УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТВЕРЖДЕНИЯ ИЗДЕЛИЯ В УСЛОВИЯХ СВЯЗАННОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Беляева Н.А.
Сыктывкарский государственный университет, Сыктывкар, Россия

Широкое распространение полимерных (композитных) материалов в различных областях экономики требует постоянного развития метода математического моделирования исследования процессов формирования изделий различной геометрии из этих материалов. Результаты исследований по данной тематике в условиях несвязанной теории термовязкоупругости проводились автором в предшествующие годы и представлены, к примеру, в работах [1–6].

Основные уравнения. В настоящей работе рассматривается теоретическая часть математической модели формирования плоской пластины в процессе отверждения полимерной среды при наличии неоднородного температурного поля в рамках связанной теории [7]. Диссипативная функция в уравнении баланса тепла состоит из двух компонент: химической, обусловленной процессом полимеризации и механической, обусловленной возникающими в ходе отверждения вязкоупругими напряжениями и деформациями:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot grad\,T\right)=div\left(\chi\cdot grad\,T\right)+\sigma'_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+Q_n\frac{\partial\alpha}{\partial t},\qquad(1)$$

где $c-$теплоемкость среды, ρ – плотность, χ – теплопроводность, Q_n-тепловой эффект процесса полимеризации. В работе приняты следующие предположения: а) постоянство констант c, χ, Q_n; б) зависимость целевых функций от одной пространственной координаты x и времени t; таким образом, $T=T(x,t)$, $\vec{V}=\left(V(x,t),0,0\right)$, $\alpha=\alpha(x,t)-$ температура, вектор скорости и глубина (степень) полимеризации, соответственно; $\sigma'_{ik}=\sigma'_{ik}(x,t)$ вязкоупругий тензор напряжений, определяемый на основе стандартной линейной модели вязкоупругого тела – последовательное соединение среды Гука и Кельвина [6]. С учетом предположений тензор напряжений имеет одну ненулевую компоненту: $\sigma'_{ik}=\sigma_{xx}\equiv\sigma(x,t)$. Тогда в уравнении (1) выполняются соотношения:

$$\sigma'_{ik}=\eta\frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{\eta}\sigma,\quad \sigma'_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=\frac{\sigma^2}{\eta},\qquad(2)$$

где $\eta=\eta(T)-$ вязкость среды, зависящая от температуры. С учетом сделанных предположений, выражений для дифференциальных операторов в декартовой системе координат формула (1) примет вид:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+V\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\sigma^2}{\eta}+Q_n\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\qquad(3)$$

В качестве реакции полимеризации (отверждения) примем автокаталитическую реакцию первого порядка:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=k_0\exp\left[-U/RT\right](1-\alpha)(\varepsilon_0+\alpha),\qquad(4)$$

здесь k_0 – константа скорости реакции полимеризации, U – энергия активации процесса полимеризации, R – универсальная газовая постоянная, ε_0 – критерий автокаталитичности процесса полимеризации [1, 5].

Плотность ρ в рассматриваемой постановке задачи не является постоянной величиной – определим ее изменение, следуя закону сохранения масс. Пусть ρ_0 – плотность в точке x в момент времени t, ρ_1 – плотность в точке $x+\Delta x$ в момент $t+\Delta t$, тогда, вследствие сохранения массы элемента, справедливо равенство:

$$\rho_1 \cdot (x+\Delta x) = \rho_0 \cdot x, \quad \rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{x}{x+\Delta x}, \quad \rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{\Delta x}{x}}, \quad \rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{1}{1+\varepsilon_x},$$

где $\varepsilon_x = \varepsilon(x,t)$ – относительное изменение длины элемента, то есть деформация элемента. Таким образом, справедлива формула

$$\rho(x,t) = \rho_0 \cdot \frac{1}{1+\varepsilon(x,t)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{1+\varepsilon(x,t)}, \quad \rho(x,t) = \rho_0 \cdot \varepsilon_1. \tag{5}$$

