

$$\delta_{mn} = \frac{192(1-\nu^2)a^3b^3}{\pi^4(a^2+b^2)Eh^3}.$$

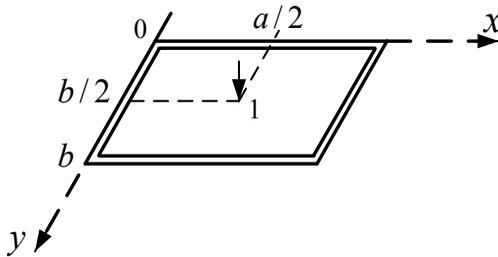


Рис. 3.54

В случае защемления по контуру (рис. 3.55)

$$\delta_{mn} = \frac{12(1-\nu^2)ab}{\left[ 20,805 \frac{a^4+b^4}{a^2b^2} + 11,888 \right] Eh^3},$$

где  $E, \nu$  – упругие постоянные материала плиты;  
 $h$  – толщина плиты.

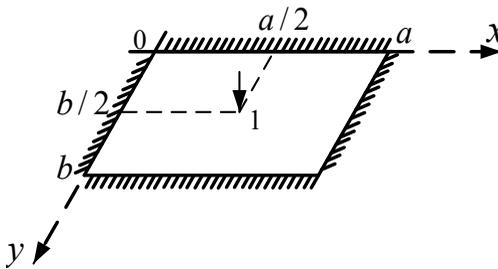


Рис. 3.55

Определяем основные частоты колебаний плит как для системы с одной степенью свободы по формуле

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{\text{тп}} M}},$$

где  $M$  – приведенная сосредоточенная масса в центре плиты.

Тогда отношение частот дает дробь  $\frac{0,712(a^2 + b^2)}{\sqrt{2,63(a^4 + b^4) + 1,50(a^2 b^2)}}$ .

**Задача 3.29.** Примем за уравнение изогнутой поверхности квадратной плиты (рис. 3.56)\* следующее

$$\omega(x, y) = \frac{a}{2} \left( \cos \frac{\pi x}{2a} + \cos \frac{\pi y}{2b} \right).$$

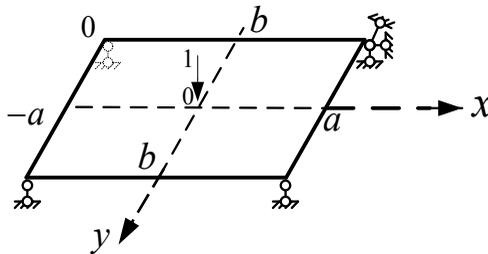


Рис. 3.56

Тогда прогиб начала координат от единичной силы по методу Ритца

$$\delta_{00} = \frac{192(1 - \nu^2)}{\pi^2 E h^3 (\pi^2 - 8\nu)}.$$

Круговая частота основного тона

$$\omega_1 = \frac{\pi h}{a^2} \sqrt{\frac{1,23 + \nu}{43,44}} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1 - \nu^2)}},$$

где  $\gamma$  – объемная плотность материала пластинки.

Отметим, что в задачах 3.28 и 3.29 автор Н. Н. Безухов рассматривал плиту как систему с одной степенью свободы, причем вели-

\* При таком представлении прогибов в плите отсутствуют деформации кручения.

чина сосредоточенной массы в центре плиты (см. рис. 3.27) определялась через коэффициент приведения [9], равный

$$K = \frac{1}{4qaba} \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \omega^2(x, y) dx dy.$$

**Задача 3.30.** Используем метод Ритца [5] (см. рис. 3.28). Принимаем

$$\omega(r) = a_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + a_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 + \dots$$

Условие минимума квадрата собственной частоты имеет вид [5]

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^a \left[ \left( \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right)^2 - \frac{\omega^2 \gamma h}{gD} \right] r dr = 0.$$

При удержании только одного члена ряда получаем после дифференцирования функционала

$$\frac{96}{9a^2} - \frac{\omega^2 \gamma h a^2}{gD} = 0,$$

откуда  $\omega = \frac{10,33}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}}$  ( $\gamma, h$  – плотность и толщина круглой плиты).

Для получения более точного результата удержим в ряде для прогибов два члена. В результате получим

$$\begin{cases} \left(\frac{192}{9} - \frac{\lambda}{5}\right)a_1 + \left(\frac{144}{9} - \frac{\lambda}{6}\right)a_2 = 0, \\ \left(\frac{144}{9} - \frac{\lambda}{6}\right)a_1 + \left(\frac{96}{5} - \frac{\lambda}{7}\right)a_2 = 0, \quad \lambda = \frac{a^4 \omega^2}{gD} \gamma h. \end{cases}$$

$$\text{Откуда имеем } \omega_1 = \frac{10,21}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}; \quad \omega_2 = \frac{43,04}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}.$$

Точные значения первых двух частот собственных антисимметричных колебаний круглой, заземленной по контуру плиты равны [5]

$$\omega_1 = \frac{10,21}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}}; \quad \omega_2 = \frac{39,78}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}}.$$

**Задача 3.31.** Задаемся уравнением колебательного движения полукруга (см. рис. 3.29) в форме ( $W$  – вес полукруга)

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \nu).$$

Тогда поднятие центра тяжести полукруга определится из выражения (при условии малых отклонений)

$$c(1 - \cos \theta) = 2c \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx \frac{c}{2} \theta^2.$$

И приращение потенциальной энергии

$$\Delta\Pi = W \cdot \frac{c}{2} \theta^2 = W \frac{c}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \nu).$$

Кинетическая энергия колебательного движения

$$K = \frac{I \dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \nu),$$

где  $I$  – момент инерции вращающего полукруга.

Приравнявая максимальные значения приращения потенциальной энергии и кинетической и учитывая, что

$$I = I_c + (r - c)^2 \cdot \frac{W}{g},$$

получаем

$$\omega^2 = \frac{cg}{2 \left[ i^2 + (r - c)^2 \right]}, \quad i^2 = \frac{Ic}{W}.$$

## Библиографический список

1. Лилеев, А. Ф. Методы расчета пространственных вантовых систем / А. Ф. Лилеев, Е. Н. Селезнева. – М.: Стройиздат, 1964. – 171 с.
2. Сборник задач по физике. Механика / А. И. Гомонова [и др.]. – М.: УНЦ ДО МГУ, 1995. – 160 с.
3. Шарма, Я. Н. Уравнения в частных производных для инженеров / Я. Н. Шарма, К. Сингх. – М.: Техносфера, 2002. – 318 с.
4. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
5. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Руководство по перевозке автомобильным транспортом строительных конструкций. – М.: ЦНИИОМ Госстрой СССР, 1980. – 144 с.
7. Безухов, Н. И. Динамика сооружений в примерах и задачах / Н. И. Безухов. – М.: Стройиздат, 1947. – 200 с.
8. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов [и др.]. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
9. Савин Г.Н. Теоретическая механика / Г. Н. Савин, Н. А. Кильчевский, Т. В. Путьта. – М.: Гостехиздат УССР, К., 1983. – 610 с.
10. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 398 с.
11. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
12. Рекомендации по защите жилых каркасных зданий при чрезвычайных ситуациях / Г. И. Шапиро [и др.]. – М.: МНИИТЭП, 2002. – 11 с.
13. Вольмир, А. С. Сборник задач по сопротивлению материалов / А. С. Вольмир [и др.]. – М.: Наука, 1984. – 408 с.

## Глава 4. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

### 4.1. Краткие сведения из теории

Из классической теории сооружений известно, что кроме прочности и жесткости, сооружение обязательно должно быть устойчивым, потому, что при потере устойчивости сооружение или разрушается, или становится непригодным для дальнейшей эксплуатации. В практике строительства и эксплуатации различных сооружений (мостов, высотных зданий, ЛЭП и др.) известны случаи их разрушения из-за потери устойчивости.

Некоторые задачи определения критических нагрузок для стержневых систем можно привести к расчету сжатого стержня с упруго податливыми опорами (рис. 4.1).

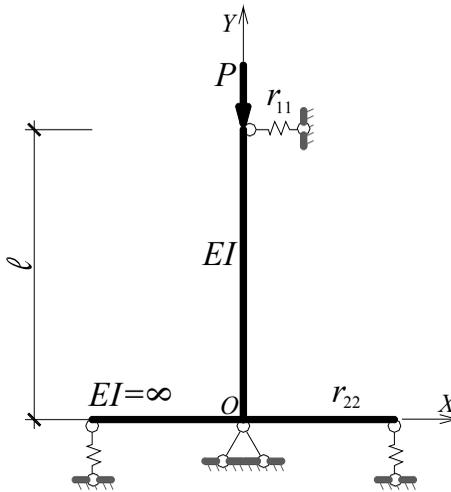


Рис. 4.1

На рис. 4.1 реакция  $r_{11}$  является жесткостью верхней податливой опоры (реакция опоры при ее единичном горизонтальном перемещении), реакция  $r_{22}$  является жесткостью нижнего упруго податливого защемления (реакция опоры при ее единичном угле поворота).

Величина критической силы в этом случае определяется из трансцендентного уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} = \frac{\frac{\ell}{EI} r_{22} \left( \frac{\ell^3}{EI} r_{11} - \nu^2 \right)}{\frac{\ell^3}{EI} r_{11} \nu^2 - \nu^4 + \frac{\ell^3}{EI} r_{11} \frac{\ell}{EI} r_{22}}, \quad \nu = n\ell, \quad n = \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EI}}. \quad (4.1)$$

Если в уравнении (4.1) последовательно принимать  $r_{11}$  и  $r_{22}$  равными 0 или  $\infty$ , то можно получать известные из учебной литературы решения для сжатых стержней с упругими и жесткими опорами (рис. 4.2–4.7). А именно:

а) с упруго-податливой опорой

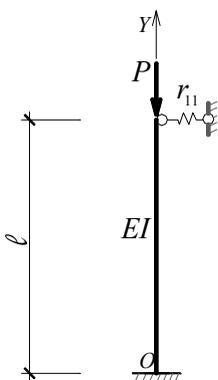


Рис. 4.2

$$r_{22} = \infty$$

$$\operatorname{tg} n\ell = n\ell - \frac{(n\ell)^3 EI}{r_{11} \ell^3} \quad (4.2)$$

б) с жесткими опорами

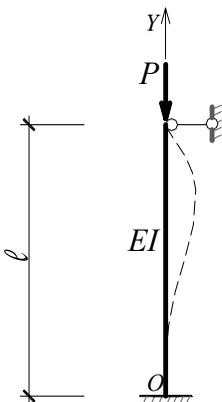


Рис. 4.3

$$r_{11} = \infty, \quad r_{22} = \infty$$

$$\operatorname{tg} n\ell = n\ell, \quad P_{\text{кр}} = 20,19 \frac{EI}{\ell^2} \quad (4.3)$$

