

## ДИНАМИКА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АМОРТИЗАЦИОННЫХ ПРУЖИН В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

<sup>1</sup>Василевич Ю.В., <sup>1</sup>Шелег В.К., <sup>2</sup>Неумержицкая Е.Ю., <sup>1</sup>Москалев С.А.

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск

<sup>2</sup>Академия последипломного образования, Минск

Существует широкий спектр пружин, предназначенных для выполнения разнообразных функций, регламентированных функциональными требованиями инженерной практики, к числу которых относятся механические системы для гашения колебаний, смягчения динамической нагрузки, регулирования работы предохранительных клапанов и др. При конструировании амортизационных пружин в основу положены: расчеты на прочность и жесткость конструктивных изделий, определение геометрических размеров и механических характеристик материала; результаты экспериментальных исследований, подтверждающие надежность работы пружин в заданных эксплуатационных условиях.

В работе выполнен анализ методик по расчету винтовых и тарельчатых пружин, подверженных как статической так и динамической нагрузкам. Разработаны рекомендации конструирования амортизационных пружин с учетом использования механических свойств рекомендуемого материала для их изготовления и функциональных требований, предъявляемых при действии ударной нагрузки.

**Расчет на прочность винтовых пружин круглого поперечного сечения.** Расчет на прочность винтовых пружин осложняется сложным напряженным состоянием, возникающим одновременно при кручении, сдвиге и изгибе стальной проволоки, круглого поперечного сечения, из которой изготавливаются пружины. В процессе эксплуатации они подвергаются действию растягивающих или сжимающих сил. Полагая, что угол наклона витков мал в расчетной схеме деформационным изгибом пренебрегают, упрощая решение задачи. Пусть к пружине со средним диаметром  $D$ , имеющей  $n$  витков с диаметром  $d$  поперечного сечения проволоки, приложена центральная растягивающая сила  $F$ . Используя метод сечений, определим поперечную силу  $Q = F$  и крутящий момент  $M_k = F \cdot D/2 = F \cdot R$ . Поперечная сила вызывает равномерно распределенные по сечению среза касательные напряжения  $\tau_1 = 4F/\pi d^2$ , а момент  $M_k$  – напряжения  $\tau_2 = 16FR/\pi d^3$ . Поскольку направления действия  $\tau_1$  и  $\tau_2$  на внутреннем радиусе пружины совпадают, то максимальное касательное напряжение  $\tau_{max}$  в поперечном сечении будет равно сумме  $\tau_1$  и  $\tau_2$

$$\tau_{max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \cdot \left(1 + \frac{d}{4R}\right) \quad (1)$$

Из (1) следует, что если  $d/4R \ll 1$ , то

$$\tau_{max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \quad (2)$$

Формулой (2) следует пользоваться для пружин, изготовленных из тонкой проволоки и имеющих большой средний радиус  $R$ . В этом случае пренебрегают касательным напряжением  $\tau_1$  по сравнению с  $\tau_2$ , т.к. касательное напряжение при кручении больше

аналогичной величины при срезе. Для мощных пружин, характеризующихся большой величиной отношения  $d/R$ , касательные напряжения на срез значительны и ими при расчете на прочность не пренебрегают. Как отмечено в [1], «исходя из опыта эксплуатации пружин первые трещины при разрушении, как правило, появляются с внутренней стороны витка, где действуют наибольшие касательные напряжения».

При выводе формулы (1) не принимались во внимание разные радиусы кривизны на внутренней и внешней поверхностях витков пружины. В [1] приведена формула, по которой можно получить более точные расчетные результаты на основе учета изложенного замечания

$$\tau_{max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \cdot \left( \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad \text{где } m = \frac{D}{d} \quad (3)$$

Поправочный коэффициент, фигурирующий в круглых скобках (3), показывает, что его значение увеличивается с уменьшением  $m$ .

