

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Захарчук Ю.В.

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

Известно, что при изгибе тонкостенных элементов конструкций, таких как пластины, балки, оболочки, наиболее рациональными являются композитные трехслойные структуры. Исследованию их деформирования и колебаний посвящены многочисленные работы. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографиях [1, 2]. Деформирование пластин и оболочек под действием квазистатических нагрузок исследовалось в работах [3, 4], динамических – в статьях [5–8].

Достаточно распространенной расчетной моделью трехслойных конструкций является круглая пластина с несжимаемым наполнителем. Учет сжимаемости наполнителя позволяет более адекватно описать деформирование [9–11]. Следует отметить, что деформирование трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем исследовалось при квадратичном изменении радиальных перемещений и линейном изменении прогиба по толщине наполнителя [12–14]. Это приводит к определенным математическим трудностям при постановке и решении соответствующих краевых задач. Здесь вводится новая модель деформирования наполнителя, в которой радиальные перемещения и прогиб изменяются по толщине линейно.

**1. Постановка краевой задачи.** К наружной поверхности упругой круговой трехслойной пластины (рис. 1) приложена осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка  $q = q(r)$ . Легкий срединный слой пластины перераспределяет усилия между внешними несущими слоями и сжимается по толщине. Принята гипотеза о линейном распределении перемещений по толщине наполнителя. Его нормаль к срединной плоскости изменяет свою длину и поворачивается на дополнительный угол  $\psi(r)$ , причем на контуре пластины ( $r = r_0$ )  $\psi = 0$ . Для несущих слоев с толщинами  $h_1 \neq h_2$  справедливы гипотезы Кирхгофа. Деформации считаем малыми.

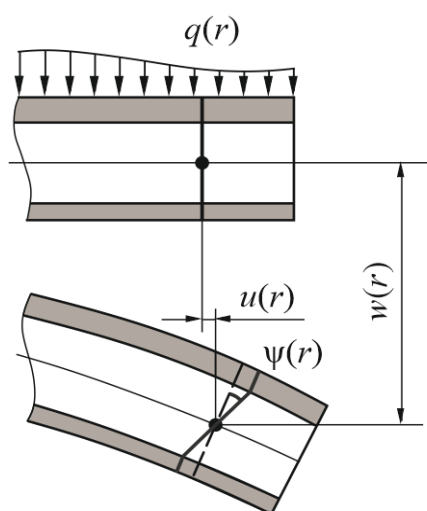


Рис. 1. Расчетная схема круговой трехслойной пластины

Цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  связана со срединной плоскостью наполнителя. Индекс  $k = 1; 2$  обозначает номер несущего слоя; 3 – наполнитель ( $h_3 = 2c$ ).

Через  $w(r)$  обозначен прогиб нижнего несущего слоя,  $u(r)$  – продольное перемещение срединной плоскости заполнителя,  $v(r)$  – функция обжатия заполнителя, которая принимается постоянной по толщине.

Радиальные перемещения  $u^{(k)}(r, z)$  и прогибы  $w^{(k)}(r, z)$  в слоях выражаются через четыре искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$  следующими соотношениями:

- в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \quad w^{(1)} = w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}, \quad w^{(2)} = w(r) \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

- в заполнителе 3

$$u_r^{(3)}(r, z) = u + z\psi - z\left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2}\right] - \frac{c}{2}v_{,r}, \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z + c) \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

С помощью соотношений Коши и перемещений (1) получены деформации в слоях:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c),$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - z\left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2}\right] - \frac{c}{2}v_{,rr},$$

$$\varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r}\left[u + z\psi - z\left(w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2}\right) - \frac{c}{2}v_{,r}\right], \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\psi + \frac{z}{2c}v_{,r}\right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c} \quad (-c \leq z \leq c). \quad (2)$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$  выражены перемещения (1) и деформации (2) в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем. Радиальные  $\varepsilon_r^{(k)}$ , окружные  $\varepsilon_\phi^{(k)}$  и сдвиговые  $\varepsilon_{rz}^{(3)}$  деформации изменяются линейно по толщине слоев. Деформация обжатия  $\varepsilon_z^{(3)}$  по толщине не изменяется.

