Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

Часть 4

Минск
БНТУ
2010

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 4

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Под редакцией В.А. Нифагина

Минск
БНТУ
2010

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я7
В 93

Издание выходит с 2008 года

Составители:

Е.А. Глинская, И.В. Прусова,

О.Г. Вишневская, А.А. Литовко

Рецензент

В.В. Веременюк

Данное издание содержит теоретические сведения, подробные решения типовых примеров и задач, задания для самостоятельной работы по разделам функций нескольких переменных и неопределенного интеграла.

Часть 3 «Элементы математического анализа» (авторы: Е.А. Глинская, И.В. Прусова, О.В. Дубровина, А.Н. Мелешко; под ред. В.А. Нифагина) вышла в БНТУ в 2009 г.

ISBN 978-985-525-372-4 (Ч. 4)
ISBN 978-985-479-903-2

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. Область определения функции. Линии и поверхности уровня

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Если каждой паре действительных чисел (x, y) принадлежащей множеству D, по определенному правилу f ставится в соответствие одно и только одно число $z \in E \leq R$, то говорят, что на множестве D задана функция f (или отображение) двух переменных, определенная на множестве D со значениями в R и записывают $z = f(x, y)$ или $f : D \to R$.

Множество $D = D(f)$ называется областью определения функции. Множество E значений, принимаемых z в области определения, называется областью ее значений.

Т.к. всякое уравнение $z = f(x, y)$ определяет, вообще говоря, в пространстве, в котором введена декартовая система координат $Oxyz$, некоторую поверхность, то под графиком функции двух переменных будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

Геометрически областью определения функции может быть вся плоскость Oxy или ее часть, ограниченная линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называют замкнутой и обозначают $\overline{D}$, во втором – открытой. Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют значением функции.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех и большего числа переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Наглядное представление о функции двух или трех переменных может дать картина ее линий или поверхностей уровня.

Линии уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости Oxy, в которых функция f сохраняет постоянное значение, т.е. удовлетворяющих равенству $f(x, y) = C$, где C - постоянная.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек пространства, удовлетворяющих равенству $f(x, y, z) = C$, где C - постоянная.

Примеры

1. Найти частное значение функции $z = x^3 - 5xy + y^2$ при $x = 3$ и $y = -2$.

Решение. Подставляя заданные значения аргументов, получим: $z(3,-2) = 3^3 - 5 \cdot 3 \cdot (-2) + (-2)^2 = 61$.

2. Найти область определения функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Решение. Переменная z принимает действительные значения при условии $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq a^2$. Следовательно, областью определения данной функции является круг радиуса a с центром в начале координат, включая граничную окружность. Поверхность, соответствующая заданной функции, есть верхняя половина сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3. Найти область определения функции $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

Решение. Данная функция зависит от трех переменных и принимает действительные значения при $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$, т.е. $x^2/1 + y^2/2 - z^2/3 < -1$. Областью определения функции является часть пространства, заключенная внутри полостей двуполостного гиперболоида.

4. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2 + y^2 = C$ $(C \geq 0)$. Придавая C различные действительные значения, получим концентрически окружности с центром в начале координат, т.е. линии пересечения поверхности $z = x^2 + y^2$ с плоскостями $z = C$.

5. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + z^2 - y^2$.

Решение. Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид $x^2+z^2-y^2=C$. Если $C=0$, то получает конус $x^2+z^2-y^2=0$; если $C>0$, то семейство однополостных гиперболоидов; если $C<0$, то семейство двуполостных гиперболоидов.

1.2. Задачи для самостоятельной работы

Найти области определения функций:

1. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$; 2. $z=1/\sqrt{1-x^2-y^2}$; 3. $z=\arcsin(x+y)$;

4. $z=\sqrt{\cos(x^2+y^2}$; 5. $z=\ln(-x+y)$; 6. $z=y+\sqrt{x}$;

7. $z=\sqrt{xy}$; 8. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(25-x^2-y^2)$;

9. $u=\arcsin(z/\sqrt{x^2+y^2})$; 10. $u=1/\ln(1-x^2-y^2-z^2)$; 11. $u=\sqrt{x+y+z}$;

Найти линии уровня функций:

12. $z=2x+y$; 13. $z=x/y$; 14. $z=\ln\sqrt{y/x}$;

15. $z=\sqrt{x/y}$; 16. $z=e^{xy}$; 17. $z=1/(4x^2+y^2)$;

Найти поверхности уровня функций:

18. $u=x+y+3z$; 19. $u=x^2+y^2+z^2$; 20. $u=x^2-y^2-z^2$;

21. $u=x^2+y^2-z$; 22. $u=1/(x^2+4y^2+9z^2)$; 23. $u=z/\sqrt{x^2+y^2}$;

Ответы

1. $x^2+y^2\geq 1$ – часть плоскости вне единичного круга с центром в начале координат.

2. Часть плоскости внутри круга $x^2+y^2<1$.

3. Полоса между параллельными прямыми $x+y\leq 1$ и $x+y\geq -1$.

4. Концентрические кольца $0\leq x^2+y^2\leq \pi/2,\ 3\pi/2\leq x^2+y^2\geq 5\pi/2,\ldots$.

5. $y>x$ – полуплоскость, лежащая выше биссектрисы $y=x$.

6. Полуплоскость $x\geq 0$.

7. Совокупность точек, лежащих на координатных осях и внутри первой и третьей четвертей.

8. Совокупность точек, расположенных на окружности с центром в начале координат и с радиусом $R=1$ и внутренние точки кольца, ограниченного этой окружностью и окружностью с центром в начале координат и радиусом $R=5$.

9. Часть пространства вне конуса $x^2+y^2-z^2=0$.

10. Часть пространства внутри шара $x^2+y^2+z^2<1,$ за исключением начала координат.

11. Часть пространства над плоскостью $x+y+z=0,$ включая эту плоскость.

12. Семейство параллельных прямых $2x+y=C$.

13. Семейство прямых $y=Cx.$

14. Семейство прямых $y=\mathrm{e}^{2C}\cdot x,$ или $y=C_1x(C_1>0)$.

15. Семейство прямых $y=Cx$.

16. Семейство равнобочных гипербол $xy=C$ (при $C\neq 0$); совокупность координатных осей Ox и Oy (при $C=0$).

17. Семейство эллипсов $\dfrac{x^2}{1/4C}+\dfrac{y^2}{1/C}=1$ (при $C>0$).

18. Семейство плоскостей $x+y+3z=C$.

19. Семейство сфер $x^2+y^2+z^2=C$.

20. Семейство двуполостных гиперболоидов $x^2-y^2-z^2=C$ (при $C>0$); семейство однополостных гиперболоидов $x^2-y^2-z^2=C$ (при $C<0$); конус $x^2-y^y-z^2=0$ (при $C=0$).

21. $x^2+y^2-z=C$.

22. $x^2+4y^2+9z^2=C$.

23. $z^2=C^2(x^2+y^2)$.

1.3. Предел и непрерывность функции двух переменных

Множество всех точек $M(x,y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, называется проколотой δ - окрестностью точки $M_0(x_0,y_0)$ и обозначаются $\dot{O}_\delta(M_0)$.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число z_0 называется пределом функции $z=f(x,y)$ (по Коши) при $x\to x_0$ и $y\to x_0$ (или $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\neq x_0$ и $y\neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется неравенство $\left|f(x,y)-z_0\right|<\varepsilon$:

$$Z_0=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall M(x,y)\in \dot{O}_\delta(M_0)\Rightarrow f(M)\in O_\varepsilon(z_0).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремиться к M_0.

Повторными пределами функции $z=f(x,y)$ (или $f(M)$) в точке $M_0(x_0,y_0)$ называются следующие пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Функции $z=f(x,y)$ (или $f(M)$) называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если она:

1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности,
2) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$,
3) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т.е. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Если в точке M_0 одно из указанных условий не выполняется , то она является точкой разрыва функции $z=f(x,y)$. Точки разрыва могут образовывать линии и поверхности разрыва.

Функция непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Другое, равносильное определение непрерывности функции:
функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_{0,} y_0)$, если в этой точке бесконечно малым приращениям аргументов $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$ соответствует бесконечно малое приращение $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ функции z.

Примеры

1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Решение. Будем приближаться в $0(0;0)$ по прямой $y = kx$, где k – некоторое число. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^y}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$. Функция $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^y}$ в точке $0(0;0)$ предела не имеет, т.к. при различных значениях k предел функции не одинаков (функция имеет различные предельные значения).

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}}$.

Решение. Преобразовав выражение под знаком предела, получим:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y}} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(3+\sqrt{xy+9})}{(3-\sqrt{xy+9})(3+\sqrt{xy+9})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(3+\sqrt{xy+9})}{9-(xy+9)} =$$

$$= -\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (3+\sqrt{xy+9}) = -6.$$

3. Найти повторные пределы функции $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точке $0(0;0)$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^2}{y^2}=-1.$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Таким образом, повторные пределы не всегда равны между собой.

4. Показать, что функция $z=x^2-2xy$ непрерывна на всей плоскости Oxy.

Решение. Определим приращение функции

$$\Delta z:\ \begin{aligned}&\Delta z=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(x^2-2xy)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-2xy-\\&-2x\Delta y-2y\Delta x-2\Delta x\Delta y-x^2+2xy=2x\Delta x+(\Delta x)^2-2x\Delta y-2y\Delta x-2\Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

т. к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$ в любой точке $M(x,y)$, то на всей плоскости Oxy функция непрерывна.

5. Исследовать на непрерывность функцию $z=\dfrac{xy+2}{x^2-y}$.

Решение. Заданная функция z терпит разрыв в точках, где $y=x^2$. Следовательно, функция z непрерывна в любой точке плоскости Oxy, исключая точки, расположенные на параболе $y=x^2$.

6. Исследовать на непрерывность функцию $z=1/(9x^2-4y^2)$.

Решение. Для функции z точки разрыва образуют множество точек плоскости Oxy, определяемое равенством $9x^2-4y^2=0$, т.е. точки прямых $y=\pm 3x/2$.

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 0}}\sin(xy)/y$;

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^3-y)/(x^2+y^2)$;

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2y^2)/(x^4+y^4)$;

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}1/(x^4+y^4)$;

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \sqrt{(x-1)^2+4y^2}\,/(x-1^2+y^2)$; 6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \mathrm{tg}(xy)/x$;

Найти точки разрыва функции:

7. $z=1/((x-1)^2+(y+2)^2)$; 8. $z=1/\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$;

9. $z=(x^2+y^2-2x+3y)/(x+y)$; 10. $z=\ln|1-(x+1)^2-(y-2)^2|$;

11. $u=1/(x^2+y^2-z)$; 12. $u=\sin(1/xyz)$;

13. $u=1/(x^2-y^2+z^2)$;

14. $u=1/(R^2-(x-a)^2-(y-b)^2-(z-c)^2)$;

15. Непрерывна ли функция $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$:

а) в круге радиусом $R=2$ с центром в начале координат?

б) в круге радиусом $R=2$ с центром в точке $C(-3;\,4)$?

в) в круге радиусом $R=5$ с центром в точке $C(2;\,3)$?

16. Непрерывна ли функция $f(x,y)=(xy)/(x^2+y^2)$ в области:

а) содержащей начало координат?

б) не содержащей начало координат?

Ответы

1. -1. 2. -1/5. 3. не существует.

4. $+\infty$. 5. $+\infty$. 6. 3.

7. $N(1,-2)$. 8. $N(-3;4)$.

9. Точки, лежащие на прямой $x+y=0$.

10. Точки, лежащие на окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=1$.

11. Точки, лежащие на параболоиде вращения $x^2+y^2=z$.

12. Точки, лежащие на координатных плоскостях.

13. Точки, лежащие на конусе $x^2-y^2+z^2=0$.

14. Точки, лежащие на сфере радиусом R с центром в точке $S(a,b,c)$.

15. а) разрывна в точке $0(0;0)$;

б) непрерывна;

в) разрывна в точке $0(0;0)$.

16. а) разрывна в точке $0(0;0)$;

б) непрерывна.

1.5. Дифференцирование и дифференциал. Производная по направлению. Градиент. Производная в направлении градиента

1°. Частные производные

Частным приращением функции $z = f(x_1,\ldots,x_n)$ соответствующим приращению Δx_i переменной x_i называется разность

$$\Delta_i z = f(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$$

В случае если функция z – функция двух переменных $z = f(x,y)$ то

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

$\Delta_x z$ - частное приращение функции $z = f(x,y)$ по переменной x, а

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$\Delta_y z$ - частное приращение функции $z = f(x,y)$ по переменной y.

Частной производной функции $z = f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменной x_i называется предел отношения частного приращения функции $z = f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменной x_i к приращению самого аргумента функции x_i, при условии, что последнее приращение стремится к нулю, то есть

$$\lim_{\Delta x_i\to o}\frac{f(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{\Delta x_i}.$$

Частные производные обозначаются одним из следующих образов: z'_{x_i}, $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, f'_{x_i}, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Процесс нахождения частных производных функции $z = f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *дифференцированием* функции.

В случае если функция z – функция двух переменных $z = f(x,y)$ то

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

и

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

где z'_x и z'_y - *частные производные* функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно.