Деформация произвольного элемента формируемого материала обусловлена деформацией вследствие изменения температуры $\varepsilon^T = \varepsilon^T(x,t)$ и деформацией вследствие химической реакции, полимеризации (отверждения) материала – химическая усадка $\varepsilon^\alpha = \varepsilon^\alpha(x,t)$. Таким образом, в формуле (5) выполняется равенство:

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon^T(x,t) + \varepsilon^\alpha(x,t). \tag{6}$$

Одномерная стандартная модель вязкоупругого тела описывается уравнениями типа Вольтерра – закон наследственной упругости – следующего вида [6]:

$$\sigma(x,t) = E\left[\varepsilon(x,t) - \int_0^t (\lambda-\mu)\varepsilon(x,\tau)\exp(-\lambda(t-\tau))\,d\tau\right], \tag{7}$$

где E модуль упругости составляющего элемента Гука, λ, μ – параметры модели, отвечающие за упругие и вязкие свойства модели; будем считать E, λ, μ постоянными величинами.

Соотношения (1)–(7) позволяют записать систему уравнений для анализа процесса формирования плоской полосы в ходе отверждения полимерного материала в неоднородном температурном и конверсионном поле, в условиях связанной тории термовязкоупругости, определения температуры, глубины превращения (отверждения) исходного материала, скорости деформирования, напряженно–деформированного состояния изменяющейся среды:

$$c\rho_0\varepsilon^1\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{\eta} + Q_n\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = k_0 \exp[-U/RT](1-\alpha)(\varepsilon_0+\alpha), \tag{9}$$

$$\sigma(x,t) = E\left[\varepsilon(x,t) - \int_0^t (\lambda-\mu)\varepsilon(x,\tau)\exp(-\lambda(t-\tau))\,d\tau\right], \tag{10}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\eta}\sigma; \tag{11}$$

начальные условия:

$$t=0:\quad T(x,0)=T^0,\quad \alpha(x,0)=0,\quad \sigma(x,0)=0;\quad 0\le x\le x_0; \tag{12}$$

граничные условия:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}-h_0\left(T-T^e\right)\right|_{x=0}=0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}+h_1\left(T-T^e\right)\right|_{x=x_0}=0. \tag{14}$$

В условиях (12)–(14) температура T^0, T^e начальная температура материала и температура окружающей среды, соответственно.

Безразмерная модель. В задаче (8)–(14) введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{gathered}
r=\frac{x}{x_0},\quad 0\le r\le 1;\quad \tau=k_1(T^*)t;\quad \theta=\frac{T-T^*}{\beta T^*};\quad \xi=\frac{\sigma}{E};\quad \nu(r,\tau)=\frac{V(x,t)}{x_0k_1(T^*)};\\
k_1(T^*)=k_0\exp\left(-\frac{1}{\beta}\right);\quad \beta=\frac{RT^*}{U};\quad \delta=\frac{\rho_0cx_0^2k_1(T^*)}{\chi};\quad k_n=\frac{\theta_nx_0^2k_1(T^*)}{\beta T^*\chi};\\
sig=\frac{E^2x_0^2}{\eta_0\beta\chi T^*};\quad \bar{h}_0=x_0h,\quad \bar{h}_1=x_0h_1;\quad \lambda_1=\frac{\lambda}{k_1(T^*)},\quad \mu_1=\frac{\mu}{k_1(T^*)};\\
\omega=\frac{E}{k_1(T^*)\eta_0};\quad k^\theta=k^T\beta T^*.
\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь T*– некоторая температура материала, определяемая конкретными условиями задачи, к примеру, $T^*=T^0$ – начальная температура материала; $\rho=\rho_0$ – начальная плотность, $\eta=\eta_0$– начальная вязкость.

