УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕОДНОРОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Хвисевич В.М., Веремейчик А.И.
Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. Современный уровень развития науки и техники выдвигает перед инженерами требования по созданию эффективных методов расчета инженерных конструкций, позволяющих снизить материалоемкость элементов при их достаточной прочности и надежности. Основная цель таких методов – исследовать напряженно-деформированное состояние тел, а также распределение температурного поля. Для этого необходимо поставить и решить краевые задачи механики деформируемого твердого тела [1–4]. Во многих случаях достаточно ограничиться рассмотрением плоской области. Немаловажным аспектом с позиции снижения материалоемкости конструктивных элементов является учет неоднородности материала, например, когда характеристики материала зависят от температуры [5].

Для построения решения краевых задач механики деформируемого твердого тела широкое применение получила теория потенциала. Ее практическим воплощением стало появление методов граничных элементов. Длительное время в инженерной практике исследователи отдавали предпочтение методу конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ) [1, 2]. Однако ряд работ, например, [3, 4], позволил развить методы граничных интегральных уравнений (ГИУ) и показал преимущества методов ГИУ перед МКР и МКЭ при решении многих задач. В данной статье разработан прием, позволяющий упростить интегральные уравнения краевой задачи неоднородной термоупругости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим решение краевых задач термоупругости, в которых тепловые и физические характеристики материала зависят от температуры. Типичные зависимости характеристик материала (коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$, теплового линейного расширения $\alpha(T)$ и модуль упругости $E(T)$) от температуры приведены в [6].

Задача термоупругости неоднородных тел состоит в определении перемещений u_i (через которые выражаются компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}), удовлетворяющих в занимаемой телом области *D*, с учетом переменных $E(T), \alpha(T)$, $\lambda(T)$ и постоянного υ, уравнениям равновесия:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T \alpha(T)\,dT\right) = -\varphi B_j \frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{ij}\,, \tag{1}$$

и на контуре L области *D* граничным условиям:

$$\sigma_{ij} n_j = q_i(x_L)\,, \tag{2}$$

где $\Theta = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}$, n_j – вектор внешней нормали к L, $q_i\left(x_L\right)$ – плотность заданных поверхностных сил, φ – малый параметр, который определяется из соотношения [7].

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT}\left[\ln\frac{E}{E_0}\right] = \varphi\Psi\left(T\right).$$

При этом $\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial x_j} = \dfrac{1}{E}\dfrac{dE}{dT}\dfrac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi\Psi\left(T\right)\dfrac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi B_j\left(x_s\right), B_j\left(x_s\right) = \Psi\left(T\right)\dfrac{\partial T}{\partial x_j}$, $i, j = 1,2$.

С использованием гипотезы Дюамеля-Неймана запишем выражения для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\Theta\delta_{ij} - \frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right], \tag{3}$$

где $\Theta = \varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема, δ_{ij} – символ Кронекера.

Температура T определяется в результате решения уравнения теплопроводности [8]:

$$div\left(\lambda gradT\right) = 0. \tag{4}$$

2. Построение сингулярных интегральных уравнений (СИУ) плоской краевой задачи неоднородной термоупругости. Применив метод возмущений (малого параметра) для решения плоской краевой задач термоупругости неоднородных тел, последняя сводится к решению краевой задачи термоупругости на нулевом приближении:

$$\Delta u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{2\left(1+\upsilon\right)}{1-2\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T \alpha\left(T\right)dT\right), \sigma_{ij}^0 n_j = q_i\left(x_L\right),$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}\right) + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\Theta^{(0)}\delta_{ij} - \frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int_0^T \alpha\left(T\right)dT\delta_{ij}\right],\ i, j = 1,2, \tag{5}$$

и последовательности краевых задач теории упругости однородного тела на последующих приближениях:

$$\Delta u_i^k + \frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial\Theta^{(k)}}{\partial x_i} = -\frac{2\left(1+\upsilon\right)}{E^2}\frac{dE}{dT}\frac{\partial T}{\partial x_j}\sigma_{ij}^{(k-1)}, \sigma_{ij}^k n_j = 0,$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i}\right) + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\Theta^{(k)}\delta_{ij}\right], \Theta^k = \frac{\partial u_j^k}{\partial x_j},\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Вопросы сходимости метода возмущений подробно рассмотрены в [5, 9]. Рассмотрим решение задачи термоупругости (5) на нулевом приближении. Запишем дифференциальное уравнение равновесия этой задачи в перемещениях:

$$\Delta u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT, \quad i,j = 1, 2, \tag{7}$$

где $u_i^{(0)}$ – вектор перемещений, соответствующий нулевому члену степенного ряда, в виде которого ищется решение: $u_i = u_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k u_i^k$ [10].

