УДК 621.762.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ДВУХ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дудяк А.И., Дикан Ж.Г., Мелеховец П.А.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Во многих областях техники используют стержни, состоящие из прочно соединенных между собой разнородных материалов. Типичным примером могут служить стержни из биметаллических материалов с различными модулями продольной упругости работающие на изгиб как консольные или двухопорные балки. Другим примером могут служить конструкции, изготовленные из железобетона. Расчеты на прочность составных балок из неоднородных материалов имеют существенное отличие от классических методов расчета балок из однородных материалов.

Рассмотрим случай чистого изгиба консольной балки прямоугольного сечения, состоящей из двух прочно соединенных между собой неоднородных материалов. В качестве такого соединения можно использовать склеивание их или для металлических стержней – сварку взрывом. Материалы стержней отличаются между собой модулями продольной упругости и при этом $E_{1>}$ E_2 (рис. 1).

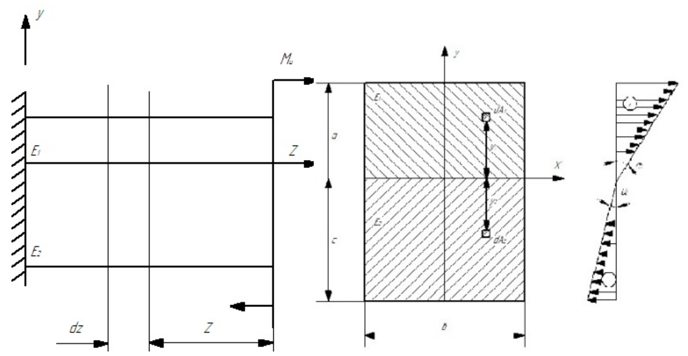

Рис. 1. Схема нагружения стержня (а), форма сечения (б), распределение нормальных напряжений по высоте сечения (в)

Для данного расчета примем, что нейтральный слой проходит через плоскость раздела двух материалов. Ширина сечения «b» и высота части сечения «a» известны. Следует определить высоту части сечения «с» таким образом, чтобы ось X, проходящая по разделу материалов, являлась нейтральной осью.

По закону Гука нормальные напряжения в верхних слоях материала определяются из выражения:

$$\sigma_{Z1} = E_1 \varepsilon_1 \qquad (1)$$

В нижних слоях материала балки относительно нейтральной оси X, нормальные напряжения определяются:

$$\sigma_{Z2} = E_2 \varepsilon_2 \qquad (2)$$

Рассмотрим условия деформированного состояния участка балки длиной dz. В результате действия внешнего изгибающего момента $M_и$ этот участок подвергается изгибу таким образом, что верхние волокна относительно нейтрального слоя будут растянуты, а нижние – сжаты (рис. 2).

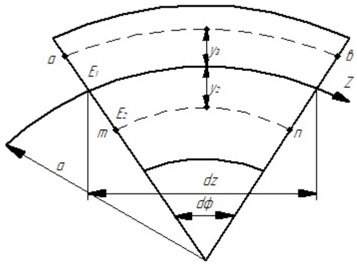

Рис. 2. Деформированное состояние балки длиной dz.

Относительные деформации верхнего растянутого слоя «ab» и нижнего сжатого слоя «mn» соответственно, будут равны:

$$\varepsilon_1 = \frac{y_1}{\rho}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{y_2}{\rho}; \tag{3}$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя; y_1 и y_2 – расстояния от нейтрального слоя до соответствующих слоев балки «ab» и «mn». Подставив величины ε_1 и ε_2 из выражения (3) в выражения (1) и (2) получим

$$\sigma_{Z1} = E_1 \frac{y_1}{\rho}; \; \sigma_{Z2} = E_2 \frac{(-y_2)}{\rho} \tag{4}$$

Из условия равновесия, что сумма внутренних сил на ось z при чистом изгибе балки равна нулю, получим

$$N = \int_{A_1} \sigma_{Z_1} dA_1 + \int_{A_2} \sigma_{Z_2} dA_2 = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1 dA_1 - \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2 dA_2 = 0 \tag{5}$$

