

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКЕ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

¹Василевич Ю.В., ²Неумержицкая Е.Ю., ¹Беляцкая Л.Н., ³Скворцов К.Г.,
³Федотов Д.А

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Академия последипломного образования, Минск

³ОАО «Авангард», Сафоново, РФ

Пусть процесс изготовления изделия в форме тела вращения начинается с момента, когда наполнитель в виде ленты или ткани, пропитанный жидким связующим, наматывается с натяжением на оправку. Пропитка ткани может быть осуществлена предварительно или в процессе намотки. Если пропитка ткани осуществляется в процессе намотки, то одновременно с намоткой следует рассматривать процесс фильтрации связующего через наполнитель. При условии предварительной пропитки ткани обогрев ее осуществляется только через обогревающий ролик. Это недостаточно, чтобы связующее проявляло массовую миграцию по толщине полуфабриката. Процесс фильтрации следует рассматривать после окончания намотки при разогреве, когда полимерные смолы приобретают свойство текучести.

Полагаем, что материал полуфабриката состоит из двух фаз – упругого цилиндрически анизотропного наполнителя и связующего, способного фильтроваться в жидком состоянии через наполнитель. Кроме того, принимаются следующие допущения:

- 1) наполнитель и оправка предварительно нагреты до одной и той же температуры, неизменной до конца намотки и не влияющей на приобретение связующим свойства текучести;
- 2) рассматривается плоская осесимметричная задача;
- 3) изменение объема среды за счет сжимаемости связующего пренебрежимо мало по сравнению с изменением объема за счет его фильтрации через наполнитель;
- 4) изменение объема среды за счет сжатия материала наполнителя пренебрежимо мало по сравнению с изменением объема за счет более плотной упаковки его каркаса;
- 5) оправка непроницаема для связующего;
- 6) жесткость оправки существенно превышает жесткость полуфабриката.

Намотка нитью или тканью является одним из наиболее распространенных способов изготовления деталей (особенно имеющих форму тел вращения) из армированных пластиков. Рост толщины изделий и существенная анизотропия материала в состоянии переработки привлекли внимание к силовой стороне процесса и определяемым ею эффектам [1–3]. Эксперименты свидетельствуют о том, что система начальных напряжений окружных и радиальных во многом определяется величиной усилия натяжения и законом изменения этого усилия в процессе намотки. Путем изменения натяжения в процессе намотки можно в значительной степени регулировать величину и характер распределения этих напряжений [1, 4]. Рассматриваемый технологический прием представляется полезным, так как начальные напряжения могут быть весьма опасными. Особенно это относится к радиальным напряжениям: из-за малой прочности стеклопластиков на растяжение перпендикулярно волокнам они могут стать источником трещин в композиционном материале.

Можно выделить три наиболее важные группы намоточных изделий: тонкостенные оболочки (их толщина пренебрежимо мала по сравнению с радиусом), составные изделия и толстостенные элементы конструкций. Для тонкостенных оболочек важно

найти оптимальную схему армирования; для составных изделий определяющим является контактное давление на границе раздела, для толстостенных элементов конструкции кроме перечисленных проблем возникает проблема монолитности, тесно связанная с задачей управления эпюрами начальных радиальных σ_r^0 и окружных σ_θ^0 напряжений. Необходимо отметить, что полуфабрикат обладает очень низкой прочностью и жесткостью в радиальном направлении. Так, отношение модулей упругости вдоль и поперек волокон E_θ/E_r может быть больше 10^3 [5]. Создание «растущего тела» из такого материала путем послойной намотки связано с заметной сжимаемостью витков и, как следствие, неизбежной потерей и перераспределением предварительно заданного усилия натяжения N_0 .

Исследование изменения усилия натяжения материала при намотке требует решения вспомогательных задач: необходимо знать падение натяжения в витках на этапах намотки и в результате разогрева связующего перед полимеризацией. Для описания падения натяжения в витках в процессе намотки воспользуемся решением, полученным в [1, 2]. При рассмотрении этого этапа витки ленты, последовательно наматываемые друг на друга, заменены тонкими кольцами. Таким образом, задача рассматривается как осесимметричная и сводится к исследованию напряженного состояния системы из большого числа анизотропных тонких колец толщиной c , посаженных на оправку, а затем друг на друга, с натягом, равным натяжению ленты T при намотке.