в) с упруго-зашемленной опорой

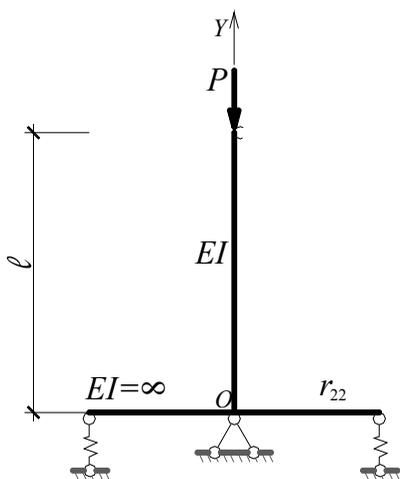


Рис. 4.4

$$r_{11} = 0$$

$$nl \operatorname{tg} nl = \frac{\ell}{r_{22} EI} \quad (4.4)$$

г) с зашемленной опорой

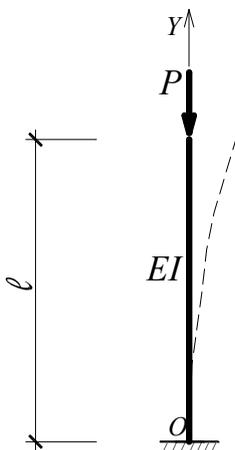


Рис. 4.5

$$r_{11} = 0$$

$$r_{22} = \infty$$

$$\operatorname{tg} nl = 0, \quad P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \quad (4.5)$$

д) с упруго-податливой и шарнирной опорами

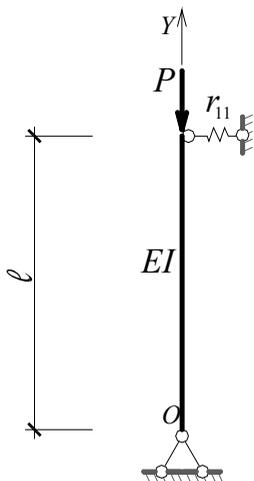


Рис. 4.6

$$\begin{aligned} r_{22} &= 0 \\ P_{\text{кр}} &= r_{11} \ell \end{aligned} \quad (4.6)$$

е) с шарнирными опорами

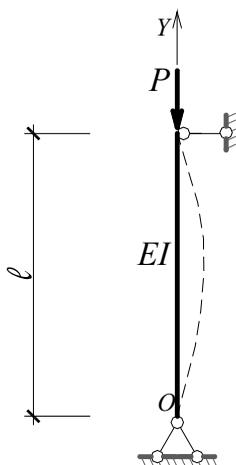


Рис. 4.4

$$\begin{aligned} r_{11} &= \infty \\ r_{22} &= 0 \\ P_{\text{кр}} &= \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Решение трансцендентных уравнений, к которым приводят задачи устойчивости, обычно выполняют на пакетах Mathematica, Matlab или графическими способами.

Расчет на устойчивость можно вести *тремя методами*: статическим, энергетическим и динамическим.

**Статический метод** основан на составлении уравнений статики и исследовании числа их решений, описывающих различные формы равновесия. Он базируется на критерии Эйлера: критической силой является наименьшая сила, способная вызвать потерю устойчивости сооружения, и при которой, согласно [1], происходит разветвление форм равновесия, т. е. наряду с исходной существует смежная форма равновесия.

**Энергетический метод** основан на исследовании полной потенциальной энергии системы и базируется на энергетическом критерии: критической является сила, при которой приращение работы внешних сил равно приращению работы внутренних сил, т. е. когда  $\delta W = \delta V$ .

**Динамический метод** основан на изучении колебаний системы. Он базируется на динамическом критерии: критической является сила, при которой частота собственных колебаний системы равняется нулю.

Одной из форм статического метода расчета на устойчивость стержневых систем является *метод перемещений*, в котором за неизвестные принимаются линейные и угловые перемещения узлов стержневой системы в момент потери устойчивости. Критический параметр, через который находится критическая нагрузка, определяется из условия равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.8)$$

где реакция  $r_{ik}$  в формуле (4.8) имеет тот же смысл, как и при статическом расчете метода перемещений (см. главу 2), но определяется с учетом действия продольных сил в стержнях основной системы.

В табл. 4.1 приводятся результаты вычислений реакций от единичных перемещений, выраженные через функции критического

параметра  $v = \ell \sqrt{\frac{N}{EI}}$ , где  $N = P$  – модуль сжимающей продольной

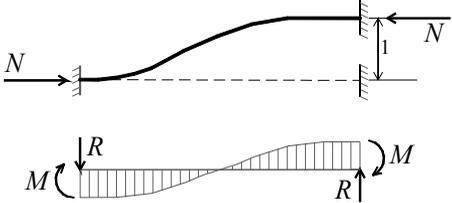
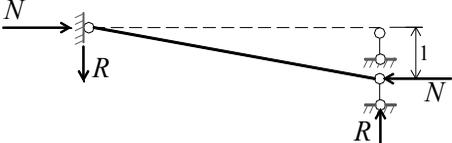
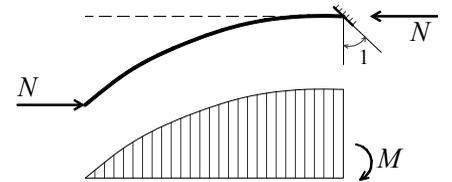
силы для характерных случаев опирания сжато-изогнутых стержней.

В просто изогнутых стержнях построение единичных эпюр изгибающих моментов и вычисление реакций ведется в обычном порядке, как при статическом расчете.

Формулы для вычисления реакций и эпюры изгибающих моментов от единичных смещений опор сжатых стержней (приведены в табл. 4.1) получены в результате интегрирования дифференциального уравнения продольного изгиба при соответствующих неоднородных, единичных краевых условиях.

Таблица 4.1

№ п/п	Расчетная схема, эпюра моментов, реакции	Значение опорной реакции
1		$i = \frac{EI}{\ell}; v = \ell \sqrt{\frac{N}{EI}}$ $M = 3i\varphi_1(v)$ $R = \frac{3i}{\ell}\varphi_1(v)$
2		$M = \frac{3i}{\ell}\varphi_1(v)$ $R = \frac{3i}{\ell^2}\eta_1(v)$
3		$M_1 = 4i\varphi_2(v)$ $M_2 = 2i\varphi_3(v)$ $R = \frac{6i}{\ell}\varphi_4(v)$

№ п/п	Расчетная схема, эпюра моментов, реакции	Значение опорной реакции
4		$M = \frac{6i}{\ell} \varphi_4(v)$ $R = \frac{12i}{\ell^2} \eta_2(v)$
5		$R = \frac{N}{\ell} = \frac{i}{\ell^2} v^2$
6		$M = iv \operatorname{tg} v$

С целью единообразия обозначений в полученные формулы введены специальные поправочные коэффициенты – функции безразмерного параметра  $v$ , учитывающие влияние сжимающих сил:

$$\begin{aligned} \varphi_1(v) &= \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; & \varphi_4(v) &= \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right); \\ \varphi_2(v) &= \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}; & \eta_1(v) &= \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \\ \varphi_3(v) &= \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}; & \eta_2(v) &= \eta_1\left(\frac{v}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

*Метод сил* для определения критических нагрузок применим только для статически неопределимых систем, и поэтому в практических расчетах используется сравнительно редко.

При вычислении критических нагрузок *энергетическим методом* используют формулу:

$$P = \frac{EI \int_0^{\ell} (Y'')^2 dx}{\int_0^{\ell} (Y')^2 dx}, \quad (4.10)$$

где принятое уравнение изогнутой оси стержня  $Y(x)$  в момент потери устойчивости в формуле (4.10) обязательно должно удовлетворять геометрическим граничным условиям опирания стержня.

Формула (4.10) является общей для всех стержней постоянного сечения при любых закреплениях концов. Может давать точное решение, если изогнутая ось сжатого стержня при потере его устойчивости описывается точно. Но в основном, решение по формуле (4.10) – приближенное, так как в большинстве случаев форма потери устойчивости неизвестна.

Для сжатых пластинок в последней формуле сила меняется на интенсивность распределенной нагрузки, изгибная жесткость для стержня меняется на цилиндрическую жесткость пластинки, и более сложный вид имеют подынтегральные выражения в числителе и знаменателе, представляющие энергию изгиба пластинки и сближения граней пластинки, при этом используется интеграл по площади пластинки. Разумеется, задаваемая форма потери устойчивости пластинки должна соответствовать условиям опирания пластинки.

Недостаток метода в том, что при вычислении не представляется возможным указать степень точности получаемого результата. О погрешности можно судить лишь при помощи сравнения последовательных приближений.

## 4.2. Устойчивость стержневых систем и пластинок

**Задача 4.1.** Определить наименьшую критическую силу для сжатого стержня тремя способами (рис. 4.8).

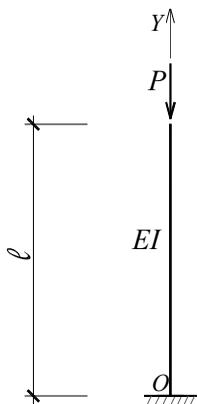


Рис. 4.8

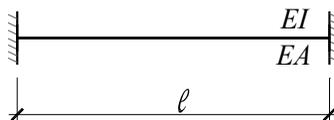


Рис. 4.9

**Задача 4.2.** При каком увеличении температуры  $\Delta t$  стержень потеряет устойчивость (рис. 4.9).

**Задача 4.3.** Определить величину наименьшей критической силы (рис. 4.10).

**Задача 4.4.** Определить величину наименьшей критической силы (рис. 4.11).

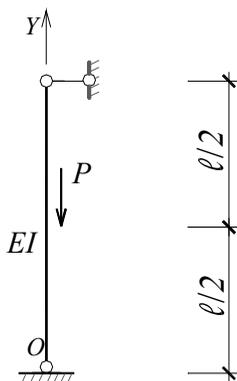


Рис. 4.10

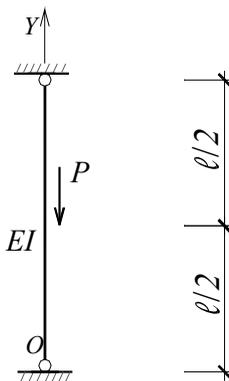


Рис. 4.11

**Задача 4.5.** Определить величину наименьшей критической силы различными способами (рис. 4.12).

**Задача 4.6.** Определить наименьшую критическую силу для стержня с упругой опорой (рис. 4.13). Задачу решить двумя способами.

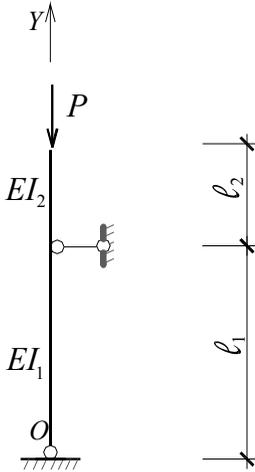


Рис. 4.12

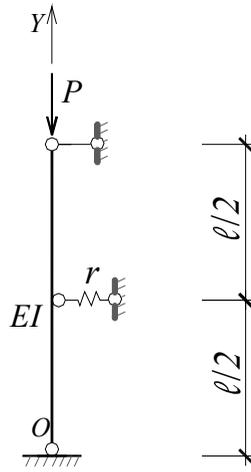


Рис. 4.13

**Задача 4.7.** Методом Ритца оценить величину наименьшей критической силы (рис. 4.14).

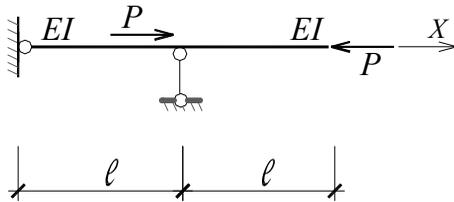


Рис. 4.14

**Задача 4.8.** Методом перемещений оценить величину наименьшей критической силы (рис. 4.15).

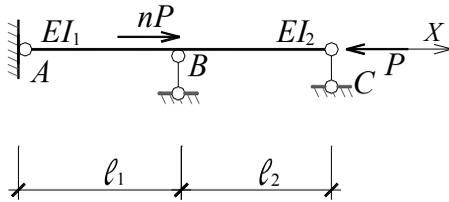


Рис. 4.15

**Задача 4.9.** На примере шарнирно-опертого стержня (рис. 4.16) определить величину критического крутящего момента и установить, как он зависит от растягивающей силы [2].