С помощью компонентов тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \phi$ ) введены интенсивности обобщенных внутренних силовых факторов в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}),$$

$$D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}M_\alpha^{(3)} + \frac{c}{2}T_\alpha^{(3)}, \quad (3)$$

где интегралы берутся по толщине  $k$ -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где  $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$  – суммарная вариация работы внешних сил  $\delta A_1$  и контурных усилий  $\delta A_2$ ;  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет ( $dS = r dr d\varphi$ )

$$\delta A_1 = \iint_S q \delta w_{,r} r dr d\varphi = \iint_S q (\delta w + \delta v) r dr d\varphi. \quad (4)$$

Вариация работы приложенных к торцам пластины контурных усилий:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + D_r^0 \delta v_{,r}) d\varphi. \quad (5)$$

Вариация работы сил упругости не учитывает в случае легкого заполнителя пластины работу нормальных  $\sigma_z^{(3)}$  и касательных  $\sigma_{rz}^{(3)}$  напряжений:

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi, \quad (6)$$

где двойной интеграл берется по всей срединной поверхности заполнителя  $S$ .

Вариации перемещений в слоях следуют из (1), деформаций – из (2). Используя их можно преобразовать интегралы по толщине слоев, входящие в виртуальную работу сил упругости (6). Для радиальных составляющих получим

$$\int_{h_1} \sigma_r^{(1)} \delta \varepsilon_r^{(1)} dz = \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} [\delta u_{,r} + c \delta \psi_{,r} - z (\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr})] dz = T_r^{(1)} \delta u_{,r} + c T_r^{(1)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(1)} \delta w_{,rr} - M_r^{(1)} \delta v_{,rr}.$$

Аналогично

$$\int_{h_2} \sigma_r^{(2)} \delta \varepsilon_r^{(2)} dz = T_r^{(2)} \delta u_{,r} - c T_r^{(2)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(2)} \delta w_{,rr},$$

$$\int_{h_3} \sigma_r^{(3)} \delta \varepsilon_r^{(3)} dz = T_r^{(3)} \delta u_{,r} + M_r^{(3)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(3)} \delta w_{,rr} - \frac{1}{2} M_r^{(3)} \delta v_{,rr} - \frac{c}{2} T_r^{(3)} \delta v_{,rr},$$

$$\int_{h_1} \sigma_\varphi^{(1)} \delta \varepsilon_\varphi^{(1)} dz = \frac{1}{r} (T_\varphi^{(1)} \delta u + c T_\varphi^{(1)} \delta \psi - M_\varphi^{(1)} \delta w_{,r} - M_\varphi^{(1)} \delta v_{,r}),$$

$$\int_{h_2} \sigma_\varphi^{(2)} \delta \varepsilon_\varphi^{(2)} dz = \frac{1}{r} (T_\varphi^{(2)} \delta u - c T_\varphi^{(2)} \delta \psi - M_\varphi^{(2)} \delta w_{,r}),$$

$$\int_{h_3} \sigma_\varphi^{(3)} \delta \varepsilon_\varphi^{(3)} dz = \frac{1}{r} \left( T_\varphi^{(3)} \delta u + M_\varphi^{(3)} \delta \psi - M_\varphi^{(3)} \delta w_{,r} - \frac{1}{2} M_\varphi^{(3)} \delta v_{,r} - \frac{c}{2} T_\varphi^{(3)} \delta v_{,r} \right).$$

После необходимых преобразований имеем

$$\delta W = \iint_S \left[ T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} - D_r \delta v_{,rr} + \frac{1}{r} (T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \psi - M_\varphi \delta w_{,r} - D_\varphi \delta v_{,r}) \right] r dr d\varphi, \quad (7)$$

где интенсивности обобщенных силовых факторов  $T_\alpha, M_\alpha, H_\alpha, D_\alpha$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) введены соотношениями (3).

Полученное выражение вариации потенциальной энергии деформации (7) проинтегрировано в полярной системе координат. Для этого подынтегральное выражение было предварительно разбито на два интеграла: в первом вынесена за скобку операция дифференцирования, во втором сгруппированы слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях.

$$\begin{aligned} \delta W = \int_0^{2\pi} \left\{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi + \left[ (r M_r)_{,r} - M_\varphi \right] \delta w + \left[ (r D_r)_{,r} - D_\varphi \right] \delta v - r M_r \delta w_{,r} - \right. \\ \left. - r D_r \delta v_{,r} \right\} d\varphi - \int \int_{r, \varphi} \left\{ \left[ (r T_r)_{,r} - T_\varphi \right] \delta u + \left[ (r H_r)_{,r} - H_\varphi \right] \delta \psi + \left[ (r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r} \right] \delta w + \right. \\ \left. + \left[ (r D_r)_{,rr} - D_{\varphi,r} \right] \delta v \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

