УДК 539.3

РАСЧЕТ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ С ДВУМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Акимов В.А., Аңдреев В.О., Рапинчук Д.В.

Белорусский национальный технический университет

Под упругим плоским тонкостенным кольцом понимают любую замкнутую плоскую упругую стержневую систему, длины участков которой значительно больше размеров их поперечных сечений. Такая система трижды статически неопределима. Лишними неизвестными являются изгибающий момент X_1, продольное усилие X_2 и поперечная сила X_3, т.е. внутренние усилия в поперечном сечении, проведенном для раскрепления кольца (рис. 1).

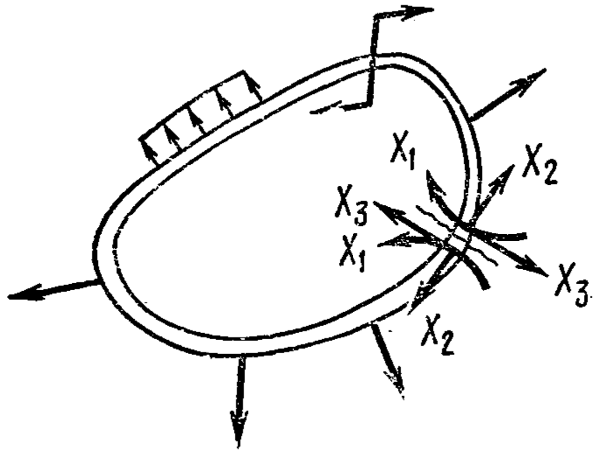

Рис. 1. Плос кое тонкостенное кольцо

Поэтому жестко замкнутые системы относятся к системам внутренне статически неопределимым.

Статическую неопределимость колец можно раскрыть, используя канонические уравнения метода сил. В связи с тонкостенностью колец при составлении уравнений, раскрывающих статическую неопределимость, достаточно учитывать только деформацию от изгибающего момента.

Если кольцо по геометрии и нагрузке симметрично относительно одной оси, то в поперечных сечениях, совпадающих с осью симметрии, поперечные силы равны нулю. Следовательно, лишними неизвестными в этих сечениях будут изгибающий момент (X_1 или X_1') и продольное усилие (X_2 или X_2'). Вместо всего кольца можно рассматривать только одну его симметричную половину.

Если кольцо по геометрии и нагрузке симметрично относительно двух осей (рис. 2, *а*), в сечениях, проходящих через оси симметрии, поперечные силы равны нулю, а продольные усилия можно определить из условия статики как суммы проекций сил и усилий, приложенных к полукольцу, на соответствующую ось симметрии. В этом случае лишним неизвестным будет только изгибающий момент (X, или X), Вместо всего кольца можно рассматривать одну его четверть, заключенную между осями симметрии (рис. 2, *б* или *в*). В этих сечениях поперечные силы равны нулю, продольные усилия находят из условия статики, а изгибающий момент будет лишней неизвестной величиной.