Частные производные функций нескольких переменных вычисляются по тем же самым правилам, что и производные функций одной переменной, но при этом надо считать, что все переменные, кроме переменной, по которой берется производная, являются константами.

2°. Частные производные высших порядков

Частная производная от частной производной функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *частной производной второго порядка* функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Вводятся следующие обозначения:

$$z''_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} = (z'_{i_j})'_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right),$$

$$z''_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = (z'_{x_j})'_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right).$$

Аналогично определяются частные производные s-ого порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае если частная производная высшего порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ получена дифференцированием функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ по разным переменным, то она называется *смешанной*.

Если при нахождении смешанной производной s-ого порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ все промежуточные производные являлись непрерывными в точке $(x_1, \ldots, x_n)$, то ее вычисление не зависит от того в каком порядке брались производные по ее переменным. В этом случае, запись $\frac{\partial^s z}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, где $k_1 + \ldots + k_n = s$, обозначает, что s-ая смешанная производная функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ получена k_1 раз дифференцированием по переменной x_1, k_2 раз дифференцированием по переменной x_2, …, k_n раз дифференцированием по переменной x_n, при этом порядок дифференцирования не имеет значения.

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (z'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

3°. Дифференциал функции

Полным приращением функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ при приращениях ее аргументов x_1, …, x_n на Δx_1, …, Δx_n соответственно называется разность

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n).$$

Если полное приращение функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде

$$\Delta z = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\Delta x),$$

где $A_1 = A_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $A_n = A_n(x_1, \ldots, x_n)$ и $o(\Delta x)$ – такая функция, что $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}} = 0$, то функция $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *дифференцируемой*, а выражение (главной или линейной части полного приращения) $A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$ называется *дифференциалом* функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается

$$dz = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n. \tag{1.1}$$

По определению, дифференциалом независимых переменных называются сами их приращения, то есть $\mathrm{d}x_1 = \Delta x_1$, …, $\mathrm{d}x_n = \Delta x_n$, поэтому формулу (1.1) можно переписать в следующем виде

$$\mathrm{d}z = A_1 \mathrm{d}x_1 + \ldots + A_n \mathrm{d}x_n. \tag{1.2}$$

Достаточным условием дифференцируемости функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ является непрерывность всех ее частных производных, в этом случае имеет место следующие равенства $A_1 = A_1(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial z}{\partial x_1}$, …, $A_n = A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial z}{\partial x_n}$, а значит формула (1.2) примет вид

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n . \qquad (1.3)$$

В случае непрерывности частных производных функции $z = f(x, y)$ ее дифференциал равен

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y .$$

Дифференциал функции нескольких переменных, как и для функции одной переменной, используется для приближенного вычисления значений функций. А именно, для дифференцируемой функции при маленьких приращениях аргументов Δx_1, …, Δx_n приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, то есть

$$\Delta f(x_1, \ldots, x_n) \approx \mathrm{d}f(x_1, \ldots, x_n)$$

Если расписать подробно, получим

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, \ldots, x_n) + f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)\Delta x_1 + \ldots + f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n)\Delta x_n .$$

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ данная формула примет следующий вид

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y_1 . \qquad (1.4)$$

4°. Дифференциал высшего порядка

Дифференциалом 2 порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ считая дифференциалы независимых переменных константами.
Дифференциалом s*-го порядка* функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дифференциал от дифференциала $s-1$-го порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ считая дифференциалы независимых переменных константами и обозначается $\mathrm{d}^s z$.

В случае, если функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ обладает всеми непрерывными частными производными до s-го порядка включительно, то символически можно записать

$$\mathrm{d}^s z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^s z .$$

Данная формула раскрывается по формуле бинома Ньютона.
s-й дифференциал независимой переменной x, вместо записи $(\mathrm{d}x)^s$, обозначается $\mathrm{d}x^s$.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ при выполнении соответствующих условий, второй дифференциал равен

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 .$$

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ при тех же условиях, имеем

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2 . \quad (1.5)$$

5°. Дифференцирование сложных функций

Пусть функция $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1, \ldots, x_n)$, а функции $x_1 = g_1(t_1, \ldots, t_m)$, …, $x_n = g_n(t_1, \ldots, t_m)$ имеют частную производную по t_j в точке $(t_1, \ldots, t_m)$, тогда сложная функция $z = f(g_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_m))$ имеет частную производную по t_j в точке $(t_1, \ldots, t_m)$ и верна следующая формула

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j} .$$

Частными, являются следующие случаи:

1) Пусть функция $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1, \ldots, x_n)$, а функции $x_1 = g_1(t)$, …, $x_n = g_n(t)$ дифференцируемы в точке t, тогда сложная функция $z = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ дифференцируема в точке t и имеет место следующая формула

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{\mathrm{d}t} .$$

2) Пусть функция $z = f(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $x = g(t_1, \ldots, t_m)$ имеет частную производную по t_j в точке $(t_1, \ldots, t_m)$, тогда сложная функция $z = f(g(t_1, \ldots, t_m))$ имеет частную производную по t_j в точке $(t_1, \ldots, t_m)$ и верна следующая формула

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial t_j} .$$

Для функции двух переменных вышесказанное имеет следующую форму.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), а функции $x = g(u, v)$ и $y = h(u, v)$ имеют частную производную по u (по v) в точке (u, v), тогда сложная функция $z = f(g(u, v), h(u, v))$ имеет частную производную по u (по v) в точке (u, v) и верны следующие формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$
Частным является следующий случай:

Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y), а функции $x=g(t)$ и $y=h(t)$ дифференцируемы в точке t, тогда сложная функция $z=f(g(t),h(t))$ дифференцируема в точке t и имеет место следующая формула
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1.6}$$

В случае, если $y=h(x)$, то
$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$
Аналогичная формула имеет место, если переменная x является функцией от переменной y.

6°. Дифференцирование неявно заданных функций

Пусть дифференцируемая функция $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ задана неявно $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$, тогда
$$y'_{x_i}=-\frac{F'_{x_i}}{F'_y}. \tag{1.7}$$

Если функция одной переменной $y=f(x)$ задается неявно $F(x,y)=0$, то формула (1.7) имеет вид
$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{1.8}$$

Для функции $z=z(x,y)$, заданной неявно $F(x,y,z)=0$ имеем
$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z} \text{ и } z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{1.9}$$

7°. Производная по направлению, градиент и производная по направлению градиента функции трех переменных

Производной функции $u=f(x,y,z)$ *по направлению* $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+a_x t, y+a_y t, z+a_z t) - f(x,y,z)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,t}.$$

В случае если функция $u = f(x,y,z)$ дифференцируема, то

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где вектор $\vec{b} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, т. е. $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ и $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ – длина вектора $\vec{a}$.

Градиентом $\operatorname{grad} u$ функции $u = f(x,y,z)$ называется направление, по которому функция $u = u(x,y,z)$ быстрее всего возрастает. Если функция $u = u(x,y,z)$ дифференцируема, то

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

и производная по направлению градиента равна

$$\frac{\partial u}{\partial \operatorname{grad} u} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Аналогичные понятия вводятся и для функции двух переменных.

Примеры

1. Найти частные производные функции $u = \operatorname{arcctg}\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{1+\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)^2}\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)'_x = -\frac{1}{1+\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)^2}\frac{2}{z} = -\frac{2z}{z^2+(2x-3y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1+\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)^2}\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)'_y = -\frac{1}{1+\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)^2}\left(-\frac{6y}{z}\right) = \frac{6yz}{z^2+(2x-3y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{1+\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)^2}\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)'_z = -\frac{1}{1+\left(\frac{2x-3y^2}{z}\right)^2}\left(-\frac{2x-3y^2}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{2x-3y^2}{z^2+(2x-3y^2)^2}.$$

2. Найти дифференциал функции $u = xy^2 \ln \dfrac{y}{x-z}$ при $(x,y,z) = (2;1;1)$.

Решение. Т. к.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \ln \frac{y}{x-z} + xy^2 \frac{1}{\frac{y}{x-z}} \left(\frac{y}{x-z} \right)'_x = y^2 \ln \frac{y}{x-z} + xy^2 \frac{1}{\frac{y}{x-z}} \left(-\frac{y}{(x-z)^2} \right) =$$

$$= y^2 \ln \frac{y}{x-z} - \frac{xy^2}{x-z}, \ \frac{\partial u}{\partial x}(2;1;1) = -2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \ln \frac{y}{x-z} + xy^2 \frac{1}{\frac{y}{x-z}} \left(\frac{y}{x-z} \right)'_y = 2xy \ln \frac{y}{x-z} + xy^2 \frac{1}{\frac{y}{x-z}} \frac{1}{x-z} =$$

$$= 2xy \ln \frac{y}{x-z} + xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(2;1;1) = 2, \ \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 \frac{1}{\frac{y}{x-z}} \left(\frac{y}{x-z} \right)'_z = xy^2 \frac{1}{\frac{y}{x-z}} \frac{y}{(x-z)^2} = \frac{xy^2}{x-z}, \ \frac{\partial u}{\partial z}(2;1;1) = 2,$$

то по формуле (1.3)

$$\mathrm{d}u(2;1;1) = -2\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z.$$

3. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ при $(x,y) = (2;3)$.

Решение. Имеем

$$\Delta z(2;3) = z(2+\Delta x, 3+\Delta y) - z(2;3) =$$
$$= 2(2+\Delta x)^2 - 3(2+\Delta x)(3+\Delta y) + 5(3+\Delta y)^2 - 35 =$$
$$= 8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 18 - 6\Delta y - 9\Delta x - 3\Delta x\Delta y + 45 + 30\Delta y + 5(\Delta y)^2 - 35.$$

Значит, приращение функции равно

$$\Delta z(2;3) = -\Delta x + 24\Delta y + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x\Delta y + 5(\Delta y)^2.$$

Т. к. $z'_x = 4x - 3y$, $z'_x(2;3) = -1$, $z'_y = -3x + 10y$ и $z'_y(2;3) = 24$, то

$$\mathrm{d}z(2;3) = -\mathrm{d}x + 24\mathrm{d}y.$$

Вспомнив, что $\mathrm{d}x = \Delta x$ и $\mathrm{d}y = \Delta y$, видим что $\mathrm{d}z(2;3)$ главная часть приращения $\Delta z(2;3)$.

4. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}97}$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию $z(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. И пусть $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$ и $\Delta y = -0{,}03$. Так как $z'_x = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ и $z'_y = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ то, используя формулу (1.4) имеем

$$\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}97}=z(1{,}02;\,0{,}97)=z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx$$
$$\approx z(x_0,y_0)+z'_x(x_0,y_0)\Delta x+z'_y(x_0,y_0)\Delta y=$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02-\frac{1}{2}\cdot(-0{,}03)\approx 0{,}805\,.$$

Если вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}97}$ более точно, то получим $0{,}810519$.

5. Найти первый и второй дифференциал функции $u=(x^2-yz+2z^3)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}$ при $(x,y,z)=(1;-1;-1)$.

Решение. Так как,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(6z^3+3x^2-3yz+2x)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и }\ \frac{\partial u}{\partial x}(1;-1;-1)=-4\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(4z^3+2x^2-2yz+z)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и }\ \frac{\partial u}{\partial y}(1;-1;-1)=5\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(10z^3+5x^2-5yz+6z^2-y)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и }\ \frac{\partial u}{\partial z}(1;-1;-1)=-3\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(18z^3+9x^2-9yz+12x+2)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и }\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1;-1;-1)=-4\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-(12z^3+6x^2-6yz+4x+3z)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(1;-1;-1)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(1;-1;-1)=11\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=(30z^3+15x^2-15yz+18z^2+10x-3y)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(1;-1;-1)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(1;-1;-1)=1\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4(4z^3+x^2-yz+z)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и }\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1;-1;-1)=-12\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-(20z^3+10x^2-10yz+12z^2-2y+5z+1)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}(1;-1;-1)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(1;-1;-1)=10\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(50z^3+25x^2-25yz+60z^2-10y+12z)\,\mathrm{e}^{3x-2y+5z}\ \text{ и }\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(1;-1;-1)=8\,.$$

Отсюда, используя формулы (1.3) и (1.5) имеем

$$\mathrm{d}u(1;-1;-1)=-4\mathrm{d}x+5\mathrm{d}y-3\mathrm{d}z$$

и

$$d^2u(-1;-1) = -4dx^2 + 22dxdy + 2dxdz - 12dy^2 + 20dydz + 8dz^2.$$

6. Найти $\dfrac{dz}{dt}$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$, если $z = \dfrac{2x^2 - y}{x + y^2}$, $x = \operatorname{tg} t$ и $y = \operatorname{ctg} t$.

Решение. Рассмотрим два способа решения

Первый способ. $z(x(t), y(t)) = \dfrac{2\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg}^2 t}$.

