

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБОВ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

д. ф.-м. н. Яровая А. В., асп. Поддубный А. А.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

В промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении, при строительстве и восстановлении искусственных сооружений на железных и автомобильных дорогах широко используются слоистые, в том числе трехслойные элементы конструкций. Среди них достаточно часто встречаются балки и плиты, контактирующие с упругим основанием. Многочисленные исследования показывают, что в процессе их эксплуатации по ряду причин возможно появления зазора между конструкцией и основанием. При этом происходит изменение расчетной схемы конструкции и ее напряженно-деформированного состояния, что в ряде случаев приводит к преждевременному разрушению.

Вместе с тем принятые в настоящее время методы расчета балок и плит на упругом основании часто не учитывают неполный контакт конструкции и основания. Поэтому теоретические и экспериментальные исследования, направленные на совершенствование методов расчета элементов конструкций на упругом основании, позволяющие увеличить их долговечность и снизить затраты на содержание и ремонт, являются актуальными.

Статическое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовано в [1–3]. В работе [3] рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием локальных нагрузок с использованием разрывных функций Хевисайда и Дирака. В данной статье рассмотрен изгиб подобной балки с учетом полного или частичного опирания на упругое основание. Решения получены отдельно для трех участков, а затем «сшиты» с использованием условий равенства перемещений и усилий на границах. Для подтверждения адекватности полученных результатов был проведен собственный эксперимент.

Расчетная схема балки. Рассматривается прямоугольная трехслойная балка длиной l и размерами поперечного сечения $h \times b_0$ (рисунок 1). Наружные слои являются несущими, они тонкие и выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный толстый заполнитель разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте балки и обеспечивает их совместную работу.

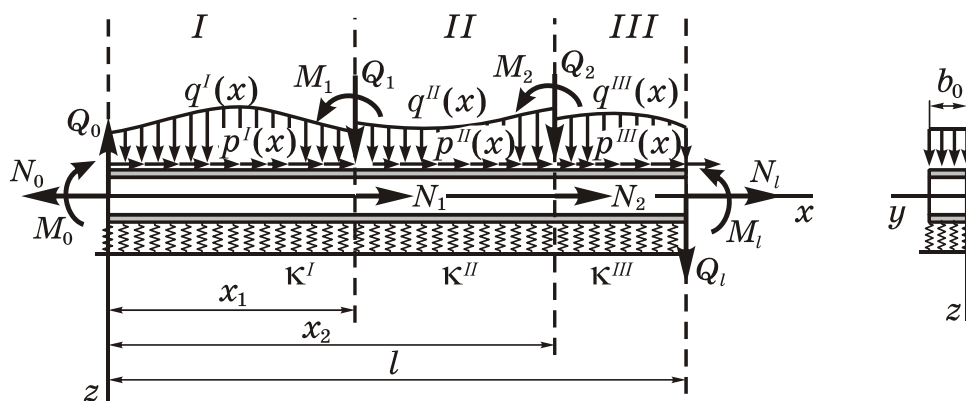


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной балки, частично или полностью опирающейся на упругое основание

Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью заполнителя. Ось x направлена вдоль балки, ось z – вниз. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси z , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а заполнитель – третьим (см. рисунок 1). Номер слоя обозначен индексом k ($k = 1, 2, 3$).

На верхний внешний слой балки действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси y . На торцах балки (при $x = 0$ и $x = l$) действуют сосредоточенные силы и моменты N_0, Q_0, M_0 и N_l, Q_l, M_l . К сечениям 1 ($x = x_1$) и 2 ($x = x_2$) приложены усилия N_1, Q_1, M_1 и N_2, Q_2, M_2 .