В соответствии с принципом Лагранжа должно выполняться равенство полученного выражения и работы внешних и контурных усилий (4), (5) при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда получена система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q. \end{cases} \quad (8)$$

На контуре пластины  $r = r_0$  должны выполняться силовые условия:

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = 0, \quad D_r = D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) = 0.$$

Для выражения обобщенных внутренних усилий (3) через перемещения использован закон Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = s_\alpha^{(k)} + \sigma^{(k)}, \quad (9)$$

где  $s_\alpha^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)}$ ,  $\vartheta_\alpha^{(k)} = \varepsilon_\alpha^{(k)} - \varepsilon^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)})$ , ( $\alpha = r, \varphi$ ;  $k = 1, 2, 3$ );  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев ( $k = 1, 2, 3$ ).

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в (9) будут

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(k)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}), \quad \vartheta_r^{(k)} = \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)}, \\ \vartheta_\varphi^{(k)} &= \varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)} \quad (k = 1, 2); \\ \varepsilon^{(3)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \vartheta_r^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \quad \vartheta_\varphi^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}.\end{aligned}\quad (10)$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через деформации (10) следующим образом:

$$\sigma_r^{(k)} = 2G_k \vartheta_r^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = \left(K_k + \frac{4}{3}G_k\right) \varepsilon_r^{(k)} + \left(K_k - \frac{2}{3}G_k\right) \varepsilon_\varphi^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_r^{(k)} + K_k^- \varepsilon_\varphi^{(k)}, \quad (11)$$

$$\sigma_\varphi^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_\varphi^{(k)} + K_k^- \varepsilon_r^{(k)} \quad (k = 1, 2); \quad \sigma_r^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_r^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \sigma_\varphi^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_\varphi^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}),$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.$$

С помощью соотношений (9), (10), (11) были выражены обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$ . После подстановки их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (8), была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая перемещения в круглой трехслойной пластине с легким сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned}L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_3 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &= -q,\end{aligned}\quad (12)$$

$$L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{2} K_3^- \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) = -q.$$

Здесь коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2$  (оператор Бесселя),  $L_3$  определены соотношениями:

$$\begin{aligned}a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+, \quad a_4 = h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + c^2 K_3^+, \\ a_5 &= c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad a_6 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_7 &= c \left[ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+ \right], \quad a_8 = h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_9 &= h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{c^3}{3} K_3^+, \quad a_{10} = h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,\end{aligned}$$

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача замыкается добавлением к (12) силовых или кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (13)$$

**2. Решение краевой задачи.** Проведя необходимые преобразования в системе (12), приходим к следующей системе уравнений

$$\psi = -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q) - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) + \frac{C_1 r}{4a_6} (2 \ln r - 1) + C_3 \frac{r}{2} + C_4 \frac{1}{r},$$

$$u = b_1 v_{,r} + (b_2 + b_3) L_3^{-1}(q) - \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) (b_2 C_1 + b_3 C_2) + C_5 \frac{r}{2} + C_6 \frac{1}{r},$$

$$w = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u \, dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_3^{-1}(q) \, dr + \\ + \frac{C_1 a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12},$$

$$L_2(v_{,r}) + \beta^2 v_{,r} = q_1. \quad (14)$$

Здесь  $L_3^{-1}$  – линейный интегральный оператор, обратный соответствующему дифференциальному оператору (12)

$$L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f \, dr \, dr \, dr;$$

коэффициенты

$$b_1 = \frac{d_2 d_7 - d_3 d_6}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \quad b_2 = \frac{d_4 d_7 - d_3 d_8}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \quad b_3 = \frac{d_3 d_9}{d_1 d_7 - d_3 d_5},$$

$$d_1 = (a_1 a_6 - a_2 a_3) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_2 a_6 - a_3 a_5) (a_3 a_6 - a_2 a_8),$$

$$d_2 = (a_4 a_6 - a_2 a_9) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_6 a_7 - a_5 a_9) (a_3 a_6 - a_2 a_8), \quad d_3 = a_6 (a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-,$$

$$d_4 = a_2 (a_6^2 - a_5 a_8) - a_5 (a_3 a_6 - a_2 a_8), \quad d_5 = (a_4 a_6 - a_3 a_7) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_2 a_6 - a_3 a_5) (a_6 a_9 - a_7 a_8),$$

$$d_6 = (a_6 a_{10} - a_7 a_9) (a_6^2 - a_5 a_8) - (a_6 a_7 - a_5 a_9) (a_6 a_9 - a_7 a_8), \quad d_7 = \frac{a_6 c}{2} (a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-,$$

$$d_8 = a_7(a_6^2 - a_5a_8) - a_5(a_6a_9 - a_7a_8), \quad d_9 = a_6(a_6^2 - a_5a_8), \quad \beta^2 = \frac{d_3d_5 - d_1d_7}{d_2d_5 - d_1d_6};$$