**Расчет перемещения винтовой цилиндрической пружины (растяжения или осадки).** При расчете перемещения пружины рассматривают кручение витков. Для этого методом сечений из витка пружины выделяется элементарный элемент длиной  $ds$ . Вне выделенного элемента материал пружины считается жестким. В плоскости, перпендикулярной оси пружины, в которой находится выделенный элемент  $ds$ , боковые сечения элемента жесткими стержнями (являющимися радиусами пружины) соединяем с осью пружины и к их концам прикладываем растягивающие силы  $F$ . Считая, что одно из сечений элемента неподвижно, второе сечение повернется на угол  $d\varphi$ , определяемый по формуле

$$d\varphi = \frac{M_k ds}{GI_p},$$

где  $M_k = F \cdot R$ ,  $I_p = \pi d^4 / 32$ ,  $G$  – модуль сдвига.

В процессе описанной деформации кручения одна из растягивающих сил  $F$  переместится вертикально на расстояние  $\lambda$ , определяющее удлинение (или осадку) цилиндрической витой пружины.

$$\lambda = \frac{M_k R}{GI_p} 2\pi R n = \frac{64FR^3 n}{Gd^4} = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}, \quad (4)$$

Особое внимание заслуживает расчет пружин, подвергающихся удару, когда необходимо учитывать их амортизационные свойства, т.е. поглощение материалом пружины деформационной энергии при ее функционировании. В основу расчета положена прямо пропорциональная зависимость между перемещением пружины  $\lambda$  и действующей на нее силой  $F$ . Известно, что потенциальная энергия  $U$  деформации пружины определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} F \lambda = \frac{32F^2 R^3 n}{Gd^4}. \quad (5)$$

Выразив из (2) крутящий момент  $M_k$  и подставив его выражение в формулу (5) получим нелинейную зависимость потенциальной энергии от максимального касательного напряжения

$$U = \frac{2\pi Rn}{4G} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tau_{\max}^2 \quad (6)$$

Формулу (6) преобразуем к виду

$$U = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V, \quad (7)$$

учитывая, что  $2\pi Rn$  – длина пружины;  $\pi d^2/4$  – площадь поперечного сечения проволоки; произведение учтенных величин – это объем  $V$  материала пружины.

Приравнявая  $\tau_{\max}$  к значению предельно допустимой величины  $[\tau]$  касательного напряжения из формулы (7) найдем

$$U = \frac{[\tau]^2}{4G} V. \quad (8)$$

Из (8) следует, что объем материала винтовой цилиндрической пружины, обеспечивающий ее заданную конструкционную прочность, рассчитывается по формуле

$$V = 4GU/[\tau]^2. \quad (9)$$

Из изложенной методики по расчету прочностных и деформационных свойств цилиндрической пружины следует, что для конструирования, надежной работы и удовлетворения заданным эксплуатационным условиям описанного изделия, необходимо оперировать его геометрическими размерами, числом витков и механическими характеристиками материала на сдвиг, учитывая зависимость между постоянными упругости для однородного изотропного материала

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

При сжатии пружины ее осадка должна быть такой, чтобы зазоры между витками не закрывались.

**Методика расчета напряжения и деформаций в пружинах некруглого сечения.** К наиболее распространенным поперечным сечениям пружин с некруглой формой относятся изделия с прямоугольным, эллиптическим, треугольным и другими типами поперечных сечений. В этом случае гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений) не приемлема из-за действия касательных напряжений, вызывающих искривление поперечных сечений. Задачи такого типа сложны и в основном рассматриваются в математической теории упругости. Здесь мы ограничимся инженерными методами расчета пружин прямоугольного и эллиптического поперечного сечения, наиболее часто применяемых на практике. Как и для витых цилиндрических пружин круглого поперечного сечения принимается, что касательные напряжения при кручении направлены по касательной к контуру сечения.

Напряжения и деформация при кручении пружин некруглого сечения рассчитываются по тем же формулам, что и для пружин с круглым сечением:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (10)$$

$$\varphi = \frac{M_k l}{GI_k}, \quad (11)$$

$$\theta = \frac{M_k}{GI_k}, \quad (12)$$

где  $I_k$  – момент инерции поперечного сечения,  $\text{см}^4$ ;  $W_k$  – момент сопротивления при кручении,  $\text{см}^3$ ;  $\theta$  – относительный или погонный угол закручивания, его размерность  $\text{см}^{-1}$ .