По длине балки выделим три участка I ($0 \leq x \leq x_1$), II ($x_1 \leq x \leq x_2$), III ($x_2 \leq x \leq l$). Обозначим: $p^n(x)$, $q^n(x)$, Pa – продольная и поперечная распределенные нагрузки на n -м участке ($n = I, II, III$); h_1^n , h_2^n , c^n – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина толщины заполнителя на n -м участке. Таким образом, нагрузки на каждом из участков могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Балка опирается на участки упругого основания различной жесткости, через κ^n обозначен коэффициент жесткости упругого основания на n -м участке. Если на одном или двух участках основание отсутствует, то необходимо принять нулевым соответствующий коэффициент жесткости.

Основные гипотезы. Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной; в несущих слоях нормаль остается перпендикулярной к деформированной оси балки; в заполнителе за счет сдвига она поворачивается на дополнительный угол.

Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Материалы слоев в общем случае считаются ортотропными, проявляют упругие свойства, для них справедлив закон Гука.

Искомые функции. Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомых величин принимаются функции $w^n(x)$, $u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на n -м участке.

В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений:

$$\begin{aligned} w^I(x_1) = w^{II}(x_1); \quad w^{II}(x_2) = w^{III}(x_2); \quad u^I(x_1) = u^{II}(x_1); \quad u^{II}(x_2) = u^{III}(x_2); \quad \psi^I(x_1) = \psi^{II}(x_1); \\ \psi^{II}(x_2) = \psi^{III}(x_2); \quad w'_{,xx}(x_1) = w'_{,xx}(x_1); \quad w'_{,xx}(x_2) = w'_{,xx}(x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Если на торцах балки предусмотрены жесткие диафрагмы, которые препятствуют повороту нормали в заполнителе, то

$$\psi^I(0) = 0; \quad \psi^{III}(l) = 0. \quad (2)$$

что может служить граничными условиями. Если же диафрагмы на торцах не предусмотрены, то углы сдвига в заполнителе для торцевых сечений необходимо учитывать.

Модель упругого основания. Для описания действия упругого основания на n -ом участке используется модель Винклера, согласно которой реакция основания $q_R^n(x)$ пропорциональна прогибу $w^n(x)$ и направлена в противоположную сторону $q_R^n(x) = \kappa^n w^n(x)$.

Перемещения, деформации и напряжения. В направлении оси x перемещения $u_x^{(k)n}(x, z)$ для каждого из слоев выражаются с использованием введенных гипотез через три искомые функции зависимостями:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)n} &= u^n + c\psi^n - zw'_{,x} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n); \\ u_x^{(2)n} &= u^n - c\psi^n - zw'_{,x} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\ u_x^{(3)n} &= u^n + z\psi^n - zw'_{,x} \quad (-c^n \leq z \leq c^n), \end{aligned} \quad (3)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Так как слои несжимаемы по толщине, то в направлении оси z перемещения точек балки равны прогибу срединной плоскости заполнителя: $u_z^{(k)n} = w^n$. В направлении оси y перемещения отсутствуют: $u_y^{(k)n} = 0$.

С помощью соотношений Коши и выражений для перемещений (3) в каждом слое определяются компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_x^{(1)n} = u'_{,x} + c\psi'_{,x} - zw''_{,xx} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n);$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(2)n} &= u^n,{}_x - c\Psi^n,{}_x - zW^n,{}_{,xx} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\
\varepsilon_x^{(3)n}(x, z) &= u^n,{}_x + z\Psi^n,{}_x - zW^n,{}_{,xx} \quad (-c^n \leq z \leq c^n); \\
\varepsilon_{xz}^{(1)n} = \varepsilon_{zx}^{(1)n} &= 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)n} = \varepsilon_{zx}^{(2)n} = 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)n} = \varepsilon_{zx}^{(3)n} = \frac{1}{2}\Psi^n; \quad \varepsilon_z^{(k)n} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Из компонент тензора напряжений ненулевыми являются $\sigma_x^{(k)n}$ и $\sigma_{xz}^{(3)n} = \sigma_{zx}^{(3)n}$ ($k=1, 2, 3$ – номер слоя; $n = I, II, III$ – номер участка).

