УДК 539.3

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОГО ГРАНИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ АНАЛИЗЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СРЕДЫ

Мармыш Д.Е.
Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В теории контактного взаимодействия широко известны два распределения контактного давления при упругом взаимодействии твердых тел. При контакте двух тел вращения (классическая задача Герца) распределение контактного давления имеет вид

$$p(x,y) = p_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{1}$$

где a, b – длины полуосей эллиптической площадки контакта;

p_0 – максимальное давление в центре площадки.

Вторым широко известным случаем является задача о вдавливании штампа в упругое полупространство. В случае круглого поперечного сечения штампа радиуса R распределение контактного давления имеет вид [1]

$$p(r) = \frac{P}{\sqrt{R^2-r^2}} \tag{2}$$

При анализе напряженно-деформированного состояния и состояния повреждаемости среды методом аналитического граничного элемента, развитого в работах [2, 3], важным и до конца не исследованным является вопрос о сходимости алгоритмов гранично-элементного моделирования. В работе [4] исследована и показана сходимость вычислений при распределении контактного давления вида (1). Более сложным случаем является распределение вида (2), особенностью которого является то, что контактное давление стремится к бесконечности на границе вдавливаемого круглого штампа, т.е. при $r \to R$. Далее в работе будем проводить анализ сходимости метода аналитического граничного элемента при вычислении напряженно-деформированного состояния и повреждаемости для более общего случая распределения контактных усилий:

$$p(x,y) = \frac{p_0}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}\,. \tag{3}$$

Распределение вида (2) является частным случаем распределения (3) для $a=b=R$

Гранично-элементное моделирование напряженного состояния. Компоненты тензора напряжений в любой точке $A(x,y,z)$ полупространства $z>0$ находятся по формуле

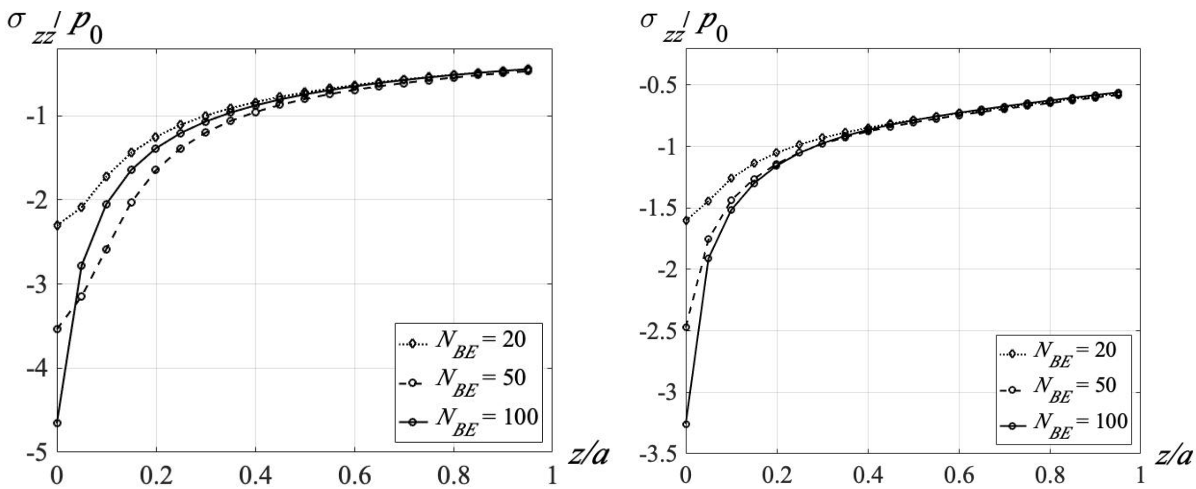
$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \iint\limits_{\Omega} p(\xi,\eta)\,G_{ij}(x-\xi,y-\eta,z)\,d\xi d\eta \tag{4}$$

