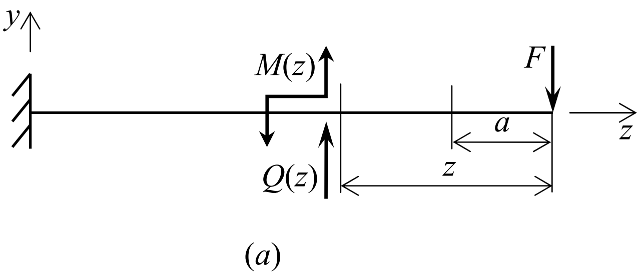
УДК 539.3

СТЕРЖЕНЬ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Дудяк А.И., Хвасько В.М., Марченко И.С.
Белорусский национальный технический университет, Минск

Поперечным изгибом называется такой вид деформации, когда в поперечных сечениях стержня возникает не только изгибающий момент *M(z)*, но и поперечная сила *Q(z)*. Изгибающий момент в сечении представляет собой равнодействующую элементарных моментов от действия нормальных напряжений σ, а поперечная сила – равнодействующую касательных напряжений τ, действующих в плоскости сечения [1].

Стержнем равного сопротивления будем называть стержень, у которого во всех поперечных сечениях нормальные напряжения будут одинаковы и равны допускаемому напряжению. Установим закон изменения площади поперечного сечения стержня по его длине. Для этого рассмотрим стержень с защемленным концом прямоугольного поперечного сечения, нагруженного сосредоточенной силой *F* (рис. 1).



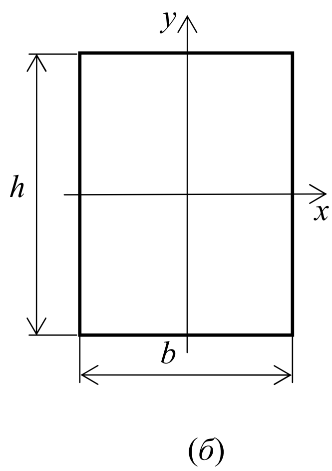


Рис. 1. Схема нагружения стержня (а) и поперечное сечение (б)

Для первого случая примем, что ширина сечения b является постоянной величиной по всей длине стержня, а высота сечения h может изменяться по его длине. Изгибающий момент в сечении на расстоянии z от точки приложения силы F:

$$M(z) = F \cdot z.$$

Согласно [1–3] условие прочности для такого стержня можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M(z)}{W(x)} = \frac{F \cdot z}{W(x)} \le [\sigma], \qquad (1)$$

где $W(x) = \dfrac{b\big(h(z)\big)^2}{6}$ – момент сопротивления сечения;

$h(z)$ – высота сечения в рассматриваемой области, которая является функцией длины.

Подставив значение $W(x)$ в формулу (1) получим

$$\sigma_{\max} = \frac{6F \cdot z}{b\left(h(z)\right)^2} \le [\sigma]. \tag{2}$$

Из формулы (2) получаем значение высоты сечения стержня в зависимости от перемещений z:

$$h(z) = \sqrt{\frac{6F \cdot z}{b \cdot [\sigma]}}. \tag{3}$$

Анализируя формулу (3), приходим к выводу, если z стремится к нулю, то и высота сечения $h(z)$ также стремится к нулю. Однако при незначительной высоте сечения стержня в зоне приложения силы F может происходить смятие или сдвиг материала стержня в результате действия касательных напряжений [2].

Условие прочности на сдвиг можно представить, используя формулу Журавского [1–3]:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_x^{отс}}{b \cdot I_x} \le [\tau], \tag{4}$$

где $Q = F$ – поперечная сила в окрестностях приложения силы F;

$S_x^{отс} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$ – статический момент площади сечения, лежащей выше нейтральной линии Ox;

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции сечения.

Подставив выражения $S_x^{\text{отс}}$ и I_x в формулу (4), получим:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} \le [\tau]. \tag{5}$$

Из формулы (5) определим высоту сечения в зоне приложения сосредоточенной силы F:

$$h \ge \frac{3Q}{2b \cdot [\tau]}. \tag{6}$$

Очевидно, что с удалением сечения от точки приложения силы F, нормальные напряжения возрастают и достигают допускаемого значения на некоторой длине $z = a$ пи постоянной высоте сечения. В этом случае условие прочности (2) можно представить в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{6F \cdot a}{b \cdot h^2} \le [\sigma]. \tag{7}$$

Из неравенства (7) определяют длину части стержня, когда в сечении нормальные напряжения достигают допускаемых значений:

$$a = \frac{b \cdot h^2 \cdot [\sigma]}{6F}. \tag{8}$$

Когда длина участка стержня становится $z > a$, то высота поперечного сечения $h(z)$ увеличивается и определяется по формуле (3).