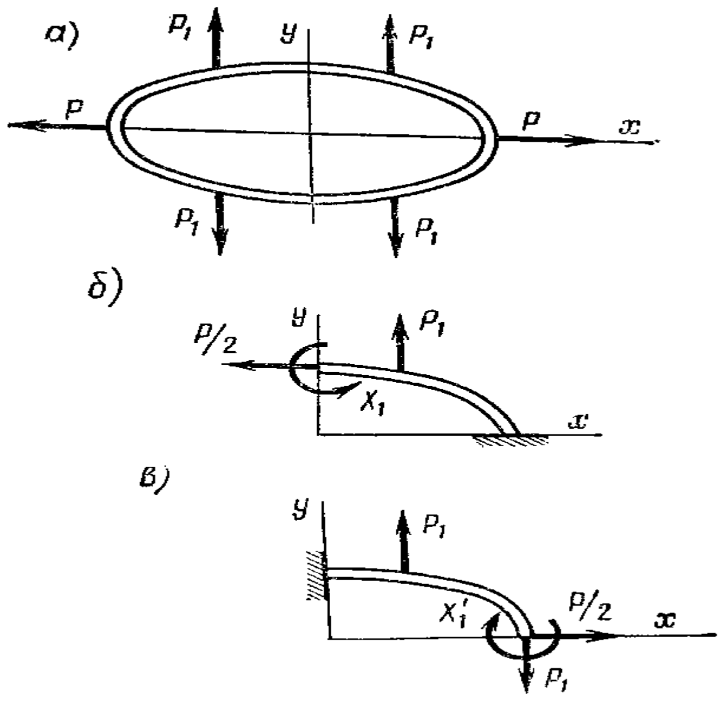

Рис. 2. Кольца с двумя осями симметрии

Рассмотрим пример:

Дано *a, b, E, l, q* – внутреннее давление на стенку кольца, симметричного относительно осей x и y (рис. 3)

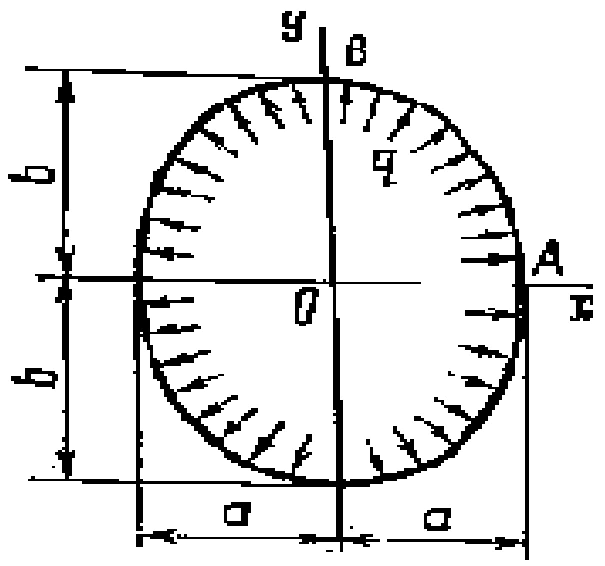

Рис. 3. Кольцо

Требуется определить поперечную в направлении оси Ox Δa и продольную в направлении оси Oy Δb деформации в точках A и B.

Рассматриваем одну четверть кольца (рис. 4). В сечениях, совпадающих с осью *x*, продольная сила равна нулю, а продольное усилие равно *qa*.

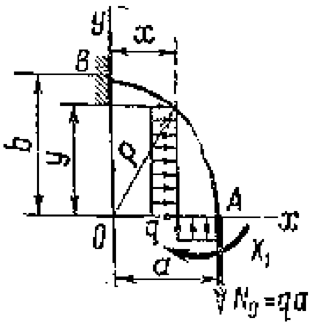

Рис. 4. Четверть кольца

Изгибающие моменты в произвольном поперечном сечении с координатами центра тяжести x и y основной и вспомогательной системы, равны:

$$M = qa(a-x) - q/2(a-x)^2 - q/2y^2 = q/2[a^2 - (x^2+y^2)] = q/2(a^2 - p^2)$$

где $p = \sqrt{(x^2+y^2)}$ – расстояние рассматриваемого сечения от начала координат и изгибающего момента M=1.

Так как

$$EI\delta_1 P = \int_0^s MM ds = q/2\int_0^s (a^2 - p^2)ds = q/2(a\int_0^s ds - \int_0^s p^2 ds) = q/2(as - I_P),$$

Где s – длина дуги геометрической оси четверти кольца; $I_P = \int_0^s p^2 ds$ – полярный момент инерции дуги s относительно начала координат, а величина $EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}^2 ds = \int_0^s ds = s$, то изгибающий момент в сечении А

$$X_1 = -\delta_1 P/\delta_{11} = q/2(I_P/s - a^2).$$

Изгибающий момент в произвольном сечении кольца:

$$M = q/2(a^2 - p^2) + q/2(I_P/s - a^2) = q/2(I_P/s - p^2);$$

$$M_{(p=a)} = q/2(I_P/s - a^2), M_{(p-b)} = q/2(I_P/s - b^2)$$

Если p непрерывно возрастает от значения a до значения $b>a$, то

$M_{p=a}>0$; $M_{p=b} < 0$ и $M_{p=\sqrt{I_P/s}} = 0$.

