УДК 539.3

О ДВУХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А., Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

Запишем дифференциальные уравнения равновесия упругой изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации без учета массовых сил и сил инерции в виде:

$$\begin{cases} \partial_1\sigma_x + \partial_2\tau_{xy} = 0 \\ \partial_1\tau_{yx} + \partial_2\sigma_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь обозначено: $\partial_1 = \partial/\partial x$ – частная производная по переменной x, $\partial_2 = \partial/\partial y$ – частная производная попеременной y. Напряжения выразим через функцию напряжений по известным[1] формулам Эри:

$$\sigma_x = \partial_2^2\varphi \;\; \sigma_y = \partial_1^2\varphi \;\; \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial_1\partial_2\varphi \tag{2}$$

Легко убедиться что уравнения (1) тождественно удовлетворяются. А сама функция φ должна удовлетворять бигармоническому уравнению вида:

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4)\varphi = 0 \tag{3}$$

Для решения поставленной задачи будем использовать операторно – символический метод, изложенный в [3]. Тогда представим:

$$\begin{gathered} \varphi = [A(\partial_1)\sin(y\partial_1) + B(\partial_1)y\cos(y\partial_1) + C(\partial_1)\cos(y\partial_1) + \\ +D(\partial_1)y\sin(y\partial_1)] * f(x) \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $A(\partial_1), B(\partial_1), C(\partial_1), D(\partial_1)$ – операторные функциональные коэффициенты, а $f(x)$ – произвольная функция. В дальнейшем, для упрощения записей, зависимость операторных коэффициентов от аргумента ∂_1 показывать не будем, а будем только подразумевать. Чтобы убедиться в справедливости высказывания, что φ является бигармонической функцией, возьмем любое ее слагаемое, например, второе и подставим его в уравнение (3). Так как

$$\begin{gathered} \partial_2^2[y\cos(y\partial_1)] = \partial_2^2\partial_1[\sin(y\partial_1)] = \partial_1\partial_2^2[\sin(y\partial_1)] = -\partial_1[\partial_1^2\sin(y\partial_1)] = \\ = -2\partial_1\sin(y\partial_1) - \partial_1^2 y\cos(y\partial_1) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \partial_2^4[y\cos(y\partial_1)] = \partial_2^4\partial_1[\sin(y\partial_1)] = \partial_1\partial_2^4[\sin(y\partial_1)] = \partial_1[\partial_1^4\sin(y\partial_1)] = \\ = 4\partial_1^3\sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y\cos(y\partial_1) \end{gathered}$$

то

$$\begin{gathered} (\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4)[y\cos(y\partial_1)] = \partial_1^4 y\cos(y\partial_1) + 2\partial_1^2(-2\partial_1\sin(y\partial_1) - \\ -\partial_1^2 y\cos(y\partial_1)) + 4\partial_1^3\sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y\cos(y\partial_1) = 0 \end{gathered}$$

Аналогично проверяются и остальные слагаемые выражения (4) т.е. функция φ, выражаемая соотношением (4) является бигармонической.

Построим, основанное на ней, так называемое однородное решение плоской задачи теории упругости. Это означает, что на границах $y = \pm b$, будем полагать $\tau_{xy} = 0$ и $\sigma_y = 0$.

Предварительно находим:

$$\begin{aligned}\partial_2\varphi = [A\partial_1\cos(y\partial_1) + B\cos(y\partial_1) - By\partial_1\sin(y\partial_1) - C\partial_1\sin(y\partial_1) + \\ +D\sin(y\partial_1) + Dy\partial_1\cos(y\partial_1)] * f(x)\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь, как и в (4), операторные коэффициенты A, B, C, D функционально зависят от аргумента ∂_1, но ради упрощения записей эта зависимость не показана.