Во втором случае примем, что высота сечения h является постоянной величиной по всей длине стержня, а ширина сечения b может изменяться в зависимости от длины участка такого стержня. Тогда условие прочности представим в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{6F \cdot z}{b(z) \cdot h^2} \le [\sigma]. \tag{9}$$

Из формулы (9) получим выражение для определения ширины сечения стержня в зависимости от переменной z:

$$b(z) = \frac{6F \cdot z}{h^2 \cdot [\sigma]}. \tag{10}$$

Из условия прочности на сдвиг (5) ширина сечения стержня в окрестности приложения силы F будет

$$b = \frac{3Q}{2h \cdot [\tau]}. \tag{11}$$

Длина участка стержня $z = a$, где нормальные напряжения достигают допускаемого значения, определяется из формулы (8). Когда длина участка становится $z > a$, то ширина сечения $b(z)$ определяется из формулы (10).

Пример. На двухопорную балку действует сосредоточенная нагрузка F = 20 кН (рис. 2). Материал балки – Сталь 3, $[\sigma]$ = 160 МПа, $[\tau]$ = 100 МПа. Требуется подобрать изменяющиеся поперечные сечения по длине балки таким образом, чтобы она была равнопрочной.

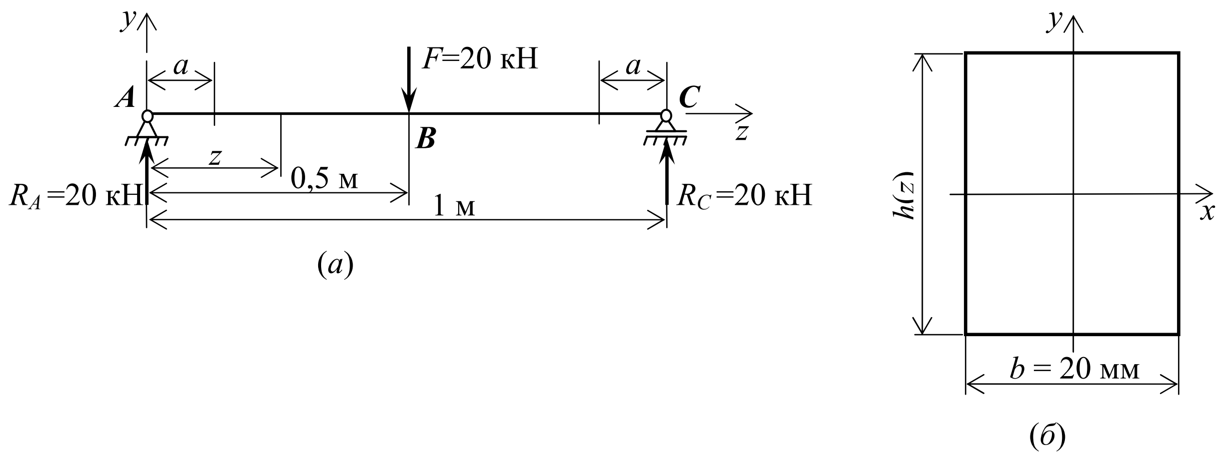


Рис. 2. Схема нагружения балки (а) и ее прямоугольное поперечное сечение (б)

При решении задачи принимаем, что ширина сечения b = 20 мм является величиной постоянной по всей длине балки. Следует подобрать размеры высоты сечения в зависимости от длины рассмотренного сечения.

По формуле (6) определяем высоту сечения в зонах опорах A и C:

$$h = \frac{3Q}{2b \cdot [\tau]} = \frac{3R_A}{2b \cdot [\tau]} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 100} = 7{,}5 \text{ мм.}$$

В соответствии с формулой (8) горизонтальный участок длиной $z = a$, где напряжения будут достигать допускаемых значений, будет равен:

$$a = \frac{b \cdot h^2 \cdot [\sigma]}{6R_A} = \frac{20 \cdot 7{,}5^2 \cdot 160}{6 \cdot 10 \cdot 10^3} = 3 \text{ мм.}$$

При длине участка от зоны *A* до зона *B* (при $z > a$) высоты сечения определяются из выражения (3):

$$h(z) = \sqrt{\frac{6R_A \cdot z}{b \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10 \cdot 10^3}{20 \cdot 160} \cdot z}.$$

Используя последнее выражение для $h(z)$ были получены числовые значения для $5 \le z \le 50$. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Результаты расчетов высоты сечения в зависимости от длины балки

z, мм	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$h(z)$, мм	9,68	13,69	16,77	19,36	21,65	23,71	25,62	27,39	29,05	30,62

В связи с симметричностью нагрузки высота сечения $h(z)$ от зоны *C* до зоны *A* будет изменяться аналогично расчетам, приведенным в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – С. 157–187.

2. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко [и др.]; отв. ред. Г.С. Писаренко. – 2-е изд., перераб и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – С. 249–257.

3. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: учеб. / М.Д. Подскребко. – Минск: Высшая школа, 2007. – С. 296–318.