Решение (7) разыскиваем как сумму общего решения однородного уравнения теории упругости без учета объемных и массовых сил и частного решения неоднородного уравнения:

$$u_i^{(0)} = u_i^U + u_i^T. \tag{8}$$

Общее решение u_i^U соответствует решению однородного дифференциального уравнения теории упругости. Частное решение представим как градиент некоторой функции W:

$$u_i^T = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT\right). \tag{10}$$

Согласно [10], уравнение (10) удовлетворяется, если принять:

$$\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT. \tag{11}$$

Используя зависимость $\alpha(T) = \alpha_0(1+\gamma T)$ [6], из (11) получаем соотношение:

$$\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0\left(T + \frac{T^2}{2}\gamma\right) = a\left(T + \frac{T^2}{2}\gamma\right). \tag{12}$$

Температура T подчиняется уравнению теплопроводности (4) и не является гармонической функцией, однако если ввести функцию теплопроводности $T^* = \int_0^T \lambda(T)\,dT$, T можно неявно выразить через гармоническую функцию T^* соотношением:

$$T = \frac{1}{k}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k}{\lambda_0}T^*}\right). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получим:

$$\Delta W = a\left(bT - cT^*\right),\ a = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0,\ b = 1 + \frac{\gamma}{k},\ c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}. \tag{14}$$

В правой части (14) находится алгебраическая сумма функций температуры T и гармонической функции T^*, которую можно представить в форме (15) и (16) для внутренней и внешней краевой задачи соответственно:

$$T(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i+L_e}\chi(y)\frac{\cos\varphi}{r}dl_y+\sum_{i=1}^{n}A_i\ln r_{A_i}\ ,\qquad(15)$$

$$T(x)=T_\infty+\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\chi(y)\frac{\cos\varphi}{r}dl_y+\sum_{k=1}^{m}A_k\ln r_{A_k}\ ,\qquad(16)$$

где $\chi(y)$ – плотность потенциала, $r=|y-x|=\sqrt{(y_i-x_i)(y_i-x_i)}$, $i=1,2$, $y\in L$, φ – угол между направлением $\overline{r}$ и вектором внешней нормали $\overline{n}(y)$ в точке y, $\cos\varphi=n_i(y)\beta_i$, β_i – направляющие косинусы вектора нагрузки, r_{A_k} – расстояние от источника до точки x границы L, A_k – мощность фиктивных источников тепла, т.е. T^* выражается одномерным интегралом по контуру L.

Функцию T будем выражать через δ-функцию Дирака $\delta(y-x)$, а T^* представляем в форме (15). Тогда (14) примет вид:

$$\begin{gathered}\Delta W=-\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\Delta\left(\ln\frac{1}{r}\right)dF_y-\\-ac\left\{\int_L\chi(y)\Delta\left[\frac{r}{4}\cos\varphi(1-2\ln r)dl_y+\sum_{k=1}^{n}A_k\Delta\left[\frac{r_{A_k}^2}{4}\left(1-\ln r_{A_k}\right)\right]\right]\right\},\end{gathered}\qquad(17)$$

откуда:

$$\begin{gathered}W=-\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\ln\frac{1}{r}dF_y-\\-ac\left[\int_L\chi(y)\frac{r}{4}\cos\varphi(1-2\ln r)dl_y+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{r_{A_k}^2}{4}\left(1-\ln r_{A_k}\right)\right],\end{gathered}\qquad(18)$$

где F – плоская область интегрирования.