В выражении (5) интегралы представляют собой статические моменты площадей сечения относительно нейтральной оси x. Поэтому выражение (5) можно представить в виде следующего равенства:

$$E_1 S_{X1} = E_2 S_{X2} \tag{6}$$

Статические моменты площадей относительно нейтральной оси x получим из следующих выражений:

$$S_{X1} = A_1 \frac{a}{2} = b \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{ba^2}{2}; \qquad S_{X2} = A_2 \frac{c}{2} = b \cdot c \cdot \frac{c}{2} = \frac{bc^2}{2}$$

Подставив полученные выражения для S_{X1} и S_{X2} в равенство (6) получим

$$E_1 \frac{ba^2}{2} = E_2 \frac{bc^2}{2} \tag{7}$$

Из последнего уравнения (7) определяем значение величины высоты второй части сечения «c».

$$C = a\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \tag{8}$$

При равенстве $E_1 = E_2$ для сечения балки, состоящей из двух частей одного и того же материала, но жестко скрепленных между собой, следует $a = c$. Это равенство устанавливает, что нейтральная ось пройдет через центр тяжести сечения.

Из условия равенства изгибающих моментов в сечении z от внешнего изгибающего момента и от изгибающего момента от внутренних сил следует:

$$M_{(Z)} = \int_A \sigma_Z \cdot y \cdot dA \tag{9}$$

Для случая, когда стержень состоит из двух прочно соединенных между собой стержней из разнородных материалов, уравнение (9) может быть представлено следующим образом:

$$M_{(Z)} = \int_{A_1} \sigma_{Z1} \cdot y_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} \sigma_{Z2} \cdot (-y_2) \cdot dA_2 \tag{10}$$

Рассматривая совместно выражение (10) и выражение (4), получим:

$$M_{(Z)} = \int_{A_1} E_1 \cdot \frac{y_1}{\rho} y_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} E_2 \cdot \frac{(-y_2)}{\rho} \cdot (-y_2) \cdot dA_2 \tag{11}$$

Или

$$M_{(Z)} = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1^2 \cdot dA_1 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2^2 \cdot dA_2 \quad . \tag{12}$$

Так как интегралы, входящие в выражение (12) являются моментами инерции I_{X1} и I_{X2} соответствующих частей сечения балки, то выражение (12) можно преобразовать :

$$M_{(Z)} = \frac{1}{\rho}\left(E_1 I_{X1} + E_2 I_{X2}\right). \tag{13}$$

Из последнего выражения следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{EIx_1 + EIx_2} = \frac{M(z)}{(EIx)np}, \tag{14}$$

где $(EIx)np = E_1 I_{X1} + E_2 I_{X2}$ – приведенная жесткость сечения при изгибе.
Подставив полученное значение из выражения (14) в формулы (4), получим выражения для определения нормальных напряжений в любой зоне сечения балки:

$$\sigma_{Z1} = \frac{M(z)E_1}{(EIx)np} y_1; \; \sigma_{Z2} = -\frac{M(z)E_2}{(EIx)np} y_2 . \tag{15}$$

Моменты инерции сечения относительно нейтральной оси X определяются из выражений

$$Ix_1 = \frac{ba^3}{12} + ba\left(\frac{a}{2}\right)^2; \quad Ix_2 = \frac{bc^3}{12} + bc\left(\frac{c}{2}\right)^2 .$$

Эпюра распределения напряжений по высоте сечения балки показана на рис. 1 *в*. Из формул (15) следует, что углы наклона эпюр к вертикальной линии α_1 и α_2 будут различными. Приведенную методику расчета можно использовать для многослойных стержней, а также для стержней из композиционных материалов типа железобетона. Получены формулы для определения нормальных напряжений в любой зоне поперечного сечения с переменной изгибной жесткостью сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко и др. – Киев: Издательство «Техника», 1967. – 83с.

2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Федосьев – М.: Издательство «Наука», 1972. – 541 с.