На рис. 5 представлена эпюра изгибающего момента для b>0.

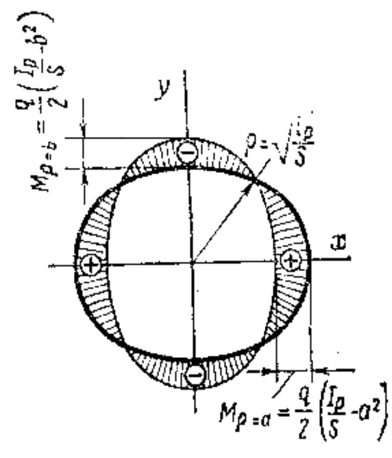

Рис. 5. Эпюра изгибающего момента

Для определения измерения размера a в сечении А четверти кольца прикладываем горизонтальную силу $P_ф$=1, направленную к центру О. От этой силы $\overline{M} = y$. Следовательно,

$$\Delta a = q/2EI\int_0^s (I_P/s - p^2)yds = q/2EI(I_P/s\int_0^s yds - \int_0^s p^2yds) = q/2EI(S_x/sI_P - \int_0^s p^2yds) = q/2EI(y_cI_P - I_x)$$

Где $S_x = \int_0^s y\,ds$ – статический момент дуги s относительно оси x; y_c=S_x/s – ордината центра тяжести дуги s и $I_x = \int_0^s p^2 y\,ds$.

Для определения изменений размера b в сечении А четверти кольца прикладываем вертикальную силу $P_ф$ =1, направленную вниз. От этой силы $\overline{M} = a - x$.

Следовательно,

$$\Delta b = q/2EI\int_0^s (I_P/s - p^2)(a-x)ds = q/2EI(I_P/sa\int_0^s ds - a\int_0^s p^2ds - I_P/s\int_0^s xds + \int_0^s p^2xds) =$$

$$= q/2EI(I_P/sas - aI_P - I_P/sS_y + I_y) = q/2EI(I_y - x_cI_P),$$

Где $I_y = \int_0^s p^2\,x\,ds$, $S_y = \int_0^s x\,ds$ – статический момент дуги s относительно оси y; $x_c = S_y/s$ – абсцисса центра тяжести дуги s.

Рассмотрим частный случай. Кольцо, составленное из двух полуокружностей радиусом a и двух прямых длиной 2a (рис. 6)

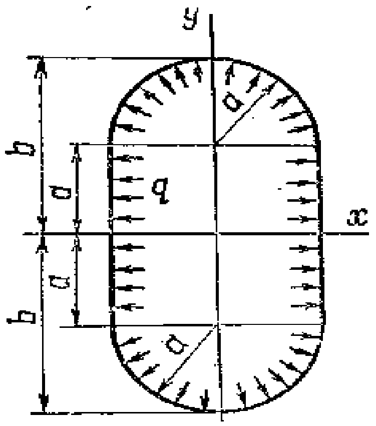

Рис. 6. Кольцо из двух полуокружностей

Так как

$$s = ((2+\pi)/2)a; x_1 = a; y_1 = y; ds_1 = dy; x_2 = acos\varphi; y_2 = a(1+sin\varphi);$$
$$ds_2 = ad\varphi; p_1^2 = a^2 + y^2; p_2^2 = 2a^2(1+sin\varphi),$$