На основании W строим интегральные формулы температурных добавок перемещений, напряжений и фиктивной температурной нагрузки, т.е. задачу термоупругости (5) сводим к задаче изотермической теории упругости. Представим W в виде суммы двух слагаемых:

$$W=\overset{(\alpha)}{W}+\overset{(k)}{W}\ ,\qquad(19)$$

где $\overset{[\alpha]}{W}=-\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\ln\frac{1}{r}dF_y$, $\Delta\overset{(\alpha)}{W}=abT$. (20)

Дифференцируя (20), найдем:

$$\frac{\partial\overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i}=-\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\frac{\beta_i}{r}dF_y\ ,\qquad(21)$$

$$\frac{\partial^2 \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2}dF_y \, . \tag{22}$$

Термоэластопотенциалы (21) и (22) используются для построения формул перемещений и напряжений соответственно. Исследуя свойства интеграла в (21), легко видеть, что при переходе через кривую контура L, ограничивающего область D^+, он не испытывает разрыва. Интеграл в (21) является сходящимся, порядок особенности $1/r$ меньше мерности области интегрирования. Интеграл в (22) представляет собой частную производную второго порядка от логарифмического потенциала площади. Этот интеграл особенный и необходимо выразить его неинтегральный член, для чего в окрестности особой точки опишем окружность малого радиуса ε. Применяя формулу Гаусса, получим:

$$I = \int_F T(x)\frac{\partial^2 (\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j}dF_y \cong T(y)\int_F \frac{\partial^2 (\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j}dF_y = T(y)\int_L n_j(x)\frac{\partial (\ln 1/r)}{\partial x_i}dl_y \, , \tag{23}$$

где L – контур интегрирования. Т.к. для окружности в полярных координатах $dL = \varepsilon d\vartheta$, а $n_j = \beta_j$, то интеграл примет вид:

$$I = T(y)\int_L \beta_i\beta_j d\vartheta . \tag{24}$$

Выполняя интегрирование по контуру окружности в пределах от нуля до 2π, имеем: $I = \pi$, если $i = j$; $I = 0$, если $i \neq j$.

На основании изложенного при $x \equiv y$ (22) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi}\left(\pi T(x) + \int_F T(y)\frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2}dF_y\right). \tag{25}$$

Когда точка x стремится к точкам границы области, вторые производные логарифмического потенциала площади имеют определенные пределы. Эти пределы различны для точек x, стремящихся к границе из внутренней D^+ и внешней D^- области. Используя теорему Гюгонио-Адамара [2] и предполагая, что плотность потенциала $T(y)$ такова, что его внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, определяем скачки этих производных: $I = \eta\pi T(x)n_i(x)n_j(x) + \int_F T(y)\frac{\partial^2 (\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j}dF_y$, где $\eta = -\pi$ для внутреннего предела и $\eta = \pi$ для внешнего предела. Тогда термоэластопотенциал (22) в граничных точках выражается формулой:

$$\frac{\partial^2 \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi}\left(\eta\pi T(x)n_i(x)n_j(x) + \int_F T(y)\frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2}dF_y\right). \tag{26}$$

На основании (24), (25), (26), составим формулы температурных добавок напряжений, используя формулу:

$$\sigma_{ij}^{T}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x_{i}\partial x_{j}}-\Delta W\delta_{ij}\right). \tag{27}$$

Запишем с использованием (9) и (21) формулу добавок перемещений:

$$\overset{(\alpha)}{u}{}_{i}^{T}=-\frac{ab}{2\pi}\int_{F}T\left(y\right)\frac{\beta_{i}}{r}dF_{y}\,. \tag{28}$$

Добавки напряжений для точек внутри области находим следующим образом:

$$\overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^{T}\left(x\right)=-\frac{E\left(T\right)ab}{2\pi\left(1+\upsilon\right)}\left[\int_{F}T\left(y\right)\frac{2\beta_{i}\beta_{j}-\delta_{ij}}{r^{2}}dF_{y}+2\pi T\left(x\right)\delta_{ij}\right]. \tag{29}$$

В особых точках напряжения определяем, учитывая (25):

$$\overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^{T}\left(x_{0}\right)=-\frac{E\left(T\right)ab}{2\pi\left(1+\upsilon\right)}\left[3\pi T\left(x\right)\delta_{ij}+\int_{F}T\left(y\right)\frac{2\beta_{i}\beta_{j}-\delta_{ij}}{r^{2}}dF_{y}\right], \tag{30}$$

а в граничных точках – с учетом (26):

$$\overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^{T}\left(x_{L}\right)=-\frac{E\left(T\right)ab}{2\pi\left(1+\upsilon\right)}\left(\pi T\left(x_{L}\right)\left[\eta n_{i}\left(x_{L}\right)n_{j}\left(x_{L}\right)+2\delta_{ij}\right]+\int_{F}T\left(y\right)\frac{2\beta_{i}\beta_{j}-\delta_{ij}}{r^{2}}dF_{y}\right). \tag{31}$$