где $G_{ij}(x,y,z)$ – функции влияния из решения задачи Буссинеска для сосредоточенной силы [5]; $i,j=\{x,y,z\}$;

Ω – двумерная область ограниченная эллипсом

$$\Omega:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

При вычислении напряжений методом аналитического граничного элемента область распределения давления Ω разбивалась на прямоугольные граничные элементы (ГЭ) со сторонами параллельными осям координат *Ox* и *Oy*. Контактные усилия (3) аппроксимировались равномерным распределением в рамках одного ГЭ. Точность вычислений зависит от порядка дискретизации области Ω. В работе [6] проведено моделирование для распределения вида (3) при различной степени дискретизации области и показана низкая степень погрешности результатов в сравнении с точным решением для нормальной компоненты σ_{zz} вдоль оси *Oz* (не более 0,3% при соотношении $a/b=2$ и разбиении большей полуоси на 10 ГЭ). В случае, когда $x=0$ и $y=0$ нормальное напряжение у поверхности полупространства $\sigma_{zz}=-p_0$. Однако для изучения вопроса вычислительной сходимости процедур при моделировании напряженного состояния наибольший интерес представляет численное определение напряжения σ_{zz} вдоль оси параллельной оси *Oz* и с координатами *x*, *y* удовлетворяющими уравнению эллипса (5). В этом случае необходимо удовлетворение граничного условия у поверхности полупространтва и напряжение σ_{zz} должно стремиться к $-\infty$ при $z\to 0$. Точность численного определения напряжения у поверхности полупространства в этом случае зависит от количества граничных элементов, на которое разбивается область Ω. На рис. 1 показано распределение нормального напряжения σ_{zz} вдоль оси параллельной оси *Oz* под точкой полупространства с координатами $A(a,0)$ (рис. 1, *а*) и под точкой с координатами $B(0,b)$ (рис. 1, *б*). Аппроксимация области Ω производилась квадратами с разбиением большей полуоси на 20, 50 и 100 элементов.

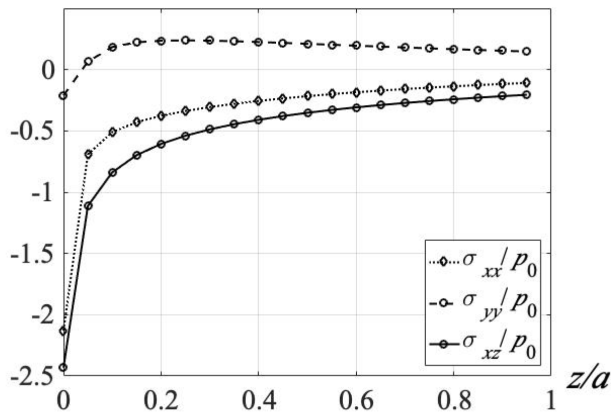


а б

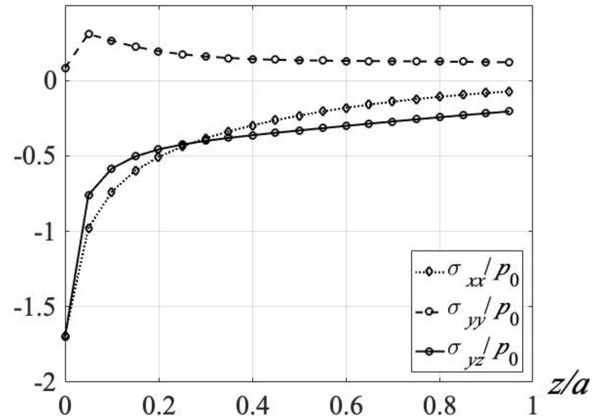
Рис. 1. Распределение нормального напряжения по глубине полупространства:
а – под точкой A (a,0)*; б – под точкой B* (0,b)

Из рис. 1 видно, что с увеличением количества N_{BE} граничных элементов, численное значение нормального напряжения у поверхности полупространства будет стремиться к теоретическому.