Запишем формулу для деформации материала с использованием (15):

$$\varepsilon(x,t)=\varepsilon^T(x,t)+\varepsilon^\alpha(x,t),$$

$$\varepsilon(x,t)=k^T\left(T-T^0\right)+k^\alpha\alpha(x,t),\quad \theta=\frac{T-T^*}{\beta T^*},\quad \theta^0=\frac{T^0-T^*}{\beta T^*},\quad \theta-\theta^0=\frac{T-T^0}{\beta T^*},$$

$$\varepsilon(r,\tau)=k^T\beta T^*\left(\theta(r,\tau)-\theta^0\right)+k^\alpha\alpha(r,\tau),\quad \varepsilon(r,\tau)=k^\theta\left(\theta(r,\tau)-\theta^0\right)+k^\alpha\alpha(r,\tau).$$

В безразмерном виде с использованием обозначений (15) система (8) – (14) запишется:

$$\varepsilon^1\delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+\nu\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+sig\cdot\exp(\theta)\xi^2+k_n\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}=\exp\left[\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right](1-\alpha)(\varepsilon_0+\alpha), \tag{17}$$

$$\xi(r,\tau)=\varepsilon(r,\tau)-\int_0^\tau(\lambda_1-\mu_1)\varepsilon(r,s)\exp\left(-\lambda_1(\tau-s)\right)ds, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial r}=\omega\cdot\xi\exp\theta; \tag{19}$$

начальные условия:

$$\tau = 0: \quad \theta(r,0) = \theta^0, \quad \alpha(r,0) = 0, \quad \xi(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le 1; \tag{20}$$

граничные условия:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} - \bar{h}_0 \left(\theta - \theta^e \right) \right|_{r=0} = 0, \tag{21}$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} + \bar{h}_1 \left(\theta - \theta^e \right) \right|_{r=1} = 0. \tag{22}$$

Система (16)–(22) решается численно с использованием метода прогонки.

Алгоритм численного анализа. Заменим выражения (16)–(22) разностными соотношениями, учитывая последовательность их использования.

Введем пространственно-временную сетку:

$$\left(r_i, \tau_j\right): \quad 0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_i < \ldots < r_n = 1, \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_j < \ldots,$$

$$\Delta r = r_i - r_{i-1}, \quad 1 \le i \le n, \quad \Delta \tau = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad j \ge 1.$$

Положим

$$f_{ij} = f\left(r_i, \tau_j\right),$$

и преобразуем уравнение (17):

$$\mathrm{ex} = \exp\left(\frac{\theta_{i,j-1}}{1 + \beta \theta_{i,j-1}} \right); \frac{\alpha_{ij} - \alpha_{i,j-1}}{\Delta \tau} = \mathrm{ex} \cdot \left(1 - \alpha_{i,j}\right)\left(\varepsilon_0 + \alpha_{i,j-1}\right),$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha_{i,j-1}\left(1 + \Delta\tau \cdot \mathrm{ex}\right) + \varepsilon_0 \cdot \Delta\tau \cdot \mathrm{ex}}{1 + \Delta\tau \cdot \mathrm{ex} \cdot \left(\varepsilon_0 + \alpha_{i,j-1}\right)}, \quad j \ge 1, \quad \alpha_{i0} = 0;$$

$$D\alpha = \frac{\alpha_{ij} - \alpha_{i,j-1}}{\Delta \tau}.$$

Запишем разностное соотношение, соответствующее уравнению (16):

$$\varepsilon^1_{i,j-1} = \frac{1}{1 + k^\theta \left(\theta_{i,j-1} - \theta_0\right) + k^\alpha \alpha_{i,j}},$$

$$\varepsilon^1_{i,j-1} \delta \left(\frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta \tau} + \nu_{i,j-1} \cdot \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{\Delta r} \right) = \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\left(\Delta r\right)^2} + \xi^2_{i,j-1} \cdot sig \cdot \exp\left(\theta_{i,j-1}\right) + k_n \cdot D\alpha,$$