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{2\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg}^2 t}\right)'_t = \frac{(2\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg} t)'_t(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg}^2 t) - (2\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg} t)(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg}^2 t)'_t}{(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg}^2 t)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t}\right)(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg}^2 t) - (2\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg} t)\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 2\frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 t}\right)}{(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg}^2 t)^2}.$$

Отсюда,

$$\frac{dz}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(8+2)(1+1) - (2-1)(2-4)}{(1+1)^2} = \frac{20+2}{4} = \frac{11}{2}.$$

Второй способ. При $t = \dfrac{\pi}{4}$ имеем $x = y = 1$. Т. к. функция z является сложной, а также,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ и } \frac{dx}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sin^2 t} \text{ и } \frac{dy}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x(x+y^2) - (2x^2 - y)}{(x+y^2)^2} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial x}(1;1) = \frac{7}{4},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(x+y^2) - 2y(2x^2 - y)}{(x+y^2)^2} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}(1;1) = -1,$$

то, используя формулу (1.6) имеем

$$\frac{dz}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}(1;1)\frac{dx}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}(1;1)\frac{dy}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{4}\cdot 2 + (-1)(-2) = \frac{11}{2}.$$

7. Найти первую и вторую производную функции $y = y(x)$ заданной неявно уравнением $y^3 + y + x = 1$ при $(x, y) = (-1;\ 1)$.

Решение. Функция $y = y(x)$ задается уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = y^3 + y + x - 1$. Так как $F'_x = 1$ и $F'_y = 3y^2 + 1$, то используя формулу (1.7) имеем $y' = -\dfrac{1}{3y^2 + 1}$.

Выражение для производной y' можно также получить, продифференцировав равенство $y^3+y+x=1$ по x учитывая, что y функция от x и выразив y'.

$(y^3+y+x)'_x=1'_x$, $3y^2y'+y'+1=0$, $(3y^2+1)y'+1=0$, $y'=-\dfrac{1}{3y^2+1}$.

Отсюда, $y'(-1)=-\dfrac{1}{3y^2(-1)+1}=-\dfrac{1}{4}$.

Для нахождения y'' продифференцируем y' по x (учитывая, что y функция от x). Получим

$$y''=\frac{(3y^2+1)'}{(3y^2+1)^2}=\frac{6yy'}{(3y^2+1)^2}=-\frac{6y}{(3y^2+1)^3}.$$

Отсюда, $y''(-1)=-\dfrac{6y(-1)}{(3y^2(-1)+1)^3}=-\dfrac{3}{32}$.

8. Функция $z=z(x,y)$ задана неявно уравнением $z^2+z-y^2-3xy+2=0$. Найти частные производные первого порядка. Непосредственно проверить, что смешанные производные второго порядка совпадают и найти их при $(x,y,z)=(1;1;1)$

Решение. Частные производные функции $z=z(x,y)$ можно найти, используя формулу (1.9) или непосредственным дифференцированием уравнения $z^2+z-y^2-3xy+2=0$ по обеим переменным.

$$(z^2+z-y^2-3xy+2)'_x=0'_x,$$
$$2zz'_x+z'_x-3y=0.$$

Отсюда, $z'_x=\dfrac{3y}{2z+1}$ и $z'_x(1;1)=1$.

$$(z^2+z-y^2-3xy+2)'_y=0'_y,$$
$$2zz'_y+z'_y-2y-3x=0.$$

Отсюда, $z'_y=\dfrac{3x+2y}{2z+1}$ и $z'_y(1;1)=\dfrac{5}{3}$.

$$z''_{yx}=(z'_x)'_y=\left(\frac{3y}{2z+1}\right)'_y=\frac{3(2z+1)-6yz'_y}{(2z+1)^2}=\frac{3(2z+1)^2-6y(3x+2y)}{(2z+1)^3}=$$
$$=\frac{12z^2+12z-18xy-12y^2+3}{(2z+1)^3},$$

$$z''_{xy}=(z'_y)'_x=\left(\frac{3x+2y}{2z+1}\right)'_x=\frac{3(2z+1)-2(3x+2y)z'_x}{(2z+1)^2}=\frac{3(2z+1)^2-6y(3x+2y)}{(2z+1)^3}=$$
$$=\frac{12z^2+12z-18xy-12y^2+3}{(2z+1)^3}=z''_{yx},$$

$$z''_{xy}(1;1) = z''_{yx}(1;1) = -\frac{1}{3}.$$

9. Найти производную функцию $u = \sqrt{x^2 - y + z^3 + 3} + \mathrm{e}^{x-y+2z-2}$ по направлению $\vec{a} = (2;1;2)$ при $(x,y,z) = (1;3;2)$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y + z^3 + 3}} + \mathrm{e}^{x-y+2z-2} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x}(1;3;2) = \frac{4}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - y + z^3 + 3}} - \mathrm{e}^{x-y+2z-2} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}(1;3;2) = -\frac{7}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2}{2\sqrt{x^2 - y + z^3 + 3}} + 2\mathrm{e}^{x-y+2z-2} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x}(1;3;2) = 4,$$

$$|\vec{a}| = 3,\ \cos\alpha = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{1}{3} \text{ и } \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Поэтому,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}(1;3;2) = \frac{\partial u}{\partial x}(1;3;2)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(1;3;2)\cos\beta\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(1;3;2)\cos\gamma = \frac{8}{9} - \frac{7}{18} + \frac{8}{3} = \frac{19}{6}.$$

10. Найти градиент и производную по направлению градиента функции $z = f(x,y)$ при $(x,y,z) = (1;1;0)$ заданной неявно $x^2 y + \ln(z+1) + z - y^2 = 0$.

Решение. Продифференцировав уравнение по x и по y имеем:

$$2xy + \frac{z'_x}{z+1} + z'_x = 0,$$

$$z'_x = -2xy\frac{z+1}{z+2},$$

$$z'_x(1;1) = -1$$

и

$$x^2 + \frac{z'_y}{z+1} + z'_y - 2y = 0,$$

$$z'_y = (2y - x^2)\frac{z+1}{z+2},$$

$$z'_y(1;1) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда,

$$\operatorname{grad} z(1;1) = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial \operatorname{grad} z}(1;1) = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1.6. Задачи для самостоятельного решения

Найти частные производные функций:

1. $z=\left(x^3y-x^2y^2+xy+x-1\right)^3$;

2. $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt[3]{y}}{x^2}$;

3. $z=2x^2-3y-\sqrt{3x^2-4y^2+25}$ при $(x,y)=(2;3)$;

4. $z=\ln\left(x-xy-\sqrt{x^2-y^2}\right)$ при $(x,y)=(5;4)$;

5. $u=\left(x^2y\right)^{(z-1)^2+1}$;

6. Вычислить $\dfrac{x}{2}u'_x+\dfrac{y}{2}u'_y+\dfrac{z}{3}u'_z$, если $u=\ln\left(x^2-y^2+z^3\right)$.

7. Найти полное приращение и дифференциал функции $u=x^2y-z^2+yz$ при $(x,y,z)=(2;1;3)$.

Найти полный дифференциал функции:

8. $z=x^3y^2-xy^3+3xy-y^5$ при $(x,y)=(1;1)$;

9. $z=\mathrm{e}^{2x^2-y}$ при $(x,y)=(2;8)$.

Вычислить приближенно:

10. $2{,}01^4\cdot 0{,}99^4$;

11. $\sqrt{7{,}02^2-6{,}01^2+3}$.

12. Непосредственным вычислением проверить, что вторые смешанные производные z''_{yx} и z''_{xy} совпадают для функции $z=\sqrt{x^2-y}$.

13. Найти первый и второй дифференциал функции $z=\ln\left(x^2-3xy+5y\right)$ при $(x,y)=(1;1)$.

14. Найти $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ при $x=32$, если $z=\dfrac{\ln\left(x-y-29\right)}{y}$ и $y=\sqrt[5]{x}$.

15. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ при $t=2$ и $u=1$, если $z=\dfrac{x}{y}\mathrm{e}^{x-y^2}$, $x=\dfrac{t+u}{t-u}+1$ и $y=\dfrac{t}{2u}+u^2$.

16. Найти первую и вторую производную при $(x,y)=(1;1)$ функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $y+x\mathrm{e}^{y-1}=2$.

17. Найти дифференциал первого и второго порядка при $(x,y,z)=(1;1;1)$ функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $z^2+z+x-y=2$. Непосредственным вычислением проверить, что вторые смешанные производные функции $z=f(x,y)$ совпадают.

18. Найти производную функции $u=\ln\sqrt{x^2-y+z^3}$ при $(x_0,y_0,z_0)=(2;6;3)$ по направлению к точке $(x_1,y_1,z_1)=(-10;2;6)$.

19. Найти производную функции $z = f(x, y)$ заданной неявно уравнением $x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + z\sqrt{z} - z = 0$ в точке $(x, y, z) = (1; 1; 1)$ по направлению $\vec{a} = (3; -4)$.

20. Найти градиент и производную по направлению градиента функции $z = \dfrac{x - 4y}{\sqrt{x - 2y^2 + 2}}$ при $(x, y) = (1; 2)$.

21. Найти градиент и производную по направлению градиента функции $z = f(x, y)$ заданной неявно $x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z + 5z^2 = 364$ при $(x, y, z) = (20; -12; 2)$.

Ответы

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3(x^3y - x^2y^2 + xy + x - 1)^2 (3x^2y - 2xy^2 + y + 1)$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x(x^3y - x^2y^2 + xy + x - 1)^2 (x^2 - 2xy + 1)$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} + 2\dfrac{\sqrt[3]{y}}{x^3}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{\sqrt{y^3}} - \dfrac{1}{3x^2\sqrt[3]{y^2}}$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2; 3) = 2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2; 3) = 9$.

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3; 4) = \dfrac{7}{27}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}(3; 4) = \dfrac{11}{54}$.

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4xy(z^2 - 2z + 1)(x^2y)^{(z-1)^2 - 1}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x^2(z^2 - 2z + 1)(x^2y)^{(z-1)^2 - 1}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 4(z - 1)(x^2y)^{(z-1)^2 + 1}\ln(x^2y)$.

6. 1.

7. $\Delta u(2,1,3) = 4\Delta x + 7\Delta y - 5\Delta z + (\Delta x)^2 + 4\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - (\Delta z)^2 + (\Delta x)^2\Delta y$.

$\mathrm{d}u(2; 1; 3) = 4\mathrm{d}x + 7\mathrm{d}y - 5\mathrm{d}z$.

8. $\mathrm{d}z(1; 1) = 5\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y$.

9. $\mathrm{d}z(2; 8) = 8\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

10. $15{,}52$.

11. $4{,}02$.

12. $z''_{yx} = z''_{xy} = \dfrac{x}{2\sqrt{(x^2 - y)^3}}$.

13. $\mathrm{d}z(1; 1) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x + \dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}^2z(1; 1) = \dfrac{5}{9}\mathrm{d}x^2 - \dfrac{14}{9}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \dfrac{4}{9}\mathrm{d}y^2$.

14. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(1; 2) = \dfrac{79}{160}$.

15. $\dfrac{\partial z}{\partial t}(\;;1)=-\dfrac{19}{2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}(\;;1)=1$.

16. $y'(\;)=-\dfrac{1}{2}$; $y''(\;)=\dfrac{3}{8}$.

17. $\mathrm{d}z(\;;1)=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{3}\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}^2z(\;;1)=-\dfrac{2}{27}\mathrm{d}x^2+\dfrac{4}{27}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\dfrac{2}{27}\mathrm{d}y^2$.

18. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{a}}(\;;6;3)=\dfrac{37}{650}$.

19. $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}(\;;1)=-\dfrac{21}{5}$.

20. $\operatorname{grad} z(\;;2)=\left(\dfrac{3}{2};-8\right)$; $\dfrac{\partial u}{\partial \operatorname{grad} z}(\;;2)=\dfrac{\sqrt{265}}{2}$.

21. $\operatorname{grad} z(-20;-12)=(\;;2)$; $\dfrac{\partial u}{\partial \operatorname{grad} z}(-20;-12)=\sqrt{5}$.

1.7. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

Пусть дана поверхность $z=f(x,y)$ и такая точка $M_0(x_0,y_0)$, что в ней функция $z=f(x,y)$ дифференцируема. И пусть $z_0=f(x_0,y_0)$.

Касательной плоскостью к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется плоскость, проходящая через точку (x_0,y_0,z_0) с направляющими векторами $\vec{a}=(1;0;z'_x(x_0,y_0))$ и $\vec{b}=(0;1;z'_y(x_0,y_0))$.

Уравнение касательной плоскости можно записать следующим образом

$$z=z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+z_0$$

или в общем виде

$$z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

Нормалью к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется прямая, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$ и перпендикулярная к касательной плоскости, проходящей через эту точку.

Уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

В том случае, если поверхность задана в неявном виде $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ поверхности, имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

А уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Пусть даны две поверхности $z=f(x,y)$ и $z=g(x,y)$, которые пересекаются в точке $M_0(x_0,y_0)$, тогда *углом* между поверхностями $z=f(x,y)$ и $z=g(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется угол между касательными плоскостями, проведенными в данной точке к данным поверхностям, или что, то же самое, угол между нормалями, проведенными в данной точке к данным поверхностям.

Примеры

1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{\mathrm{e}^{x-\sqrt{y}-1}}{x}$ при $(x,y)=(3;4)$.