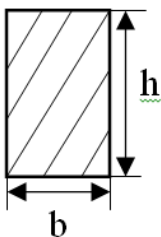
Для пружин с прямоугольным поперечным сечением, для которого  $h$  и  $b$  – соответственно длинная и короткая стороны прямоугольника, максимальное касательное напряжение рассчитывается по формуле (10) с учетом того, что

$$W_k = \alpha hb^2. \quad (13)$$

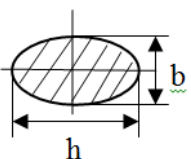
Максимальные касательные напряжения возникают у поверхности посредине длинных сторон прямоугольника; меньшие напряжения  $\tau = \gamma\tau_{\max}$ , наблюдаются посредине у поверхности коротких сторон.

Угол закручивания  $\varphi$  прямоугольного сечения рассчитывается по формуле (11), в которой  $I_k = \beta hb^3$ , где величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  зависят от отношения сторон прямоугольника  $h/b$ , табл. 1.

Таблица 1 – Исходные данные для расчета напряжений и деформаций витых цилиндрических пружин прямоугольного и эллиптического поперечных сечений [1]

Форма сечения	Момент инерции при кручении $I_k, \text{см}^4$	Момент сопротивления при кручении $W_k, \text{см}^3$	Исходные параметры				
			1	2	3	4	
1.	 <p><math>I_k = \beta h b^3, \text{см}^4</math> <math>W_k = \alpha h b^2, \text{см}^3</math></p>	<p>Точки с наибольшими касательными напряжениями</p> $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}$ <p>Посредине длинных сторон</p> $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k},$ <p>Посредине коротких сторон</p> $\tau = \gamma \tau_{\max};$ <p>в углах напряжения равны нулю</p>	$W_k = \alpha h b^2$	$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1				0,208	0,141	1	
1,5				0,231	0,196	0,859	
1,75				0,239	0,214	-	
2,0				0,246	0,229	0,795	
2,5				0,256	0,249	-	
3,0				0,267	0,263	0,753	
4,0				0,282	0,281	0,745	
6,0				0,299	0,299	0,743	
8,0				0,307	0,307	0,743	
10,0				0,313	0,313	0,743	
$\infty$				0,333	0,333	0,743	

Окончание таблицы 1

1	2	3	4
<p>2.</p>  <p><math>I_k = \frac{\pi hb}{64} (h^2 + b^2)</math> – условный момент инерции при кручении для эллипса;</p> <p><math>W_k = \frac{\pi b^2 h}{16}</math> – момент сопротивления при кручении.</p>	<p>В наружных точках малых полуосей</p> <p><math>\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k}</math></p> <p>В наружных точках больших полуосей</p> <p><math>\tau = \tau_{\max}/m</math></p>	<p><math>W_k = \frac{\pi b^2 h}{16}</math></p>	<p><math>\frac{h}{b} = m &gt; 1</math></p>

Условия прочности и жесткости для пружин прямоугольного поперечного сечения запишем в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\alpha h b^2} \leq [\tau], \quad \theta = \frac{M_k}{\beta h b^3 G} \leq [\theta], \quad (14)$$

где  $[\tau]$  и  $[\theta]$  – допускаемое касательное напряжение при кручении (чистом сдвиге) и допускаемый погонный угол закручивания.

Для пружин с эллиптическим поперечным сечением максимальное касательное напряжение при кручении возникает в крайних точках малых полуосей:

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_k}{\pi b^2 h}, \quad (15)$$

поскольку  $W_k = \pi b^2 h / 16$ ;  $b$  и  $h$  – размеры малой и большой осей эллипса.

Наибольшее напряжение в наружных точках сечения на большой полуоси

$$\tau_1 = \tau_{\max} / m, \text{ где } m = h/b > 1.$$

### Назначение, характеристики и материал тарельчатых пружин

Тарельчатые пружины представляют собой весьма жесткие пружины, применяются преимущественно в буферных устройствах амортизаторов для восприятия больших динамических усилий, а также и в других устройствах, где требуются значительные усилия нажатия при малых осадках пружин [2].

Тарельчатая пружина является упругим элементом, имеющим вид усеченного конуса с углом подъема  $\theta = 2 - 6^\circ$ , соотношением наружного и внутреннего диаметров  $m = D_1 / D_2 = 2 - 3$  [2]. На рис. 1 изображена тарельчатая пружина.