На основании (2), равенство нулю нормальных и касательных напряжений в зависимости только от y, будет равносильна системе операторных уравнений $\varphi(\pm b) = 0$ и $\partial_2\varphi(\pm b) = 0$, которая в нашем случае принимает вид:

$$\begin{cases} A\sin(b\partial_1) + Bb\cos(b\partial_1) + C\cos(b\partial_1) + Db\sin(b\partial_1) = 0 \\ -A\sin(b\partial_1) - Bb\cos(b\partial_1) + C\cos(b\partial_1) + Db\sin(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1) + B\cos(b\partial_1) - Bb\partial_1\sin(b\partial_1) - C\partial_1\sin(b\partial_1) + \\ +D\sin(b\partial_1) + Db\cos(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1) + B\cos(b\partial_1) - Bb\partial_1\sin(b\partial_1) + C\partial_1\sin(b\partial_1) - \\ -D\sin(b\partial_1) - Db\cos(b\partial_1) = 0 \end{cases}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} A\sin(b\partial_1) + Bb\cos(b\partial_1) = 0 \\ C\cos(b\partial_1) + Db\sin(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1) + B\cos(b\partial_1) - Bb\partial_1\sin(b\partial_1) = 0 \\ C\partial_1\sin(b\partial_1) - D\sin(b\partial_1) - Db\cos(b\partial_1) = 0 \end{cases}$$

В свою очередь полученная таким образом однородная система уравнений распадается на две независимые однородные системы уравнений:

$$\begin{cases} A\sin(b\partial_1) + Bb\cos(b\partial_1) = 0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1) + B\cos(b\partial_1) - Bb\partial_1\sin(b\partial_1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} C\cos(b\partial_1) + Db\sin(b\partial_1) = 0 \\ C\partial_1\sin(b\partial_1) - D\sin(b\partial_1) - Db\cos(b\partial_1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Для того, что бы полученные системы уравнений имели нетривиальное решение необходимо равенство нулю их определителей. Для систем уравнений (6) и (7) получим соответственно следующие трансцендентные уравнения:

$$\sin 2b\partial_1 - 2b\partial_1 = 0 \;\; (6') \quad \text{и} \quad \sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1 = 0 \qquad (7')$$

Справедливости ради отметим еще один подход. Установим систему координат таким образом, чтобы уравнения границы задавались уравнениями

$y=0, y=b$. Тогда соответствующая граничным условиям система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} C=0 \\ A\sin(b\partial_1)+Bb\cos(b\partial_1)+Db\sin(b\partial_1)=0 \\ A\partial_1+B=0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1)+B\cos(b\partial_1)-Bb\partial_1\sin(b\partial_1)+D\sin(b\partial_1)+Db\partial_1\cos(b\partial_1)=0 \end{cases}$$

После упрощений, получим:

$$\begin{cases} -B\sin(b\partial_1)+Bb\partial_1 cos(b\partial_1)+Db\partial_1\sin(b\partial_1)=0 \\ -Bb\partial_1\sin(b\partial_1)+D\sin(b\partial_1)+Db\partial_1 cos(b\partial_1)=0 \end{cases}$$

Приравнивая, как и выше, определитель нулю, находим:

$$[-\sin(b\partial_1+b\partial_1\cos(b\partial_1)][\sin(b\partial_1+b\partial_1\cos(b\partial_1)]+b^2\partial_1^2\sin^2(b\partial_1)=0;$$

или

$$\sin^2(b\partial_1)-(b\partial_1)^2=0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения

$$\sin(b\partial_1)-b\partial_1=0 \ (6'') \quad \text{и} \quad \sin(b\partial_1)+b\partial_1=0 \qquad (7'')$$

Уравнения $(6'')$ и $(7'')$ идентичны полученным выше $(6')$ и $(7')$, и отличаются только коэффициентом 2, который указывает на то, что ширина пластины $-b\le y\le b$ в 2 раза больше чем ширина пластины $0\le y\le b$, а это не имеет принципиального значения для нахождения корней этих уравнений. Все они имеют комплексные корни, а это обстоятельство приводит к решению поставленной задачи в комплексной области.