Внутренние силы и моменты. Внутренние усилия для n -го участка вводятся в виде интегралов по толщине каждого слоя:

$$\begin{aligned}
N^{(1)n}(x) &= b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} dz; \quad M^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} z dz; \\
N^{(2)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} dz; \quad M^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} z dz; \\
N^{(3)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} dz; \quad M^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} z dz; \quad Q^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)n} dz,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $N^{(k)n}, M^{(k)n}$ – продольная сила и изгибающий момент в сечении с координатой x для k -го слоя; $Q^{(3)n}$ – поперечная сила для 3-го слоя (заполнителя); b_0 – ширина балки; $\sigma_x^{(k)n}, \sigma_{xz}^{(3)n}$ – компоненты тензора напряжений для k -го слоя.

Удобно ввести полные внутренние усилия для n -го участка, просуммировав силы и моменты (5) по слоям:

$$N^n = \sum_{k=1}^3 N^{(k)n}; \quad M^n = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n}; \quad Q^n = Q^{(3)n}; \quad H^n = c^n(N^{(1)n} - N^{(2)n}) + M^{(3)n}, \tag{6}$$

где N^n, M^n, Q^n – полные продольная сила, изгибающий момент и поперечная сила; H^n – дополнительный момент, возникающий из-за сдвига в заполнителе (момент сдвига).

Уравнения равновесия в усилиях. К деформированной балке применяется принцип возможных перемещений Лагранжа, который выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Для этого необходимо составить выражения возможных работ внешних и внутренних сил и приравнять их. Из полученного равенства следуют дифференциальные уравнения равновесия в усилиях

$$N^n,{}_x + b_0 p^n = 0; \quad H^n,{}_x - Q^n = 0; \quad M^n,{}_{,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = 0, \tag{7}$$

силовые граничные условия

$$N^I(0) = N_0; \quad M^I(0) = M_0; \quad M^I,{}_x(0) = Q_0; \quad N^{III}(l) = N_l; \quad M^{III}(l) = M_l; \quad M^{III},{}_x(l) = Q_l; \tag{8}$$

$$H^I(0) = 0; \quad H^{III}(l) = 0 \tag{9}$$

и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков $x = x_1$ и $x = x_2$:

$$N^I(x_1) - N^{II}(x_1) = N_1; \quad M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = M_1; \quad M^I,{}_x(x_1) - M^{II},{}_x(x_1) = Q_1;$$

$$H^I(x_1) - H^{II}(x_1) = 0; \quad N^{II}(x_2) - N^{III}(x_2) = N_2; \quad M^{II}(x_2) - M^{III}(x_2) = M_2;$$

$$M^{II},{}_x(x_2) - M^{III},{}_x(x_2) = Q_2; \quad H^{II}(x_2) - H^{III}(x_2) = 0. \tag{10}$$

Если на левом ($x = 0$) и правом ($x = l$) торцах стержня имеются жесткие диафрагмы, то граничные условия (9) не справедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига на торцах (2). При отсутствии сосредоточенных внешних усилий в сечениях 1 и 2 в правой части условий (10) будут нули.

Закон Гука. При изгибе упругой балки относительно оси y деформации $\varepsilon_y = 0$. Кроме этого, так как материал несжимаем, то $\varepsilon_z = 0$. С учетом этого закон Гука имеет вид:

$$\sigma_x = A_x \varepsilon_x; \quad A_x = \frac{E_x (1 - \nu_{yz} \nu_{zy})}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{xz} \nu_{zy} \nu_{yx}}, \quad (11)$$

где E_x – модуль Юнга; $\nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$ – коэффициенты Пуассона.