Выражения для напряжений при намотке полуфабриката любой толщины с произвольным изменением усилия натяжения ленты можно записать в виде [2]

$$\sigma_r^* = \frac{1}{R_B} (\rho^{\beta_*-1} + \rho^{\beta_*+1}) \sum_{j=0}^n \frac{T(\rho_j)}{\rho_j^{\beta_*} + \rho_j^{-\beta_*}},$$

$$\sigma_\theta^* = \frac{T(\rho)}{c} - \frac{1}{R_B} (\rho^{\beta_*-1} + \rho^{\beta_*+1}) \sum_{j=0}^n \frac{T(\rho_j)}{\rho_j^{\beta_*} + \rho_j^{-\beta_*}}.$$
(1)

Здесь

$$\rho = \frac{r}{R_B}; \quad \rho_j = \frac{R_B + jc}{R_B}; \quad \beta_* = \sqrt{\frac{E_\theta^*}{E_r^*}}; \quad k = \frac{R_H}{R_B}; \quad R_H = R_B + nc,$$

r – текущий радиус; R_H, R_B – наружный и внутренний радиусы намотанного кольца; c – толщина ленты; E_θ^*, E_r^* – окружной и радиальный модули упругости кольца.

Учитывая, что толщина ткани c имеет достаточно малую величину, можно положить

$$c = dr \quad \text{и} \quad dp = \frac{dr}{R_B}.$$

С учетом этого зависимость (1) записывается следующим образом

$$\sigma_r^* = -(\rho^{\beta_*-1} + \rho^{\beta_*+1}) \frac{1}{c} \int_{\rho}^k \frac{T(\rho) d\rho}{(\rho^{\beta_*} + \rho^{-\beta_*})},$$

$$\sigma_\theta^* = \frac{T(\rho)}{c} - (\rho^{\beta_*-1} - \rho^{\beta_*+1}) \frac{1}{c} \int_{\rho}^k \frac{T(\rho) d\rho}{(\rho^{\beta_*} + \rho^{-\beta_*})}.$$
(2)

На втором этапе технологического процесса (при термообработке) полимерное связующее перед полимеризацией размягчается и фильтруется между волокнами. Это приводит к дополнительным перемещениям витков u^{**} . В работе [6] предложено рассматривать указанный процесс как уменьшение модуля в радиальном направлении (с E_r^* до E_r^{**}). Окружной модуль считается постоянным, т. е. $E_\theta^{**} = E_\theta^*$. При таком предпо-

ложении напряжения $\sigma_r^{**}, \sigma_\theta^{**}$ в кольце после разогрева и размягчения связующего можно связать с напряжениями в кольце после намотки (до размягчения связующего) $\sigma_r^*, \sigma_\theta^*$ следующим образом [7]

$$\begin{aligned}\sigma_r^{**} &= \sigma_r^* \frac{E_r^{**}}{E_r^*} + \frac{E_r^{**}}{R_B} \frac{du^{**}}{d\rho}, \\ \sigma_\theta^{**} &= \sigma_\theta^* + \frac{E_\theta^{**}}{R_B} \frac{u^{**}}{\rho}.\end{aligned}\quad (3)$$

Из условий равновесия под действием сил $\sigma_r^{**}, \sigma_\theta^{**}$ и сил $\sigma_r^*, \sigma_\theta^*$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_r^{**}}{d\rho} + \frac{\sigma_r^{**} - \sigma_\theta^{**}}{\rho} &= 0, \\ \frac{d\sigma_r^*}{d\rho} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\theta^*}{\rho} &= 0.\end{aligned}$$

следует уравнение для определения u^{**}

$$\frac{d^2 u^{**}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du^{**}}{d\rho} - \beta_{**} \frac{u^{**}}{\rho^2} = f(\rho) \psi R_B, \quad (4)$$

где

$$f(\rho) = \frac{\sigma_\theta^*}{\rho E_r^{**}}, \quad \beta_{**} = \sqrt{\frac{E_\theta^*}{E_r^{**}}}, \quad \psi = \frac{\beta_{**}^2 - \beta_*^2}{\beta_{**}^2}.$$

Выражая из второго уравнения (3) неизвестную функцию u^{**} , через σ_θ^{**} и σ_θ^*

$$u^{**} = (\sigma_\theta^{**} - \sigma_\theta^*) \frac{R_B \rho}{E_\theta^*}, \quad (5)$$

и используя (1), получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \sigma_\theta^*}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\sigma_\theta^*}{d\rho} + \frac{\sigma_\theta^*}{\rho^2} (1 - \beta_*^2) &= \\ = \frac{d^2 \sigma_\theta^{**}}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\sigma_\theta^{**}}{d\rho} + \frac{\sigma_\theta^{**}}{\rho^2} (1 - \beta_{**}^2).\end{aligned}\quad (6)$$

Теперь, если задан закон распределения напряжений σ_θ^{**} перед полимеризацией, можно найти соответствующее ему распределение напряжения до размягчения связующего σ_θ^* , а затем закон изменения натяжения $T(\rho)$ в процессе намотки, обеспечивающий заданное распределение напряжений σ_θ^* после ее окончания.