$$\theta_{i,j} \left[\varepsilon^1_{i,j-1} \delta \left(\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\nu_{i,j-1}}{\Delta r} \right) + \frac{2}{\left(\Delta r\right)^2} \right] = \frac{\theta_{i+1,j}}{\left(\Delta r\right)^2} + \theta_{i-1,j} \left(\frac{\nu_{i,j-1}}{\Delta r} + \frac{1}{\left(\Delta r\right)^2} \right) + \varepsilon^1_{i,j-1} \delta \cdot \frac{1}{\Delta \tau} \theta_{i,j-1} +$$

$$+ \xi^2_{i,j-1} \cdot sig \cdot \exp\left(\theta_{i,j-1}\right) + k_n \cdot D\alpha;$$

Воспользуемся прогоночной формулой:

$$\theta_{i+1,j} = E_{i+1,j} \theta_{i,j} + F_{i+1,j}, \tag{23}$$

подставив ее в предыдущее разностное соотношение. После несложных преобразований, получим:

$$\theta_{i,j}=\theta_{i-1,j}\frac{\left(\nu_{i,j-1}\Delta r+1\right)\Delta\tau}{\varepsilon_{i,j-1}^{1}\delta\Delta r\left(\Delta r+\nu_{i,j-1}\Delta\tau\right)+\Delta\tau\left(2-E_{i+1,j}\right)}+$$

$$+\frac{\left(\Delta r\right)^{2}\cdot\delta\cdot\varepsilon_{i,j-1}^{1}\theta_{i,j-1}+\Delta\tau\left(\Delta r\right)^{2}\left(\xi_{i,j-1}^{2}\cdot sig\cdot\exp\left(\theta_{i,j-1}\right)+k_{n}\cdot D\alpha\right)+\Delta\tau F_{i+1,j}}{\varepsilon_{i,j-1}^{1}\delta\Delta r\left(\Delta r+\nu_{i,j-1}\Delta\tau\right)+\Delta\tau\left(2-E_{i+1,j}\right)}.$$

Из последнего выражения получим рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов:

$$E_{i,j}=\frac{\left(\nu_{i,j-1}\Delta r+1\right)\Delta\tau}{\varepsilon_{i,j-1}^{1}\cdot\delta\cdot\Delta r\left(\Delta r+\nu_{i,j-1}\Delta\tau\right)+\Delta\tau\left(2-E_{i+1,j}\right)},$$

$$F_{i,j}=\frac{\left(\Delta r\right)^{2}\cdot\delta\cdot\varepsilon_{i,j-1}^{1}\theta_{i,j-1}+\Delta\tau\left(\Delta r\right)^{2}\left(\xi_{i,j-1}^{2}\cdot sig\cdot\exp\left(\theta_{i,j-1}\right)+k_{n}\cdot D\alpha\right)+\Delta\tau F_{i+1,j}}{\varepsilon_{i,j-1}^{1}\delta\cdot\Delta r\left(\Delta r+\nu_{i,j-1}\Delta\tau\right)+\Delta\tau\left(2-E_{i+1,j}\right)}, \tag{24}$$

$$i\in 1\ldots n-1,\quad j\geq 1.$$

Таким образом, значения температуры в узлах построенной сетки определяются формулой:

$$\theta_{i,j}=E_{i,j}\theta_{i-1,j}+F_{i,j},\quad i=1\ldots n-1,\quad j\geq 1. \tag{25}$$

В каждом j-м слое по формулам (24) определяются прогоночные коэффициенты с использованием правого граничного условия (22):

$$r=1:\quad \frac{\theta_{n,j}-\theta_{n-1,j}}{\Delta r}=-\bar{h}_{1}\left(\theta_{n,j}-\theta^{e}\right),\quad \theta_{n,j}=\frac{\theta_{n-1,j}}{1+\bar{h}_{1}\Delta r}+\frac{\bar{h}_{1}\Delta r}{1+\bar{h}_{1}\Delta r}\theta^{e},\quad j\geq 1.$$