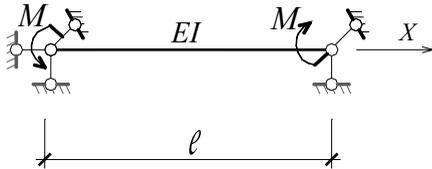


Рис. 4.16

**Задача 4.10.** При неправильном монтаже колонны постоянной жесткости в ней появилась сквозная нормальная трещина (рис. 4.17).

Считая, что наличие трещины соответствует возникновению шарнира в колонне, определить, насколько изменилась критическая сила. Решение получить двумя способами.

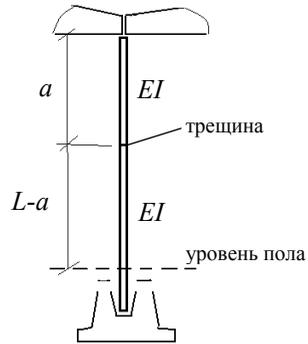


Рис. 4.17

**Задача 4.11.** Используя рациональный подход, найти величину наименьшей критической силы (рис. 4.18).

**Задача 4.12.** Определить наименьшую критическую силу для двухстержневой системы (рис. 4.19).

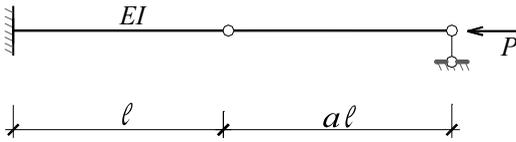


Рис. 4.18

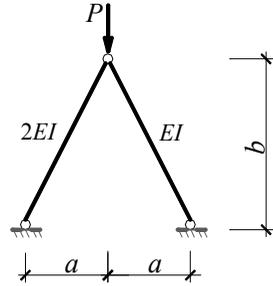


Рис. 4.19

**Задача 4.13.** На стройку привезли железобетонную ферму, которую по проекту необходимо монтировать при помощи траверсы (рис. 4.20, а). Однако траверсы необходимой длины не нашлось и применили траверсу меньших размеров (рис. 4.20, б). Объяснить, как работают стержни фермы в обоих случаях.

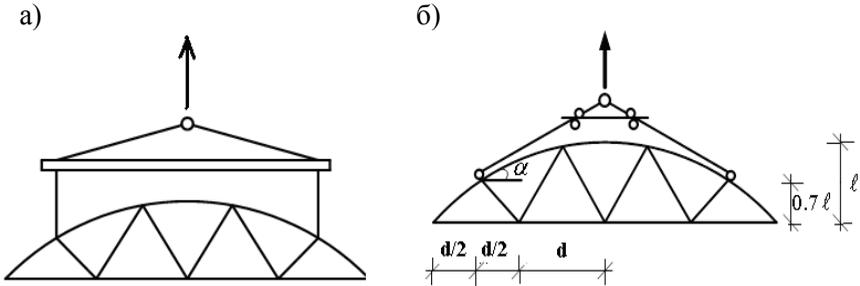


Рис. 4.20

**Задача 4.14.** Определить величины критических нагрузок  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 4.21). Принять  $EI_1 = EI_2 = EI$ ;  $EI_3 = 3EI$ ;  $h_1 = 2$  м;  $h_2 = 6$  м;  $l = 9$  м.

**Задача 4.15.** Определить величину критической силы (рис. 4.22). Принять  $l = 6$  м;  $h_1 = h_2 = 3$  м;  $n = 3$ ;  $EI = 130$ .

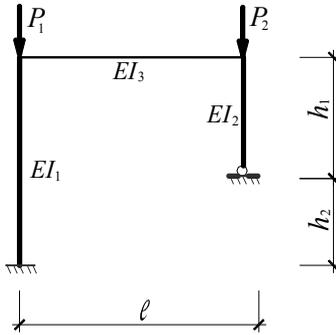


Рис. 4.21

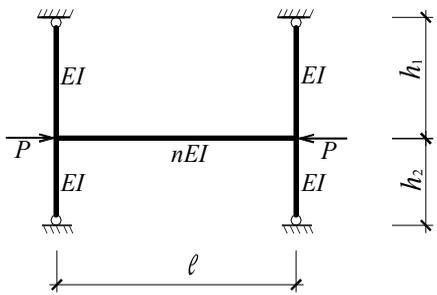


Рис. 4.22

**Задача 4.16.** При реконструкции полиграфического предприятия необходимо рассчитать критическую силу для колонны переменного сечения (рис. 4.23). Определить величину наименьшей критической силы.

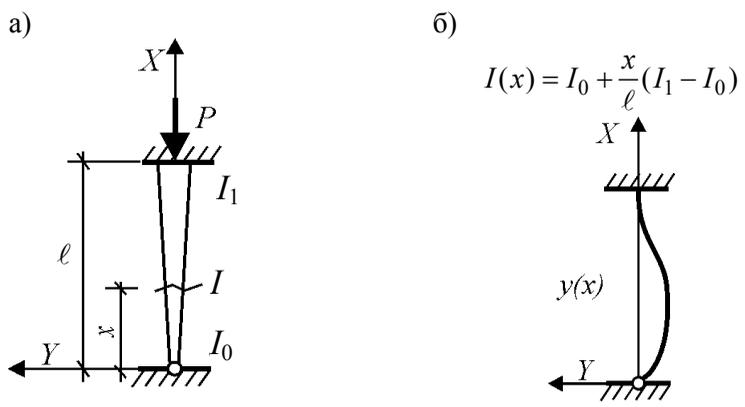


Рис. 4.23

**Задача 4.17.** Определить величину критической нагрузки для системы перекрестных балок одинакового поперечного сечения  $EI$  (рис. 4.24). Связи между продольными и поперечными балками в местах их пересечения не могут воспринимать крутящие моменты [3].

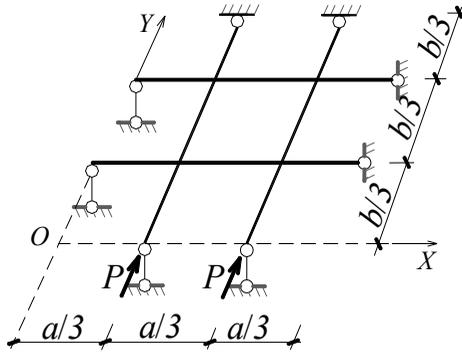


Рис. 4.24

**Задача 4.18.** Определить  $q_{кр}$  для сжатой прямоугольной пластинки [3] (рис. 4.25).

**Задача 4.19.** Определить  $q_{кр}$  для сжатой круглой пластинки [3] (рис. 4.26).

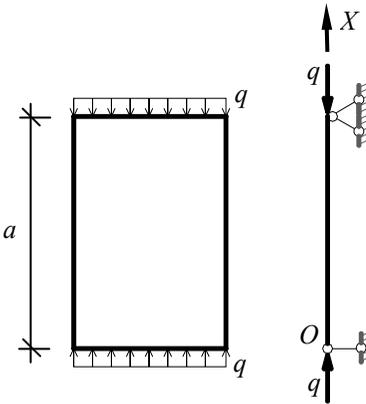


Рис. 4.25

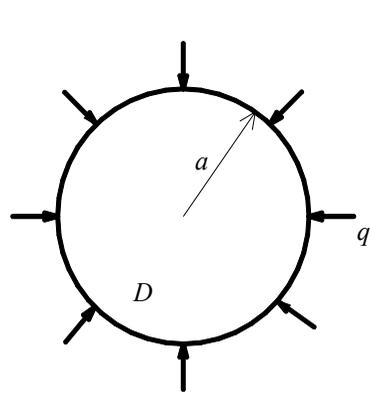


Рис. 4.26

**Задача 4.20.** Определить  $q_{кр}$  для сжатого круглого кольца [3] (рис. 4.27).

**Задача 4.21.** Определить приближенно величину критической нагрузки для сжатой двумя силами пластинки (рис. 4.28) [4].

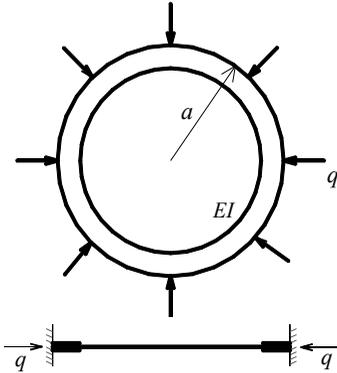


Рис. 4.27

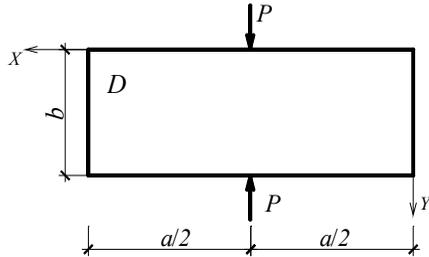


Рис. 4.28

### 4.3. Ответы и решения к главе 4

#### Задача 4.1.

1. *Статический способ.* Дифференциальное уравнение равновесия стержня в момент потери устойчивости (рис. 4.29).

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + n^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0;$$

$$n^2 = \frac{P}{EI},$$

решение которого имеет вид [5]:

$$y(x) = -c_1 \frac{\cos nx}{n^2} + c_2 \frac{\sin nx}{n^2} + c_3 x + c_4.$$

Выполняя граничные условия:

$$x = 0: \quad y = \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$y = \ell: \quad y = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0; \quad EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -P \frac{dy}{dx},$$

получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений, которая имеет решение в случае равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & n^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & n \\ \cos n\ell & \sin n\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получаем уравнение:

$$\cos n\ell = 0,$$

$$\text{откуда } n\ell = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots$$

$$\text{и } P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{\ell^2}; \frac{9\pi^2}{4} \frac{EI}{\ell^2}; \frac{25\pi^2}{4} \frac{EI}{\ell^2}; \dots$$

2. *Энергетический способ.* Задаемся уравнением изогнутой оси стержня в момент потери устойчивости  $y(x) = Ax^2$ . Этим выполняются граничные условия при  $x = 0$  для стержня. Статические граничные условия при  $x = \ell$  при применении энергетического метода выполнять необязательно [4].

Величина наименьшей критической силы определяется из выражения:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\frac{EI}{2} \int_0^\ell \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx} = \frac{EI \cdot A^2 \cdot 4\ell \cdot 3}{4A^2 \cdot \ell^3} = \frac{3EI}{\ell^2},$$

что превышает точное значение на 21,6 %\*.

---

\* Доказано, что энергетический способ дает завышенное значение критических нагрузок [4].

