

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Детали машин, подъемно-транспортные машины  
и механизмы»

В.Л. Николаенко

# МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие для студентов  
немашиностроительных специальностей вузов

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Республики Беларусь  
по образованию в области энергетики*

Минск  
БНТУ  
2011

УДК [621.01:531.8] (075.8)

ББК 34.41я7

Н 63

Рецензенты:

*В.А. Балицкий, О.Г. Девойно*

**Николаенко, В.Л.**

Н 63      **Механика: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов / В.Л. Николаенко. – Минск: БНТУ, 2011. – 294 с.**

ISBN 978-985-525-430-1.

Издание предназначено для студентов, изучающих курс механики. В нем представлены основные положения дисциплин «Теоретическая механика», «Сопrotивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин».

УДК [621.01:531.8] (075.8)

ББК 34.41я7

ISBN 978-985-525-430-1

© Николаенко В.Л., 2011

© БНТУ, 2011

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	<b>11</b>
<b>РАЗДЕЛ 1</b>	
<b>ОСНОВЫ РАСЧЕТА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА</b>	
<b>КАК МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА</b> .....	<b>12</b>
<b>ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ</b> .....	<b>12</b>
1.1. Общие сведения .....	12
1.2. Аксиомы статики .....	13
1.3. Связи и их реакции .....	16
<b>ГЛАВА 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ</b> .....	<b>19</b>
2.1. Сложение плоской системы сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия .....	19
2.2. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций. Аналитическое условие равновесия .....	21
<b>ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ НА ПЛОСКОСТИ</b> .....	<b>23</b>
3.1. Пара сил. Эквивалентность пар сил .....	23
3.2. Сложение пар сил. Условие равновесия пар .....	25
3.3. Момент пары относительно точки .....	26
<b>ГЛАВА 4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО</b>	
<b>РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ (ПСПРС)</b> .....	<b>27</b>
4.1. Приведение силы к точке .....	27
4.2. Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил .....	28
4.3. Теорема Вариньона .....	32
4.4. Уравнения равновесия и их различные формы .....	32
4.5. Балочные системы. Разновидности опор и виды нагрузок .....	35
4.6. Реальные связи. Трение скольжения и его законы .....	37

ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ .....	40
5.1. Сложение пространственной системы сходящихся сил. Условие равновесия .....	40
5.2. Момент силы относительно оси .....	42
5.3. Пространственная система произвольно расположенных сил. Условие равновесия .....	44
ГЛАВА 6. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ .....	46
6.1. Основные понятия кинематики .....	46
6.2. Способы задания движения точки .....	50
6.3. Определение скорости точки при естественном способе задания ее движения .....	52
6.4. Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения .....	53
6.5. Частные случаи движения точки .....	55
ГЛАВА 7. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА .....	58
7.1. Поступательное движение .....	58
7.2. Вращательное движение. Угловая скорость, угловое ускорение .....	61
7.3. Частные случаи вращательного движения .....	63
7.4. Скорости и ускорения различных точек вращающегося тела .....	66
7.5. Способы передачи вращательного движения .....	69
ГЛАВА 8. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ .....	70
8.1. Сложное движение точки .....	70
8.2. Плоскопараллельное движение тела .....	73
8.3. Определение скорости любой точки тела при плоскопараллельном движении .....	75
ГЛАВА 9. ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .....	77
9.1. Основные понятия и аксиомы динамики .....	77
9.2. Свободная и несвободная точки .....	80
9.3. Силы инерции .....	81
9.4. Принцип Даламбера .....	83

ГЛАВА 10. РАБОТА И МОЩНОСТЬ.....	83
10.1. Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении.....	84
10.2. Работа равнодействующей силы.....	85
10.3. Работа переменной силы на криволинейном пути.....	87
10.4. Мощность.....	88
10.5. Механический коэффициент полезного действия.....	88
10.6. Работа сил на наклонной плоскости.....	90
10.7. Работа и мощность при вращательном движении тел.....	92
10.8. Трение качения. Работа при качении тел.....	94
 ГЛАВА 11. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.....	95
11.1. Импульс силы. Количество движения. Кинетическая энергия.....	95
11.2. Теорема об изменении количества движения точки.....	96
11.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки.....	97
11.4. Понятие о механической системе.....	97
11.5. Основное уравнение динамики вращающегося тела.....	99
11.6. Кинетическая энергия тела. Кинетический момент.....	101
 <b>РАЗДЕЛ 2</b> <b>ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ</b> <b>И ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ.....</b>	<b>103</b>
 ГЛАВА 12. СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ.....	103
12.1. Основные понятия.....	103
12.2. Классификация кинематических пар. Кинематические цепи.....	104
12.3. Структурный синтез и анализ механизмов.....	106
12.4. Конструктивно-функциональная классификация механизмов.....	108

12.5. Передаточное отношение .....	110
<b>ГЛАВА 13. ОСНОВЫ РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ .....</b>	<b>111</b>
13.1. Общие сведения о передачах. Основные виды зубчатых передач .....	111
13.2. Общие сведения о методах изготовления зубчатых колес .....	114
13.3. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения.....	116
13.4. Кинематика зубчатых механизмов с подвижными осями вращения.....	118
<b>ГЛАВА 14. ОСНОВЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ .....</b>	<b>121</b>
14.1. Задачи и методы кинематического анализа механизмов. Масштабные коэффициенты .....	121
14.2. Построение положений рычажных механизмов методом засечек .....	122
14.3. Определение скоростей и ускорений рычажных механизмов методом планов.....	123
<b>ГЛАВА 15. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ .....</b>	<b>127</b>
15.1. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения.....	127
15.2. Кинематика зубчатых механизмов с подвижными осями вращения.....	132
<b>РАЗДЕЛ 3 ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ.....</b>	<b>142</b>
<b>ГЛАВА 16. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДЕТАЛИ.....</b>	<b>142</b>
16.1. Метод сечений.....	142
16.2. Напряжение как мера внутренних сил .....	144