Решение. Т. к. $z(3;4)=\frac{1}{3}$, $z'_x=\frac{\mathrm{e}^{x-\sqrt{y}-1}x-\mathrm{e}^{x-\sqrt{y}-1}}{x^2}=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{x-\sqrt{y}-1}}{x^2}$, $z'_x(3;4)=\frac{2}{9}$, $z'_y=-\frac{\mathrm{e}^{x-\sqrt{y}-1}}{2x\sqrt{y}}$ и $z'_y(3;4)=-\frac{1}{12}$ то, направляющим вектором нормали к поверхности в точке $M_0\left(3;4;\frac{1}{3}\right)$ является вектор $\vec{n}=\left(\frac{2}{9};-\frac{1}{12};-1\right)$, или коллинеарный ему $\vec{\vec{n}}=(8;-3;-36)$.

Отсюда следует, что уравнение касательной плоскости в точке $M_0\left(3;4;\frac{1}{3}\right)$ имеет вид $z=\frac{2}{9}(x-3)-\frac{1}{12}(y-4)+\frac{1}{3}$, или в общем виде $8x-3y-36z=0$. Уравнение нормали в точке $M_0\left(3;4;\frac{1}{3}\right)$ имеет вид $\frac{x-3}{8}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-\frac{1}{3}}{-36}$.

2. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=z(x,y)$, заданной неявно $\sqrt{x+z}-z+2\frac{y^2-x}{z}-y=-2$ в точке $M_0(4;1;2)$.

Решение. Данная поверхность задается уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=\sqrt{x+z}-z+2\frac{y^2-x}{z}-y+2$. Так как $F'_x=\frac{1}{2\sqrt{x+z}}-\frac{2}{z}$, $F'_y=4\frac{y}{z}-1$ и $F'_z=\frac{1}{2\sqrt{x+z}}-1-2\frac{y^2-x}{z^2}$, то $F'_x(4;1;2)=-\frac{3}{4}$, $F'_y(4;1;2)=1$ и $F'_z(4;1;2)=-\frac{1}{4}$.

Поэтому, направляющим вектором нормали к поверхности в точке $M_0(2;1;2)$ является вектор $\vec{n}=\left(-\frac{3}{4};1;-\frac{1}{4}\right)$, или коллинеарный ему $\vec{\tilde{n}}=(3;-4;1)$.

Отсюда следует, что уравнение касательной плоскости в точке $M_0(2;1;2)$ имеет вид $3(x-2)-4(y-1)+(z-2)=0$, или в общем виде $3x-4y+z-4=0$. Уравнение нормали в точке $M_0(2;1;2)$ имеет вид $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-2}{1}$.

3. Для поверхности, заданной уравнением $x^2-5xy+y^2-3xz+yz=-9$, найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $2x+y+z+7=0$.

Решение. Т. к. касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости $2x+y+z+7=0$, то у них общий нормальный вектор $\vec{n}=(2;1;1)$.

Заданную поверхность можно записать следующим уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=x^2-5xy+y^2-3xz+yz+9$. Отсюда, $F'_x=2x-5y-3z$, $F'_y=-5x+2y+z$ и $F'_z=-3x+y$. Значит, направляющим вектором нормали к поверхности является вектор

$$\vec{n}_1=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x-5y-3z,-5x+2y+z,-3x+y)$$

который параллелен вектору $\vec{n}$, поэтому $\vec{n}_1=a\vec{n}$, где a – действительное число. Отсюда, получаем систему

$$\begin{cases} 2x-5y-3z=2a \\ -5x+2y+z=a \\ -3x+y=a \end{cases}.$$

Разрешив данную систему относительно x, y и z получаем

$$\begin{cases} x=-\frac{2a}{5} \\ y=-\frac{a}{5} \\ z=-\frac{3a}{5} \end{cases}.$$

Т. к. точка $(x,y,z)=\left(-\frac{2a}{5};-\frac{a}{5};-\frac{3a}{5}\right)$ должна удовлетворять уравнению поверхности $F(x,y,z)=0$, то имеем

$$\frac{4}{25}a^2-\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{25}a^2-\frac{18}{25}a^2+\frac{3}{25}a^2+9=0,$$

$$-\frac{4}{5}a^2=-9.$$

Значит, $a=\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Так как при $a=-\frac{3}{2}\sqrt{5}$ $(x,y,z)=\left(\frac{3\sqrt{5}}{5};\frac{3\sqrt{5}}{10};\frac{9\sqrt{5}}{10}\right)$, и при $a=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ $(x,y,z)=\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5};-\frac{3\sqrt{5}}{10};-\frac{9\sqrt{5}}{10}\right)$ и направляющим вектором нормали в данных точках поверхности является вектор $\vec{n}=(2;1;1)$, то

$$2\left(x-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)+y-\frac{3\sqrt{5}}{10}+z-\frac{9\sqrt{5}}{10}=0,$$

$$10x+5y+5z-12\sqrt{5}=0$$

и

$$2\left(x+\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)+y+\frac{3\sqrt{5}}{10}+z+\frac{9\sqrt{5}}{10}=0,$$

$$10x+5y+5z+12\sqrt{5}=0 -$$

искомые касательные плоскости.

4. Под каким углом пересекаются конус $4z^2=x^2+3y^2$ и гиперболический параболоид $z=xy$ при $x=1$ и $y=1$.

Решение. Так как при $x=1$ и $y=1$ гиперболический параболоид принимает значение $z=1$, то данные поверхности пересекаются в точке $M_0(1;1;1)$.

Первый способ. Так как точка $M_0(1;1;1)$ принадлежит конусу $4z^2=x^2+3y^2$, то уравнение данного конуса можно записать в виде $z=\frac{\sqrt{x^2+3y^2}}{2}$. Отсюда, $z'_x=\frac{x}{2\sqrt{x^2+3y^2}}$ и $z'_y=\frac{3y}{2\sqrt{x^2+3y^2}}$. Т. к. $z'_x(1;1)=\frac{1}{4}$ и $z'_y(1;1)=\frac{3}{4}$, то направляющим вектором нормали к конусу в точке $M_0(1;1;1)$ является вектор $\vec{n}_1(1;3;-4)$ (он коллинеарен вектору $\vec{n}=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};-1\right)$).

Для гиперболического параболоида $z=xy$ имеем, $z'_x=y$ и $z'_y=x$. Значит, направляющим вектором нормали к гиперболическому параболоиду в точке $M_0(1;1;1)$ является вектор $\vec{n}_2(1;1;-1)$.

Отсюда, $\cos\varphi=\left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right|=\left|\frac{8}{\sqrt{26}\sqrt{3}}\right|=\frac{8}{\sqrt{78}}$. Поэтому, угол между конусом и гиперболическим параболоидом равен $\arccos\frac{8}{\sqrt{78}}$.

Второй способ. Уравнение конуса можно переписать в виде $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=4z^2-x^2-3y^2$. Так как, $F'_x=-2x$, $F'_y=-6y$ и $F'_z=8z$, то направляющим вектором нормали к конусу в точке $M_0(1;1;1)$ является вектор

$\vec{n} = (-2; -6; 8)$, который параллелен вектору $\vec{n}_1$. Дальше решение такое же, как и в первом способе.

1.8. Задачи для самостоятельного решения

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

1. $z = x^2 - 3xy + 4y^2 - 5x + y + 2$ при $(x, y) = (1; 2)$.

2. $z = \cos^2 x \sin y$ при $(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. $z = e^{y^2 \sin x}$ при $(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{2}; 1\right)$.

4. Найти расстояние от точки $M_0\left(-\dfrac{\pi}{2}; 1; 1\right)$ до касательной плоскости к поверхности $z = (x+1)\operatorname{ctg} y$, проведенной в точке с координатами $(x, y) = \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. Найти углы, которые образует нормаль к поверхности $z = \sqrt{-1 + x^2 + 2y}$ в точке $(x, y) = (1; 2)$ с осями координат.

6. Для поверхности $z = 5x^2 - 3xy + 6$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $16x - 12y - 4z = 1$.

7. Найти угол между поверхностями $z_1 = \sqrt{x^2 + xy - 1}$ и $z_2 = x^2 - y^2 + 1$ при $(x, y) = (1; 1)$.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

8. $(2x - 3y + 1)(x + z)(z - y + 2) = 12$ в точке $M_0(2; 1; 1)$.

9. $4^{xz} + 4^{yz} = 8$ в точке $M_0(1; 1; 1)$.

10. $z^2 - 2z + 3xz + 2x^2 + y^2 + 3x - xy - 5yz + 3y + 2 = 0$ в точках пересечения с осью Oy.

11. Для поверхности $2x^2 + z^2 + 3x - 4y + 9z = 12$ найти уравнение нормали, параллельной прямой $\dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z-2}{3}$.

12. Под каким углом пересекаются поверхности $\sqrt{z^2 - 3} + z = x^2 - y^2$ и $z^2 + z = x - y + 5$ в точке $M_0(2; 1; 2)$.

Ответы

1. $9x - 14y + z + 9 = 0$; $\dfrac{x-1}{-9} = \dfrac{y-2}{14} = \dfrac{z-10}{-1}$.

2. $18x-3y+24z-5\pi-3\sqrt{3}=0$; $\dfrac{x-\pi/3}{-3/4}=\dfrac{y-\pi/3}{1/8}=\dfrac{z-\sqrt{3}/8}{-1}$.

3. $2\mathrm{e}y-z-\mathrm{e}=0$; $\dfrac{x-\pi/2}{0}=\dfrac{y-1}{2\mathrm{e}}=\dfrac{z-\mathrm{e}}{-1}$. 4. $\sqrt{6}/3$.

5. С осью Ox: $\pi/3$; с осью Oy: $\pi/3$; с осью Oz: $\pi/4$.

6. $4x-3y-z+7=0$. 7. $\arccos\left(\sqrt{14}/7\right)$.

8. $8x-12y+5z-9=0$; $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-12}=\dfrac{z-1}{5}$.

9. $x+y+2z-4=0$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

10. а) $5x-y+8z-2=0$; $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{8}$; б) $4x+y+3z+1=0$; $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$.

11. $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z+6}{3}$. 12. $\arccos\left(\sqrt{87}/87\right)$.

1.9. Экстремум функции нескольких переменных

Локальные экстремумы функции двух переменных

Функция $z=f(x,y)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке $M_0(x_0,y_0)$, если значения функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x,y)$ некоторой окрестности точки M_0, т.е. $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ [соответственно $f(x_0,y_0)<f(x,y)$] для всех точек $M(x,y)$, удовлетворяющих условию $|M_0M|<\delta$, где δ- достаточно малое положительное число.

Локальные максимум и минимум функции называются ее локальными экстремумами. Точка M_0, в которой достигается экстремум, называется точкой локального экстремума.

Необходимые условия экстремума

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е. $\dfrac{\partial f(x_0, y_o)}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial f(x_0, y_o)}{\partial y} = 0$.

Эти уравнения эквивалентны одному: $df(x_0, y_0) = 0$. Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума. В стационарной точке касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ параллельна плоскости Oxy.

Достаточные условия локального экстремума

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка дважды дифференцируемой в некоторой окрестности точки M_0 функции и пусть $A = f_{xx}''(x_0, y_0), B$

$$f_{xx}''(x_0, y_0), B = f_{xy}''(x_0, y_0), C = f_{yy}''(x_0, y_0), \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда

1. если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;
2. если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет;
3. если $\Delta = 0$, требуются дополнительные исследования. В этом случае используются неравенства $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ или $f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Эти условия эквивалентны следующим.

1) если $d^2 f(x_0, y_0) < 0$, то $f(x_0, y_0)$ – максимум функции $z = f(x, y)$;
2) если $d^2 f(x_0, y_0) > 0$, то $f(x_0, y_0)$ – минимум функции $z = f(x, y)$.

Примеры

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

Решение. Находим частные производные первого порядка: $z'_x = 3 - 2x - y; z'_y$

$3 \quad 2x \quad y; z'_y = 6 - x - 2y$.Решая систему $\begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ 6 - x - 2y \end{cases}$, находим $x = 0$ и $y = 3$. Следовательно, $M_0(0;3)$ – стационарная точка функции z. Находим частные производные второго порядка и их значения в найденной стационарной точке M_0.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2;$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1;$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$ Имеем: $A = -2;$ $B = -1;$ $C = -2;$ $\Delta = 4 - 1 = 3 > 0.$ Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке $P_0(0;3)$ функция имеет максимум: $z_{\max} = 18 - 9 = 9$.

2. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1$.

Решение. Находим стационарные точки. $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x; z'_y = 2xy + 2y.$

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}.$$

Решение последней системы дает 4 стационарные точки: $M_1(0;0);$ $M_2($

$M_1(0;0);$ $M_2(-5/3;0);$ $M_3(-1;2);$ $M_4(-1;-2).$ Находим частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 12x + 10;$ $z''_{xy} = 2y;$ $z''_{yy} = 2x + 2.$ Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $M_1(0;0)$: $A = 10;$ $B = 0;$ $C = 2;$ $\Delta = 20.$ Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум: $z_{\min} = z(0;0) = 1.$

2) В точке $M_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$: $A = -10;$ $B = 0;$ $C = -4/3;$ $\Delta = 40/3.$Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в этой точке функция имеет максимум: $z_{\max} = z\left(-\frac{5}{3}; 0\right) = 5\ 17/27.$

3) В точке $M_3(-1;2)$: $A = -2;$ $B = 4;$ $C = 0;$ $\Delta = -16$. Т.к. $\Delta < 0$, то в этой точке экстремума нет.