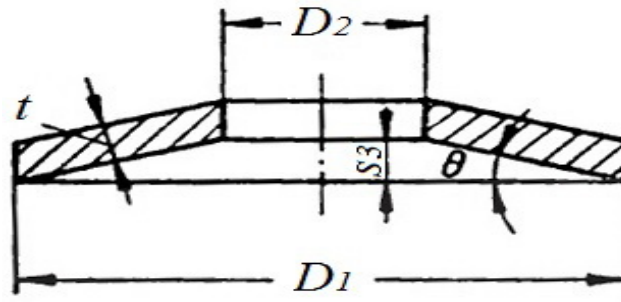


Рис. 1. Тарельчатая пружина

Осевая нагрузка распределяется в процессе работы пружины равномерно по периметру внутренней и наружной кромок каждого кольца. В результате действия силы стенка пружины деформируется и угол подъема уменьшается. При наличии определенного числа секций можно получить необходимую величину осевой деформации тарельчатых пружин.

Тарельчатые пружины изготавливаются методом холодного или горячего штампования из листовой стали толщиной 0,5–10 мм. Первоначально вырубается шайба, которые в последующей операции на специальных штампах выгибаются. Высота конуса обычно находится в пределах 0,6–9 мм, угол подъема не превышает  $2-6^\circ$ , соотношение наружного и внутреннего диаметров лежит в диапазоне 2–3. После соответствующей термической обработки (закалка и отпуск) до твердости HRC 40–47 поверхности тарелок очищаются от окалины и шлифуются по периметру. Иногда для повышения несущей способности тарельчатых пружин их подвергают заневоливанию путем обжатия до полного сплющивания.

Тарельчатые пружины изготавливаются по ГОСТ 3057-90 [2] или DIN 2093 [3]. Пружины по ГОСТ 3057-90 изготавливают из листового, полосового проката или пружинной ленты из стали марки 60С2А ГОСТ 14959. По согласованию между потребителем и изготовителем допускается изготовление пружин из сталей марок 60С2, 51ХФА, 60С2ХА, 60С2Н2А, 65С2ВА, 70С2ХА по ГОСТ 14959.

### Расчетные формулы и методика выбора тарельчатых пружин

Обозначения параметров и расчетные формулы для пружин без опорной плоскости [2] приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Расчетные формулы для тарельчатых пружин без опорной плоскости

Наименование параметра	Расчетная формула или значение
1	2
Сила пружины при рабочей деформации, Н	$F = \frac{4Es}{(1 - \mu^2)YD_1^2} \left[ (s_3 - s) \left( s_3 - \frac{s}{2} \right) t + t^3 \right]$
Сила пружины при максимальной деформации, Н	$F_3 = \frac{4Es_3 t}{(1 - \mu^2)YD_1^2}$

Окончание таблицы 2

Напряжение сжатия в кромке I, МПа	$\sigma_I = \frac{4Es}{(1-\mu^2)YD_1^2} \left[ -\left(s_3 - \frac{s}{2}\right) C_1 - C_2 t \right]$
Напряжение растяжения в кромке II, МПа	$\sigma_{II} = \frac{4Es}{(1-\mu^2)YD_1^2} \left[ -\left(s_3 - \frac{s}{2}\right) C_1 \pm C_2 t \right]$
Напряжение растяжения в кромке III, МПа	$\sigma_{III} = \frac{4Es}{(1-\mu^2)YD_1^2} \frac{D_2}{D_1} \left[ (2C_2 - C_1) \left(s_3 - \frac{s}{2}\right) + C_2 t \right]$
Модуль упругости, МПа	$E = 2,06 \cdot 10^5$
Предварительная деформация пружины, мм	$s_1 = (0,2 \dots 0,4)s_3$
Рабочая деформация пружины, мм	$s_2 = (0,3 \dots 0,6)s_3 - \text{для пружин I класса,}$ $s_2 = (0,6 \dots 0,8)s_3 - \text{для пружин II класса}$
Максимальная деформация пружины, мм	$s_3$
Толщина пружины, мм	$t$
Наружный диаметр пружины, мм	$D_1$
Внутренний диаметр пружины, мм	$D_2$
Коэффициент Пуассона	$\mu = 0,3$
Жесткость пружины, Н/мм	$c = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{s^3}{YD_1^2} \left[ \left(\frac{s_3}{t}\right)^2 - 3\frac{s_3}{t} \cdot \frac{s}{t} + \frac{3}{2} \left(\frac{s}{t}\right)^2 + 1 \right]$
Расчетный коэффициент Y	$Y = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{\ln A} \cdot \left[ \frac{A-1}{A} \right]^2$
Расчетный коэффициент C <sub>1</sub>	$C_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{\ln A} \cdot \left[ \frac{A-1}{\ln A} - 1 \right]$
Расчетный коэффициент C <sub>2</sub>	$C_2 = \frac{3(A-1)}{\pi \ln A}$
Расчетный коэффициент A	$A = \frac{D_1}{D_2}$