ГЛАВА 17. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОБЪЕМА МАТЕРИАЛА .....	147
17.1. Напряженное состояние в точке. Закон парности касательных напряжений. Главные площадки и главные напряжения. Классификация напряженных состояний .....	147
17.2. Однородное растяжение бруса как пример реализации одноосного напряженного состояния материала .....	150
17.3. Продольная и поперечная деформации. Закон Гука. Модуль упругости. Коэффициент Пуассона .....	152
17.4. Частный случай плоского напряженного состояния – чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге. ....	155
 ГЛАВА 18. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ .....	157
18.1. Экспериментальные исследования механических свойств при проведении стандартных испытаний на растяжение .....	157
18.2. Условие прочности, коэффициент запаса прочности, допускаемые напряжения. ....	160
 ГЛАВА 19. РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, МОДЕЛИРУЕМЫХ В ФОРМЕ СТЕРЖНЯ .....	162
19.1. Расчеты на прочность стержней при растяжении-сжатии .....	162
19.2. Особенности расчета статически неопределимых стержневых систем .....	163
19.3. Напряженно-деформированное состояние при прямом поперечном изгибе .....	166
19.4. Условия прочности при прямом поперечном изгибе .....	170
19.5. Расчеты на жесткость при изгибе .....	173
19.6. Кручение вала (стержня) круглого поперечного сечения .....	175
19.7. Расчеты на прочность и жесткость при кручении .....	176

19.8. Условие прочности вала при совместном действии крутящего и изгибающего моментов.....	180
<b>ГЛАВА 20. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ.....</b>	<b>185</b>
20.1. Понятие о критической силе для сжатого стержня. Формула Эйлера .....	185
20.2. Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера.....	189
<b>РАЗДЕЛ 4</b>	
<b>РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ МАШИН ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ И ДЕТАЛЕЙ ОТРАСЛИ.....</b>	<b>191</b>
<b>ГЛАВА 21. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....</b>	<b>191</b>
21.1. Геометрический расчет эвольвентных прямозубых передач .....	191
21.2. Особенности геометрии косозубых, шевронных и конических передач .....	195
21.3. Особенности геометрии конических колес .....	197
21.4. Усилия в зацеплении зубчатых передач .....	199
21.5. Материалы и термообработка для зубчатых колес .....	202
21.6. Расчеты зубьев на сопротивление усталости по изгибным и контактным напряжениям.....	203
<b>ГЛАВА 22. ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....</b>	<b>206</b>
22.1. Общие сведения. Геометрические и кинематические особенности червячных передач... ..	206
22.2. Усилия в зацеплении. Расчет зубьев колес. Тепловой расчет червячных передач .....	209
<b>ГЛАВА 23. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....</b>	<b>213</b>
23.1. Общие сведения. Ремни. Шкивы .....	213
23.2. Скольжение ремня .....	218
23.3. Усилия и напряжения в ремнях. Тяговая способность и КПД передачи .....	221



ГЛАВА 24. ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....	225
24.1. Общие сведения. Цепи. Материалы .....	225
24.2. Усилия в элементах передачи. Расчет передачи.....	227
 ГЛАВА 25. НЕСУЩИЕ ДЕТАЛИ И ОПОРНЫЕ УСТРОЙСТВА МЕХАНИЗМОВ .....	 229
25.1. Валы и оси. Классификация. Расчет на прочность. Материалы .....	 229
25.2. Опоры валов и осей. Классификация подшипников .....	 232
25.3. Динамическая грузоподъемность подшипников качения. Выбор подшипников и определение их ресурса .....	 237
25.4. Муфты механических приводов. Общие сведения и классификация .....	 238
25.5. Муфты общего назначения. Особенности расчета .....	 240
25.6. Предохранительные муфты .....	241
 ГЛАВА 26. СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ И УЗЛОВ МАШИН.....	 243
26.1. Сварные соединения. Общие сведения и характеристика. Изображения и обозначения на чертежах швов сварных соединений .....	 243
26.2. Расчет на прочность и проектирование сварных соединений при постоянных нагрузках .....	 250
26.3. Соединения пайкой и склеиванием .....	254
26.4. Соединения типа «вал–ступица». Общая характеристика и особенности расчета.....	 255
26.4.1. Шпоночные соединения .....	256
26.4.2. Шлицевые соединения .....	257
26.4.3. Профильные соединения.....	258
26.4.4. Штифтовые соединения .....	259
26.5. Резьбовые соединения .....	261
26.5.1. Крепежные детали и стопорящие устройства .....	 261
26.5.2. Резьба и ее параметры .....	262

26.5.3. Силовые зависимости в резьбовом соединении .....	264
26.5.4. Самоторможение и коэффициент полезного действия винтовой пары .....	267
26.5.5. Расчет резьбовых соединений на прочность.....	268
26.5.6. Расчет резьбовых соединений при переменном режиме нагружения .....	274
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>275</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.....</b>	<b>278</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное издание предназначено для студентов, изучающих курс механики по программе, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь для высших учебных заведений.