Выражение внутренних усилий через перемещения. Применяя соотношения (4), (5) и (11), выразим компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения, и далее внутренние силы и моменты через функции $w^n(x), u^n(x), \psi^n(x)$:

$$\begin{aligned} N^n &= b_0 (a_1^n u^n{}_{,x} + a_6^n \psi^n{}_{,x} - a_7^n w^n{}_{,xx}), & H^n &= b_0 (a_6^n u^n{}_{,x} + a_2^n \psi^n{}_{,x} - a_3^n w^n{}_{,xx}); \\ Q^n &= b_0 a_5^n \psi^n; & M^n &= b_0 (a_7^n u^n{}_{,x} + a_3^n \psi^n{}_{,x} - a_4^n w^n{}_{,xx}), \end{aligned} \quad (12)$$

где a_1^n, \dots, a_7^n – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев на n -м участке:

$$\begin{aligned} a_1^n &= A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + 2A_x^{(3)} c^n; & a_2^n &= c^{n2} [A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^n]; \\ a_3^n &= c^n [A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) + A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n2}]; \\ a_4^n &= A_x^{(1)} h_1^n (c^{n2} + c^n h_1^n + \frac{1}{3} h_1^{n2}) + A_x^{(2)} h_2^n (c^{n2} + c^n h_2^n + \frac{1}{3} h_2^{n2}) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n3}; \\ a_5^n &= 2G_{xz}^{(3)} c^n; & a_6^n &= c^n [A_x^{(1)} h_1^n - A_x^{(2)} h_2^n]; & a_7^n &= A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) - A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим выражения (12) в уравнения (7). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия упругого трехслойной балки в перемещениях. Для n -го участка, связанного с упругим основанием, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1^n u^n{}_{,xx} + a_6^n \psi^n{}_{,xx} - a_7^n w^n{}_{,xxx} &= -p^n, \\ a_6^n u^n{}_{,xx} + a_2^n \psi^n{}_{,xx} - a_3^n w^n{}_{,xxx} - a_5^n \psi^n &= 0, \\ a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} - \kappa^n w^n &= -q^n, \end{aligned} \quad (14)$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то третье уравнение системы (14) будет следующим: $a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} = -q^n$.

Определение перемещений на участках. Соотношения для сдвига в заполнителе $\psi^n(x)$, прогиба $w^n(x)$ и продольного перемещения срединной плоскости заполнителя $u^n(x)$ получим, решив соответствующие системы уравнений равновесия. Заметим, что аналитический вид решений зависит от типа упругого основания.

Для n -го участка, связанного с упругим основанием малой или большой жесткости

$$\begin{aligned} w^n(x) &= C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + w_p^n(x); \\ \psi^n(x) &= C_1^n b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^n b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_3^n b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + \\ &+ C_4^n b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_5^n b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^n b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^n b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^n b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^n + f_1^n(x); \\ u^n(x) &= C_1^n b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^n b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_3^n b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + \\ &+ C_4^n b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_5^n b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^n b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^n b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^n b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^n \alpha_{12}^n + C_8^n x + C_9^n + f_2^n(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Для n -го участка, на упругом основании средней жесткости

$$w^n(x) = C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_5^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^n;$$

$$\begin{aligned}
\psi^n(x) &= C_1^n b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^n b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^n b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^n b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^n b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^n + f_1^n(x); \\
u^n(x) &= C_1^n b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^n b_9^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^n b_9^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^n b_{10}^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^n b_{10}^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^n \alpha_{12}^n + C_8^n x + C_9^n + f_2^n(x). \quad (16)
\end{aligned}$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то

$$\begin{aligned}
\psi^n(x) &= C_1^n b_{11}^n + C_2^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^n(x); \\
w^n(x) &= C_1^n (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^n b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_4^n x^2 / 2 + C_5^n x + C_6^n + g_2^n(x); \\
u^n(x) &= C_1^n (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^n b_{17}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{17}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_4^n \alpha_{13}^n x + C_5^n \alpha_{13}^n + C_7^n x + C_8^n + g_3^n(x). \quad (17)
\end{aligned}$$