Рассмотрим другой подход, позволяющий оставаться в области действительных чисел. Для этой цели наряду с функцией

$$\varphi_1=[A_1(\partial_1)\sin(y\partial_1)+B_1(\partial_1)y\cos(y\partial_1)+C_1(\partial_1)\cos(y\partial_1)+ \\ +D_1(\partial_1)y\sin(y\partial_1)]*f(x) \qquad (8)$$

введем еще одну бигармоническую функцию:

$$\varphi_2=[A_2(\partial_2)\sin(x\partial_2)+B_2(\partial_2)x\cos(x\partial_2)+C_2(\partial_2)\cos(x\partial_2)+ \\ +D_2(\partial_2)x\sin(x\partial_2)]*f(y) \qquad (9)$$

На этот раз потребуем выполнения условий граничных условий вида: $\partial_2\varphi_1(y=\pm b)=0$ и $\partial_1\varphi_2(x=\pm a)=0$.

Кстати, соотношения $(6'),(7')$, или что то же самое, $(6''),(7'')$, хорошо известны в научной литературе [2]. Кроме того эти соотношения сами по себе еще не являются решением проблемы. Задачу, где они используются, рассмотрим первой.

1. Метод однородных решений.

В этом случае из условия $\varphi_{y=\pm b}=0$, получаем $A=-bctg(b\partial_1)B$ и $C=-btg(b\partial_1)D$. Тогда выражение φ и $\partial_2\varphi$ приобретают вид:

$$\varphi=[-bctg(b\partial_1)\sin(y\partial_1)+y\cos(y\partial_1)]B+[-btg(b\partial_1)\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)]D$$
$$\partial_2\varphi=[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)cos(y\partial_1)-y\partial_1\sin(y\partial_1)]B+$$
$$+[b\partial_1 tg(b\partial_1+1)\sin(y\partial_1)+y\partial_1\cos(y\partial_1)]D$$

Отсюда видно, что если соотношение $\varphi_{y=\pm b}=0$ выполняется непосредственно, то для соотношения $\partial_2\varphi_{y=\pm b}=0$ получим систему уравнений

$$y=b \qquad [1скобка]B+[2скобка]D=0$$
$$y=-b \qquad [1скобка]B-[2скобка]D=0.$$

Данная система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. В результате приходим к соотношению

$$[1кобка]\cdot[2скобка]=0 \text{ или}$$
$$[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)][b\partial_1 tg(b\partial_1+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)]=0.$$

Раскроем эту скобку

$$b\partial_1[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1+1)\cos^2(b\partial_1)-(b\partial_1 tg(b\partial_1+1)\sin^2(b\partial_1)]+$$
$$+[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)(b\partial_1 tg(b\partial_1)+1)-(b\partial_1)^2]\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=$$
$$=b\partial_1[\cos^2(b\partial_1)-\sin^2(b\partial_1)-b\partial_1\frac{\cos^4(b\partial_1)+\sin^4(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}]+$$
$$+[b\partial_1\frac{\sin^2(b\partial_1)-\cos^2(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}-2(b\partial_1)^2+1]\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=$$
$$=-(b\partial_1)^2\frac{1-2\sin^2(b\partial_1)\cos^2(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}+(-2(b\partial_1)^2+1)\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=$$
$$=-\frac{(b\partial_1)^2}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}+\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=0$$

Отсюда получаем $\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=\pm b\partial_1$ или $\sin(2b\partial_1)\pm 2b\partial_1=0$, что совпадает с приведенными выше формулами. Разделяя корни, получим два вида выражений φ:

$$\varphi_1 = \frac{(b\partial_1 tg(b\partial_1)+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)}{(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)\cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)}[-bctg(b\partial_1)\sin(y\partial_1)+y\cos(y\partial_1)]-$$

$$-btg(b\partial_1)\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)$$

$$\varphi_2 = -bctg(b\partial_1)\sin(y\partial_1)+y\cos(y\partial_1)+$$

$$+\frac{(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)\cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)}{b\partial_1 tg(b\partial_1+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)}[-btg(b\partial_1)\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)]$$