Изложение материала в основном соответствует традиционной программе механики исходя из того, что она является комплексной общепрофессиональной дисциплиной по немашиностроительным специальностям.

Пособие включает в себя основные положения дисциплин «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин». Необходимым явилось включение в курс механики в том или ином объеме положений дисциплины «Расчет и конструирование изделий отрасли».

Цель пособия – дать студенту знания и навыки по выполнению расчетов и конструированию, необходимые при последующем изучении специальных дисциплин, а также в его профессиональной деятельности.

В силу компактности и комплексного характера курса механики на лекциях требуется лаконичность изложения материала при достаточно подробном изложении лишь принципиальных вопросов.

Автор использует данный материал при прочтении лекций по механике.

Настоящее пособие рекомендуется всем тем, кто изучает, преподает и просто интересуется элементарной механикой.

Пособие будет полезно при изучении, повторении и углублении курса механики, а также для быстрого нахождения, быстрого прочтения и восстановлении в памяти необходимой информации, может быть использовано для самостоятельной работы студентов.

Автор считает своей обязанностью выразить благодарность А.Т. Скойбеде, оказавшему помощь в подготовке книги, а также с благодарностью примет все замечания об этом пособии.

# РАЗДЕЛ 1 ОСНОВЫ РАСЧЕТА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА КАК МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

## ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

### 1.1. Общие сведения

*Материальной точкой* называют геометрическую точку, обладающую массой.

*Абсолютно твердым телом* называют такое материальное тело, в котором расстояние между любыми двумя точками всегда остается неизменным.

Способность тел сопротивляться изменению их формы и размеров называется *жесткостью*.

Мера механического действия одного материального тела на другое называется *силой*. Сила – величина векторная. Она определяется, во-первых, числовым значением (модулем), во-вторых, точкой приложения (местом контакта взаимодействующих тел), в-третьих, направлением действия.

В Международной системе единиц (СИ) сила выражается в ньютонах (сокращенное обозначение Н). 1 Н – небольшая сила, поэтому часто употребляют кратные единицы – килоньютон ( $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$ ) и меганьютон ( $1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$ ).

Как всякий вектор силу можно изобразить графически в виде направленного отрезка (рис. 1.1).

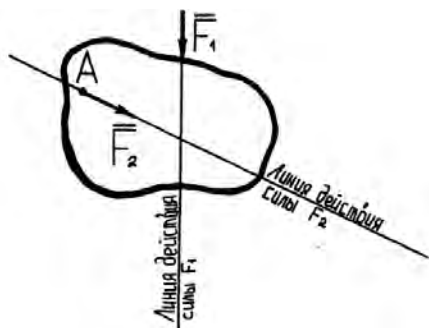


Рис. 1.1. Векторы сил

Сила тяжести всегда направлена вертикально вниз (рис. 1.2).



Рис. 1.2. Сила тяжести

Несколько сил, действующих на какое-либо одно твердое тело, называются *системой сил*.

Силы, действующие на твердое тело со стороны других тел, называются *внешними*. Силы, действующие на материальные точки твердого тела со стороны других точек того же тела, называются *внутренними*.

## 1.2. Аксиомы статики

**Аксиома 1 (принцип инерции).** Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

Состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения точки называют *равновесием*.

**Аксиома 2 (условие равновесия двух сил).** Две силы, приложенные к твердому телу, образуют уравновешенную систему только тогда, когда они равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.3).

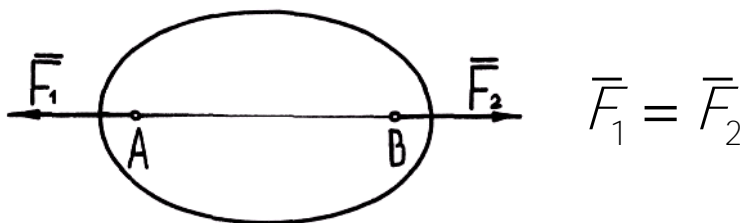


Рис. 1.3. Равновесие тела при действии на него двух сил

**Аксиома 3 (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил).** Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

**Следствие.** Силу, приложенную к твердому телу, можно перенести вдоль линии ее действия в любую другую точку, действие силы на тело при этом не нарушится (рис. 1.4).

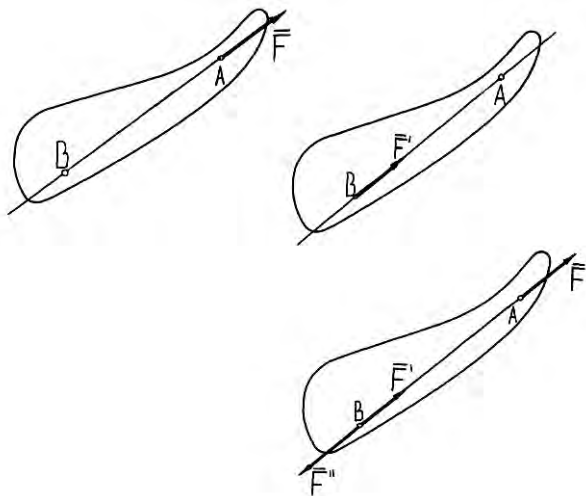


Рис. 1.4. Перенос силы по линии ее действия

Свойство вектора силы справедливо только в теоретической механике (механике абсолютно твердого тела).