Тогда формула температурных добавок перемещений примет вид:

$$\begin{gathered}u_{i}^{T}\left(x\right)=\overset{(\alpha)}{u}{}_{i}^{T}+\overset{(q)}{u}{}_{i}^{T}=-\frac{a}{2}\left(\frac{b}{\pi}\int_{F}T\left(y\right)\frac{\beta_{i}}{r}dF_{y}-\right.\\ \left.-c\left\{\int_{L}\chi\left(y\right)\left[n_{i}\left(y\right)\left(2\ln r-1\right)+2\beta_{i}\cos\varphi\right]dl_{y}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}A_{k}\left[\beta_{i}^{(A_{k})}r_{A_{k}}\left(2\ln r_{A_{k}}-1\right)\right]\right\}\right).\end{gathered} \tag{32}$$

Температурные добавки напряжений внутри области определяются по формуле:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}^{T}\left(x\right)=\overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^{T}+\overset{(q)}{\sigma}{}_{ij}^{T}=-\frac{aE\left(T\right)}{2\left(1+\upsilon\right)}\left(\frac{b}{\pi}\left[2\pi T\left(x\right)\delta_{ij}+\int_{F}T\left(y\right)\frac{2\beta_{i}\beta_{j}-\delta_{ij}}{r^{2}}dF_{y}\right]+\right.\\ +c\left\{\int_{L}\chi\left(y\right)\frac{1}{r}\left[n_{i}\left(x\right)\beta_{j}+n_{j}\left(x\right)\beta_{i}-\left(2\beta_{i}\beta_{j}-\delta_{ij}\right)\cos\varphi\right]dl_{y}+\right.\\ \left.\left.+\sum_{k=1}^{n}A_{k}\left[\left(0,5+\ln r_{A_{k}}\right)\delta_{ij}-\beta_{i}^{(A_{k})}\beta_{j}^{(A_{k})}\right]\right\}\right).\end{gathered} \tag{33}$$

Для особых точек вместо (29) в формуле (33) используется (30).

Формулы температурных добавок напряжений в граничных точках составляем на основе (31) с учетом (18):

$$\sigma_{ij}^{T}\left(x_L\right)=\overset{(\alpha)^T}{\sigma}_{ij}\left(x_L\right)+\overset{(q)^T}{\sigma}_{ij}\left(x_L\right)=-\frac{aE(T)}{2(1+\upsilon)}\Big\{bT\left(x_L\right)\left[\eta n_i\left(x_L\right)n_j\left(x_L\right)+2\delta_{ij}\right]+$$

$$+c\pi\chi\left(x_L\right)\left[\eta n_i\left(x_L\right)n_j\left(x_L\right)-\delta_{ij}\right]+\frac{b}{\pi}\int_L T(y)\frac{2\beta_i\beta_j-\delta_{ij}}{r^2}dl_y+V.p.\overset{(q)^T}{\sigma}_{ij}, \quad (34)$$

где $V.p.$ – обозначает главное значение сингулярного интеграла по Коши.

Полные термические перемещения определяются по формуле (8), где u_i^U – выражаются в виде эластопотенциала простого слоя, определяющего перемещение в точке x плоскости от действия распределенных на контуре L сил интенсивностью $\upsilon_i(y)$:

$$q_i(x)=\int_L \upsilon_i(y)u_{ij}(x,y)\,dl_y, \quad (35)$$

где u_{ij} – фундаментальное решение плоской задачи теории упругости [3].

Полные напряжения во внутренних точках области определяются по формуле:

$$\sigma_{ij}(x)=\sigma_{ij}^{U}(x)+\sigma_{ij}^{T}(x), \quad (36)$$

где $\sigma_{ij}^{U}(x)$ соответствуют перемещению u_i^U и определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{U}(x)=\frac{1}{2\pi(1-\upsilon)}\int_L \upsilon_k(y)\left[(1-2\upsilon)\left(\delta_{ik}\beta_j+\delta_{jk}\beta_i-\delta_{ij}\beta_k\right)+2\beta_i\beta_j\beta_k\right]\frac{dl_y}{r(x,y)},\ i,j=1,2. \quad (37)$$

а $\sigma_{ij}^{T}(x)$ определены соотношениями (33). Аналогично вычисляем напряжения в граничных точках:

$$\sigma_{ij}\left(x_L\right)=\sigma_{ij}^{U}\left(x_L\right)+\sigma_{ij}^{T}\left(x_L\right), \quad (38)$$