Процедура получения $T(\rho)$ такова: решается неоднородное дифференциальное уравнение (6) при граничных условиях $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^{**}$ при $\rho = 1$ и

$$\frac{\sigma_\theta^{**} - \sigma_\theta^*}{k} + \frac{d\sigma_\theta^{**}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^*}{d\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = k.$$

Второе граничное условие получено из того, что на наружной $\sigma_r^{**} = \sigma_r^* = 0$ поверхности должно быть. Отсюда из первого уравнения следует

$$\frac{du^{**}}{d\rho} = 0,$$

а из (5), дифференцируя его по ρ , получим второе граничное условие. Затем для найденного σ_θ^* из (13) решается второе уравнение из (2) с учетом граничного условия $T = \sigma_\theta^* \cdot c$ при $\rho = k$. Такое представление решения предусматривает отсутствие паде-

ния напряжения в последнем витке в результате намотки.

Уравнение (6) является уравнением Эйлера. Его решение представляется в виде суммы частного решения $\overline{\sigma_\theta^*}$ и общего решения $\widetilde{\sigma_\theta^*}$, соответствующего однородному уравнению. Последнее имеет вид

$$\widetilde{\sigma_\theta^*} = c_1 \cdot \rho^{\beta_*-1} + c_2 \cdot \rho^{-(\beta_*+1)}.$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий. Частное решение уравнения (6) можно найти методом вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим пример. Пусть в изделии, не снятом с оправки, все витки напряжены равномерно. Это означает, что $\sigma_\theta^{**} = A = const$. В этом случае частное решение уравнения (6) представляется следующим образом

$$\overline{\sigma_\theta^*} = A \cdot \frac{1 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2}.$$

Отсюда находим, что

$$\sigma_\theta^* = c_1 \cdot \rho^{\beta_*-1} + c_2 \cdot \rho^{-(\beta_*+1)} + A \cdot \frac{1 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2}.$$

Коэффициенты c_1 и c_2 найдены путем удовлетворения функции σ_θ^* граничным условиям. В итоге они равны

$$c_1 = \frac{A}{k^{\beta_*} + k^{-\beta_*}} \left(\frac{k}{\beta_*} + \frac{\beta_*^2 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2} \cdot e^{-\beta_*} \right),$$

$$c_2 = \frac{A}{k^{\beta_*} + k^{-\beta_*}} \left(\frac{\beta_*^2 - \beta_*^2}{1 - \beta_*^2} \cdot e^{-\beta_*} - \frac{k}{\beta_*} \right).$$

Решение второго уравнения (2) осуществляется следующим образом. Выполним дифференцирование правой и левой частей по ρ . В результате получим

$$\frac{dT(\rho)}{d\rho} - T(\rho) \left[\frac{(\beta_* - 1)\rho^{-2} - (\beta_* + 1)}{\rho^{-1} - \rho} - \frac{\rho^{-1} - \rho}{1 + \rho^{-2\beta_*}} \right] =$$

$$= c \cdot \frac{d\sigma_\theta^*}{d\rho} - \sigma_\theta^* \left[\frac{(\beta_* - 1)\rho^{-2} - (\beta_* + 1)}{\rho^{-1} - \rho} \right] = \Psi(\rho). \quad (7)$$

Решение уравнения (7) следует искать в виде суммы общего решения $\overline{T(\rho)}$ однородного уравнения и частного решения $\widetilde{T(\rho)}$. Для получения общего решения рассмотрим неопределенные интегралы вида

$$I_1 = \int \frac{\rho^{-2} dp}{\rho^{-1} - \rho} = \ln \rho \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$I_2 = \int \frac{dp}{\rho^{-1} - \rho} = \ln(\rho^2 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

$$I_4 = \int \frac{dp}{1 + \rho^{-2\beta_*}}, I_3 = \int \frac{\rho^{-1}}{1 + \rho^{-2\beta_*}} = \ln(\rho^{2\beta_*} + 1)^{\frac{1}{2\beta_*}}.$$