**Аксиома 4 (правило параллелограмма).** Две приложенные к точке тела силы имеют равнодействующую, приложенную в той же

точке и равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.5).

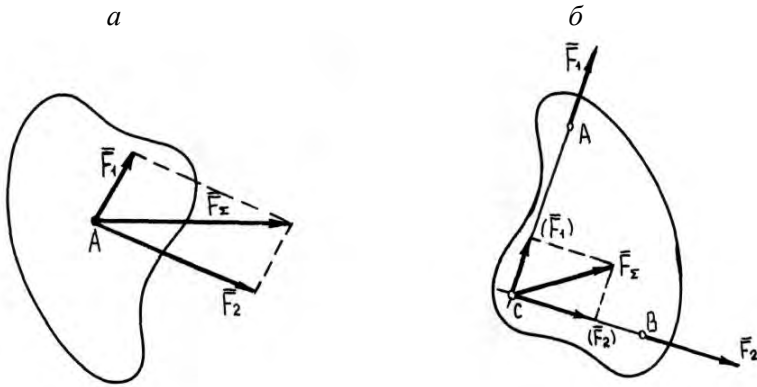


Рис. 1.5. Параллелограмм сил

Две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  приложены к разным точкам тела, но линии их действия лежат в одной плоскости (рис. 1.5, б).

**Аксиома 5 (закон действия и противодействия).** Силы взаимодействия двух твердых тел друг на друга равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

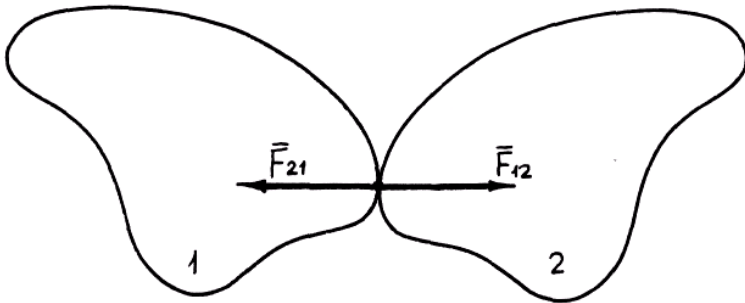


Рис. 1.6. Взаимодействие тел

**Аксиома 6 (принцип отвердевания).** Если деформируемое тело находится в равновесии, то равновесие этого тела не нарушится, если, не изменяя формы, размеров, положения в пространстве, оно превратится в абсолютно твердое тело, т. е. затвердеет.

### 1.3. Связи и их реакции

Твердое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. В качестве примера свободного тела приведем летящий воздушный шар или ракету в космосе. Твердое тело называется *несвободным*, если его перемещение в пространстве ограничено какими-либо другими телами.

Все тела, которые так или иначе ограничивают перемещение данного тела, называются его *связями*.

Задача определения реакций связей – одна из основных задач статики.

#### *Некоторые разновидности связей и правила определения их реакций*

1. **Свободное опирание тела о связь** (тело изображено в виде бруса, а связь заштрихована, рис. 1.7).

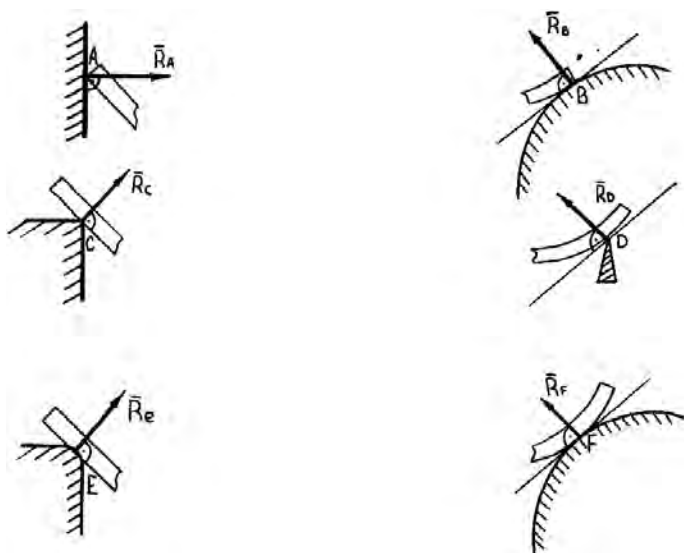


Рис. 1.7. Реакции при свободном опирании тел

2. **Гибкая связь** (рис. 1.8). Реакции нитей или цепей всегда направлены вдоль самих связей в сторону от тела к связи.



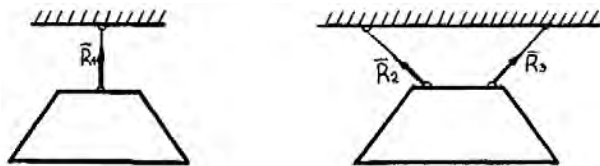


Рис. 1.8. Реакции гибких нитей

3. **Стержневая связь** (рис. 1.9). Реакции стержневых связей направлены вдоль прямой, проходящей через оси концевых шарниров.



Рис. 1.9. Реакции при шарнирном закреплении стержня

4. **Шарнирно-подвижная опора** (рис. 1.10). Такая опора представляет собой видоизменение свободного опирания.