$$S_x = \int_0^s y_1ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y_2ds_2 = \int_0^a ydy + a^2\int_a^{\frac{\pi}{2}} (1+sin\varphi)d = ((3+\pi)/2)a^2;$$

$$S_y = \int_0^a x_1ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} x_2ds_2 = a\int_0^a dy + a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\varphi d\varphi = 2a^2;$$

$$x_c = S_y / s = 4a / 2 + \pi;$$

$$y_c = S_x / s = ((3+\pi)/(2+\pi))a;$$

$$I_x = \int_0^a y_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y_2^2 ds_2 = \int_0^a y^2 dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+sin\varphi)^2 d\varphi = ((28+9\pi)/12)a^3;$$

$$I_y = \int_0^a x_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} x_2^2 ds_2 = a^2 \int_0^a dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\varphi d\varphi = (4+\pi)/4a^3;$$

$$I_P = I_x + I_y = ((10+3\pi)/3)a^3;$$

$$I_x = \int_0^a p_1^2 y_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} p_2^2 y_2 ds_2 = \int_0^a (a^2+y^2) y dy + 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+sin\varphi)^2 d\varphi = ((19+6\pi)/4)a^4;$$

$$I_y = \int_0^a p_1^2 x_1 ds_1 + \int_a^{\frac{\pi}{2}} p_2^2 x_2 ds_2 == a\int_0^a (a^2+y^2) dy + 2a^4 \int_a^{\frac{\pi}{2}} (1+sin\varphi) cos\varphi d\varphi = (13/3)a^4.$$

Для прямолинейного участка:

$$M_1 = q/2(I_P/s - p_1^2) = qa^2/2((14+3\pi)/(6+3\pi) - y^2/a^2) \approx qa^2/2(1{,}519 - y^2/a^2);$$

$$M_{(1_{(y=0)})} = (14+3\pi)/6(2+\pi)qa^2 \approx 0{,}759qa^2;$$

$$M_{(2_{(y=0)})} = 4/(3(2+\pi))qa^2 \approx 0{,}259qa^2.$$

Для криволинейного участка

$$M_2 = q/2(I_p/s - p^2) = qa^2(4/(6+3\pi) - sin\varphi) \approx qa^2(0{,}259 - sin\varphi);$$

$$M_{2_{\varphi=0}} = 4/(3(2+\pi))qa^2 \approx 0{,}259qa^2; M_{2_{\varphi=\pi/4}} = -2+3\pi/3(2+\pi)qa^2 \approx -0{,}741qa^2$$

Эпюра изгибающего момента для четверти кольца показана на рис. 7.

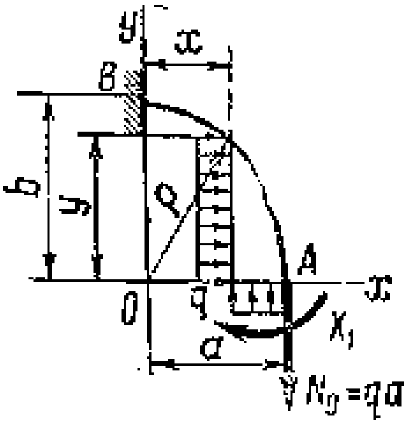

Рис. 7. Эпюра изгибающего момента

Изменение размера a:

$$\Delta a = q / 2EI(Y_c I_p - I_x) = (6 - 17\pi - 6\pi^2) / 24(2+\pi) \cdot (qa^4) / EI \approx -0{,}864(qa^4) / EI.$$

Изменение размеров b:

$$\Delta b = q / 2EI(I_y - x_c I_p) = (\pi - 14) / 12(2+\pi) \cdot (qa^4) / EI \approx -0{,}160(qa^4) / EI.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Миролюбов, И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: уч. пособие для ВТУЗов / И.Н. Миролюбов, С.А. Енгалычев, Н.Д. Сергиевский. – Изд. 4-е.