С учетом соотношений

$$(b\partial_1 tg(b\partial_1)+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)=\frac{b\partial_1}{\cos(b\partial_1)}+\sin(b\partial_1)=\frac{\sin(2b\partial_1)+2b\partial_1}{2\cos(b\partial_1)}$$

$$(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)\cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)=\cos(b\partial_1)-\frac{b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}=\frac{\sin(2b\partial_1)-2b\partial_1}{2\sin(b\partial_1)}$$

φ_1 и φ_2 перепишем в виде:

$$\varphi_1 = \frac{\sin(2b\partial_1)+2b\partial_1}{\sin(2b\partial_1)-2b\partial_1}[tg(b\partial_1)y\cos(y\partial_1)-b\sin(y\partial_1)]-tg(b\partial_1)b\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)$$

$$\varphi_2 = \frac{\sin(2b\partial_1)-2b\partial_1}{\sin(2b\partial_1)+2b\partial_1}[ctg(b\partial_1)y\sin(y\partial_1)-b\cos(y\partial_1)]-ctg(b\partial_1)b\sin(y\partial_1)+y\cos(y\partial_1)$$

Проверим выполнение граничных условий. Теперь нетрудно установить:

$$y=\pm b \qquad \varphi_1=\varphi_2=0 \quad ; \quad \begin{matrix} y=-b \\ y=+b \end{matrix} \qquad \partial_2\varphi_1=\partial_2\varphi_2=0$$

$$\partial_2\varphi_1 = 2[(b\partial_1 tg(b\partial_1)+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)] = 2[\frac{b\partial_1}{\cos(b\partial_1)}+\sin(b\partial_1)]=$$

$$=\frac{\sin(2b\partial_1)+2b\partial_1}{\cos(b\partial_1)}$$

$$\partial_2\varphi_2 = 2[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)\cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)] = 2[\cos(b\partial_1)-\frac{b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}]=$$

$$=\frac{\sin(2b\partial_1)-2b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}$$

И после этого остается удовлетворить последнему граничному условию

$$\tau_{xy}(y, x=\pm a).$$

Это можно достигнуть с помощью метода, изложенного в [2] или путем переразложения рядов, содержащих корни одних трансцендентных уравнений в ряды, содержащие корни других трансцендентных уравнений.

$$\varphi = \{[\frac{1}{\partial_1}(1-btg(b\partial_1))\sin(y\partial_1)+y\cos(b\partial_1)]B(\partial_1)+$$

$$+[\frac{1}{\partial_1}(1-bctg(b\partial_1)\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)]D(\partial_1)\} * \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{\pi nx}{a})$$

Справедливости ради и другой подход, который для нашего случая является проверочным. А именно, если вначале приравнять нулю производную по переменной y, то получим следующую зависимость между коэффициентами:

$$A = \frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 tg(b\partial_1) - 1)B, \qquad C = \frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 ctg(b\partial_1) + 1)D \tag{10}$$

Если теперь приравнять нулю сами напряжения и продолжить выкладки, то получим те же самые формулы что и выше, а это еще раз подтверждает достоверность полученных результатов.

2. Метод ортогональных решений.