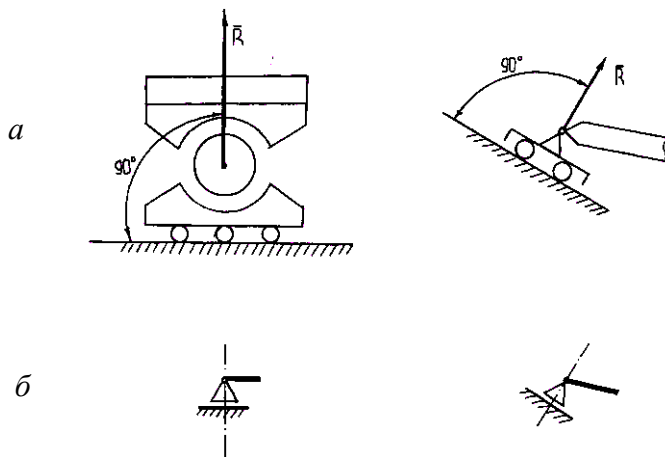


Рис. 1.10. Шарнирно-подвижная опора:  
*a* – схемы и направление реакций; *б* – условные изображения

5. **Шарнирно-неподвижная опора** (рис. 1.11). Такая опора дает возможность телу свободно поворачиваться около шарнира, но препятствует поступательному перемещению тела в любом направлении, перпендикулярном оси шарнира.

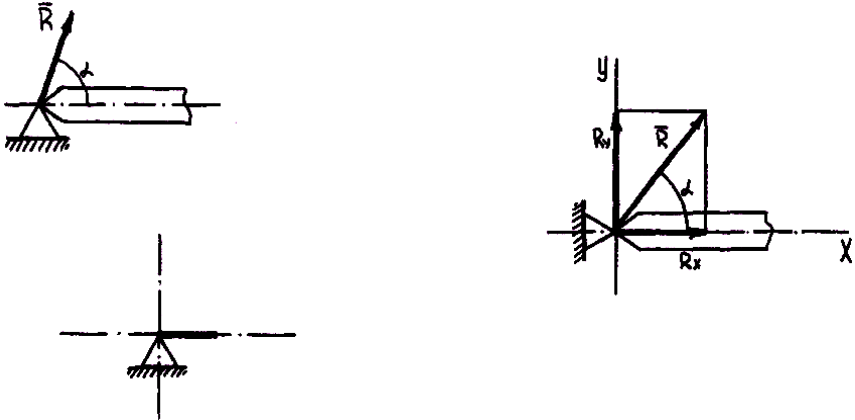


Рис. 1.11. Шарнирно-неподвижная опора.  
 Условное изображение и направление реакций

6. **Глухая заделка (жесткое защемление)** (рис. 1.12). Такая заделка исключает любое перемещение тела.

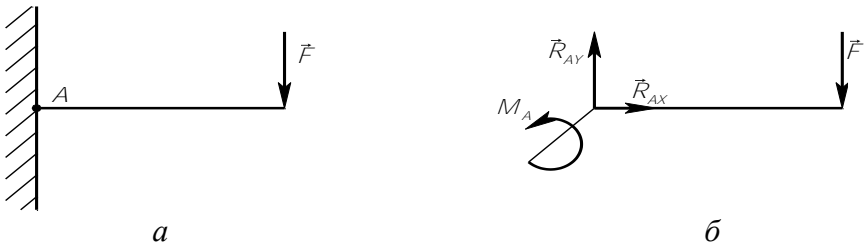


Рис. 1.12. Глухая заделка:  
*a* – условное изображение; *б* – направление реакции

## ГЛАВА 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

### 2.1. Сложение плоской системы сходящихся сил.

#### Геометрическое условие равновесия

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*. Если силы сходящейся системы приложены к разным точкам тела, то по первому следствию из аксиом статики каждую силу можно перенести в точку пересечения линий действия и получить эквивалентную систему сил, приложенных к одной точке (рис. 2.1).

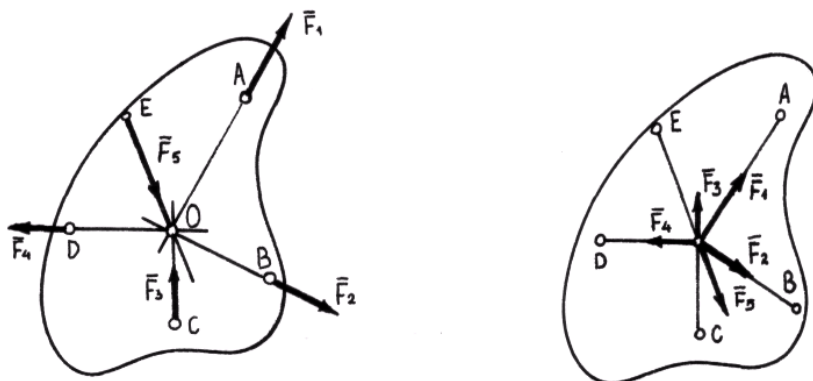


Рис. 2.1. Плоская система сходящихся сил

Две силы, приложенные к одной точке тела, образуют простейшую плоскую систему сходящихся сил (две пересекающиеся прямые всегда лежат в одной плоскости).

Рассмотрим систему сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ , приложенных в точке  $A$ . Требуется найти их равнодействующую (рис. 2.2).