На рис. 2 представлены распределения остальных отличных от нуля компонент тензора напряжений вдоль оси параллельной оси Oz, соответственно, под точкой A(a,0) (рис. 2, *а*) и под точкой B(0,b) (рис. 2, *б*) при разбиении большей полуоси эллипса Ω на 100 граничных элементов.



а



б

Рис. 2. Распределение нормальных σ_{xx}, σ_{yy} *и касательных напряжений* σ_{xz}, σ_{yz}*:*
а – под точкой A (a,0)*; б – под точкой B* (0,b).

Сходимость при вычислении повреждаемости среды. Теоретическое обоснование модель твердого тела с опасным объемом и теория повреждаемости среды получило в работе [3]. В данной работе повреждаемость полупространства в окрестности контактного взаимодействия и сходимость численных процедур анализировались по трем основным теориям предельных состояний:

1) по нормальным напряжениям $\sigma_{zz} \le \sigma_{zz}^{(*\lim)}$;

2) по интенсивности напряжений

$$\sigma_{\text{int}} = \left|\sigma_1 - \sigma_3\right| \le \sigma_{\text{int}}^{(*\lim)}; \tag{6}$$

3) по эквивалентным напряжениям

$$\sigma_{\text{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_1-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2} \le \sigma_{\text{eqv}}^{(*\lim)}, \tag{7}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений.

Исходя из теории твердого деформируемого тела с опасным объемом, выражения для определения количественных значений опасного объема V и интегральной поврежденности Ψ имеют вид [3]

$$V_i = \int\limits_{\sigma_i \geq \sigma^{(*\lim)}} dV\,,\ \Psi_i = \int\limits_{\sigma_i \geq \sigma^{(*\lim)}} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^{(*\lim)}} dV \qquad (8)$$

где $\sigma^{(*\lim)}$ – предельное напряжение; $i = \{zz, \mathrm{int}, \mathrm{eqv}\}$.

При определении повреждаемости материала, испытываемого на усталость, в работе [7] предельные нормальные и касательные напряжения рекомендуется брать как 0,3 и 0,03 от максимального значения контактного давления p_0 соответственно, т.е.

$$\sigma_n^{(*\lim)} = 0{,}3p_0\,,\ \sigma_\tau^{(*\lim)} = 0{,}03p_0\,.$$

Составим из данных значений тензор напряжений, получим

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}03 & 0{,}3 & 0{,}03 \\ 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}3 \end{bmatrix} p_0\,. \qquad (9)$$

Главные значения тензора напряжений равны соответственно

$$\sigma_1 = 0{,}36p_0\,,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0{,}27p_0\,.$$

Общий алгоритм вычисления опасного объема и интегральной повреждаемости среды с помощью метода аналитического граничного элемента описан в работе [4].

Очевидно, что количественные характеристики повреждаемости твердого тела зависят как от интенсивности нормального давления в центре эллиптической площадки Ω, так и от значений длин полуосей a и b. Для большей общности результатов отнесем показатели опасного объема V_i и интегральной повреждаемости Ψ_i к полной величине контактного давления

$$P = \iint\limits_{\Omega} p(x,y)\,dxdy = p_0 \iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}}.$$

Область интегрирования Ω является эллипсом, поэтому переходя к координатам $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, получим следующий двойной интеграл

$$P = abp_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi abp_0\,.$$

При анализе сложного напряженного-деформированного состояния всегда ключевым вопросам является выбор значения предельных напряжений. Самым простым решением будет выбор первого главного напряжения σ_1 в качестве предельного, т.е. $\sigma^{(*\lim)} = \sigma_1 = 0{,}36p_0$. Для этого случая на рис. 3 показана сеточная сходимость метода аналитического граничного элемента при вычислении опасного объема и повреждаемости по нормальным напряжениям (рис. 3, *а*–*б*), по интенсивности напряжений (рис. 3, *в*–*г*) и по эквивалентным напряжениям (рис. 3, *д*–*е*) с использованием формул (8) в зависимости от количества расчетных узлов n в полупространстве вдоль оси Ox.