Из последнего соотношения получим выражения для прогоночных коэффициентов на правой границе области:

$$E_{n,j}=\frac{1}{1+\bar{h}_{1}\Delta r},\quad F_{n,j}=\frac{\bar{h}_{1}\Delta r}{1+\bar{h}_{1}\Delta r}\theta^{e},\quad j\geq 1.$$

Затем справа налево определяем остальные коэффициенты по формулам (24):

$$\left(E_{i,j},\quad F_{i,j}\right),\quad i=n-1\ldots 1.$$

На левой границе воспользуемся граничным условием:

$$r=0:\quad \frac{\theta_{1,j}-\theta_{0,j}}{\Delta r}=\bar{h}_{0}\left(\theta_{0,j}-\theta^{e}\right),$$

из которого следует, что

$$\theta_{1,j}=\theta_{0,j}+\bar{h}_{0}\left(\theta_{0,j}-\theta^{e}\right)\Delta r.$$

С другой стороны, по прогоночной формуле (25)

$$\theta_{1,j}=E_{1,j}\theta_{0,j}+F_{1,j},$$

следовательно, выполняется равенство

$$\theta_{0,j}+\bar{h}_{0}\left(\theta_{0,j}-\theta^{e}\right)\Delta r=E_{1,j}\theta_{0,j}+F_{1,j},\quad \theta_{0,j}\left(1+\bar{h}_{0}\Delta r-E_{1,j}\right)=F_{1,j}+\bar{h}_{0}\theta^{e}\Delta r,$$

из которого определяем температуру на границе r=0:

$$\theta_{0,j} = \frac{F_{1,j} + \bar{h}_0 \theta^e \Delta r}{1 + \bar{h}_0 \Delta r - E_{1,j}}.$$

Далее по прогоночной формуле (25), слева направо определяем температуру $\theta_{i,j}$ во всех точках сетки рассматриваемого *j*–слоя.

Преобразуем зависимость между вязкоупругим напряжением и деформацией (18):

$$\xi(r,\tau) = \varepsilon(r,\tau) - \int_0^{\tau-\Delta\tau} (\lambda_1 - \mu_1)\varepsilon(r,s)\exp(-\lambda_1(\tau - s))ds -$$
$$- \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau} (\lambda_1 - \mu_1)\varepsilon(r,s)\exp(-\lambda_1(\tau - s))ds,$$
$$\xi(r,\tau) = \varepsilon(r,\tau) - \int_0^{\tau-\Delta\tau} (\lambda_1 - \mu_1)\varepsilon(r,s)\exp(-\lambda_1(\tau - s))ds -$$
$$-\frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\big(\varepsilon(r,\tau) + \varepsilon(r,\tau - \Delta\tau)\exp(-\lambda_1\Delta\tau)\big). \tag{26}$$

Выразим интеграл из соотношения

$$\xi(r,\tau - \Delta\tau) = \varepsilon(r,\tau - \Delta\tau) - \int_0^{\tau-\Delta\tau} (\lambda_1 - \mu_1)\varepsilon(r,s)\exp(-\lambda_1(\tau - s))ds$$

и подставим в правую часть выражения (26), получим рекуррентную формулу для нахождения напряжения:

$$\xi(r,\tau) = \varepsilon(r,\tau) - \varepsilon(r,\tau - \Delta\tau) + \xi(r,\tau - \Delta\tau) -$$
$$-\frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\big(\varepsilon(r,\tau) + \varepsilon(r,\tau - \Delta\tau)\exp(-\lambda_1\Delta\tau)\big)$$