Применив правило силового треугольника, сложим силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Для этого из конца вектора  $\overline{AB} = \vec{F}_1$  отложим вектор  $\overline{BC} = \vec{F}_2$  и, соединив точки  $A$  и  $C$ , получим геометрическую сумму (равнодействующую) сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ :

$$\overline{AC} = \vec{F}_{1-2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$$\overline{AC} = \overline{F}_{1-2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2;$$

$$\overline{AD} = \overline{F}_\Sigma = \overline{F}_{1-2} + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3.$$

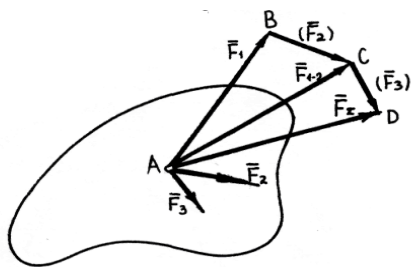


Рис. 2.2. Многоугольник сил

Теперь сложим силу  $\overline{F}_{1-2}$  с силой  $\overline{F}_3$ . Для этого из конца вектора  $BC = \overline{F}_2$  отложим вектор  $\overline{CD} = \overline{F}_3$  и, соединив точки  $A$  и  $D$ , получим равнодействующую трех сил:

$$\overline{AD} = \overline{F}_\Sigma = \overline{F}_{1-2} + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3,$$

где  $\overline{F}_\Sigma$  – искомая равнодействующая.

Порядок построения сторон силового многоугольника не влияет на окончательный результат.

Чтобы уравновесить систему сил, достаточно к ней добавить еще одну силу, численно равную равнодействующей, но направленную в противоположную сторону (рис. 2.3).

$$\overline{F}_4 = \overline{F}_\Sigma = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3.$$

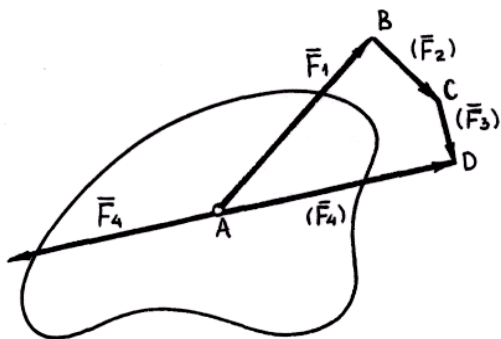


Рис. 2.3. Равнодействующая системы сил

Необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил в геометрической форме: система сходящихся сил уравновешена тогда и только тогда, когда силовой многоугольник замкнут.

## 2.2. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций. Аналитическое условие равновесия

Вместо построения силового многоугольника равнодействующую системы сходящихся сил более точно и значительно быстрее находят вычислением с помощью метода проекций, который обычно называется аналитическим.

**Проекцией вектора  $\vec{F}$  на ось** называется длина направленного отрезка оси, заключенного между двумя перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора  $\vec{F}$ . Проекция силы на ось равна произведению модуля этой силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси (рис. 2.4):

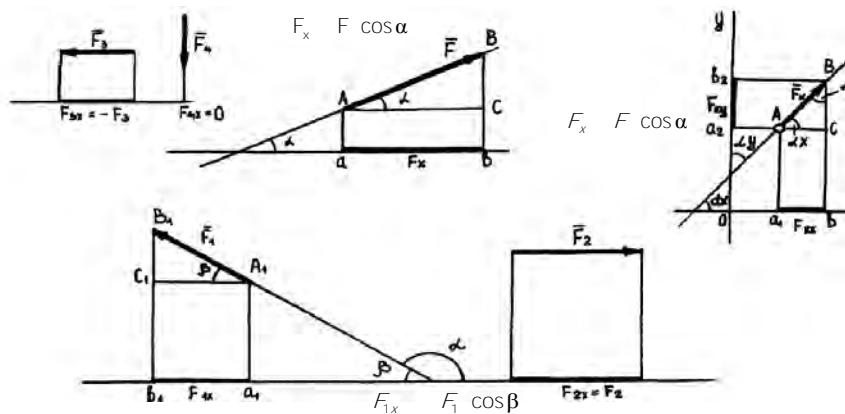


Рис. 2.4. Проекция векторов сил на оси

Рассмотрим определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций.

Допустим, что для заданной системы сходящихся сил построен многоугольник  $ABCDE$ , в котором вектор  $\overline{AE} = \vec{F}_\Sigma$  – искомая равнодействующая данной системы.

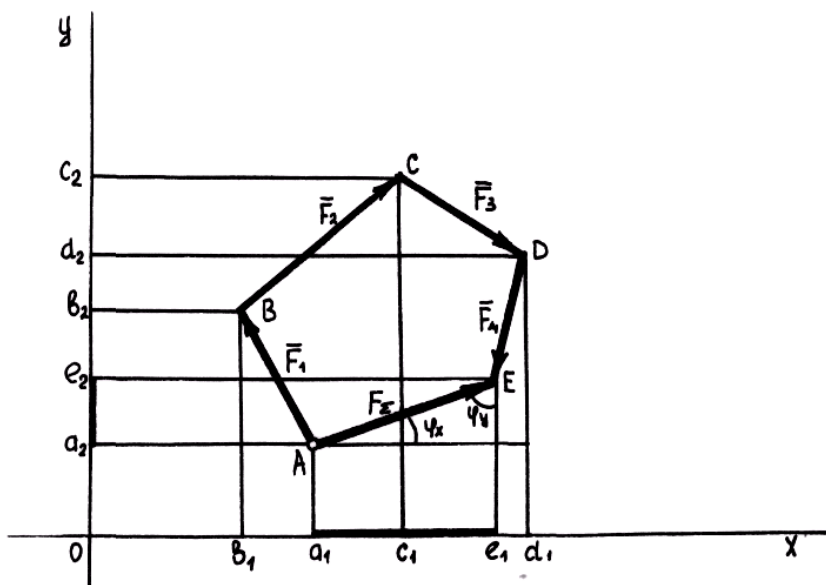


Рис. 2.5. Многоугольник сил

Выбрав систему координатных осей  $X$  и  $Y$  в плоскости силового многоугольника, спроецируем его на эти оси:

$$F_{\Sigma x} = -F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} - F_{4x};$$