Более точное значение для первой критической силы можно получить, приняв выражение изогнутой оси стержня в момент потери устойчивости в виде ряда:

$$y(x) = x^2 (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots).$$

3. *Динамический способ.* Располагаем сосредоточенную точечную массу  $M$  в точке приложения силы  $P$ . Тогда изгибающий момент (рис. 4.30) в сечении с абсциссой  $x$  равен:

$$M(x) = -P(f - y) + m(\ell - x) \frac{d^2 y}{dt^2}^*.$$

С другой стороны:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Приравняв эти два выражения, получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = n^2 f - \frac{M}{EI} (\ell - x) \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Принимаем:  $y(x, t) = y(x) \cdot e^{i\omega t}$ ;  $f = F \cdot e^{i\omega t}$ .

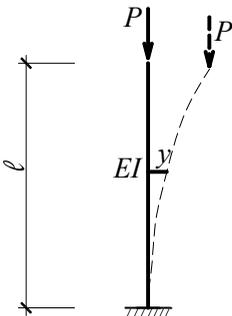


Рис. 4.29

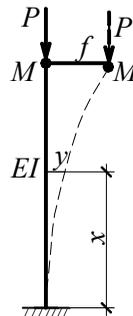


Рис. 4.30

\* Вес массы считаем малым по сравнению с величиной сжимающей силы.

После подстановки и сокращения на  $e^{i\omega t}$  приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = n^2 f - \frac{M\omega^2}{EI}(\ell - x).$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad y &= \frac{dy}{dx} = 0; \\ x = \ell: \quad y &= f. \end{aligned}$$

Выполнение граничных условий приводит к определителю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 + \frac{M\omega^2 \ell}{n^2 EI} \\ n\ell & 0 & -\frac{M\omega^2 \ell}{P} \\ \sin n\ell & \cos n\ell & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем трансцендентное уравнение:

$$n\ell \cos n\ell \left( 1 + \frac{M\omega^2 \ell}{P} \right) - \sin n\ell \frac{M\omega^2 \ell}{P} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{P}{M\ell} \frac{n\ell \cos n\ell}{n\ell \cos n\ell - \sin n\ell}}.$$

В момент потери устойчивости  $\omega = 0$ , или  $\cos n\ell = 0$ ;

$$n\ell = \frac{\pi}{2}(2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

что подтверждает полученный выше результат.



Способ 2 – энергетический. Задаемся формой потери устойчивости стержня в виде:

$$y(x) = ax(\ell - x)$$

и находим  $P_{кр}$ :

$$P_{кр} = \frac{\frac{EI}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx} = \frac{24EI}{\ell^2}.$$

Более точное значение критической силы энергетическим способом можно получить, приняв  $y(x) = a \sin \frac{\pi x}{\ell}$ . Тогда получим

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2}{\ell^2} EI, \text{ что отличается от точного значения на } 1,038 \text{ \%}.$$

**Задача 4.4.** Приводим решение, данное В. И. Феодосьевым [2] (рис. 4.32).

Рассмотрим стержень в изогнутом состоянии при отброшенной верхней опоре. Вертикальную реакцию этой опоры обозначаем через  $P_1$ , а горизонтальную – через  $Q$ .

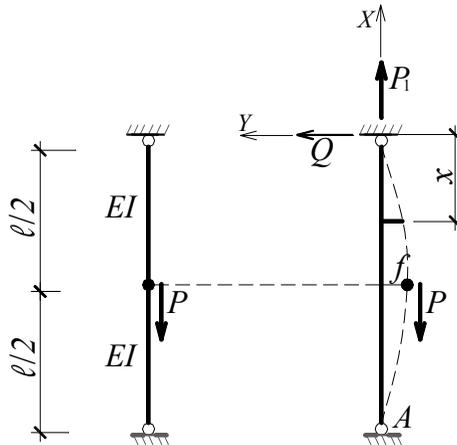


Рис. 4.32

Первый вопрос, который здесь возникает, – это вопрос о величине этих реакций. Сила  $Q$  определяется из условия равенства нулю моментов относительно точки  $A$ , что дает:

$$Q = P \frac{f}{\ell}.$$

До начала выпучивания сила  $P_1 = P/2$ . Поскольку отклонение от прямолинейной формы может быть принято сколь угодно малым, при выпучивании силу  $P_1$  можно также считать равной  $P/2$ . Теперь составляем дифференциальные уравнения изогнутой оси стержня по участкам:

$$\begin{aligned} EIy_1'' &= P_1 y_1 - Qx & \left( 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \right), \\ EIy_2'' &= P_1 y_2 - Qx - P(y_2 - f) & \left( \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y_1'' - \alpha^2 y_1 &= -2\alpha^2 \frac{f}{\ell} x, \\ y_2'' + \alpha^2 y_2 &= -2\alpha^2 \frac{f}{\ell} x + 2\alpha^2 f, \end{aligned}$$

где  $\alpha^2 = \frac{P}{2EI}$ .

Решая уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} y_1 &= A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x + \frac{2f}{\ell} x, \\ y_2 &= C \sin \alpha x + D \cos \alpha x - \frac{2f}{\ell} x + 2f, \end{aligned}$$

при  $x = 0$ ,  $y_1 = 0$ ;

при  $x = \frac{\ell}{2}$ ,  $y_1 = y_2 = f$  и  $y_1' = y_2'$ ;

при  $x = \ell$ ,  $y_2 = 0$ .

Следовательно,

1.  $B = 0$ .

2.  $A \operatorname{sh} \frac{\alpha \ell}{2} + B \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell}{2} + f = f$ .

3.  $C \sin \frac{\alpha \ell}{2} + D \cos \frac{\alpha \ell}{2} + f = f$ .

4.  $A \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell}{2} + B \alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha \ell}{2} + \frac{2f}{\ell} = C \alpha \cos \frac{\alpha \ell}{2} - D \alpha \sin \frac{\alpha \ell}{2} - \frac{2f}{\ell}$ .

5.  $C \sin \alpha \ell + D \cos \alpha \ell = 0$ .

Из этих уравнений вытекает, что  $A = 0$  (т. е. верхняя часть стержня не искривляется). Последние три уравнения принимают вид

$$C \sin \frac{\alpha \ell}{2} + D \cos \frac{\alpha \ell}{2} = 0,$$

$$C \alpha \cos \frac{\alpha \ell}{2} - D \alpha \sin \frac{\alpha \ell}{2} - \frac{4f}{\ell} = 0,$$

$$C \sin \alpha \ell + D \cos \alpha \ell = 0.$$

В том случае, когда определитель системы не равен нулю, все постоянные  $C, D, f$  равны нулю. Тогда  $y_1 = y_2 = 0$  и стержень остается прямолинейным. Решение может быть не нулевым, если определитель равен нулю. Это дает возможность найти критическую силу  $P$

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\alpha \ell}{2} & \cos \frac{\alpha \ell}{2} & 0 \\ \alpha \cos \frac{\alpha \ell}{2} & -\alpha \sin \frac{\alpha \ell}{2} & -\frac{4}{\ell} \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\sin \frac{\alpha \ell}{2} = 0, \quad \frac{\alpha \ell}{2} = \pi, \quad P_{\text{кр}} = \frac{8\pi^2 EI}{\ell^2}.$$

Если бы верхний конец стержня имел возможность смещаться по вертикали, критическая сила была бы в четыре с лишним раза меньше, т. е.  $18,7EI / \ell^2$ .

Теперь получим решение этой задачи (рис. 4.32) методом перемещений. Основная задача метода перемещений, эпюра продольных сил в стержне, единичные эпюры показаны на рис. 4.33.

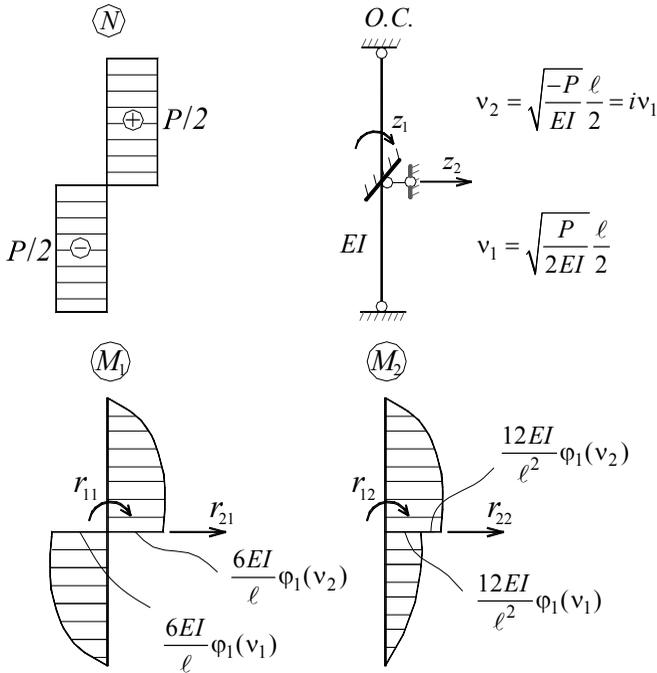


Рис. 4.33

Нужно подчеркнуть, что формулы специальных функций [6] при расчете на устойчивость справедливы при действии растягивающих сил. Поэтому

$$\varphi_1(iv_1) = \frac{(iv_1)^2}{3\left(1 - \frac{iv_1}{\operatorname{th} iv_1}\right)} = -\frac{v_1^2}{3\left(1 - \frac{v_1}{\operatorname{th} v_1}\right)},$$

$$\varphi_1(iv_1) = \frac{(iv_1)^2}{3\left(\frac{\operatorname{tg} iv_1}{iv} - 1\right)} = -\frac{v_1^2}{3\left(\frac{\operatorname{th} v_1}{v_1} - 1\right)}.$$

Так как  $\operatorname{tg} iv = i \operatorname{th} v$ . Последовательно находим

$$r_{11} = \frac{6EI}{\ell} \varphi_1(v_1) + \frac{6EI}{\ell} \varphi_1(v_2) = \frac{6EI}{\ell} \left[ \frac{v_1^2}{3\left(1 - \frac{v_1}{\operatorname{tg} v_1}\right)} - \frac{v_1^2}{3\left(1 - \frac{v_1}{\operatorname{th} v_1}\right)} \right],$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{12EI}{\ell^2} \varphi_1(v_2) - \frac{12EI}{\ell^2} \varphi_1(v_1) = -\frac{12EI}{\ell^2} \left[ \frac{v_1^2}{3\left(1 - \frac{v_1}{\operatorname{th} v_1}\right)} + \frac{v_1^2}{3\left(1 - \frac{v_1}{\operatorname{tg} v_1}\right)} \right],$$

$$r_{22} = \frac{24EI}{\ell^3} \varphi_1(v_1) + \frac{24EI}{\ell^3} \varphi_1(v_2) = \frac{24EI}{\ell^3} \left[ \frac{v_1^2}{3\left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right)} + \frac{v_1^2}{3\left(\frac{\operatorname{th} v}{v} - 1\right)} \right].$$

И определитель:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \frac{-64EI^2 v_1^4}{\ell^4 (v_1 \operatorname{ctg} v_1 - 1)(v_1 \operatorname{ctg} v_1 - 1)} = 0.$$