В этом случае функции напряжений представляется в виде:

$$\varphi_1 = \{[\frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 tg(b\partial_1) - 1)\sin(y\partial_1) + y\cos(y\partial_1)]B_1(\partial_1) +$$
$$+[\frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 ctg(b\partial_1) + 1)\cos(y\partial_1) + y\sin(y\partial_1)]D_1(\partial_1)\} * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n x}{a})$$
$$\tag{11}$$
$$\varphi_2 = \{[\frac{1}{\partial_2}(a\partial_2 tg(a\partial_2) - 1)\sin(x\partial_2) + x\cos(x\partial_2)]B_2(\partial_2) +$$
$$+[\frac{1}{\partial_2}(a\partial_2 ctg(a\partial_1) + 1)\cos(x\partial_2) + x\sin(x\partial_2)]D_2(\partial_2)\} * \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{\pi n y}{b})$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что в этих записях используются формулы (10), которые предопределяют равенство нулю касательных напряжений на всем контуре пластины, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой. Так как необходимый произвол содержится в коэффициентах a_n и b_n, то можно положить

$$B_1(\partial_1) = D_1(\partial_1) = B_2(\partial_2) = D_2(\partial_2) = 1$$

В результате получим:

$$\tau^1_{xy}(x = \pm a, y = \pm b) = -\partial_1\partial_2\varphi_1(x = \pm a, y = \pm b) = \frac{\pi n}{a}\{[(b\partial_1 tg(b\partial_1) - 1)\cos(b\partial_1) +$$
$$+\cos(b\partial_1) - b\partial_1\sin(b\partial_1)] + [-(ctg(b\partial_1) + 1)\sin(b\partial_1) + \sin(b\partial_1) + b\partial_1\cos(b\partial_1)]\} *$$
$$*\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{\pi n x}{a}) = 0$$

$$\tau^2_{xy}(x = \pm a, y = \pm b) = -\partial_1\partial_2\varphi_2(x = \pm a, y = \pm b) = \frac{\pi n}{b}\{[(a\partial_2 tg(a\partial_2) - 1)\cos(a\partial_2) +$$
$$+\cos(a\partial_2) - a\partial_2\sin(a\partial_2)] + [-(ctg(a\partial_2) + 1)\sin(a\partial_2) + \sin(a\partial_2) + a\partial_2\cos(a\partial_2)]\} *$$ Итак,
$$*\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{\pi n y}{b}) = 0$$

граничные условия вида $\tau_{xy} = 0$ выполняются тождественно на сторонах $x = \pm a$ и $y = \pm b$ тождественно. Коэффициенты a_n и b_n находятся их оставшихся граничных условий. Используя приведенную в [1] таблицу

$$\sin(y\partial_1) * [\sin(\pi n x/a)] = sh(\pi n y/a)\cos(\pi n x/a)$$
$$y\partial_1\cos(y\partial_1) * [\sin(\pi n x/a)] = (\pi n y/a)ch(\pi n y/a)\cos(\pi n x/a)$$

$$tg(a\partial_1)\cos(y\partial_1) * [\sin \pi nx/a] = tg(\pi n)ch(\pi ny/a)\cos(\pi nx/a)$$

$$tg(a\partial_1)y\partial_1 \sin(y\partial_1) * [\sin \pi nx/a] = tg(\pi n)ch(\pi ny/a)\cos(\pi nx/a)$$

определим коэффициенты a_n и b_n из следующих соотношений:

$$\sigma_x = \partial_2^2(\varphi_1 + \varphi_2)\Big|_{x=\pm a} = G(y) \text{ и } \sigma_y = \partial_1^2(\varphi_1 + \varphi_2)\Big|_{y=\pm b} = F(x) \qquad (12)$$

Здесь *F(x)* и *G(y)* – известные функции, а φ_1 и φ_2 задаются формулами (11) и (12).

Таким образом, выше изложены два операторно-символических подхода к решению плоской задачи теории упругости. Изложение материала носит теоретический характер. Получено новые общее аналитические решение плоской задачи теории упругости о сжатии упругой прямоугольной пластины. На основании полученных формул в дальнейшем можно будет получить численные результаты для конкретных задач в данной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский . – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.

2. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Издательство «Мир», 1975. – 872 с.

3. Акимов, В.А. Операторный метод решения задач теории упругости / В.А. Акимов. – Мн.: УП «Технопринт», 2003. – 101 с.