Из рис. 3 видно, что при разбиении большой полуоси площадки контакта на 10 граничных элементов, значение опасного объема и интегральной повреждаемости во всех трех случаях получается завышенным. Значения повреждаемости полупространства при $N_{BE} = 20$ и $N_{BE} = 30$ отличаются друг от друга не более чем на 1%.

Другим подходом к выбору значений предельных напряжений, является использование определений интенсивности и эквивалентных напряжений. Подставив значения главных напряжений в формулы (6) и (7), получим предельные значения

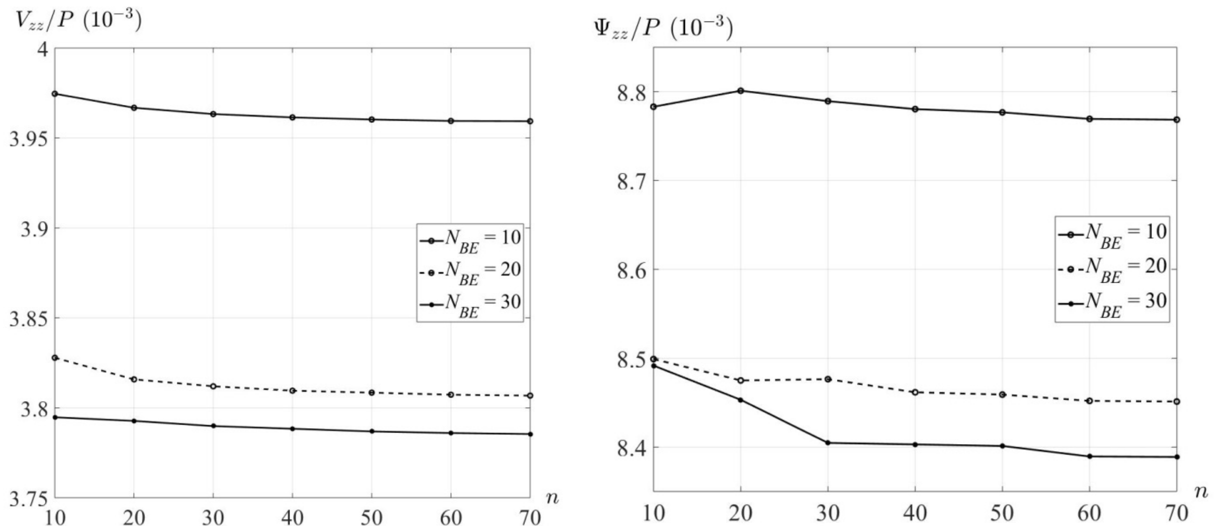
$$\sigma_{\text{int}}^{(*\lim)} = \sigma_{\text{eqv}}^{(*\lim)} = 0,09 p_0 . \tag{8}$$

На рис. 4 показана сеточная сходимость при вычислении показателей повреждаемости полупространства для предельных значений (8) по интенсивности напряжений и эквивалентным напряжениям. Следует отметить, что значения опасных объемов по обоим видам напряжений отличаются друг от друга не более чем на 1%, в то время как значения интегральной повреждаемости (повреждаемости опасного объема) отличаются друг от друга на 10%.

Заключение. Метод аналитического граничного элемента является эффективным методом анализа напряженно-деформированного состояния среды. Из работы [4] и из настоящих результатов следует, что данный метод также может быть эффективно применен и при вычислении количественных показателей повреждаемости среды: опасного объема, локальной и интегральной повреждаемости.