Наименьшая критическая сила соответствует обращению знаменателя в бесконечность. Это происходит при:

$$v_1 = \pi = \sqrt{\frac{P}{2EI}} \frac{\ell}{2}; \quad P_{\text{кр}} = \frac{8\pi^2}{\ell^2} EI.$$

**Задача 4.5. Способ 1. Метод перемещений.**

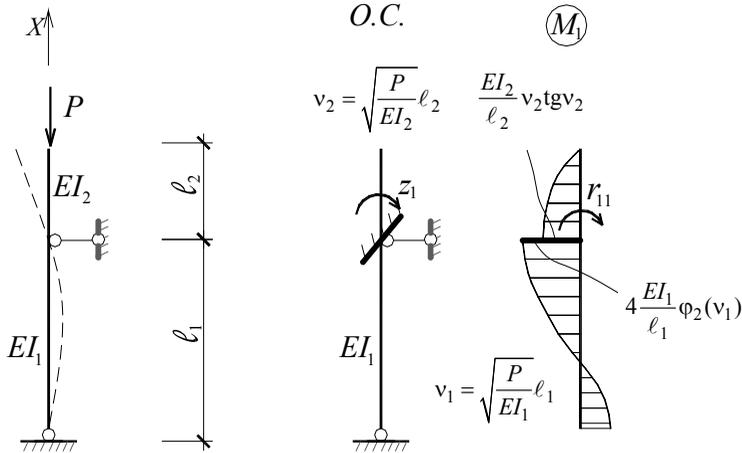


Рис. 4.34

Основная система метода перемещений и единичная эпюра приведены на рис. 4.34. Находим

$$r_{11} = 4 \frac{EI_1}{l_1} \varphi_2(v_1) - \frac{EI_2}{l_2} v_2 \operatorname{tg} v_2 = 0; \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{EI_2}{EI_1}} \frac{l_1}{l_2}.$$

При  $l_1 = l_2 = l$ ;  $EI_1 = 2EI_2$  получаем  $v_2 = 1,3927$  и критическая сила при  $v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{2}}$  равна

$$P_{\text{кр}} = 1,94 \frac{EI}{l^2}.$$

*Способ 2. Энергетический.* Задаемся формой потери устойчивости стержня  $y(x) = a_1 \frac{x^2}{l_1^2} \left( \frac{x}{l_1} - 1 \right)$ , тогда величина критической силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{\frac{EI_1}{2} \int_0^{\ell_1} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EI_2}{2} \int_{\ell_1}^{\ell_1 + \ell_2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^{\ell_1 + \ell_2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx}.$$

При  $EI_1 = 2EI_2$ ;  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  получаем

$$P_{\text{кр}} = 2,96 \frac{EI}{\ell^2}.$$

*Способ 3.* Рассматриваем систему как стержень с упруго-зашемленной опорой (рис. 4.35).

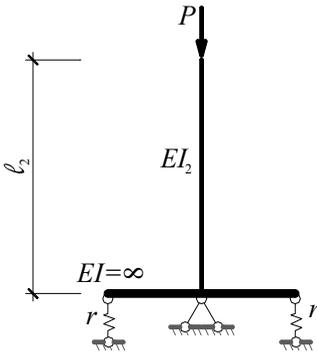


Рис. 4.35

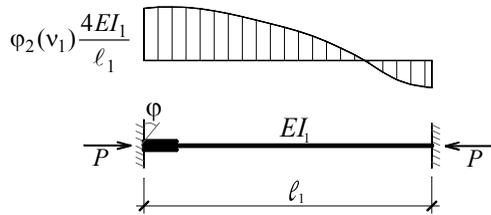


Рис. 4.36

Жесткость упругого зашемления находим по таблицам метода перемещений (рис. 4.36, см. табл. 4.1)

$$r = \frac{4EI_1}{\ell} \varphi_2(v_1).$$

и уравнение устойчивости

$$v_2 \operatorname{tg} v_2 = \frac{4EI_1}{\ell_1} \varphi_2(v_1) \frac{\ell_2}{EI_2},$$

что совпадает с уравнением устойчивости по способу 1.

**Задача 4.6. Способ 1. Метод перемещений.** Основная система метода перемещений, единичные эпюры показаны на рис. 4.37 и 4.38.

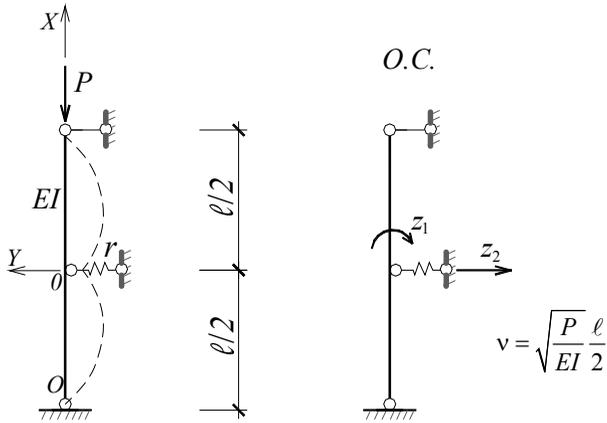


Рис. 4.37

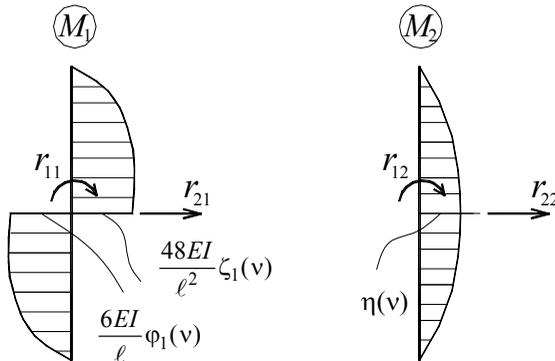


Рис. 4.38

Уравнение устойчивости:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6EI}{l} \varphi_1(v) & 0 \\ 0 & r + \frac{48EI}{l^3} \eta_1(v) \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем два корня. Первое решение

$$r_{11} = \frac{3EI}{l} \varphi_1(\nu) = 0; \quad \varphi_1(\nu) = 0; \quad \nu = \pi; \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

что соответствует критической силе для шарнирно-опертого стержня без упругой опоры.

Второе решение:  $\frac{-r \ell^3}{48EI} = \eta_1(\nu)$ , т. е. критический параметр зависит от  $r, \ell, EI$ .

*Способ 2. Энергетический.* Задаемся формой потери устойчивости в виде параболы четвертой степени, симметричной относительно середины стержня (рис. 4.38)  $y(x) = a(x^4 + bx^2 + c)$ . Так как при  $x = \pm \frac{\ell}{2}$   $y = \left(\pm \frac{\ell}{2}\right) = 0$ , то получаем  $c = \frac{\ell^4}{16} - b \frac{\ell^2}{4}$ . С другой стороны,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ , поэтому  $b = -\frac{3}{2} \ell^2$ . Отсюда получаем выражение для  $y(x) = a \left( x^4 - \frac{3}{2} \ell^2 x^2 + \frac{5}{16} \ell^4 \right)$ , которое удовлетворяет всем граничным условиям рассматриваемой задачи.

Определяем критическую силу

$$P_{кр} = \frac{\frac{EI}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx + \frac{r}{2} y^2(0)}{\frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx} = \frac{EI}{\ell^2} \frac{7 \left( 125 \frac{r \ell^3}{EI} + 6144 \right)}{4352}.$$

Для  $\frac{r \ell^3}{EI} = 30$  метод перемещений дает

$$P_{кр} = 16 \frac{EI}{\ell^2}.$$

Энергетический:

$$P_{кр} = 15,914 \frac{EI}{\ell^2}.$$

**Задача 4.7.** Построим в заданной системе эпюру продольных сил (рис. 4.39).

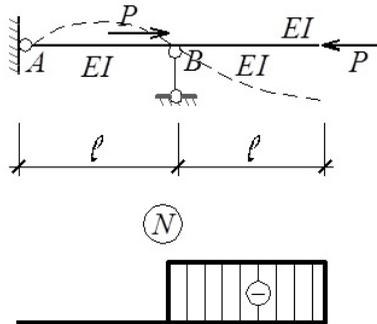


Рис. 4.39

Характер эпюры  $N$  говорит о том, что сечение над опорой  $B$  не смещается по горизонтали. Поэтому для  $P_{кр}$  имеем при очертании оси балки в момент потери устойчивости  $y(x) = a_1 x(\ell - x)$ .

$$P_{кр} = \frac{EI \int_0^{2\ell} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_{\ell}^{2\ell} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx} = \frac{EI}{\ell^2} \cdot \frac{24}{13} = 1,846 \frac{EI}{\ell^2}.$$

Для проверки используем метод перемещений (рис. 4.40), приняв за неизвестное угол поворота сечения над опорой  $B$ .

Уравнение устойчивости

$$\operatorname{tg} v = \frac{3}{v}; \quad v = 1,19; \quad P_{кр} = 1,416 \frac{EI}{\ell^2}.$$

На рис. 4.41 дана графическая интерпретация получения решения.

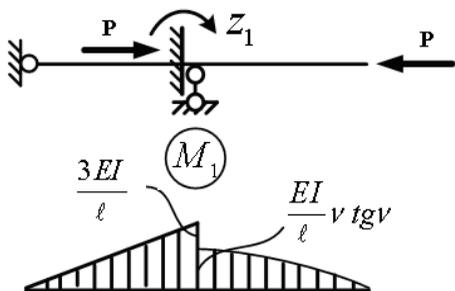


Рис. 4.40

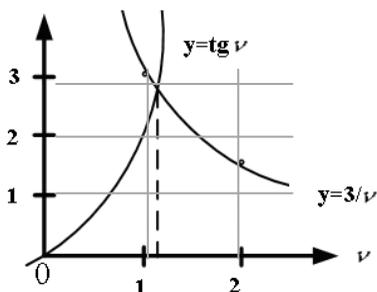


Рис. 4.41

**Задача 4.8.** Построим эпюру продольных сил в неразрезной балке (рис. 4.42). Если  $n > 1$ , то на участке балки  $AB$  действует растягивающая сила. Основная система метода перемещений и единичная эпюра приведены на рис. 4.43.