4) В точке $M_4(-1;-2)$: $A = -2;$ $B = -4;$ $C = 0;$ $\Delta = -16$. Т.к. $\Delta < 0$, то в этой точке экстремума нет.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка функции z: $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$. Решая систему уравнений $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$, находим стационарную точку $M_0(0;\,0)$ данной функции. Т.к. $A = z''_x(M_0) = 0,$ $B = z''_{xy}(M_0) = 0,$ C $z''_{xy}(M_0)\ \ 0,$ $C = z''_{yy}(M_0) = 0,$ то $\Delta = AC - B^2 = 0.$ Следовательно, нельзя ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $M_0(0;0)$. В данном случае стационарная точка $M_0(0;\,0)$ является точкой локального минимума, поскольку $\Delta z > 0$ для любой точки $M(x, y)$ из окрестности точки $M_0(0;0)$ $z_{\min} = z(0;0) = 0.$

1.10. Условный экстремум функции нескольких переменных

Условным экстремумам функции $z = f(x, y)$, называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (уравнением связи).

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный безусловный экстремум так называемой функции Лагранжа $F(x, y)\ f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ - неопределенный постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные $x, y, \lambda.$

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании исследования знака второго дифференциала функции Лагранжа

$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$ для испытуемой системы значений $x, y, \lambda,$ при условии, что dx и dy связаны уравнением $\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0 \quad (dx^2 + dy \neq 0).$

Функция $f(x, y)$ имеет условный минимум, если $d^2F > 0,$ и условный максимум, если $d^2F < 0.$

Примеры

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 6y - 2y + 1$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $x^2 + y - 4 = 0.$

Решение. Уравнение связи представляет параболу $y = 4 - x^2$. Заменив в заданной функции z переменную y через $4 - x^2$, получим: $z(x) = x^2 + 6x - 2(4 - x^2) + 1$ или $z(x) = 3x^2 + 6x - 7.$ Полученную функцию $z(x)$ исследуем на экстремум. $\frac{dz}{dx} = 6x + 6;$ $6x + 6 = 0;$ $x_0 = -1$ - стационарная точка функции $z(x)$. Находим вторую производную: $\frac{d^2z}{dx^2} = 6.$ Так как вторая производная положительна, то в найденной стационарной точке функция $z(x)$ имеет минимум. Подставив $x_0 = -1$ в уравнение связи, получим $y_0 = 4 - 1 = 3.$ Следовательно, точка $M_0(-1; 3)$ – точка условного экстремума. В этой точке функция $z(x, y)$ имеет минимум $z_{\min} = z(-1; 3) = 1 - 6 - 6 + 1 = -10.$ Определим теперь точку условного экстремума, пользуясь методом множителей Лагранжа.

1) Составим вспомогательную функцию Лагранжа. Так как по условию

$f(x, y) = x^2 + 6x - 2y + 1$ и $\varphi(x, y) = x^2 + y - 4,$ то

$F(x, y, \lambda) = x^2 + 6x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y - 4).$

2) Находим частные производные

$F'_x, F'_y, F'_\lambda.$ $F'_x = 2x + 6 + 2\lambda x;$ $F'_y = -2 + \lambda;$ $F'_\lambda = x^2 + y - 4.$

3) Приравняв каждую частную производную нулю, получаем систему:

$$\begin{cases} 2x + 6 + 2\lambda x = 0, \\ -2 + \lambda = 0, \\ x^2 + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $\lambda = 2$, тогда из первого следует $x = -1$, а из третьего $y = 3$. Таким образом, $M_0(-1;3)$ – точка условного экстремума.

2. Найти экстремум функции $z = 9 - 8x - 6y$ при условии, что аргументы его удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 25$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты z плоскости $z = 9 - 8x - 6y$ для точек ее пересечения с цилиндром $x^2 + y^2 = 25$. Составляем функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$; находим ее частные производные: $F'_x = -8 + 2\lambda x$, $F'_y = -6 + 2\lambda y$.

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0, \\ -6 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda x - 4 = 0, \\ \lambda y - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим: $\lambda_1 = 1, x_1 = 4, y_1 = 3; \lambda_2 = -1, x^2 = -4, y_2 = -3$. Находим вторые частные производные: $F''_{xx} = 2\lambda, F''_{xy} = 0, F''_{yy} = 2\lambda$ и выражения для дифференциала второго порядка $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$. Поскольку $d^2F > 0$ при $\lambda_1 = 1, x_1 = 4, y_1 = 3,$ то функция $F(x, y, \lambda)$ в этой точке имеет условный минимум. Если $\lambda_2 = -1, x_2 = -4, y_2 = -3,$ то $d^2F < 0,$ поэтому в данном случае функция $F(x, y, \lambda)$ имеет условный максимум.

Следовательно,

$$z_{\max} = f(-4; -3) = 9 - 8(-4) - 6(-3) = 59, \; z_{\min} = f(4,3) = 9 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = -41.$$

1.11. Наибольшее и наименьшее значения (глобальные экстремумы) функции двух переменных в замкнутой области

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в некоторой замкнутой области D. Эти значения функция достигает либо во внутренних точках области, которые являются стационарными точками функции, либо на границе области. Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках; исследовать на экстремум эти точки нет необходимости;

2) найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области; если граница области состоит из нескольких линий (участков), то исследование проводится для каждого участка в отдельности;

3) сравнить все полученные значения функции; наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее – наименьшим значением функции в заданной области.

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в замкнутом треугольнике AOB, ограниченном осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$.

Решение. Найдем стационарные точки. $z'_x = 2x - 2;\ z'_y = 4y - 8.$

Решая систему: $\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y - 8 = 0 \end{cases}$, находим стационарную точку $M_0(1;2)$. Эта точка лежит внутри области.

Вычислим значение функции в этой точке: $z(M_0) = z(1;2) = 1 + 8 - \lambda - 16 + 5 = -4.$ Граница заданной области состоит из отрезка OA оси Ox, отрезка OB оси Oy и отрезка AB. Определим наибольшее и наименьшее значение функции z на каждом из этих участков. На отрезке OA $y = 0$, а $0 \le x \le 4$. При $y = 0$ функция

$z = x^2 - 2x + 5$ есть функция одной независимой переменной x. Находим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0; 4]$. $z'_x = 2x - 2$; $2x - 2 = 0$; $x = 1$. $M_1(1; 0)$ – стационарная точка. $z(M_1) = z(1;0) = 4$.

Вычислим значения функции на концах отрезка OA, то есть в точках O и A:

$$z(O) = z(0;0) = 5; \; z(A) = z(4;0) = 13.$$

На отрезке OB $x = 0$ и $0 \le y \le 4$. При $x = 0$ имеем $z = 2y^2 - 8y + 5$. Находим наименьшее и наибольшее значение этой функции z от переменной y на отрезке $[0;4]$.

$z'_y = 4y - 8$, $4y - 8 = 0$, $y = 2$, $M_2(0;2)$ – стационарная точка. $z(M_2) = z(0; 2) = -3$.

Вычислим значения функции z на концах отрезка OB, то есть в точках O и B: $z(O) = z(0; 0) = 5$, $z(B) = z(0; 4) = 5$. Исследуем теперь отрезок AB. Уравнение прямой $AB: y = 4 - x$. Подставив это выражение для y в заданную функцию z, получим $z = x^2 + 2(4 - x)^2 - 2x - 8(4 - x) + 5$ или $z = 3x^2 - 10x + 5$. Определим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0;4]$. $z'_x = 6x - 10$, $6x - 10 = 0$, $x = 5/3$, $M_3(5/3; 7/3)$ – стационарная точка. $z(M_3) = z(5/3; 7/3) = 10/3$. Значения функции в точках A и B найдены ранее. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что наибольшее значение заданная функция z в заданной замкнутой области достигает в точке $A(0;4)$, а наименьшее значение – в стационарной точке $M_0(1;2)$. Таким образом, $z_{наиб} = z(4; 0) = 13$ и $z_{наим} = z(1; 2) = -4$.

1.12. Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на экстремум следующие функции:

1. $z = x^3 + y^3 - 6xy$;
2. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$;

3. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$;

4. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$;

5. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;

6. $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

7. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

8. $z = (x-1)^2 + 4y^2$;

9. $z = e^{-x^2-y^2}(3x^2 + y^2)$;

10. $z = (1 + 2x - 2y)/\sqrt{1 + x^2 + y^2}$;

Найти условный экстремум функции:

11. $z = 8 - 2x - 4y$ при $x^2 + 2y^2 = 12$;

12. $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y - 6 = 0$;

13. $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ при $x + y = 4$;

14. $z = x^2 + y^2$ при $x/4 + y/3 = 1$;

15. $z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$;

16. $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $x^2 - y + z^2 = 0$ и $2x - y + z = 0$.

17. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наибольшее значение.

18. Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, если его полная поверхность равна S.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции.

19. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y + 3 = 0$.

20. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6xy - 2y$ в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

21. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$ в квадрате, ограниченном осями координат и прямыми $x = 4$ и $y = 4$.

22. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами $A(1; -3)$; $B(1; 2)$; $C(4; 2)$; $D(4; -3)$.

23. $z = 2x^2 - 2y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 9$.

24. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ в области $0\le x\le \pi/2;\ 0\le y\le \pi/2.$

25. $z=\cos x\cos y\cos(x+y)$ в области $0\le x\le \pi;\ 0\le y\le \pi.$

26. Разложить число a на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

27. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.

28. Из всех треугольников, имеющих данный периметр, найти наибольший по площади.

29. Найти прямоугольный параллелепипед данного V, имеющий наименьшую полную поверхность.

30. Дан треугольник с вершинами $A(4;-2), B(3;6), C(-1;1)$. В плоскости треугольника ABC найти точку, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшей.

Ответы

1. $z_{\min}=z(2;2)=-8$.
2. $z_{\max}=z(2;-2)=8$.
3. $z_{\min}=z(-4;1)=-1$.
4. $z_{\max}=z(0;3)=9$.
5. $z_{\min}=z(1;1/2)=0$.
6. $z_{\min}=z(1;1)=-1$.
7. $z_{\min}=z(2;1)=-28$.
8. $z_{\max}=z(-2;-1)=28$.
9. $z_{\max}=z(-1;0)=z(1;0)=3e^{-1}$; $z_{\min}=z(0;0)=0$.
10. $z_{\max}=z(2;-2)=3$.
11. $z_{\min}=z(2;2)=-4$; $z_{\max}=z(-2;-2)=20$.
12. $z_{\min}=z(-2;4)=-12$.
13. $z_{\min}=z(5/2;3/2)=15/14$.
14. $z_{\min}=z(36/25;48/25)=144/25$.
15. $z_{\max}=z(5/4;5/6)=25/24$.
16. $u_{\min}=u(0;0;0)=0$; $u_{\max}=u(2;5;1)=30$.
17. ($z=x^2+y^2$ при $xy/2=s$) катеты равны.
18. ($u=xyz$ при $2(xy+yz+zx)=s$), куб со стороной $\sqrt{s/6}$.
19. $z_{наим}=-1;\quad z_{наиб}=6.$
20. $z_{наим}=-9;\quad z_{наиб}=0.$

21. $z_{наим} = -36; \quad z_{наиб} = 4.$

22. $z_{наим} = -11; \quad z_{наиб} = 26.$

23. $z_{наим} = -18; \quad z_{наиб} = 18.$

24. $z_{наим} = 0; \quad z_{наиб} = 3\sqrt{3}/2.$

25. $z_{наим} = -1/8; \quad z_{наиб} = 1.$

26. при $a/3$.

27. Равносторонний.

28. Равносторонний.

29. Куб с ребром $\sqrt[3]{v}$.

30. $N(2; 1)$.

2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

В дифференциальном исчислении решалась задача нахождения производной $f'(x)$, или дифференциала $df = f'(x)dx$ функции. В интегральном исчислении решается обратная задача. По функции $f(x)$ требуется найти функцию $F(x)$ такую, чтобы выполнялись равенства $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$

Определение 2.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$.

Теорема 2.1. Любая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Теорема 2.2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две любые первообразные для $f(x)$ на X, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – постоянная.

Следствие. Если $F(x)$ – некоторая первообразная функция $f(x)$ на множестве X, то все первообразные функции имеют вид $F(x) + C$, где C – постоянная.

Операция нахождения первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется *интегрированием.*

Определение 2.2. Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ и $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
2. $\int dF(x) = F(x)+C$;
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$,где $a \neq 0$, a - постоянный множитель;
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx$;
5. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$;
6. $\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+C$, т.е. любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной.

Таблица основных неопределенных интегралов

В приведенной ниже таблице буква u может обозначать, как независимую переменную $(u = x)$, так и функцию от независимой переменной $(u = u(x))$.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad (n \neq -1)$;
2. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C \quad (a>0, a\neq 1)$;
3. $\int e^u du = e^u + C$;
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C$;
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$;
6. $\int \cos u du = \sin u + C$;

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

9. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$;

10. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$;

11. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$

12. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$;

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$;

15. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$;

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \quad (|u| > |a|)$;

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad (|u| < |a|)$.