где $\sigma_{ij}^{U}\left(x_L\right)$ определяем по формуле:

$$\sigma_{ij}^{U}\left(x_L\right)=\upsilon_i\left(x_L\right)n_i\left(x_L\right)\left[1+\frac{n_j^2\left(x_L\right)}{1-\upsilon}\right]+\upsilon_{ji}\left(x_L\right)n_j\left(x_L\right)\left[\frac{n_j^2\left(x_L\right)}{1-\upsilon}-1\right]+V.p.\sigma_{ij}\left(x_L\right),$$
$$i,j=1,2;\ i\neq j\ , \quad (39)$$

где $n_i(x)$ – направляющие косинусы вектора внешней нормали из области, а $\sigma_{ij}^{T}\left(x_L\right)$ выражаются формулой (34).

Для получения СИУ данной задачи подставляем (38) в граничные условия (2). После соответствующих преобразований получаем [10]:

$$\upsilon_i\left(x_L\right)+\frac{1}{2\pi(1-\upsilon)}\int_L\Big(\upsilon_i(y)\cos\psi\left[(1-2\upsilon)+2\beta_i^2\right]+$$

$$+\upsilon_j(y)\Big\{(1-2\upsilon)\left[n_j\left(x_L\right)\beta_i-n_i\left(x_L\right)\beta_j\right]+2\beta_i\beta_j\cos\psi\Big\}\Big(\frac{dl_y}{r}=f_i\left(x_L\right)+f_i^T\left(x_L\right), \quad (40)$$

где $f_i\left(x_L\right)$ – заданные механические нагрузки, а $f_i^T\left(x_L\right)$ – фиктивная поверхностная температурная нагрузка. Представим $f_i^T\left(x_L\right)$ в упрощенном виде:

$$f_i^T(x_L) = -\sigma_{ij}^T(x_L)\, n_j(x_L). \qquad (41)$$

Таким образом, решение краевой задачи термоупругости с переменным коэффициентом $\alpha(T)$ сведено к решению задачи изотермической теории упругости с поверхностными нагрузками $f_i(x_L)$ и $f_i^T(x_L)$. Полные напряжения, вычисленные по формулам (36), (38), используются далее на первом приближении при решении краевой задачи теории упругости как компоненты плотности массовых сил.

3. О вычислении частных производных функции температуры и способе понижения особенности в интегралах. В формулах добавок перемещений u_i^N и напряжений σ_{ij}^N [6] присутствуют частные производные от температуры. Температура T не является гармонической функцией и тем самым не удовлетворяет уравнению Лапласа. Однако эту функцию можно неявно выразить через гармоническую функцию T^*, воспользовавшись соотношением (13). Если продифференцировать (13), получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial T}{\partial x_p} = \frac{\partial T^*}{\partial x_p} \frac{1}{\lambda_0 \sqrt{1 - \dfrac{2k}{\lambda_0} T^*}}. \qquad (42)$$

Гармоническую функцию T^* можно представить формулой (15) в случае внутренней температурной задачи и (16) в случае внешней задачи. Тогда, дифференцируя (15), получим:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_p} = \int_L \chi(y) \frac{2\beta_i \cos\varphi - n_p(y)}{r^2} dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\beta_i^{(A_k)}}{r_{A_k}}. \qquad (43)$$

Плотность потенциала $\chi(y)$ определяется в результате решения интегрального уравнения внешней плоской краевой задачи теплопроводности и внутренней краевой задачи Дирихле:

$$T_\infty - \pi\chi(x_L) + V.p.\int_{L_i} \chi(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln r_{A_k} = F(x_L), \qquad (44)$$

$$\pi\chi(x_L) + V.p.\sum_{i=1}^{n} \int_{L_i + L_e} \chi(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y + \sum_{i=1}^{n} A_i \ln r_{A_i} = F(x_L), \qquad (45)$$

и считается заданной функцией на контуре L. Продолжим функцию внутрь области D^+ и дополним D^+ до полного евклидова пространства E_2.