Последний интеграл является “неберущимся” интегралом. Однако его можно вычислить довольно точно приближенным методом. Для этого подынтегральное выраже-

ние представим в виде приближенной зависимости

$$\frac{\rho}{1 + \rho^{-2\beta_*}} \approx \frac{\rho^{-1}}{B + D\rho^{-2\beta_*}}. \quad (8)$$

Коэффициенты B и D найдем из условий того, что зависимость (8) превращается в равенство в точках $\rho = 1$ и $\rho = k$. В таком случае коэффициенты B и D будут равны

$$B = \frac{1 - (2n^2 - 1)n^{-2\beta_*}}{n^2(1 - n^{-2\beta_*})}; \quad D = \frac{2n^2 - 1 - n^{-2\beta_*}}{n^2(1 - n^{-2\beta_*})}.$$

В реальных конструкциях параметры n и β_* лежат в пределах:

$$1,01 < \frac{R_H}{R_B} = k < 1,1 \quad \text{и} \quad 10 < \beta_* < 80.$$

Для оценки вносимой погрешности построены графики левой и правой частей соотношения (8). Оказалось, что разность точного и приближенного значений не превышает 8 %, причем β_* в указанных пределах изменения параметров практически не влияет на точность приближения. Только для сравнительно толстых колец ошибка достигает 8 %. После интегрирования ошибка приближения уменьшается примерно вдвое.

В результате с учетом зависимости (8) решение уравнения (7) можно представить в виде

$$T(\rho) = G \cdot \varphi(\rho) - \int_{\rho}^k \frac{\psi(\rho) d\rho}{\varphi(\rho)}, \quad (9)$$

Где

$$\varphi(\rho) = \left[\rho \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right]^{(\beta_* - 1)} (\rho^2 - 1)^{\frac{(\beta_* + 1)}{2}} (\rho^{2\beta_*} + 1)^{\frac{1}{2\beta_*}} \left(\rho^{\beta_*} + \frac{D}{B} \right)^{\frac{1}{2\beta_* B}}.$$

Здесь в (9) первое слагаемое представляет общее решение однородного уравнения, а второе слагаемое – частное решение, которое получено методом вариации произвольной постоянной. Постоянная G определяется из граничного условия и равна

$$G = c \cdot \left. \frac{\sigma_{\theta}^*(\rho)}{\varphi(\rho)} \right|_{\rho=k}.$$

Рассматриваемый технологический прием – введение программированной намотки, представляется полезным, так как начальные напряжения могут быть весьма опасными. Особенно это относится к радиальным напряжениям из-за малой прочности стеклопластиков на растяжение перпендикулярно волокнам, так как они могут стать источником трещин.

Выводы

Разработанная теория для создания программы намотки получена в предположении линейной упругости композиционного материала на всех этапах намотки. Такая постановка задачи учитывает важнейший фактор – существенную анизотропию стеклопластиков в состоянии переработки. Это позволяет использовать полученные зависимости в качестве первого приближения при расчете и изготовлении толстостенных осесимметричных намоточных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарнопольский, Ю.М. Изменение усилия натяжения при намотке изделий из стеклопластиков / Ю.М.Тарнопольский, Г.Г. Портнов // *Мех. полимеров.* – 1966. – № 2. – С. 27.
2. Портнов, Г.Г. Особенности механики намотки стеклопластиков. – Кандидатская диссертация. – Рига, 1967. – С. 143.
3. Болотин, В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов / В.В. Болотин // *Механика полимерных материалов.* – 1984. – № 2. – С. 18.
4. Тарнопольский, Ю.М. Проблемы механики намотки толстостенных конструкций из композитов / Ю.М.Тарнопольский // *Механика композитных материалов.* – 1992. – №5. – С. 61.
5. Бейль, А.И. Устранение начальных термических напряжений в намоточных изделиях из композитов изменением узла намотки по толщине / А.И.Бейль [и др.] // *Механика композит. материалов.* – 1980. – № 6.– С. 10.
6. Тарнопольский, Ю.М. Программированная намотка стеклопластиков / Ю.М. Тарнопольский, Г.Г. Портнов // *Механика полимеров.* – 1970. – № 1. – С. 48.
7. Бидерман, В.Л. Определение остаточных напряжений при изготовлении колец из стеклопластиков / В.Л. Бидерман [и др.] // *Механика полимеров.* – 1969. – № 5. – С. 89.