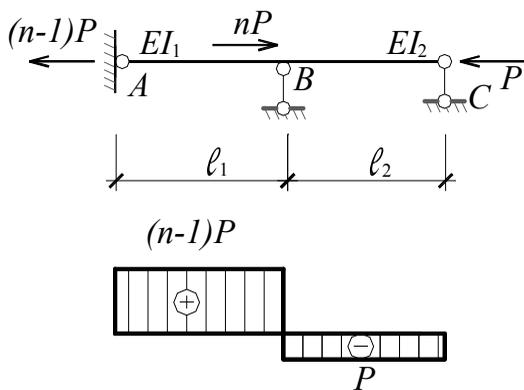


Рис. 4.42

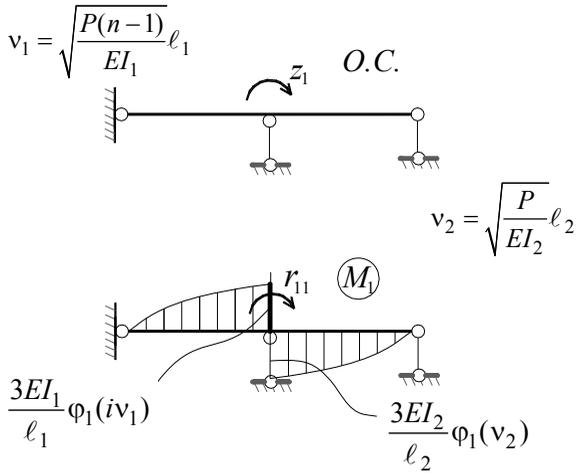


Рис. 4.43

### Уравнение устойчивости

$$\varphi_1(iv_1) + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{\ell_1}{\ell_2} \varphi_1(v_2) = 0$$

или

$$-\frac{v_1^2}{3 \left( 1 - \frac{v_1}{\operatorname{th} v_1} \right)} + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{\ell_1}{\ell_2} \frac{v_2^2}{3 \left( 1 - \frac{v_2}{\operatorname{th} v_2} \right)} = 0.$$

Так как  $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{-P(n-1)}{EI_1}} \frac{\ell_1}{\ell_2} \sqrt{\frac{EI_2}{P}} = i \frac{\ell_1}{\ell_2} \sqrt{\frac{EI_2(n-1)}{EI_1}}$ , то это урав-

нение можно решить, если известны отношения пролетов и жесткостей. Например, при  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ ;  $n = 2$ ;  $EI_1 = EI_2$  получим:

$$v_1 = iv_2; \quad \frac{1}{3} v_2^2 \left( \frac{i}{1 - \frac{v_2}{\operatorname{tg} v_2}} \right) \cdot 2 = 0.$$

И  $P_{кр} = v_2^2 \frac{EI_2}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ , т. е. как для стержня с шарнирно опертыми концами.

т. е. как для стержня с шарнирно опер-

**Задача 4.9.** Приводим решение, данное В. И. Феодосьевым [2] (рис. 4.44), в редакции автора.

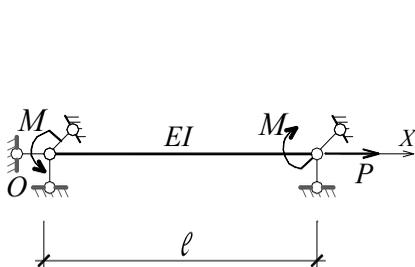


Рис. 4.44

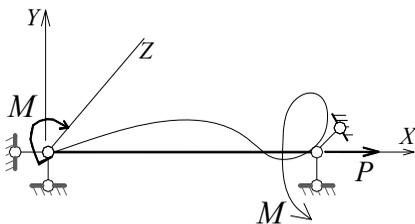


Рис. 4.45

Составляем дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса, полагая, что перемещения малы.

Введем систему координат  $x, y, z$  (рис. 4.45). В сечении  $x$  изгибающие моменты от силы  $P$  и момента  $M$  будут в плоскости  $xu$ :  $Pu$  и  $Mz'$ .

Знак «плюс» и «минус» перед моментом берется в зависимости того, направлен ли момент в сторону увеличения или уменьшения положительной кривизны в соответствующей плоскости изгиба.

Если принять, что жесткости на изгиб в плоскостях  $xu$  и  $xz$  одинаковы, то уравнения упругой линии можно написать в виде:

$$EIy'' = Py + Mz', \quad EIz'' = Pz - My'. \quad (4.11)$$

Решение этой системы возьмем в виде:

$$y = A \cos \alpha_1 x + B \sin \alpha_1 x + C \cos \alpha_2 x + D \sin \alpha_2 x;$$

$$z = A \sin \alpha_1 x - B \cos \alpha_1 x + C \sin \alpha_2 x - D \cos \alpha_2 x,$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – корни квадратного уравнения:

$$\alpha^2 + \frac{M}{EI}\alpha + \frac{P}{EI} = 0. \quad (4.12)$$

В случае шарнирного закрепления стержня имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad y = z = 0,$$

$$\text{при } x = \ell \quad y = z = 0.$$

Отсюда получаем четыре уравнения:

$$A + C = 0, \quad B + D = 0;$$

$$A \cos \alpha_1 \ell + B \sin \alpha_1 \ell + C \cos \alpha_2 \ell + D \sin \alpha_2 \ell = 0,$$

$$A \sin \alpha_1 \ell - B \cos \alpha_1 \ell + C \sin \alpha_2 \ell - D \cos \alpha_2 \ell = 0.$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы, получаем:

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\ell = 1,$$

или

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\ell = 0, 2\pi; 4\pi; \dots$$

Но согласно уравнению (4.12):

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2\sqrt{\left(\frac{M}{2EI}\right)^2 - \frac{P}{EI}},$$

следовательно,

$$M_{\text{кр}} = \pm 2\sqrt{EI} \sqrt{P_3 + P},$$

где  $P_3$  – Эйлера сила.

$$P_3 = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}.$$

Таким образом, при увеличении растягивающей силы  $P$  критический момент возрастает. Если сила  $P$  – сжимающая, момент  $M$  уменьшается. При сжимающей силе  $P = P_3$  величина  $M_{кр}$ , как и следовало ожидать, равна нулю.

**Задача 4.10.** Задачу будем решать энергетическим способом, считая колонну стержнем, защемленным внизу и шарнирно-опертым сверху. Рассмотрим форму потери устойчивости стержня (рис. 4.46).

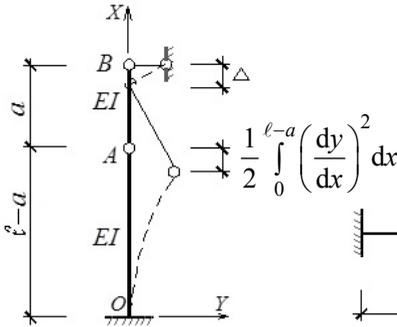


Рис. 4.46

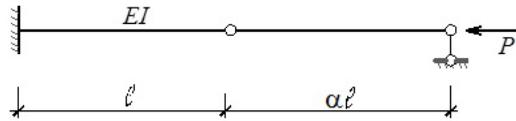


Рис. 4.47

Задаемся формой потери устойчивости на участке  $OA$  стержня через  $y(x)$ . Тогда вертикальное перемещение точки приложения силы  $P$  будет равно:

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^{\ell-a} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx + a(1 - \cos\varphi).$$

Но  $a \sin\varphi = y(\ell - a)$  и  $\sin\varphi = \frac{y(\ell - a)}{a}$ . Тогда

$$a(1 - \cos\varphi) = a \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2(\ell - a)}{a^2}} \right).$$

Приравняв работу силы  $P$  энергии изгиба стержня, получаем:

$$P = \frac{\frac{EI}{2} \int_0^{\ell-a} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^{\ell-a} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \frac{a}{2} y^2 (\ell - a)}$$

Здесь использовано представление  $1 - \sqrt{1 - x^2} \approx \frac{x^2}{2}$ , справедливое

при  $x \ll 1$ . Задаемся  $y(x) = bx^2$ . Получаем для  $\frac{a}{\ell - a} = 1$ ,  $P_{кр} = 6,857 \frac{EI}{\ell^2}$ .

При  $y(x) = b \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2(\ell - a)} \right)$  находим после вычислений  $P_{кр} = 5,451 \frac{EI}{\ell^2}$ .

При использовании метода перемещений для решения этой задачи смотри задачу 4.11. При целой колонне  $P_{кр} = 20,19 \frac{EI}{\ell^2}$ .

**Задача 4.11.** Проще всего эту задачу решать методом перемещений (рис. 4.47).

На рис. 4.48 приведены основная система метода перемещений и единичная эпюра.

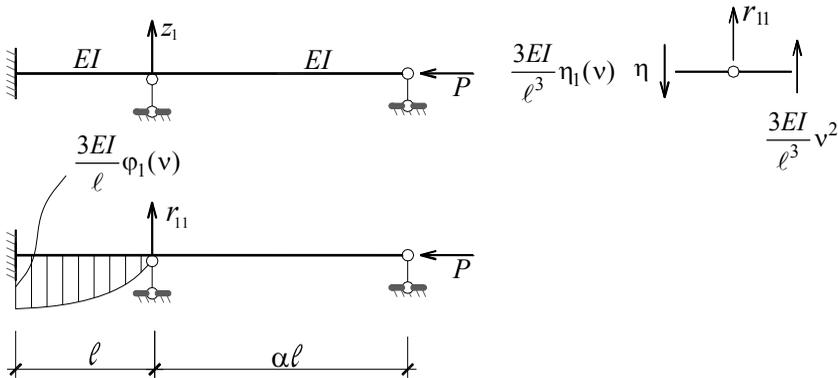


Рис. 4.48

Уравнение устойчивости:

$$\frac{3EI}{\ell^3} \eta_1(v) - \frac{EI}{\ell^3} v^2 = 0, \quad v = 1,6895.$$

$$P_{кр}^1 = 2,854 \frac{EI}{\ell^2} \quad (\text{потеря устойчивости левого стержня}).$$

При потере устойчивости второго стержня и при  $\alpha = \sqrt{2}$ :

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha \ell)^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EI}{\ell^2} = 2,467 \frac{EI}{\ell^2}.$$

То есть, первым потеряет устойчивость при  $\alpha = \sqrt{2}$  второй стержень.

**Задача 4.12.** Из условия равновесия узла (рис. 4.49) находим продольные силы в стержнях (рис. 4.50).

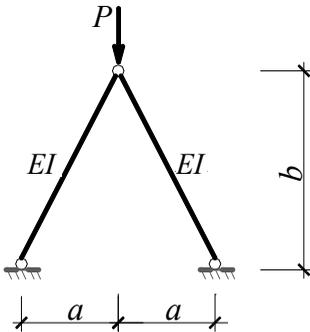


Рис. 4.49

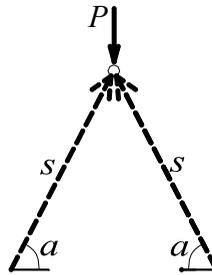


Рис. 4.50

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Приравниваем это выражение критической силе для шарнирно-опертого стержня:

$$\frac{P_{\text{кр}}}{2 \sin \alpha} = \frac{\pi^2 EI}{a^2 + b^2},$$

отсюда получаем

$$P_{\text{кр}} = \frac{2\pi^2 EI}{a^2 + b^2} \sin \alpha.$$

**Задача 4.13.** При подъеме фермы краном ее элементы работают на нагрузку от собственного веса и сил инерции. При использовании траверсы картина знаков усилий в стержнях фермы примерно изображена на рис 4.51.

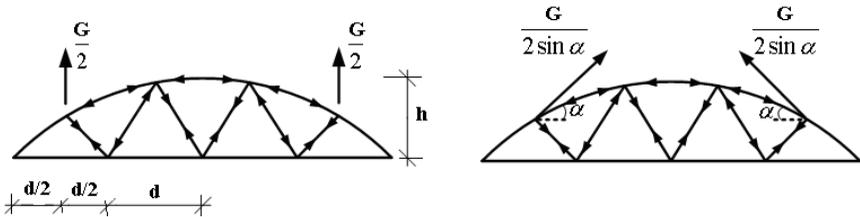


Рис. 4.51

При подъеме траверсы меньших размеров картина знаков сохранится, но значительно увеличатся усилия в стержнях верхнего и нижнего поясов.