или

$$\xi(r,\tau) = \xi(r,\tau - \Delta\tau) - \varepsilon(r,\tau - \Delta\tau)\left(1 + \frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\exp(-\lambda_1\Delta\tau)\right) + \varepsilon(r,\tau)\left(1 - \frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\right).$$

Следовательно, значения напряжения в узлах построенной пространственно–временной сетки определяются так:

$$\xi(r_i,\tau_j) = \xi(r_i,\tau_j - \Delta\tau) - \varepsilon(r_i,\tau_j - \Delta\tau)\left(1 + \frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\exp(-\lambda_1\Delta\tau)\right) +$$
$$+\varepsilon(r_i,\tau_j)\left(1 - \frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\right), \tag{27}$$
$$\xi_{ij} = \xi_{i,j-1} - \varepsilon_{i,j-1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\exp(-\lambda_1\Delta\tau)\right) + \varepsilon_{ij} \cdot \left(1 - \frac{\Delta\tau}{2}(\lambda_1 - \mu_1)\right).$$

При работе с формулой (27) необходимо учитывать начальные условия:

$$\xi(r_i,0) = \varepsilon(r_i,0) = 0,$$
$$\xi_{i0} = \varepsilon_{i0} = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим алгоритм численного определения скорости деформации, исходя из формулы (19):

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \omega \cdot \exp\left(\theta\right) \cdot \xi; \quad \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta r} = \omega \cdot \exp\left(\theta_{ij}\right) \cdot \xi_{ij},$$
$$v_{i,j} = v_{i-1,j} + \Delta r \cdot \omega \cdot \exp\left(\theta_{ij}\right) \cdot \xi_{ij}, \quad i = 1 \ldots n. \qquad (29)$$

Пусть граница $r=0$ закреплена, тогда можно записать:

$$v_{0,j} = 0, \quad v_{1,j} = \Delta r \cdot \omega \cdot \exp\left(\theta_{ij}\right) \cdot \xi_{ij}, \quad v_{2,j} = v_{1,j} + \Delta r \cdot \omega \cdot \exp\left(\theta_{2j}\right) \cdot \xi_{ij}, \ldots,$$

$$v_{n,j} = v_{n-1,j} + \Delta r \cdot \omega \cdot \exp\left(\theta_{nj}\right) \cdot \xi_{nj}, \quad j \geq 1$$
$$v_{i,0} = 0, \quad i = 0 \ldots n.$$

Следовательно, в любой j-й момент времени скорость может быть определена во всех точках пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляева, Н.А. Напряженное состояние фронтально формируемого сферического изделия / Н.А. Беляева, Е.С. Довжко// Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2011. – Вып. 2. – С. 123–134.

2. Довжко, Е.С. Формирование сферического изделия с учетом ненулевой критической глубины конверсии. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, Реестр программ для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2011617495, 27 сентября 2011 г.

3. Беляева, Н.А. Деформирование вязкоупругих структурированных систем: монография / Н.А. Беляева // Lap Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany. – 2011. – 200 с.

4. Отчет о научно-исследовательской работе в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы по теме: «НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МЕХАНИКИ», шифр «2010-1.1-112-024-024», № 02.740.11.0618 (итоговый, этап № 6). Наименование этапа: «Отчетный». – М.: ВНТИЦ, 2012. – Инв. № 02301297038. – 46 с.

5. Беляева, Н.А. Объемное формирование цилиндрического изделия с учетом давления / Н.А. Беляева, Е.С. Довжко // Известия Коми научного Центра УрО РАН. – 2014. – С. 5–11.

6. Беляева, Н.А. Математическое моделирование: Учебное пособие. Н.А. Беляева. – Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета, 2014. – 116 с.

7. Беляева, Н.А. Неизотермическая модель деформирования вязкоупругого материала. Математика в приложениях. Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова. 4–10 августа 2019, Новосибирск, Россия. Тезисы докладов. Новосибирск, 2019.г. – Издательско-полиграфический центр НГУ. – С. 96.