При вычислении повреждаемости необходимо построение двух расчетных сеток. Первая – это гранично-элементная сетка по границе среды, вторая – это расчетная сетка по области среды, в любой точке которой действующие напряжения превышают предельные. В данной работе показано, что вне зависимости от порядка гранично-элементной сетки, наблюдается сходимость по расчетной сетке при вычислении значений опасного объема и интегральной повреждаемости (повреждаемости опасного объема) к своим стационарным значениям. При увеличении порядка расчетной сетки в 7 раз, показатели повреждаемости уменьшаются не более чем на 5% для опасного объема и не более чем на 2% для интегральной повреждаемости.

С целью разработки единого подхода к моделированию повреждаемости методом аналитического граничного элемента, рекомендуется брать размер элемента расчетной сетки по объему твердого тела (площади) равным размеру граничного элемента.



а *б*

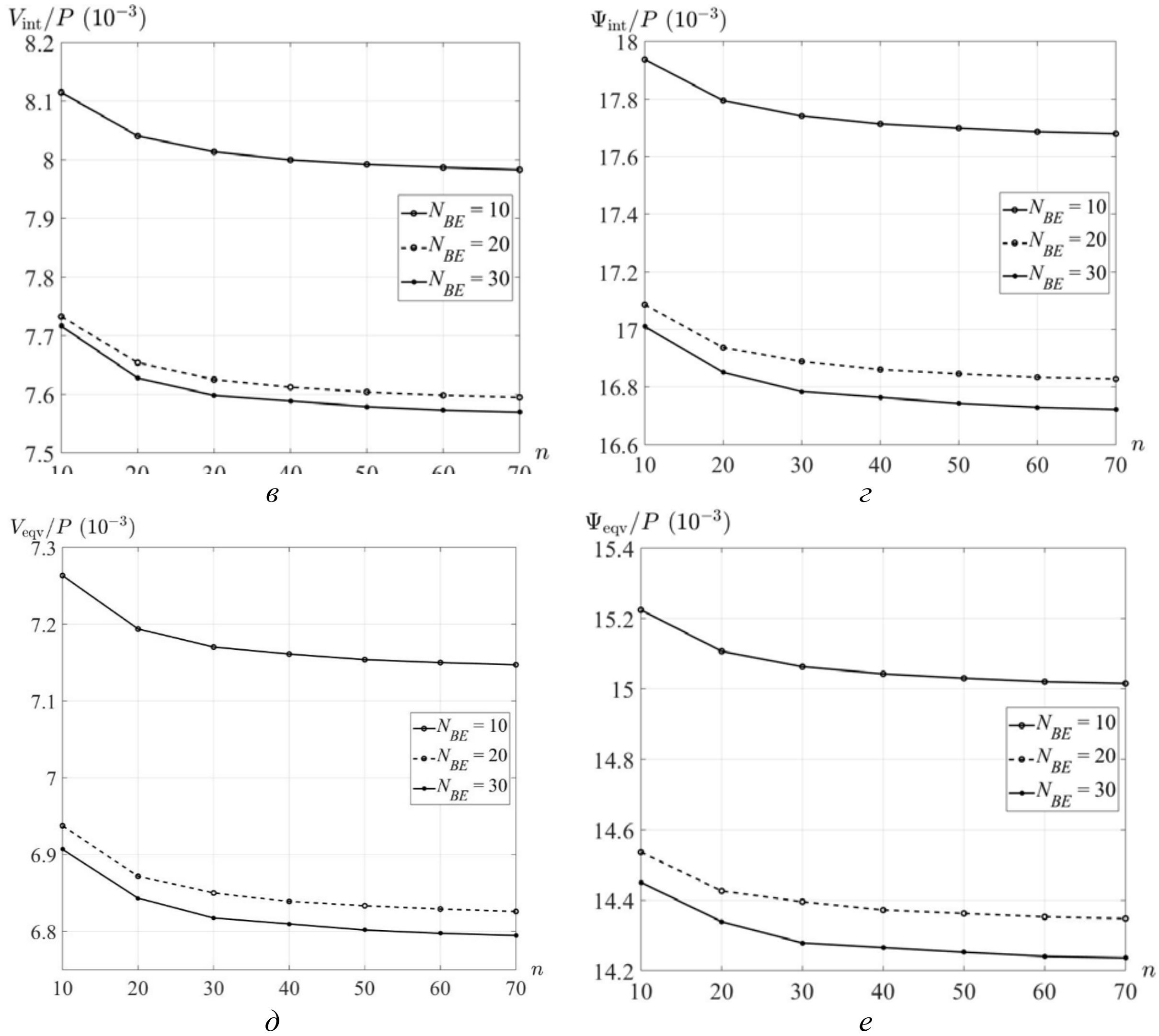


Рис. 3. Сеточная сходимость при вычислении значений опасного объема и интегральной повреждаемости: по нормальным напряжениям (а–б); по интенсивности (в–г); по эквивалентным напряжениям (д–е)