2.2. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование. Оно основано на приведении подынтегрального выражения к табличному виду и использовании свойств интеграла.

Примеры

1. $\int (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \int (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \int x dx - \int 2\sqrt{x} dx + \int dx = \int x dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int dx =$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x + C = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C;$$

2. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \left| 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \right| = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$;

3. $\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)} dx = \int \frac{(1 + x^2) + 2x}{x(1 + x^2)} dx = \int \frac{1 + x^2}{x(1 + x^2)} dx + \int \frac{2x}{x(1 + x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1 + x^2} =$

$$= \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C;$$

4. $$\int 2^x e^{2x} dx = \int 2^x \left(e^2\right)^x dx = \int \left(2 \cdot e^2\right)^x dx = \frac{\left(2 \cdot e^2\right)^x}{\ln\left(2e^2\right)} + C;$$

5. $$\int \left(2\sin x - \frac{1}{9 + x^2} + \frac{1}{x^4} \right) dx = 2\int \sin x dx - \int \frac{dx}{3^2 + x^2} +$$

$$+ \int x^{-4} dx = -2\cos x - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \frac{x^{-3}}{-3} + C;$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin x + C;$$

7. $$\int \frac{x^2 dx}{1 - x^2} = \int \frac{(x^2 - 1) + 1}{1 - x^2} dx = -\int dx + \int \frac{1}{1 - x^2} dx = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C;$$

8. $$\int \frac{2x + 3}{3x + 2} dx = \int \frac{2\left(x + 3/2\right)}{3\left(x + 2/3\right)} dx = \frac{2}{3}\int \frac{x + 3/2}{x + 2/3} dx = \frac{2}{3}\int \frac{x + 2/3 - 2/3 + 3/2}{x + 2/3} dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{\left(x + 2/3\right) + 5/6}{x + 2/3} dx = \frac{2}{3}\int \left(1 + \frac{5/6}{x + 2/3} \right) dx = \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\int \frac{d\left(x + 2/3\right)}{x + 2/3} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\ln\left|x + \frac{2}{3}\right| + C;$$

9. $$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int \frac{2^x \cdot 2dx}{\left(2 \cdot 5\right)^x} dx - \int \frac{5^x \cdot 5^{-1}}{\left(2 \cdot 5\right)^x} dx = 2\int \frac{dx}{5^x} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{2^{+x}} = 2\int 5^{-x} dx - \frac{1}{5}\int 2^{-x} dx =$$

$$= \left|d(-x) = -dx\right| = -2\int 5^{-x} d(-x) + \frac{1}{5}\int 2^{-x} d(-x) = -2\frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5}\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C;$$

10. $$\int \frac{dx}{2 + 3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2/3}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2/3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2/3}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + C.$$

Проверим результат интегрирования примера 10 дифференцированием.

Найдем $$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + C \right)' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{2 + 3x^2}.$$

Производная от первообразной равна подынтегральной функции, т.е. интеграл вычислен верно.

«Подведение» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$.

Переход от левой части равенства к правой называется подведением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала. В этом методе интегрирования используют свойства дифференциала сложной функции:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}du \quad u = ax+b.$$

Поэтому: $dx = d(x \pm C)$, где C – произвольная постоянная, $dx = \frac{1}{c}d(cx)$

Например: $x^2dx = \frac{1}{3}(x^3)'dx = \frac{1}{3}dx^3$; $\sin xdx = (-\cos x)'dx = -d\cos x$,

$xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}d\left(e^{x^2}\right)$ и т.д.

Примеры

1. $\int \operatorname{tg}xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left|\sin xdx = -d\cos x\right| = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} =$

$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$;

2. $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \left|2xdx = dx^2\right| = \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C =$

$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$;

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \left|xdx = \frac{1}{2}dx^2\right| = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{2}dx^2 = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{3}}d(1-x^2) =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = C - \frac{3}{4}(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$;

4. $\int \frac{x^5dx}{(x^6+1)} = \left|x^5dx = \frac{1}{6}dx^6\right| = \frac{1}{6}\int \frac{d(x^6+1)}{x^6+1} = \frac{1}{6}\ln(x^6+1) + C$;

5. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}dx}{1+x^2} = \left|\frac{dx}{1+x^2} = d\operatorname{arctg}x\right| = \int e^{\operatorname{arctg} x} d\operatorname{arctg}x = e^{\operatorname{arctg} x} + C$;

6. $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d3x = \frac{1}{3}\sin 3x + C$;

7. $\int \cos^5 x \sin x dx = \left|\sin x dx = -d\cos x\right| = -\int \cos^5 x d\cos x = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$;

8. $\int \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}dx}{x} = \left|\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right| = \int (\ln x)^{\frac{3}{2}} d\ln x = \frac{2}{5}\ln^{\frac{5}{2}} x + C$;

9. $\int \frac{3^x dx}{1+9^x} = \left|3^x dx = \frac{1}{\ln 3} d3^x\right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{d3^x}{1+(3^x)^2} = \frac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg}3^x + C$;

10. $\int e^{-x^3} x^2 dx = \left|x^2 dx = \frac{1}{3}dx^3\right| = \int e^{-x^3}\frac{1}{3}dx^3 = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3} d(-x^3) = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$;

11. $\int \frac{x^3 dx}{\cos^2(x^4-7)} = \left|x^3 dx = \frac{1}{4}dx^4\right| = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{\cos^2(x^4-7)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d(x^4-7)}{\cos^2(x^4-7)} =$

$\frac{1}{20}\operatorname{tg}(x^4-7) + C$;

12. $\int \frac{dx}{x\ln|x|} = \left|\frac{dx}{x} = d\ln x\right| = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln\ln|x| + C$;

13. $\int e^x \cos(e^x)dx = \left|e^x dx = de^x\right| = \int \cos(e^x)de^x = \sin(e^x) + C$;

14. $\int \frac{dx}{7+5x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\sqrt{5}x}{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}} + C =$

$= \frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}x + C$;

15. $\int \sin(-9x)dx = \left|dx = -\frac{1}{9}d(-9x)\right| = \frac{1}{9}\cos(-9x) + C$;

16. $\int \frac{dx}{5-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(5-3x)}{5-3x} = -\frac{1}{3}\ln|5-3x| + C$;

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-8x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{8}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{d(\sqrt{8}x)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{8}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \frac{\sqrt{8}x}{\sqrt{3}} + C$;

18. $\int \frac{x-7}{3x^2+4} dx = \int \frac{xdx}{3x^2+4} - \int \frac{7dx}{3x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{3x^2+4} - 7\int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2 + 2^2} =$

$= \frac{1}{6} \int \frac{d(3x^2+4)}{3x^2+4} - \frac{7}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2 + 2^2} = \frac{1}{6} \ln(3x^2+4) - \frac{7}{2\cdot\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2} + C$;

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{6}} + C =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$;

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{(\sqrt{2}x)^2 - (\sqrt{6})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2-6}\right| + C$;

21. $\int e^{4-5x} dx = \left| dx = -\frac{1}{5} d(4-5x) \right| = -\frac{1}{5} \int e^{4-5x} d(4-5x) = -\frac{1}{5} e^{4-5x} + C$;

22. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx = \left| \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} d(\ln(2x-1)) \right| =$

$= \frac{1}{2} \int (\ln(2x-1))^{\frac{1}{2}} d(\ln(2x-1)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ln^{\frac{3}{2}} |2x+1| + C = \frac{1}{3} \ln^{\frac{3}{2}} |2x+1| + C$;

23. $\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \arcsin x \right| = \int \frac{d \arcsin x}{\arcsin x} = \ln|\arcsin x| + C$;

24. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}} = \left| xdx = \frac{1}{2} dx^2 \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{e^{x^2-3}} = -\frac{1}{2} e^{3-x^2} + C$;

25. $\int \frac{dx}{5x^3-4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\sqrt{5}x}{(\sqrt{5}x)^2 - 2^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\cdot 2} \ln\left|\frac{\sqrt{5}x-2}{\sqrt{5}x+2}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}x-2}{\sqrt{5}x+2}\right| + C$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы, используя «подведение» множителя под знак дифференциала и непосредственное интегрирование.

1. $\int (3-x^2)^3 dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; 3. $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$;

4. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; 5. $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$; 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-7x^2}}$;

7. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$; 8. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$; 9. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$;

10. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{3x^2-2}}dx$; 11. $\int \sqrt{5-7x}\,dx$; 12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-9x}}$;

13. $\int \sqrt[3]{(1-3x)^2}\,dx$; 14. $\int \frac{dx}{4-3x}$; 15. $\int \frac{dx}{8x+13}$;

16. $\int (2x-3)^{15} dx$; 17. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x+1}$; 18. $\int \sin(6-5x)\,dx$;

19. $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$; 21. $\int \frac{9dx}{2x^2-7}$;

22. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$; 23. $\int \frac{2dx}{4+3x^2}$; 24. $\int \frac{dx}{(3x+1)\ln^2(3x+1)}$;

25. $\int \cos^7 2x \sin 2x\,dx$; 26. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\mathrm{ctg}^3 x}$; 27. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

28. $\int (2^x+3^x)^2 dx$; 29. $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$; 30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Ответы

1. $27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$; 2. $\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+\arcsin x+C$;

3. $\sin x-\cos x+C, (\sin x>0; \cos x>0)$; 4. $\mathrm{arctg}x-\frac{1}{x}+C$;

5. $x+\sin x+C$; 6. $\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin x+C$;

7. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C$; 8. $\mathrm{tg}x+x+C$;

9. $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

10. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C$;

11. $-\frac{2}{21}(5-7x)^{\frac{3}{2}}+C$;

12. $-\frac{1}{6}(2-9x)^{\frac{2}{3}}+C$;

13. $-\frac{1}{5}(1-3x)^{\frac{5}{3}}+C$;

14. $-\frac{1}{3}\ln|4-3x|+C$;

15. $\frac{1}{8}\ln|8x+13|+C$;

16. $\frac{1}{32}(2x-3)^{16}+C$;

17. $C-\ln|\cos x+1|$;

18. $\frac{1}{5}\cos(6-5x)+C$;

19. $\frac{3}{\sqrt{7}}\ln\left|\sqrt{7}x+\sqrt{7x^2-4}\right|+C$;

20. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+3}\right|+C$;

21. $\frac{9}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{7}}{\sqrt{2}x+\sqrt{7}}\right|+C$;

22. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|+C$;

23. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$;

24. $-\frac{1}{3\ln(x+1)}+C$;

25. $C-\frac{1}{16}\cos^8 2x$;

26. $\frac{1}{2\operatorname{ctg}^2 x}+C$;

27. $\frac{1}{5}\arcsin^5 x+C$;

28. $\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9}{\ln 9}+C$;

29. $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+2}\right|+C$;

30. $-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C;\ (x>0)$

2.4. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, тогда $dx=\varphi'(t)dt$.

Теорема 2.3. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X - множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

которая называется формулой замены переменой в неопределенном интеграле.

После вычисления интеграла следует вернуться к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$.

При интегрировании заменой переменной нельзя дать общее правило выбора подстановки для любой функции. Однако это можно сделать только при интегрировании отдельных классов функций (тригонометрических, иррациональных и т.д.). Так, например, интегралы вида:

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx.$$

При помощи тригонометрических подстановок соответственно:

$$x=\frac{a}{\cos t}\ \text{ или }\ x=\frac{a}{\sin t};\ \ x=a\cos t\ \text{ или }\ x=a\sin t;\ \ x=a\operatorname{tg} t.$$

Примеры

Вычислить интегралы при помощи подстановок.

1. $\int x\sqrt{x+2}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x+2}=t; & x=t^2-2\\ dx=2tdt; & \end{matrix}\right|=\int(t^2-2)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-2t^2)dt=$

$=2\frac{t^5}{5}-4\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3}+C;$

2. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\left|\sqrt{x}=t;\ x=t^2;\ dx=2tdt\right|=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$

$=2\int dt-2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C;$

3. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x}d\ln x=\left|\sqrt{1+\ln x}=t\ \ln x=t^2-1;\ d\ln x=2tdt\right|=\int\frac{t\cdot 2tdt}{t^2-1}=$

$=2\int\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2t+2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$

$=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C;$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\left|\sqrt{e^x+1}=t;e^x=t^2-1,x=\ln(t^2-1),dx=\frac{2tdt}{t^2-1}\right|=\int\frac{2tdt}{t(t^2-1)}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C;$$

5. $$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left|\sqrt{x}=t,\ x=t^2,\ dx=2tdt\right|=\int\frac{\cos t\cdot 2tdt}{t}=2\int\cos tdt=2\sin t+C=$$

$$=2\sin\sqrt{x}+C;$$

6. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\left|\frac{1}{x}=t;\ x=\frac{1}{t};\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\right|=-\int\frac{t^2\cdot\frac{1}{t^2}dt}{\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{4t^2-1}}=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(t^2-1\right)=-\frac{1}{8}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2+C=C-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{x^2}-1};$$

7. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\frac{1}{x}=t;x=\frac{1}{t};dx=-\frac{1}{t^2}dt\right|=\int\frac{t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\frac{t^2+t+1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^2+t+1}{t^2}}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=-\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right|+C=-\ln\left|\frac{2+x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C;$$

8. $$\int\sqrt{9-x^2}dx=\left|x=3\sin t;dx=3\cos tdt,\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t\right|=\int 3\cos t\cdot 3\cos tdt=$$

$$=9\int\cos^2 tdt=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\left(\int dt+\int\cos 2tdt\right)=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\left|x=3\sin t\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{3}\right|=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C;$$

9. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\cos t};\ dx=+\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}-1}=\dfrac{\sin t}{\cos t}\end{array}\right|=\int\frac{\sin t\cdot\cos t\cdot\sin t}{\cos t\cdot\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt=$

$\displaystyle=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{dt}{\cos^2 t}-\int dt=\operatorname{tg}t-t+C,$ где $t=\arccos\dfrac{1}{x}$;

10. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx=\left|x=\operatorname{tg}t;dx=\frac{dt}{\cos^2 t};\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=\frac{1}{\cos t}\right|=\int\frac{1}{\cos t\cdot\operatorname{tg}^4 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=$

$\displaystyle=\int\frac{\cos^4 t}{\cos^3 t\cdot\sin^4 t}dt=\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=\int\sin^{-4}t\,d\sin t=\frac{\sin^{-3}t}{-3}+C=C-\frac{1}{3\sin^3 t},$ где $t=\operatorname{arctg}x$.