Расчетные коэффициенты Y, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> допускается определять по таблице в зависимости от величины A [2]. На рис. 2 показано расположение напряженных кромок тательчатой пружины.

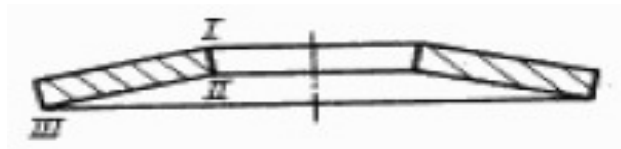


Рис. 2. Напряженные кромки тарельчатой пружины

Напряжение сжатия в кромке I [ $\sigma_1$ ] является определяющим для пружин статического нагружения (II класс пружин). Напряжения растяжения в кромках II и III являются определяющими при циклическом нагружении пружин (I класс пружин).

Вид характеристики «сила-деформация» определяют отношением  $\frac{s_3}{t}$ . При отношении  $\frac{s_3}{t} < 0,6$  зависимость «сила-деформация» практически линейна. При отношении  $\frac{s_3}{t} \geq 0,6$  зависимость «сила-деформация» нелинейна.

При циклическом нагружении пружин средством регулирования выносливости служит изменение разности между напряжением растяжения при максимальной деформации и напряжением при рабочей деформации. Возрастание разности обуславливает увеличение выносливости и стойкости пружин при одновременном возрастании размеров узла.

Пример выбора пружин класса I (циклический вид нагружения):

1. Исходными величинами для определения размеров пружин являются силы  $F_1$  и  $F_2$ , величины предварительной  $S_1$  и рабочей деформации  $S_2$ . Ориентировочно задают габариты пружинного узла.
2. Определить силу, соответствующую максимальной деформации  $F_3 = \frac{F_2}{0,6}$ .
3. В таблицах с параметрами и размерами тарельчатых пружин найти силу, ближайшую к значению  $F_3$  и выбрать геометрические размеры, наиболее удовлетворяющие заданным условиям.
4. По силе  $F_1$  и  $F_2$  из таблицы определить деформации  $s_1$  и  $s_2$ .
5. Определить количество пружин в пакете. Определить свободную высоту пакета, высоту при рабочей, предварительной и максимальной деформации.

### Схемы сборки тарельчатых пружин в пакеты

В зависимости от необходимого хода сжатия тарельчатые пружины могут использоваться поодиночке или собираться в пакеты. Сборку пружин в пакете осуществляют при помощи направляющего стержня или фиксирующих разделительных колец. Значительным преимуществом изделий такого вида является возможность варьирования силовых и геометрических параметров пакета пружин в зависимости от схемы сборки.