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}.$$

В краткой форме эти равенства записываются так:

$$F_{\Sigma x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad F_{\Sigma y} = \sum_{k=1}^n F_{ky},$$

где  $\Sigma$  – знак суммы, а индекс  $k$  последовательно принимает значения от 1 до  $n$ , по числу сходящихся сил, равнодействующая которых определяется.

Таким образом, проекция равнодействующей системы сходящихся сил на каждую из осей координат равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось:

$$\sum F_{kx} = 0 \text{ и } \sum F_{ky} = 0.$$

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме: для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на каждую из двух осей координат были равны нулю.

### ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

#### 3.1. Пара сил. Эквивалентность пар сил

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны, называется *парой сил* или просто *парой* (рис. 3.1). Понятие о паре сил ввел в механику французский ученый Луи Пуансон (1777–1859).

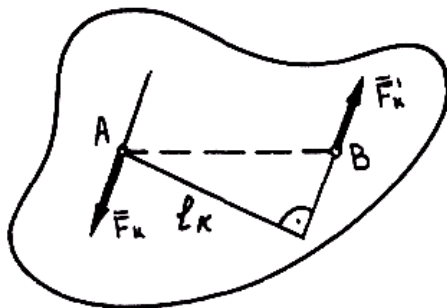


Рис. 3.1. Пара сил

Пара сил – неуравновешенная система и не имеет равнодействующей. Пара сил производит на тело вращательное действие.

Вращательный эффект пары измеряется взятым со знаком «плюс» или «минус» произведением модуля одной из сил пары на ее плечо (момент пары):

$$M = \pm F \cdot l.$$

Знак «*плюс*» ставится перед числовым значением момента в том случае, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и знак «*минус*» – если пара стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки (рис. 3.2).

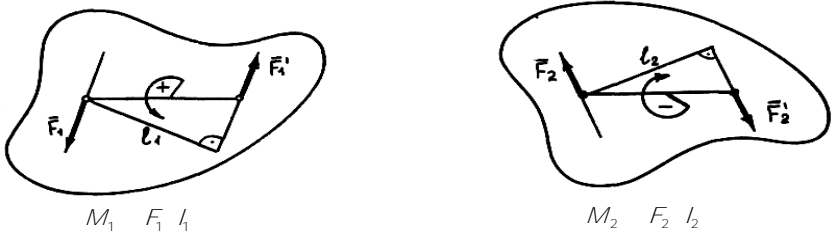
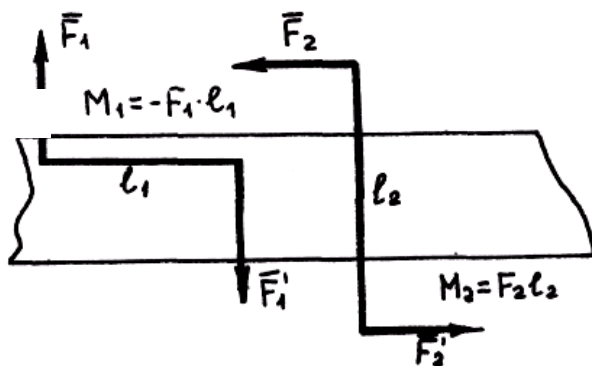


Рис. 3.2. Правило знаков момента пары сил

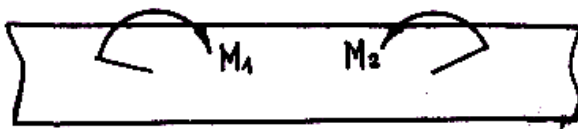
В Международной системе единиц (СИ) моменты пар выражаются в Н·м или кН·м.

Вращательное действие расположенной в данной плоскости пары зависит только от ее момента, поэтому для задания пары сил достаточно указать числовое значение ее момента, а затем по данному или выбранному плечу определить силы пары или по силам подобрать необходимое плечо. Исходя из этого, на рисунках и схемах пары сил изображают иногда просто круговой стрелкой, характеризующей лишь направление вращающего действия. Например, пары  $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$  и  $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$  (рис. 3.3, а), приложенные к брусу, можно условно изобразить круговыми стрелками, обозначив их  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 3.3, б).





a



б

Рис. 3.3. Изображение пары сил

### 3.2. Сложение пар сил. Условие равновесия пар

**Теорема:** Система пар сил, действующих на тело в одной плоскости, эквивалентна паре сил с моментом, равным алгебраической сумме моментов пар системы.

Допустим, на тело действуют три пары, моменты которых  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  известны (рис. 3.4).