2.5. Интегрирование по частям

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на некотором интервале, тогда имеет место формула $\int udv=uv-\int vdu$, называемая формулой интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям удобно применять в следующих случаях:

1) Интегралы вида: $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\int P_n(x)\sin axdx$; $\int P_n(x)\cos axdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n; a – число. В этих интегралах полагаем $u=P_n(x)$, и, применив интегрирование по частям n раз, получаем результат.

2) Интегралы вида: $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$; $\int P_n(x)\operatorname{arctg}xdx$; $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}xdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Их можно вычислить по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

3) Интегралы вида: $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, (a, b - числа), $\int\sin(\ln x)dx$ и т.д. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям, после чего получается снова исходный интеграл с некоторым коэффициентом. Имеем

равенство, которое является линейным алгебраическим уравнением относительно искомого интеграла.

Примеры

1. $$\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x,\ dv = dx; \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = x \end{vmatrix} = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C;$$

2. $$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u = x^2;\ dv = e^{-x}dx \\ du = 2xdx;\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -x^2e^{-x} - \int -e^{-x}2xdx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x,\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx,\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C;$$

3. $$\int \ln(1+x^2)dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x^2+1),\ dv = dx \\ du = \dfrac{2xdx}{x^2+1},\ v = x \end{vmatrix} = x\ln(1+x^2) - \int \frac{x\cdot 2xdx}{x^2+1} = x\ln(1+x^2) -$$

$$-2\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = x\ln(1+x^2) - 2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int\frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C;$$

4. $$\int x\sin 7x dx = \begin{vmatrix} u = x,\ dv = \sin 7x dx \\ du = dx,\ v = -\dfrac{1}{7}\cos 7x \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}x\cos 7x + \frac{1}{7}\int\cos 7x dx = -\frac{1}{7}x\cos 7x +$$

$$+\frac{1}{49}\sin 7x + C;$$

5. $$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 e^{x} x dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2} dx^2 = \begin{vmatrix} u = x^2,\ dv = e^{x^2}dx^2 \\ du = 2xdx,\ v = e^{x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2} - 2\int xe^{x^2}dx\right) = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C =$$
$$= \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C;$$

6. $\int (x^2-5x+4)e^{-x}dx\left|\begin{matrix} u=x^2-5x+4,\ dv=e^{-x}dx \\ du=(2x-5)dx,\ \ v=-e^{-x}\end{matrix}\right|=(x^2-5x+4)e^{-x}+\int (2x-5)e^{-x}dx=$

$=\left|\begin{matrix} u=2x-5,\ dv=e^{-x}dx \\ du=2dx,\ v=-e^{-x}\end{matrix}\right|=-(x^2+5x+4)e^{-x}+\left(-(2x+5)e^{-x}+2\int e^{-x}dx\right)=$

$=-(x^2+5x+4)e^{-x}-(2x+5)e^{-x}-2e^{-x}+C=C-e^{-x}(x^2+7x+11);$

7. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx=\left|\begin{matrix} u=x,\ dv=\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} \\ du=dx,\ v=-\frac{1}{\sin x}\end{matrix}\right|=-\frac{x}{\sin x}+\int\frac{dx}{\sin x}=-\frac{x}{\sin x}+\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{x}{\sin x}+$

$+\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}=-\frac{x}{\sin x}+\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$

8. $\int \arccos x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\arccos x,\ dv=dx \\ du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},v=x\end{matrix}\right|=x\arccos x+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arccos x-$

$-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=x\arccos x-\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2+C=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C;$

9. $\int \sin\ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\sin\ln x,\ dv=dx \\ du=\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}dx,\ v=x\end{matrix}\right|=x\sin\ln x-\int x\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\sin\ln x-$

$-\int\cos\ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\cos\ln x,\ dv=dx \\ du=\frac{-\sin\ln x}{x}dx,\ v=x\end{matrix}\right|=x\sin\ln x-\left(x\cos\ln x+\int x\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\right)=$

$=x\sin\ln x-x\cos\ln x-\int\sin\ln x\,dx;$

Имеем уравнение относительно $\int\sin\ln x\,dx$.

$\int\sin\ln x\,dx=x(\sin\ln x-\cos\ln x)-\int\sin\ln x\,dx;$

$2\int\sin\ln x\,dx=x(\sin\ln x-\cos\ln x);$

$$\int \sin\ln x dx = \frac{1}{2}x(\sin\ln x - \cos\ln x) + C;$$

$$10.\ \int e^{ax}\cos bx dx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, dv = \cos bx dx \\ du = ae^{ax}dx, v = \frac{1}{b}\sin bx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\text{в}}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, dv = \sin bx dx \\ du = ae^{ax}dx, v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{matrix} \right| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx;$$

Имеем $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx + \frac{a}{b}\cos bx \right) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx$, или

$$\int e^{ax}\cos bx dx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx + \frac{a}{b}\cos bx \right);$$

$$\frac{b^2 + a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx + \frac{a}{b}\cos bx \right) \Rightarrow \int e^{ax}\cos bx dx =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\left(\frac{b\sin bx + a\cos bx}{b} \right) : \frac{b^2 + a^2}{b^2};$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

2.6. Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы, используя замену переменной.

1. $\int x\sqrt{3 - 5x}dx$;
2. $\int x(x + 2)^{10}dx$;
3. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx$;
4. $\int \frac{1 - 2\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}dx$;
5. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x + 3}}dx$;
6. $\int \frac{dx}{3^x + 1}$;
7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;
8. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2\cos x}}$;
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$;
10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4\ln^2 x}}$.

Вычислить интегралы с помощью интегрирования по частям.

11. $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

12. $\int e^{-x}\left(x^2+4\right)dx$;

13. $\int x\operatorname{arctg}2x dx$;

14. $\int x^2 3^x dx$;

15. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$;

16. $\int x\sin 2x dx$;

17. $\int \arccos x dx$;

18. $\int \ln^3 x dx$;

19. $\int e^{2x}\sin x dx$;

20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.

Ответы

1. $-\frac{2}{25}\sqrt{\left(1-5x\right)^3}\left(\frac{2}{5}+x\right)+C$;

2. $\left(x+2\right)^{11}\left(\frac{1}{12}x-\frac{1}{66}\right)+C$;

3. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{x}\right)-\arccos\frac{1}{x}+C$;

4. $-2x+6\sqrt{x}-6\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$;

5. $\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}\left(\frac{3}{5}x-\frac{27}{10}\right)+C$;

6. $\frac{1}{\ln 3}\ln\left(\frac{3^x}{3^x+1}\right)+C$;

7. $2e^{\sqrt{x}}+C$;

8. $-\sqrt{1+2\cos x}+C$;

9. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$;

10. $\frac{1}{2}\arcsin\left(2\ln x\right)+C$;

11. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$;

12. $-e^{-x}\left(x^2+2x+6\right)+C$;

13. $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}\right)\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+C$;

14. $\frac{1}{\ln 3}3^x\left(x^2-\frac{2x}{\ln 3}+\frac{2}{\ln^2 3}\right)+C$;

15. $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$;

16. $\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{x}{8}\cos 2x+C$;

17. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

18. $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+C$;

19. $e^{2x}\left(\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}\cos x\right)+C$;

20. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$.

2.7. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения их на простейшие дроби

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m<n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется неправильной.

Простейшей дробью называется правильная дробь одного из следующих четырёх типов:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k \geq 2,\ k \in N)$;

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $p^2-4q<0$);

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geq 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q – действительные числа.

Теорема 2.4. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q_n(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{S_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{S_m}$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_1}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{S_1}x+D_{S_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{S_1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\ldots+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}},$$

где $A_1, A_2,\ldots,B_1, B_2,\ldots,C_1, D_1,\ldots,M_1, N_1,\ldots$ - некоторые действительные числа.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3}$;

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$;

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}$.

Перед интегрированием рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ необходимо выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) Если дана неправильная рациональная дробь, выделить из неё целую часть, т.е. представить эту дробь в виде $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M(x)+\dfrac{P_1(x)}{Q_n(x)}$, где $M(x)$ - многочлен, $\dfrac{P_1(x)}{Q_n(x)}$ - правильная рациональная дробь.

2) Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители: $Q(x)=(x-a)^m(x-b)\ldots(x^2+px+q)^r\ldots$, где квадратичные множители имеют комплексные корни.

3) Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби.

4) Вычислить неопределённые коэффициенты $A_1, A_2,\ldots,A_{k_1}, B_1, B_2,\ldots,B_{k_2}$, $C_1, C_2,\ldots,C_{S_1}, D_1, D_2,\ldots,M_1, M_2,\ldots,M_{S_m}, N_1, N_2,\ldots,N_{S_m}$, для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять в числителе коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. В результате интегрирование рациональной дроби сведётся к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Примеры

1. Найти $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Решение. Разложим на множители знаменатель подынтегрального выражения: $x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)=x(x-2)(x-3)$. Так как каждый из множителей $x, x-2, x-3$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей типа I: $\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$.

Освободившись от знаменателей, получим:

$2x^2-1=A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x)$.

Сгруппируем члены при одинаковых степенях x: $2x^2-1=(A+B+C)x^2+(-5A-3B-2C)x+6A$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=2 & & B=-\frac{7}{2} \\ -5A-3B-2C=0 & \Rightarrow & C=\frac{17}{3} \\ 6A=-1 & & A=-\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Итак,

$$\int \frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{17}{3}\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C.$$

2. Найти $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx$.

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби, разделив её числитель на знаменатель по правилу деления многочленов. Тогда

$$\int\frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx=\int\left(x-\frac{x+5}{x^3+3x^2+3x+1}\right)dx=\int\left(x-\frac{x+5}{(x+1)^3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\int\frac{(x+1)+4}{(x+1)^3}dx=\frac{x^2}{2}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}-4\int\frac{dx}{(x+1)^3}=\frac{x^2}{2}-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}-\frac{4(x+1)^{-2}}{-2}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x}-\frac{2}{(1+x)^2}+C.$$

3. Найти интеграл $\int\frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx$, не применяя метода неопределённых коэффициентов.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, поэтому можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной $x+1=t$, тогда $x=t-1$, $dx=dt$. Находим

$$\int\frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx=\begin{vmatrix}x+1=t, & x=t-1\\ dx=dt & \end{vmatrix}=\int\frac{(t-1)^2-t+1}{t^9}dt=\int\frac{t^2-3t+2}{t^9}dt=$$

$$=\int(t^{-7}-3t^{-8}+2t^{-9})dt=\frac{t^{-6}}{-6}-\frac{3t^{-7}}{-7}+\frac{2t^{-8}}{-8}+c=-\frac{1}{6t^6}+\frac{3}{7t^7}-\frac{1}{4t^8}+c,\ \text{где } t=x+1.$$

2.8. Задачи для самостоятельного решения

1. $\int\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx$;

2. $\int\frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$;

3. $\int\frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$;

4. $\int\frac{dx}{x^2-8}$;

5. $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$;

6. $\int\frac{x+1}{x^4+4x^2+4}dx$;

7. $\int\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+)}dx$;

8. $\int\frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}dx$;

9. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-1)}$;

10. $\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$;

11. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$;

12. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$;

13. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$;

14. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)}dx$;

15. $\int \frac{(x+1)^3}{x^3-1}dx$;

16. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$;

17. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$;

18. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$;

19. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$;

20. $\int \frac{x^4 dx}{x^4-1}$;

21. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$;

22. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$;

23. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

24. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$;

25. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}dx$;

26. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$;

27. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$;

28. $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$;

29. $\int \frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}dx$;

30. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$.