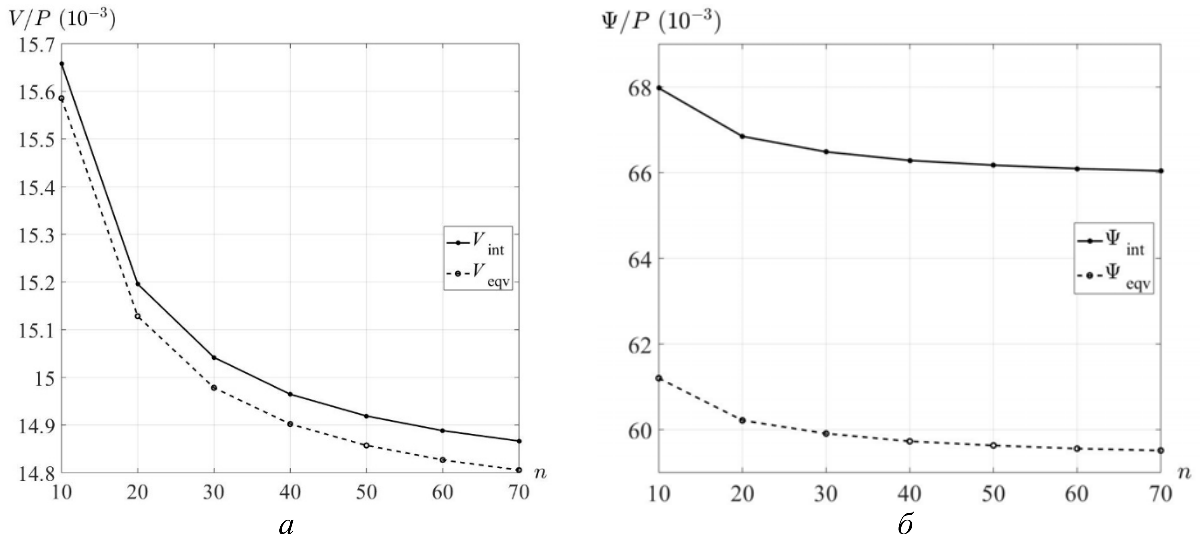


Рис. 4. Сеточная сходимость при вычислении значений опасного объема (а) и интегральной повреждаемости (б) при $\sigma_{\text{int}}^{(*\lim)} = \sigma_{\text{eqv}}^{(*\lim)} = 0{,}09 p_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.

2. Мармыш Д.Е. Численное моделирование повреждаемости силовой системы. Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. – Вып. 32.– Мн.: БНТУ, 2017. –С. 312–316.

3. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.

4. Щербаков, С.С. Оптимизация объемной повреждаемости полупространства, нагруженного эллиптически распределенным контактным давлением и неконтактными напряжениями / С. С. Щербаков // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 4 (45). – С 96–100.

5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

6. Мармыш, Д.Е. Гранично-элементное моделирование напряженного состояния при вдавливании штампа в полупространство / Д.Е. Мармыш, С.С. Щербаков // Актуальные вопросы машиноведения. – Вып. 7. – Мн.: ОИМ, 2018. – С. 204–207.

7. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.