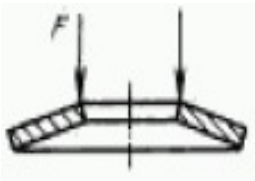
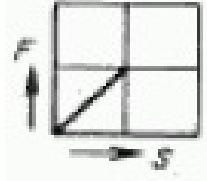
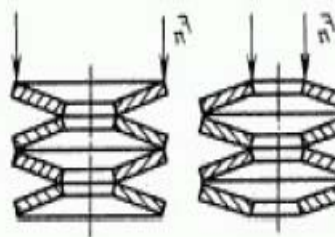
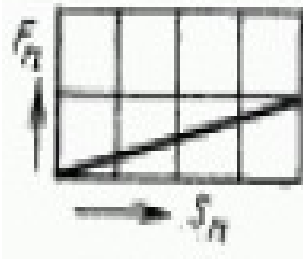
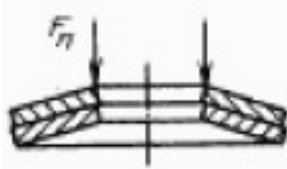

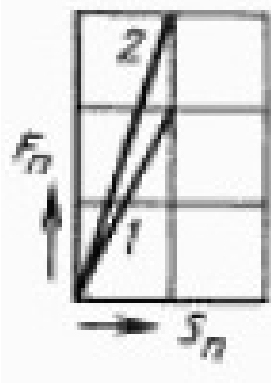
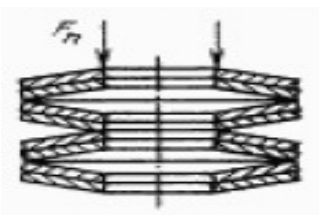

Основные схемы сборки пакета изделий следующие:

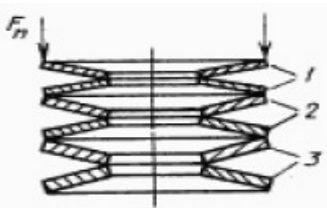
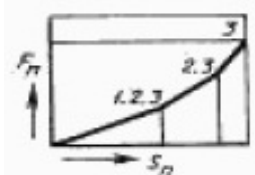
- одиночная;
- последовательная;
- параллельная;
- параллельно-последовательная;
- пакет с пружинами различной толщины.

Изменение характеристики «сила-деформация» в зависимости от схемы сборки пружин показано в табл. 3.



Таблица 3 – Схемы сборки тарельчатых пружин

Схема сборки	Параметр пакета пружин	Вид характеристики
1	2	3
<p>Одиночная</p> 	$F_3$ $s_3$ $l_0$	
<p>Последовательная</p> 	$F_{\text{пак}} = F_3$ $S_{\text{пак}} = ns_3$ $L_0 = nl_0$ $\Delta L_0 = n\Delta l_0$	
<p>Параллельная</p> <p>1. Двухпараллельная</p>  <p>2. Трехпараллельная</p> 	$F_{\text{пак}} = KF_3n_1$ $S_{\text{пак}} = s_3$ $L_0 = l_0 + (n_1 - 1)t$	
<p>Параллельно-последовательная</p> 	$F_{\text{пак}} = KF_3n_1$ $S_{\text{пак}} = ns_3$ $L_0 = n[l_0 + (n_1 - 1)t]$	

<p>Пружины различной толщины</p> 	$F_{\text{пак}} = F_3$ $S_{\text{пак}} = \sum_{i=1}^n s_{3i}$ $L_0 = \sum_{i=1}^n l_{0i}$	
--	---	---

Параметры пакета пружин в табл. 3 обозначены:

$F_{\text{пак}}$  – сила при максимальной деформации пакета;

$n$  – количество пружин при последовательной сборке;

$n_1$  – количество пружин при параллельной сборке;

$K$  – коэффициент, учитывающий сухое трение при параллельной сборке:

$K = 1,06$  при двухпараллельной сборке;

$K = 1,09$  при трехпараллельной сборке;

$K = 1,12$  при четырехпараллельной сборке;

$S_{\text{пак}}$  – максимальная деформация пакета пружин;

$L_0$  – высота пакета в свободном состоянии.

При ударных нагрузках (для погашения энергии) между тарелками иногда устанавливают шайбы, которые способствуют увеличению жесткости за счет сил трения, развиваемых при скольжении кромок тарелок по шайбам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко, Г.С. *Сопротивление материалов: учебник* / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка [и др.]. – Киев: “Вища школа”, 1986. – 755 с.
2. ГОСТ 3057-90. *Пружины тарельчатые. Общие технические условия*. Введен 01.07.91. – М: Изд-во стандартов, 1990. – 37с.
3. DIN 2093. *Disksprings*. 1992-01. – 19p.