Ответы

1. $3\ln\left|\frac{(x-1)}{x+2}\right| - \frac{2}{x+2} + C$;

2. $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2(x-2)}\right| + C$;

3. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$;

4. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$;

5. $3\ln\dfrac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$;

6. $\dfrac{x-2}{4(x^2+2)}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$;

7. $\dfrac{1}{16}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+9}+\dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{24}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+C$;

8. $\dfrac{1}{2(x-1)^2}+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$;

9. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$;

10. $\dfrac{(x+2)^2}{2}-\dfrac{1}{4(x-1)^2}-\dfrac{9}{4(x-1)}+\dfrac{31}{8}\ln|x-1|+\dfrac{1}{8}\ln|x+1|+C$;

11. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$;

12. $\dfrac{(x+1)^2}{2}+\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C$;

13. $\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$;

14. $\dfrac{1}{2}(9\operatorname{arctg}x+\ln\dfrac{x^2+1}{(x-2)^2}+C$;

15. $x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}\ln\left((x-1)^8\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$;

16. $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$;

17. $-\dfrac{1}{(x+2)}-\dfrac{4}{(x+4)}+2\ln\left|\dfrac{(x+4)}{(x+2)}\right|+C$;

18. $-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{(x-1)}+3\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+C$;

19. $\dfrac{1}{52}\ln|x-3|-\dfrac{1}{20}\ln|x-1|+\dfrac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\dfrac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)+C$;

20. $x+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$;

21. $5x+\ln\left|\dfrac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right|+C$;

22. $5x+\ln\left|\dfrac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right|+C$;

23. $\dfrac{3}{11}\ln|3x+1|+\dfrac{2}{33}\ln|2x-3|-\dfrac{1}{3}\ln|x|+C$;

24. $\ln\sqrt{\dfrac{x^2-2}{x^2-1}}+C$;

25. $-\dfrac{57}{8}\operatorname{arctg}x-\dfrac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}+C$;

26. $\dfrac{1}{x-1}+\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+C$;

27. $-\dfrac{13}{2(x-4)^2}+\dfrac{3}{x-4}+2\ln\left|\dfrac{x-4}{x-2}\right|+C$;

28. $-\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$;

29. $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+\dfrac{4}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{3}+C$;

30. $\dfrac{x+2}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{2}\ln|x+1|-\dfrac{1}{4}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x+C$.

2.9. Интегрирование тригонометрических выражений с помощью подстановок и формул тригонометрии

Интегрирование тригонометрических выражений с помощью подстановок. Условимся через $R(u,v)$ обозначать рациональную функцию относительно u, v, т.е. выражение, которое получено из любых величин u, v с помощью четырёх арифметических действий.

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональных функций, т.е. рационализируются с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad x=2\operatorname{arctg}t;\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\int R(\sin x;\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ во многих случаях приводит к сложным вычислением, так как при её применении $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В некоторых случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x;\cos x)dx$ можно осуществить с помощью других подстановок. Укажем эти случаи:

1. Если $R(\sin x,\cos x)$ - чётная функция относительно $\sin x$, $\cos x$, т.е. $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то интегралы рационализируются подстановкой $t=\mathrm{tg}x$. При этом используются формулы: $\sin^2 x=\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$; $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

2. Если $R(\sin x,\cos x)$ - нечётная функция относительно $\sin x$; т.е. $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x;\cos x)dx$ рационализируются с помощью подстановки $t=\cos x$.

3. Если $R(\sin x,\cos x)$ - нечётная функция относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x;\cos x)dx$ рационализируются с помощью подстановки $t=\sin x$.

4. Интегралы $\int R(\mathrm{tg}x)dx$ приводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t=\mathrm{tg}x$.

5. Интегралы $\int R(\mathrm{ctg}x)dx$ приводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t=\mathrm{ctg}x$.

Примеры

1. Найти интеграл с помощью тригонометрической подстановки: $\int\dfrac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$.

Решение. Так как выполняется условие $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то применяем подстановку $t=\mathrm{tg}x$

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\dfrac{4t^2-7}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{4t^2 - 7} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{(2t)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln\left|\frac{2t-\sqrt{7}}{2t+\sqrt{7}}\right| + C, \text{ где } t = \operatorname{tg} x.$$

2. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^6 x}$.

Решение. Так как выполняется условие $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применив подстановку $t = \sin x$, имеем

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^6 x} = \left| \begin{matrix} t = \sin x, \quad dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^2} dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^6} dt =$$

$$= \int \left(t^{-6} - 2t^{-4} + t^{-2}\right) dt = -\frac{1}{5t^5} + \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{t} + C, \text{ где } t = \sin x.$$

Интегрирование тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ находят с помощью формул тригонометрии:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n n dx, m, n \in N$, находят при нечётном n с помощью подстановки $t = \sin x$, при нечётном m - с помощью подстановки $t = \cos x$. Если же m и n – чётные положительные числа, то подынтегральную функцию необходимо преобразовать с помощью формул тригонометрии:

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$,

$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,

$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

3. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x dx$, $\int \mathrm{ctg}^m x dx$, где $m\in N$, находят с помощью формул: $\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$, последовательно понижая степень тангенса или котангенса.

4. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x\frac{1}{\cos^n x}dx$, $\int \mathrm{ctg}^m x\frac{1}{\sin^n x}dx$, где n – целое чётное положительное число и интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin^{2n} x}$, $\int\frac{dx}{\cos^{2m} x}$, где m, n – целые положительные числа, находят с помощью формул: $\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$.

Примеры

1. Вычислить $\int \mathrm{tg}^6 x\frac{1}{\cos^4 x}dx$.

Решение. Применяя формулу $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$, получаем

$$\int \mathrm{tg}^6 x\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int \mathrm{tg}^6 x(1+\mathrm{tg}^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \mathrm{tg}^6 x(1+\mathrm{tg}^2 x)d(\mathrm{tg}x)=$$

$$=\int \mathrm{tg}^6 x d(\mathrm{tg}x)+\int \mathrm{tg}^8 x d(\mathrm{tg}x)=\frac{\mathrm{tg}^7 x}{7}+\frac{\mathrm{tg}^9 x}{9}+C.$$

2. Вычислить $\int\frac{dx}{\sin^6 x}$.

Решение. Используя формулу $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2 d(\operatorname{ctg} x) = -\int (1 + 2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x) d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C.$$

2.10. Задачи для самостоятельного решения

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$;
2. $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + \cos x}$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$;
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$;
10. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$;
11. $\displaystyle\int \sin^8 x dx$;
12. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}$;
13. $\displaystyle\int \cos 2x \cos 3x dx$;
14. $\displaystyle\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx$;
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x)\cos^2 x}$;
16. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx$;
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$;
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$;
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$;
20. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{1 + \operatorname{tg} x}$;
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$;
22. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3}$;

23. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$;

24. $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$;

25. $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x - 1} dx$;

26. $\int \cos x \cos 2x dx$;

27. $\int (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x) dx$;

28. $\int \sin^4 x dx$;

29. $\int \frac{\mathrm{tg} x dx}{1 + \mathrm{tg} x + \mathrm{tg}^2 x}$;

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$.

Ответы

1. $\frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + C$;

2. $\frac{1}{2}(\mathrm{tg} x + \ln|\mathrm{tg} x| + C)$;

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C$;

4. $-\frac{1}{1 + \mathrm{tg} x} + C$;

5. $\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg} x + C$;

6. $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1\right) + C$;

7. $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 4}{3} + C$;

8. $\frac{1}{2}((\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{ctg}^2 x) + 2\ln|\mathrm{tg} x| + C)$;

9. $x - \frac{1}{7}\mathrm{ctg}^7 x + \frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x - \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + \mathrm{ctg} x + 3$;

10. $\ln\frac{\left|\sqrt[3]{\mathrm{tg} x - 1}\right|}{\sqrt[6]{\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg} x + 1}{\sqrt{3}} + C$;

11. $\frac{35}{128}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin^3 2x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C$;

12. $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{ctg}\frac{3x}{2} + C$;

13. $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$;

14. $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{ctg}\frac{3x}{2} + C$;

15. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\mathrm{tg} x - 5}{\mathrm{tg} x}\right| + C$;

16. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-\cos x+2}{\sin x-\cos x-2}\right|+C$;

17. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$;

18. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x-2)+C$;

19. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C$;

20. $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$;

21. $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$;

22. $\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C$;

23. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$;

24. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$;

25. $-\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|+C$;

26. $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+C$;

27. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$;

28. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

29. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$;

30. $\frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}+2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$.

2.11. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx$, где R – рациональная функция: $m_1,n_1,\ldots,m_r,n_r$ - целые ненулевые числа. С помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\lambda}$, где $\lambda=k(n_1,\ldots,n_r)$, $k(n_1,\ldots,n_r)$ - наименьшее общее кратное чисел $n_1,\ldots,n_r$, указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Рассмотрим два частных случая.

1. Если $c=0$, $d=1$, то данный интеграл имеет вид $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,(ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx$ и преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки $ax+b=t^{\lambda}$, где $\lambda=k(n_1,\ldots,n_r)$.

2. Если $b=c=0$, $a=d=1$, то интеграл имеет вид $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,x^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx$ и приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^{\lambda}$, где $\lambda=k(n_1,\ldots,n_r)$.

Примеры

Найти интегралы:

1. $\int\frac{dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[3]{x}}$

Решение. Так как имеет вид $\int R\left(x^{\frac{1}{2}},\ldots,x^{\frac{1}{3}}\right)dx$, а $k(2,3)=6$, т.е. $\lambda=6$, то применим подстановку $x=t^6$. Тогда

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{matrix}x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=\int\frac{6t^5dt}{(t^2+4)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{t^2+4}=6\int\frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}dt=$$

$$=6\int\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=6\left(t-2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)+C=6t-12\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C,\text{ где } t=\sqrt[6]{x}.$$

2. $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx.$

Решение. Интеграл имеет вид $\int R\left(x,(1+x)^{\frac{1}{2}},(1+x)^{\frac{1}{3}}\right)dx$, поэтому применим подстановку $1+x=t^6$, так как $k(2,3)=6$, $\lambda=6$. Тогда имеем: $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$

$$\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\left|\begin{matrix}x=t^6-1\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t^6-1)^2+t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt=6\int t^3(t^{12}-2t^6+t^3+1)dt=$$

$$=6\int(t^{15}-2t^9+t^6+t^3)dt=6\left(\frac{t^{16}}{16}-\frac{t^{10}}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{7}\right)+C=\frac{3}{8}t^{16}-\frac{6}{5}t^{10}+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{7}t^7+C,$$

где $t=\sqrt[6]{1+x}$.

3. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}$.

Решение. Это интеграл вида $\int R\left(x,\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)dx$. Применив подстановку

$\frac{1+x}{1-x}=t^2$, $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$, получим

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}=4\int\frac{t^2(t^2+1)}{(t^2+1)^2(t^2-1)}dt=4\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}.$$

Разложим рациональную дробь $\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}$ на простейшие. Тогда

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{t+1}.$$

Освободившись от знаменателей, получим:

$$t^2=(At+B)(t^2-1)+C(t+1)(t^2+1)+D(t-1)(t^2+1),$$

$$t^2=(A+C+D)t^3+(B+C-D)t^2+(C+D-A)t+C-D-B.$$

Полагая $t=1$, находим: $4C=1$, $C=\frac{1}{4}$; при $t=-1$ имеем: $-4D=1$, $D=-\frac{1}{4}$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему уравнений:

$A+C+D=0$, $\quad B+C-D=1$,

$C+D-A=0$, $\quad C-D-B=0$.

Подставляя в неё $C=\frac{1}{4}$, $D=-\frac{1}{4}$, находим: $A+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$, $A=0$, $B=-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{t^2+1}+\frac{\frac{1}{4}}{t-1}-\frac{\frac{1}{4}}{t+1},$$ т.е.

$$4\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}=-2\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}=-2\operatorname{arctg}t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=$$

$$= -2\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C, \text{ где } t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

2.12. Задачи для самостоятельного решения

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$;

4. $\displaystyle\int x\sqrt{a-x}dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$;

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$;

7. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$;

8. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$;

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$;

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}dx}{1+\sqrt[3]{3x+4}}$;

11. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$;

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$;

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$;

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

Ответы

1. $\dfrac{4}{3}\left(t^3 - \ln\left(t^3+1\right)\right) + C$, где $t = \sqrt[4]{x}$;

2. $\dfrac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3} + C$;

3. $t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 3t - \ln\left(t+1\right) + C$, где $t = \sqrt[6]{2x+1}$;

4. $\dfrac{2}{15}\left(3x^2 - ax - 2a^2\right)\sqrt{a-x} + C$;

5. $\dfrac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$;

6. $x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$;

7. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}} + C$;

8. $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$; 9. $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$;

10. $\frac{1}{3}(3x+4)-\frac{1}{2}(3x+4)^{\frac{2}{3}}+(3x+4)^{\frac{1}{3}}-\ln\left|\sqrt[3]{3x+4}\right|+C$;

11. $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(x-3)^2}+C$;

12. $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{3}}+C$;

13. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$; 14. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+C$; 15. $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C$.

Оглавление

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 4

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Составители:
ГЛИНСКАЯ Евгения Алексеевна
ПРУСОВА Ирина Васильевна
ВИШНЕВСКАЯ Ольга Геннадьевна
ЛИТОВКО Александр Анатольевич

Технический редактор О.В. Дубовик

Подписано в печать 11.05.2010.
Формат $60 \times 84^1/_8$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 9,42. Уч.-изд. л. 3,68. Тираж 200. Заказ 299.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.