приведенная нагрузка

$$q_1 = \frac{1}{r} \frac{d_4d_5 - d_1d_8 + d_1d_9}{d_1d_6 - d_2d_5} \int q r dr - \frac{1}{r} (p_1C_1 + p_2C_2), \quad p_1 = \frac{d_4d_5 - d_1d_8}{d_1d_6 - d_2d_5}, \quad p_2 = \frac{d_1d_9}{d_1d_6 - d_2d_5}.$$

Таким образом, функция сжимаемости должна удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка (14)<sub>4</sub>. Уравнение сводится к неоднородному уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 v_{,r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{,r}}{dr} - \frac{1}{r^2} v_{,r} + \beta^2 v_{,r} = q_1. \quad (15)$$

Рассмотрим процедуру решения полученного уравнения. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (15), имеет вид

$$r^2 \frac{d^2 v_{,r}}{dr^2} + r \frac{dv_{,r}}{dr} + (r^2 \beta^2 - 1) v_{,r} = 0. \quad (16)$$

Его решение  $v_{0,r}$  будет [15]

$$v_{0,r} = C_7 J_1(\beta r) + C_8 Y_1(\beta r), \quad (17)$$

где  $J_1(\beta r)$ ,  $Y_1(\beta r)$  – функции Бесселя первого и второго рода (функция Неймана) первого порядка соответственно.

Частное решение  $v_{p,r}$  уравнения (15) можно построить, используя два независимых решения из (17):

$$v_{p,r} = Y_1(\beta r) \int \frac{J_1(\beta r) q_1(r)}{W} dr - J_1(\beta r) \int \frac{Y_1(\beta r) q_1(r)}{W} dr,$$

где  $W$  – определитель Вронского, который в нашем случае

$$W \{J_1, Y_1\} = Y_{1,r} J_1 - J_{1,r} Y_1 = \frac{2}{\pi r}.$$

В результате частное решение будет

$$v_{p,r}(r) = \frac{\pi}{2} \left( Y_1(\beta r) \int_0^r J_1(\beta r) q_1(r) r dr - J_1(\beta r) \int_0^r Y_1(\beta r) q_1(r) r dr \right), \quad (18)$$

причем  $v_{p,r}(0) = 0$ , что обеспечивается вырождающимся переменным верхним пределом ( $r = 0$ ) в интегралах.

Искомое решение уравнения (15) выпишем в виде суммы общего решения однородного уравнения (16) и частного решения (18). В результате

$$v_{,r} = C_7 J_1(\beta r) + C_8 Y_1(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left( Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr - J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr \right).$$

Проинтегрировав, получим выражение для функции сжимаемости  $v(r)$ :

$$v = -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left( \int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9.$$

Остальные перемещения вычисляются последовательно по формулам (14).

Следует отметить, что для сплошных круглых пластин из условия ограниченности решения в начале координат следует положить  $C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{11} = 0$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T19PM-089).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
2. Hohe, J. Nonlinear Sandwich Shell Theory Accounting for Transverse Core Compressibility / J. Hohe, L. Librescu // PAMM, the Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2003. – Vol. 2. – P. 158–159. org/DOI: 10.1002/pamm.200310064
3. Бадриев, И.Б. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем / И.Б. Бадриев, М.В. Макаров, В.Н. Паймушин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
4. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 8. – P. 945–952.
5. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonant loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.
6. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation/ E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, N 1. – P. 86–93.
7. Starovoitov, E.I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, N 5. – P. 561–570.
8. Кондратов, Д.В. Гидроупругие колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости / Д. В. Кондратов, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXV Международного симпозиума имени А. Г. Горшкова, Вятчи, 18–22 марта 2019 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – М. : ООО «ТРП», 2019. – Т.1 – С. 129–130.
9. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4(33). – С. 53–57.
10. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации : сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т транспорта. – Гомель, 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.
11. Захарчук, Ю.В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27; URL: mathmod.esrae.ru/18-69 (дата обращения: 24.10.2019).



12. Старовойтов, Э.И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.

13. Захарчук, Ю. В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

14. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.