В выражениях (15)–(17) C_1^n, \dots, C_9^n – константы интегрирования, $w_p^n(x)$ – частное решение, зависящее от вида нагрузки, коэффициенты $b_i^n, \alpha_i^n, \beta_i^n$ выражаются через параметры a_i^n (13), а функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
f_1^n(x) &= \alpha_8^n w_{p,xxx}^n + \alpha_9^n \int w_p^n dx + \alpha_{10}^n \int q^n dx + \alpha_{11}^n p^n; \\
f_2^n(x) &= \alpha_8^n \alpha_{12}^n w_{p,xxx}^n + \alpha_9^n \alpha_{12}^n \int w_p^n dx + \alpha_{13}^n w_{p,x}^n + \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int q^n dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n p^n + \alpha_{14}^n \iint p^n dx dx; \\
g_1^n(x) &= b_{12}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \left(\int q^n dx \right) dx - b_{12}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \left(\int q^n dx \right) dx + \\
&\quad + b_{13}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) p dx - b_{13}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) p dx; \\
g_2^n(x) &= \alpha_{17}^n \int g_1^n dx + \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + \alpha_{19}^n \iiint p^n dx dx dx; \\
g_3^n(x) &= b_{18}^n g_1^n(x) + b_{19}^n g_2^n(x) + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + b_{20}^n \iiint p^n dx dx dx.
\end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом.

Граничные условия. На левом и правом торцах балки должны выполняться условия для внутренних усилий (8), (9). Выразив усилия через перемещения, согласно (14), получим:

– на левом торце ($x = 0$):

$$\begin{aligned}
\left(a_1^I u^I,{}_x + a_6^I \psi^I,{}_x - a_7^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} &= N_0 / b_0; \quad \left(a_7^I u^I,{}_x + a_3^I \psi^I,{}_x - a_4^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} = M_0 / b_0; \\
\left(a_7^I u^I,{}_{xx} + a_3^I \psi^I,{}_{xx} - a_4^I w^I,{}_{xxx} \right)_{x=0} &= Q_0 / b_0; \quad \left(a_6^I u^I,{}_x + a_2^I \psi^I,{}_x - a_3^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} = 0; \quad (18)
\end{aligned}$$

– на правом торце ($x = l$):

$$\begin{aligned}
\left(a_1^{III} u^{III},{}_x + a_6^{III} \psi^{III},{}_x - a_7^{III} w^{III},{}_{xx} \right)_{x=l} &= N_l / b_0; \quad \left(a_7^{III} u^{III},{}_x + a_3^{III} \psi^{III},{}_x - a_4^{III} w^{III},{}_{xx} \right)_{x=l} = M_l / b_0; \\
\left(a_7^{III} u^{III},{}_{xx} + a_3^{III} \psi^{III},{}_{xx} - a_4^{III} w^{III},{}_{xxx} \right)_{x=l} &= Q_l / b_0; \quad \left(a_6^{III} u^{III},{}_x + a_2^{III} \psi^{III},{}_x - a_3^{III} w^{III},{}_{xx} \right)_{x=l} = 0. \quad (19)
\end{aligned}$$

При наличии жестких диафрагм на торцах последние условия в соотношениях (18), (19) не справедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига (2). Если балка, кроме опирания на упругое основание, жестко или шарнирно закреплена на торцах, вместо граничных условий в усилиях (18), (19) удобнее условия в перемещениях.

Рассмотрим конкретную балку с жесткими диафрагмами на торцах, свободно лежащую на упругом основании, причем на среднем участке основание отсутствует (рисунок 2). Для нее граничные условия записываются так:

$$\begin{aligned}
\left(a_1^I u^I,{}_x + a_6^I \psi^I,{}_x - a_7^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} &= 0; \quad \left(a_7^I u^I,{}_x + a_3^I \psi^I,{}_x - a_4^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} = 0; \\
\left(a_7^I u^I,{}_{xx} + a_3^I \psi^I,{}_{xx} - a_4^I w^I,{}_{xxx} \right)_{x=0} &= 0; \quad \psi^I(0) = 0;
\end{aligned}$$