Пусть, например, в области $\Delta\chi = 0$. Запишем вторую формулу Грина для плотности потенциала χ и функции перемещений u, которая удовлетворяет уравнению Пуассона [11]:

$$\int_F (\chi \Delta u - u \Delta\chi)\, dF_y = \int_L \left(\chi \frac{du}{dn} - u \frac{d\chi}{dn} \right) dl_y, \qquad (46)$$

или с учетом $\Delta\chi = 0$ и функции u имеем:

$$2\pi\chi = \int_L \left[\chi \frac{d(\ln 1/r)}{dn} - \ln\frac{1}{r} \frac{d\chi}{dn} \right] dl_y. \qquad (47)$$

Дифференцируя обе части (47), окончательно получаем:

$$\int_L \chi \frac{2\beta_i \cos\varphi - n_i(y)}{r^2} dl_y = \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y . \quad (48)$$

Устремляя точку x к L, из дополненной области определяем предельные значения интеграла в правой части (48):

$$I(x) = \pi n_i(x) \frac{d\chi}{dn} + \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y . \quad (49)$$

Интеграл в (49) имеет слабую особенность и его можно вычислить методом механических квадратур. Таким образом, предложенный способ позволяет заменить расходящийся интеграл в (43) интегралом (49) со слабой особенностью. Значение частных производных $\frac{\partial T^*}{\partial x_p}$ внутри области вычисляем по формуле (43), а в граничных точках – по формуле:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_p} = \pi n_p(x) \frac{d\chi}{dn} + \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\beta_\rho^k}{r_{A_k}} . \quad (50)$$

Для определения $\frac{\partial\chi}{dn}$ представим функцию χ на контуре L потенциалом простого слоя:

$$\chi = \int_L \upsilon(y) \ln\frac{1}{r} dl_y . \quad (51)$$

Эта функция считается найденной в результате решения соответствующей температурной задачи, что позволяет определить плотность потенциала $\upsilon(y)$. Дифференцируя левую и правую часть (51) по нормали $n(x)$, получаем:

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = \int_L \upsilon(y) \frac{\cos\psi}{r} dl_y , \quad (52)$$

где $\cos\psi = n_i(x)\beta_i$.

В граничных точках контура L интеграл в правой части (52) изменяется скачкообразно:

$$\frac{d\chi}{dn} = \eta\pi\upsilon(x) + \int_L \upsilon(y) \frac{\cos\psi}{r} dl_y , \quad (53)$$

где $\eta = 1$ при $x \to L$ из области D^-, $\eta = -1$ при $x \to L$ из области D^+.

Определив из (53) производную $\frac{d\chi}{dn}$ и подставляя ее в (50), находим частные производные $\frac{\partial T^*}{\partial x_p}$ в граничных точках плоской области и по рассмотренным выше формулам определяем перемещения и напряжения плоской задачи теории упругости, возникающей на n-м приближении метода возмущений.

Особенности разработанного алгоритма численного решения плоской краевой задачи термоупругости неоднородных тел приведены в [10, 12]. Достоверность формул и точность разработанного алгоритма подтверждена решением тестовых задач [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 293 с.

2. 2. Сегерлинд, Л. Дж. Применение метода конечных элементов / Л. Дж. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

3. Гюнтер, Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. – М.: Гостехиздат, 1953. – 415 с.

4. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках. Пер.с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 404 с.

5. Подстригач, Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368

6. Хвисевич, В. М. Численное решение двухмерных краевых задач термоупругости неоднородных тел / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Перспективные материалы и технологии: монография: в 2 томах / под. ред. чл.-корр. Рубаника В.В. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019.– Т. 2. – Гл. 7. – С. 87–104.

7. Trostel, R. Stationare Warmspannungen mit temperaturabhangigen Stofwerten / R. Trostel // Ingenieur-Archiv, 26. – 1958.

8. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа. – 1967. – 599 с.

9. Терновской, Б. П. О сходимости метода последовательных приближений в плоской задаче теории упругости для прямолинейной пластинки / Б. П. Терновской // Прочность и устойчивость инженерных конструкций. – Барнаул, 1989. – С. 59–66.

10. Веремейчик, А. И. К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала / А. И. Веремейчик, В. В. Гарбачевский, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Вып. 30. – С. 184–189.

11. Хвисевич, В. М. Прямое решение трехмерных краевых задач несвязанной стационарной термоупругости методом интегральных уравнений теории потенциала: дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 / В. М. Хвисевич. – М. : МИСИ, 1980. – 230 с.

12. Веремейчик, А. И. Об алгоритме численного решения плоских краевых задач неоднородной термоупругости / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич // Высокие технологии, фундаментальные и прикладные исследования, промышленность: сб. тр. VIII межд. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 27–28 октября 2009 г. / Санкт-Петерб. гос. ун-т. – Санкт-Петербург, 2009. – С. 75–76.