**Задача 4.14.** Определение критических сил  $P_1$  и  $P_2$  в плоской раме (рис. 4.52). Принять  $EI_1 = EI_2 = EI$ ;  $EI_3 = 3EI$ ;  $h_1 = 2$  м;  $h_2 = 6$  м;  $\ell = 9$  м.

Определение критических сил выполним методом перемещений. Заданная система, основная система и единичные эпюры показаны на рис. 4.52–4.54.

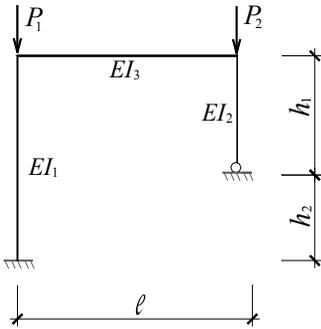


Рис. 4.52

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI_1}}(h_1 + h_2)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}}h_2$$

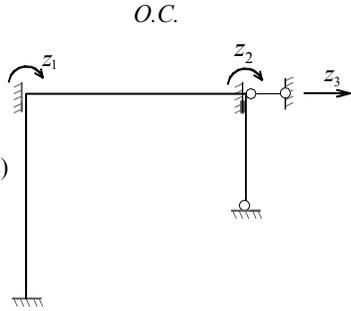


Рис. 4.53

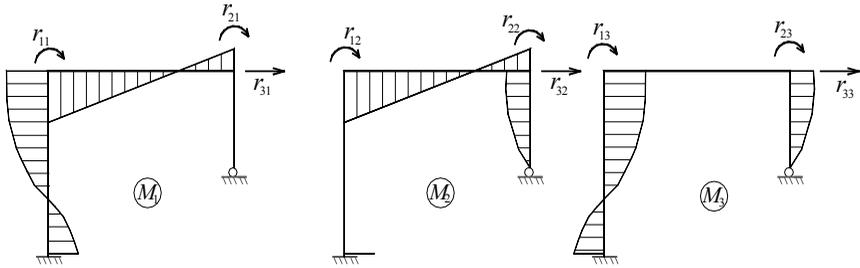


Рис. 4.54

Коэффициенты канонических уравнений метода перемещений равны:

$$r_{11} = 4 \frac{EI_1}{h_1 + h_2} \varphi_2(v_1) + 4 \frac{EI_3}{\ell_1} = \frac{EI}{2} \varphi_2(v_1) + \frac{4}{3} EI;$$

$$r_{12} = r_{21} = 2 \frac{EI_3}{\ell} = \frac{2}{3} EI;$$

$$r_{13} = r_{31} = \frac{6EI_2}{(h_1 + h_2)^2} \varphi_4(v_1) = \frac{3}{32} \varphi_4(v_1);$$

$$r_{22} = 4 \frac{EI_3}{\ell} + 3 \frac{EI_2}{h_2} \varphi_1(v_2) = \frac{4}{3} EI + \frac{EI}{2} \varphi_1(v_2);$$

$$r_{23} = r_{32} = 3 \frac{EI_2}{h_2^2} \varphi_1(v_2) = \frac{EI}{12} \varphi_1(v_2);$$

$$r_{33} = 12 \frac{EI_2}{h_2^3} \eta_2(v_2) + \frac{3EI_1}{(h_1 + h_2)^3} \eta_1(v_1) = \frac{EI}{72} \eta_1(v_2) + \frac{3EI}{512} \eta_1(v_1).$$

Раскрыв определитель:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ находим при } \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \frac{4}{3} = 2 \text{ или } v_1 = 2v_2.$$

Отсюда  $v_2 = 0,9641$ ;  $v_1 = 1,9283$ .

Критические силы:

$$P_1 = 1,9283^2 \frac{EI_1}{64}; \quad P_2 = 0,9641^2 \frac{EI_2}{36}.$$

**Задача 4.15.** Необходимо рассмотреть симметричную (рис. 4.55) и антисимметричную (рис. 4.56) формы потери устойчивости. Решая эту задачу методом перемещений, строим единичные эпюры для обеих форм потери устойчивости (рис. 4.57 и 4.58). Уравнение устойчивости в симметричном случае:

$$O = r_{11} = 3 \frac{EI_1}{3} \cdot 2 + 4 \frac{3EI}{6} \varphi_2(v) - 2 \frac{3EI}{6} \varphi_3(v); \quad v = 4,5779;$$

в антисимметричном случае:

$$O = r_{11} = 3 \frac{EI_1}{3} \cdot 2 + 4 \frac{3EI}{6} \varphi_2(v) + 2 \frac{3EI}{6} \varphi_3(v); \quad v = 7,1818.$$

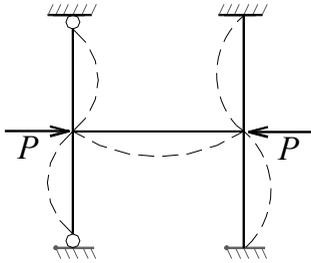


Рис. 4.55

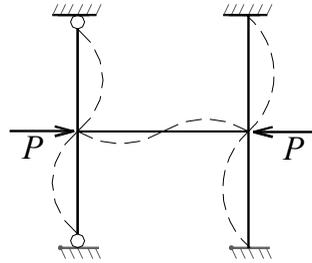


Рис. 4.56

( $M_1$ )

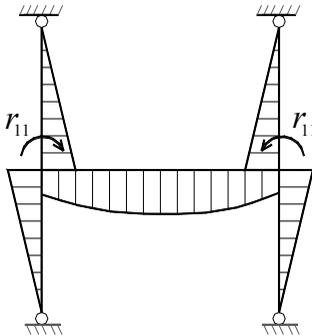


Рис. 4.57

( $M_2$ )

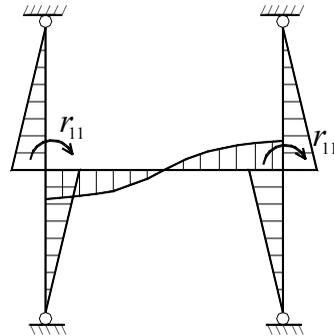


Рис. 4.58

Подставив значение изгибной жесткости для швеллера 30К1:

$$EI = 18\,849 \text{ см}^4 \cdot 2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 37\,598 \text{ кНм}^2,$$

получаем:

$$P_{\text{сим}} = 21\,946 \text{ кН};$$

$$P_{\text{антисим}} = 54\,011 \text{ кН}.$$

В антисимметричном случае критическая сила получилась больше, т. к. центральный стержень изогнуть по антисимметричной форме потери устойчивости труднее, чем при симметричной (см. рис. 4.55 и 4.56).

**Задача 4.16.** Переменная жесткость поперечного сечения (см. рис. 4.23) определяется соотношением:

$$I(x) = I_0 + \frac{x}{\ell}(I_1 - I_0).$$

Задаемся формой потери устойчивости через косинус-биномы Филоненко-Бородича [9]:

$$y(x) = A_1 \left[ \cos \frac{2n+1}{2\ell} \pi x - \cos \frac{2n+3}{2\ell} \pi x \right].$$

Критическая сила (наименьшая при  $n = 0$ ) определяется из соотношения:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int_0^{\ell} EI(x)(y'')^2 dx}{\int_0^{\ell} (y')^2 dx} = \frac{E \left[ I_0(41\pi^2 - 16) + I_1(41\pi^2 + 16) \right]}{40 \ell^2}.$$

Сопоставим для  $I_0 = I_1$  (постоянное сечение колонны), получаем:

$$P_{\text{кр}} = \frac{EI_0 \cdot 41\pi^2}{20 \ell^2} \approx 20,23 \frac{EI_0}{\ell^2}. \text{ Точное значение } P_{\text{кр}} = 20,19 \frac{EI_0}{\ell^2}.$$

**Задача 4.17.** Определение критической нагрузки выполним энергетическим способом.

Задаемся функцией прогибов системы в момент потери устойчивости [2] (см. рис. 4.24)

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Энергия изгиба для четырех балок для наименьшей критической силы:

$$U = \frac{EI}{2} \left[ \int_0^b \left( \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy \Big|_{x=\frac{a}{3}} + \int_0^b \left( \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy \Big|_{x=\frac{2a}{3}} + \int_0^a \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \Big|_{y=\frac{b}{3}} + \int_0^a \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \Big|_{y=\frac{2b}{3}} \right] = \frac{3EI}{8} \pi^2 A_{11} \left( \frac{1}{b^3} + \frac{1}{a^3} \right).$$

Работа сил  $P$  на перемещениях, вызванных сближением концов стержней вследствие их изгиба:

$$\frac{1}{P} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^b \left( \frac{dw}{dy} \right)^2 dy \Big|_{x=\frac{a}{3}} + \frac{1}{2} \int_0^b \left( \frac{dw}{dy} \right)^2 dy \Big|_{x=\frac{2a}{3}} = \frac{3}{8b} \pi^2 A_{11}^2.$$

Отсюда находим:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{b^2} \left( 1 + \frac{b^3}{a^3} \right).$$

**Задача 4.18.** Приводим без изменений решение С. П. Тимошенко [4] (см. рис. 4.25).

Положим, что в прямоугольной пластинке оперты только поперечные стороны  $x=0$  и  $x=a$ , по которым равномерно распределены продольные сжимающие усилия. Величину их, отнесенную к единице длины, обозначим, как и раньше, через  $P_{\text{кр}}$ . По продольным сторонам при выпучивании появляются непрерывно распределенные усилия, обеспечивающие искривленной пластинке цилиндрическую форму.

Дифференциальное уравнение поверхности будет то же, что и раньше:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.13)$$

Частное решение уравнения возьмем в этом случае в такой форме:

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (4.14)$$

Подстановкой этого решения в уравнение (4.13) получим величину критической нагрузки, соответствующую выбранной форме равновесия:

$$P_{\text{кр}} = D \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = \frac{E \delta^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad (4.15)$$

где  $\sigma$  – коэффициент Пуассона.

Полученное для  $P_{\text{кр}}$  значение отличается от результата обычной формулы продольного изгиба множителем  $(1-\sigma^2)$ . Такое увеличение жесткости получилось вследствие того, что пластинка выпучивается по цилиндрической поверхности.

Первая возможная искривленная форма равновесия будет при  $m = 1$ ,  $P = D \frac{\pi^2}{a^2}$ , или, вводя величину  $U$ , получим

$$U = \frac{Pb^2}{D} = \pi^2 \frac{b^2}{a^2}. \quad (4.16)$$

И здесь величина  $U$  вполне определяется соотношением между длиной и шириной пластинки. Если прибегнуть к графическому построению, аналогичному построению предыдущего параграфа, то для  $U$  получим кривую, имеющую своими асимптотами оси  $X$  и  $Y$ .

Для вычисления величины критического напряжения  $R_{\text{кр}}$  будем иметь прежнюю формулу:

$$R_{\text{кр}} = \frac{UE}{12(1-\sigma^2)(b/\delta)^2}. \quad (4.17)$$

**Задача 4.19.** Рассмотрим первую симметричную форму потери устойчивости для круглой пластинки. Задаемся  $w(r) = c(a^2 - r^2)^2$ .