$$\left(a_1^{\text{III}} u^{\text{III}},_x + a_6^{\text{III}} \psi^{\text{III}},_x - a_7^{\text{III}} w^{\text{III}},_{xx}\right)_{x=l} = 0; \quad \left(a_7^{\text{III}} u^{\text{III}},_x + a_3^{\text{III}} \psi^{\text{III}},_x - a_4^{\text{III}} w^{\text{III}},_{xx}\right)_{x=l} = 0;$$

$$\left(a_7^{\text{III}} u^{\text{III}},_{xx} + a_3^{\text{III}} \psi^{\text{III}},_{xx} - a_4^{\text{III}} w^{\text{III}},_{xxx}\right)_{x=l} = 0; \quad \psi^{\text{III}}(l) = 0.$$

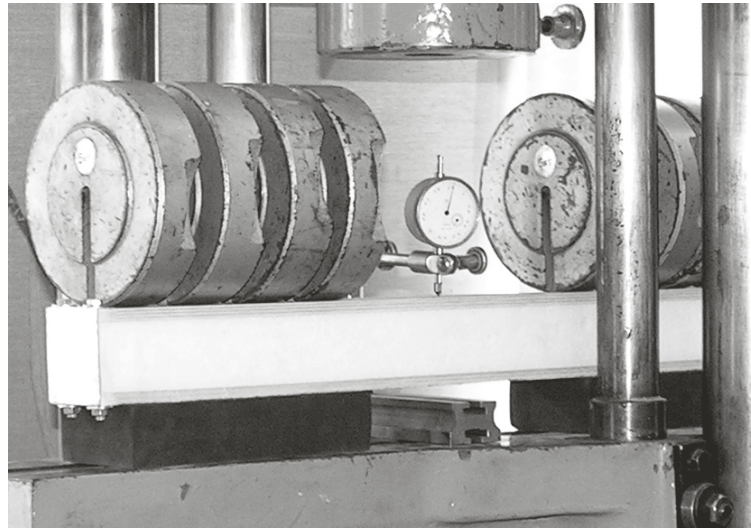


Рисунок 2 – Трехслойная балка с диафрагмами на торцах, опирающаяся на упругое основание двумя крайними участками.

Условия сопряжения на границах участков. На границах первого и второго ($x = x_1$) и второго и третьего ($x = x_2$) участков должны выполняться условия равенства перемещений и внутренних усилий с учетом приложенных сосредоточенных внешних сил и моментов.

Принимая во внимание выражения (10), получим следующие условия сопряжения в перемещениях на границе участков *I* и *II* ($x = x_1$):

$$w^I(x_1) = w^{II}(x_1); \quad u^I(x_1) = u^{II}(x_1); \quad \psi^I(x_1) = \psi^{II}(x_1); \quad w^I,_x(x_1) = w^{II},_x(x_1);$$

$$\left(a_1^I u^I,_x + a_6^I \psi^I,_x - a_7^I w^I,_{xx} - a_1^{II} u^{II},_x - a_6^{II} \psi^{II},_x + a_7^{II} w^{II},_{xx}\right)_{x=x_1} = N_1 / b_0;$$

$$\left(a_7^I u^I,_x + a_3^I \psi^I,_x - a_4^I w^I,_{xx} - a_7^{II} u^{II},_x - a_3^{II} \psi^{II},_x + a_4^{II} w^{II},_{xx}\right)_{x=x_1} = M_1 / b_0;$$

$$\left(a_7^I u^I,_{xx} + a_3^I \psi^I,_{xx} - a_4^I w^I,_{xxx} - a_7^{II} u^{II},_{xx} - a_3^{II} \psi^{II},_{xx} + a_4^{II} w^{II},_{xxx}\right)_{x=x_1} = Q_1 / b_0;$$

$$\left(a_6^I u^I,_x + a_2^I \psi^I,_x - a_3^I w^I,_{xx} - a_6^{II} u^{II},_x - a_2^{II} \psi^{II},_x + a_3^{II} w^{II},_{xx}\right)_{x=x_1} = 0. \quad (20)$$

На границе участков *II* и *III* ($x = x_2$) следует использовать условия, аналогичные (20), заменив индекс *I* на *II*, *II* на *III*, а координату x_1 на x_2 .

Граничные условия на торцах и условия сопряжения на границах участков позволяют составить систему 24-х линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования.

Описание эксперимента. Эксперимент был проведен в лаборатории при кафедре «Строительная механика» УО «БелГУТ». Испытывалась трехслойная балка прямоугольного поперечного сечения с жесткими диафрагмами на торцах, опирающаяся на упругое основание двумя крайними участками (см. рисунок 2). Ранее были теоретически и экспериментально получены значения прогибов этой балки, установленной на шарнирные опоры и не связанной с упругим основанием [4].

Несущие слои выполнены из семислойной березовой фанеры с модулями упругости $E_1 = 6000$ МПа, $G_1 = 750$ МПа, наполнитель – из пенополистирола, для которого $E_2 = 15$ МПа, $G_2 = 5,14$ МПа. Геометрические размеры балки следующие: длина $l = 660$ мм, ширина $b_0 = 60$ мм, высота сечения $h = 66$ мм, толщины слоев $h_1 = h_2 = 8$ мм, $h_3 = 50$ мм. Распределенная по всей длине нагрузка прикладывалась к балке с помощью 13 грузов по 5 кг, локальная распределенная нагрузка на двух крайних участках – с помощью 8 грузов по 5 кг. Прогибы балки определялись при помощи индикаторов часового типа ИЧ-10 (цена деления шкалы $m = 0,01$ мм). Жесткость упругого основания $\kappa = 213$ МН/м³ была получена экспериментально.

Результаты. При численной реализации решений интенсивность распределенной нагрузки, модули упругости материалов и толщины слоев в трехслойном пакете фанера–пенополистирол–фанера принимались такими же, что и в проведенном эксперименте. Теоретически и экспериментально были определены прогибы балки при полном и неполном контакте с упругим основанием под действием нагрузки, распределенной по всей длине или приложенной локально. Например, для балки, опирающейся на упругое основание двумя крайними участками и нагруженной на этих участках локальной распределенной нагрузкой (см. рисунок 2), наибольший прогиб w_{max} составил 0,736 мм по данным расчета и 0,81 мм по результатам эксперимента.

Выводы. Числовые значения прогибов, полученных теоретически, достаточно хорошо согласуются с данными проведенного испытания, что подтверждает точность и достоверность предложенной методики расчета трехслойной балки при ее неполном контакте с упругим основанием. Однако некоторые расхождения результатов показывают на необходимость проведения дальнейших теоретических и экспериментальных исследований, направленных на уточнение расчетных зависимостей для перемещений и напряжений в трехслойных конструкциях, так как во многих случаях они являются элементами сложных и ответственных сооружений.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрен изгиб упругой трехслойной балки под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при неполном контакте с упругим основанием. По длине балки выделены три участка, на каждом из которых нагрузки и жесткость упругого основания могут иметь различную величину, а могут и отсутствовать. Выведена система дифференциальных уравнений равновесия, получено ее аналитическое решение в перемещениях, выписаны граничные условия и условия сопряжения на границах участков. Получены числовые значения прогибов теоретическим и экспериментальным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
2. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
3. Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
4. Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой шарнирно опертой трехслойной балки / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2012. № 2(25). – С. 97-102.

SUMMARY

Bending of elastic sandwich beams under distributed and lumped loads of incomplete contact with the elastic base. The length beams allocated three sections each of which load and stiffness of the elastic base may have a different value and may be absent. A system of differential equations of equilibrium, obtained an analytic solution in terms of displacements, written boundary conditions and the matching conditions on the boundary. Obtained numerical values of deflections theoretical and experimental way.

Поступила в редакцию 05.11.2013