Энергия изгиба [3]:

$$u = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 r dr d\varphi = \pi D c^2 \left( 32a^6 - 64a^6 + \frac{128}{3} a^6 \right).$$

Сближение концов круглой пластинки в момент потери устойчивости (суммарное):

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 r dr d\varphi = \pi^2 c^2 \left( 4a^8 - \frac{16}{3} a^8 + 2a^8 \right).$$

Отсюда  $q_{кр} = 16 \frac{D}{a^2}$ .

Точное решение [4]  $q_{кр} = 14,68 \frac{D}{a^2}$ . Уточнить полученное выше решение можно:

$$w(r) = c_1 (a^2 - r^2)^2 + c_2 (a^2 - r^2)^3.$$

Опуская промежуточные вычисления, приводим окончательные результаты:

$$q_{кр}^1 = 14,684 \frac{D}{a^2};$$

$$q_{кр}^2 = \frac{63,316D}{a^2}.$$

**Задача 4.20.** Для плоского кольца дифференциальное уравнение радиальных перемещений имеет вид [1]:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{a^2} = - \frac{M}{EI}$$

или, вводя новую переменную  $s = a\theta$ , получим вместо этого уравнения:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{Ma^2}{EI}.$$

Так как кольцо находится в безмоментном состоянии, то уравнение становится однородным и имеет решение [7]:

$$w = A \cos n\theta + B \sin n\theta, \quad n = \sqrt{1 + \frac{qa^2}{EI}}.$$

Меньшей критической нагрузке соответствует антисимметричная форма потери устойчивости (рис. 4.59), поэтому  $A = 0$ ;  $B$  находится из условия, что при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $w = 0$ . Откуда получаем:

$$n \frac{\pi}{2} = 0; \pi; 2\pi.$$

Наименьшей критической силе соответствует  $n = 2$ .

Поэтому из уравнения  $2 = \sqrt{1 + \frac{qa^2}{EI}}$  находим  $q_{кр} = \frac{3EI}{a^2}$ .

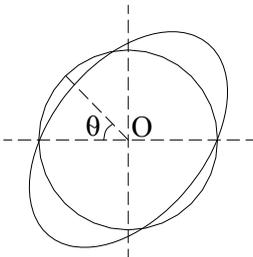


Рис. 4.59

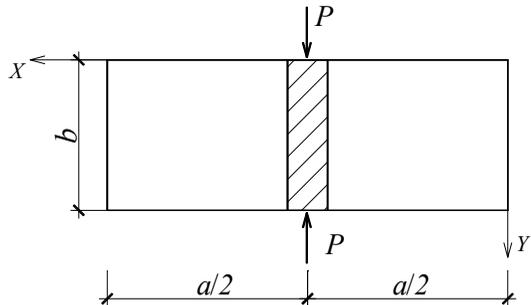


Рис. 4.60

**Задача 4.21.** Приводим без изменения решение С. П. Тимошенко [4].

Прямоугольная пластинка, опертая по краям, сжимается двумя взаимно противоположными силами  $P$ , приложенными в серединах продольных сторон пластинки (рис. 4.60). Когда силы  $P$  достигают известного предела, плоская форма равновесия пластинки перестает быть устойчивой, пластинка выпучивается.

Величину критической нагрузки приблизительно можно найти из таких соображений. При выпучивании пластинки точки приложения сил  $P$  несколько сблизятся, и благодаря этому силы  $P$  совершат некоторую работу.

В то же самое время изменится и величина потенциальной энергии деформированной пластинки. Это изменение главным образом будет заключаться в энергии изгиба. Если приравнять работу сил  $P$  энергии изгиба выпучивающейся пластинки, то получим уравнение для нахождения  $P_{кр}$ . Если бы изменение потенциальной энергии пластинки заключалось лишь в энергии изгиба, то получаемое таким путем значение  $P_{кр}$  было бы совершенно точным. В действительности задача гораздо сложнее, так как, кроме изгиба, выпучивание пластинки сопровождается изменением удлинений\*.

Условиям на опертых сторонах пластинки мы удовлетворим, положив:

$$w = \sin \frac{\pi y}{b} \cdot \sum_{m=1, 3, 5, \dots} A_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (4.18)$$

Потенциальная энергия изгиба выпучившейся пластинки будет:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} D \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} \right] dx dy = \\ &= \frac{abD}{8} \sum A_m^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

---

\* Приведенное решение является приблизительным не только из-за применения энергетического способа. При действии попарно противоположных сил на пластинку в ней появляются растягивающие напряжения.

Сближение  $\delta b$  точек приложения сил  $P$  найдется из следующей формулы:

$$\delta b = \frac{1}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=a/2}^2 dy = \frac{\pi^2}{4b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2.$$

Соответствующая этому сближению работа внешних сил будет:

$$\frac{P\pi^2}{4b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2.$$

Приравняв эту работу потенциальной энергии изгиба (4.19), приходим к уравнению для определения критического значения сжимающей силы  $P$ :

$$\frac{P\pi^2}{4b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2 = \frac{\pi^2 abD}{8} \cdot \sum A_m^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2. \quad (4.20)$$

Нужно отыскать такое соотношение между коэффициентами  $A_1, A_3, \dots$ , чтобы определяемое из уравнения (4.20) значение  $P_{кр}$  имело наименьшее значение; другими словами, нужно найти минимум выражения:

$$\frac{D\pi^2 ab^2}{2} \frac{\sum \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 A_m^2}{(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2}. \quad (4.21)$$

Составляя производную от этого выражения по какому-либо коэффициенту  $A_m$  и приравняв ее к нулю, найдем:

$$A_m = \pm \frac{\sum A_m^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}{(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} = \pm \frac{Q}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}. \quad (4.22)$$

где  $Q$  – величина постоянная для всякого  $m$ , и потому выражение (4.22) даст нам нужное соотношение между коэффициентами  $A_1, A_3, A_5, \dots$

Вставляя значение  $A_m$  в выражение (4.21) для критической силы, найдем:

$$P_{\text{кр}} = \frac{D\pi^2 ab^2}{2} \frac{1}{\sum \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}}.$$

Вводя для отношения длины пластинки к ее ширине обозначение  $\mu = a/b$ , найдем:

$$P_{\text{кр}} = \frac{D\pi^2}{2b} \frac{1}{\sum \frac{1}{\mu^3 \left(\frac{1}{\mu^2 m^2}\right)^2}}. \quad (4.23)$$

Для нахождения критической нагрузки нужно лишь найти стоящую в знаменателе сумму бесконечного ряда.

Возьмем разложение  $\text{ch} \frac{\pi z}{2}$  в бесконечное произведение:

$$\frac{e^{\frac{\pi z}{2}} + e^{-\frac{\pi z}{2}}}{2} = \left(1 + z^2\right) \left(1 + \frac{z^2}{9}\right) \left(1 + \frac{z^2}{25}\right) \dots$$

Логарифмируя это выражение и составляя от него производную, найдем:

$$\frac{\pi}{4} \text{th} \frac{\pi z}{2} = z \left( \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{9+z^2} + \frac{1}{25+z^2} + \dots \right) = \sum \frac{z}{m^2 + z^2}. \quad (4.24)$$

Составляя производную от обеих частей полученного выражения, найдем:

$$\frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi z}{2}} = \sum \frac{1}{m^2 + z^2} - \sum \frac{2z^2}{(m^2 + z^2)^2}.$$

Или, умножая на  $z$  и принимая во внимание равенство (4.24), получим

$$z^3 \sum \frac{1}{(m^2 + z^2)^2} = \frac{\pi}{8} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi z}{2} - \frac{\pi z / 2}{\operatorname{ch}^2 (\pi z / 2)} \right]. \quad (4.25)$$

Пользуясь таблицами гиперболических функций, легко можно вычислять значения для  $P_{\text{кр}}$  при различных значениях  $\mu$ .

Заметим, что с возрастанием длины пластинки сумма

$$\sum \mu^3 \left( \frac{1}{\mu^2 + m^2} \right)^2$$

очень быстро приближается к своему пределу  $\pi/8$  и критическая сила – к пределу:

$$P_{\text{кр}} = \frac{4\pi D}{b}. \quad (4.26)$$

Для  $\mu = a/b = 2$  означенная сумма будет  $0,973 \frac{\pi}{8}$ .

Надо помнить, что вычисляемое по формуле (4.23) значение критической нагрузки будет меньше действительного и разность между действительной и истинной величиной  $P_{\text{кр}}$  будет более значительной для коротких пластинок. Насколько близка к истине полученная формула, можно судить лишь на основании опытов. Мы пришли к решению, взяв для  $w$  выражение (4.18).

Если для  $w$  взять самое общее выражение

$$w = \sum \sum A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

то можно показать, что наименьшее значение для критической сжимающей силы получаем, беря одно определенное значение для  $n$ . При  $a > b$  примем значение  $n = 1$ .

Мы предполагали края пластинки свободно поворачивающимися, но величину критической силы можно приблизительно определить и при заделанных вдоль сторонах пластинки. В этом случае:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и при } y = b.$$

Условию этому мы удовлетворим, положив:

$$w = \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \cdot \sum A_m \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Потенциальная энергия изгиба для этого случая выражается так:

$$V = \frac{\pi^4 abD}{8} \cdot \sum \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)^2 A_m^2.$$

Сближение сжимающих сил при выпучивании пластинки будет:

$$\delta b = \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2.$$

Приравнявая работу сил  $P$  потенциальной энергии изгиба, придем к уравнению:

$$\frac{P\pi^2 (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2}{b} = \frac{\pi^4 abD}{8} \cdot \sum \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)^2 A_m^2.$$

Соотношение между отдельными коэффициентами будет преж-  
нее, и потому:

$$P_{\text{кр}} = \frac{D\pi^2}{b} \frac{1}{(2\mu)^3} \frac{1}{\sum \left[ \frac{1}{m^2 + (2\mu)^2} \right]^2}.$$

При значительной длине на основании (4.25):

$$P_{\text{кр}} = \frac{D\pi^2}{b} \frac{8}{\pi} = \frac{8\pi D}{b}. \quad (4.27)$$

Заметим, что полученная нами формула (4.27) была бы совер-  
шенно точна, если бы сжимающие усилия передавались лишь бес-  
конечно узкой полоске  $AB$ , и задача состояла в том, чтобы найти  
критическую сжимающую силу для этой полоски при условии, что  
ее выпучиванию препятствуют не заштрихованные части пластинки  
(см. рис. 4.60).

## Библиографический список

1. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов [и др.]. – М.: Стройиздат, 1984. – 414 с.
2. Феодосьев, В. И. Избранные задачи вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1996. – 368 с.
3. Босаков, С. В. Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2000. – 144 с.
4. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. – Минск: Наука, 1971. – 807 с.
5. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2003. – 559 с.
6. Борисевич, А. А. Строительная механика / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 144 с.
7. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.
8. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: ФМ, 1963. – 1100 с.
9. Филоненко–Бородич, М. М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости / М. М. Филоненко–Бородич // ПММ, Т. 10, № 1, 1946. – С. 193–208.

Учебное издание

**БОСАКОВ** Сергей Викторович  
**КОЗУНОВА** Оксана Васильевна  
**ЮРКОВА** Ксения Владимировна

## **ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ**

Практикум

для студентов специальностей

1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,

1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитен»,

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,

1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,

1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Редактор *В. И. Акулёнок*

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 24.12.2019. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 14,24. Уч.-изд. л. 11,14. Тираж 150. Заказ 24.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.