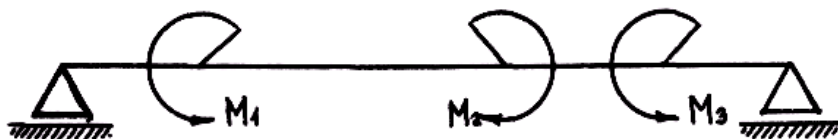


Рис. 3.4. Система пар сил

Момент равнодействующей пары

$$M_{\Sigma} = M_1 - M_2 + M_3,$$

$$M_{\Sigma} = \sum M_k.$$

Если в результате сложения пар  $M_{\Sigma} = 0$ , то действующие на тело пары сил образуют уравновешенную систему. Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия системы пар выражается одним уравнением:

$$\sum M_k = 0,$$

т. е. для равновесия системы пар сил, действующих на тело в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма их моментов была равна нулю.

Значит, систему пар или одну пару можно уравновесить только парой.

### 3.3. Момент пары относительно точки

Задолго до появления понятия о паре сил и ее моменте в механике возникло понятие о моменте силы относительно точки. Первый, кто обратил внимание на важную роль в механике момента силы относительно точки, был Леонардо да Винчи (1452–1519), современную трактовку понятия момента силы относительно точки дал П. Вариньон (1654–1722).

**Моментом силы относительно точки** называется взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы:

$$M_0(F) = \pm F \cdot l.$$

Точка  $O$ , относительно которой берется момент силы, называется **центром момента**.  $OB = l$  – кратчайшее расстояние от центра

момента до линии действия силы – называется **плечом силы** относительно данной точки. Знак «плюс» ставится в случае, если сила  $F$  стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, а знак «минус» – в противоположном случае (правило знаков то же, что и у моментов пар сил). Момент силы относительно точки  $O$  на рис. 3.5 положительный.

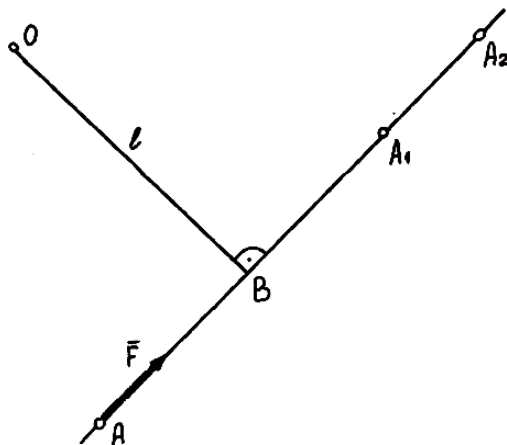


Рис. 3.5. Момент силы относительно точки

## ГЛАВА 4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ (ПСПРС)

### 4.1. Приведение силы к точке

**Теорема о параллельном переносе силы в любую заданную или выбранную точку.** Пусть дана сила  $\vec{F}$ , приложенная к точке  $A$  твердого тела (рис. 4.1, *a*), и ее требуется перенести в точку  $O$ . Приложим к телу в точке  $O$  уравновешенную систему сил  $\vec{F}', \vec{F}''$ , параллельных  $\vec{F}$  и равных ей по модулю (т. е.  $\vec{F}' = \vec{F}'' = \vec{F}$ , рис. 4.1, *б*). Теперь кроме силы  $\vec{F}''$ , приложенной к точке  $O$ , образовались пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  с моментом  $M = Fl$  и момент данной

силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ :  $M_0(\vec{F}) = F \cdot l$ , т. е.  $\vec{M} = M_0(\vec{F})$  (рис. 4.1, в).

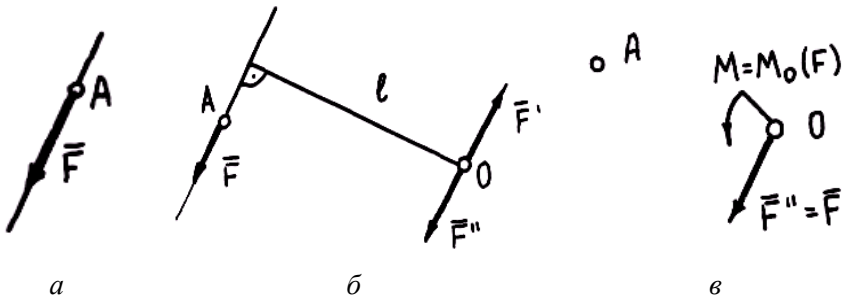


Рис. 4.1. Параллельный перенос силы

Таким образом, всякую силу  $\vec{F}$ , приложенную к телу в точке  $A$ , можно переносить параллельно линии действия в любую точку  $O$ , присоединив пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки ее приложения.

Операция такого переноса силы называется **приведением силы к точке**, а появляющаяся при этом пара  $(\vec{F}, \vec{F}')$  с моментом  $\vec{M} = \vec{M}_0(\vec{F})$  – **присоединенной парой**.

Операция приведения силы к точке имеет глубокий физический смысл.

#### 4.2. Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил

Пусть задана система четырех сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$  (рис. 4.2).

Выберем произвольную точку  $O$  – центр приведения – и приведем к нему силу  $\vec{F}_1$ , т. е. перенесем силу  $\vec{F}_1$  в точку  $O$ , присоединим пару сил с моментом  $\vec{M}_1 = M_0(\vec{F}_1)$  (на рисунке присоединенные моменты изображены круговыми стрелками, направленными в сто-

рону поворота силами  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$  соответствующих плеч  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$ ).

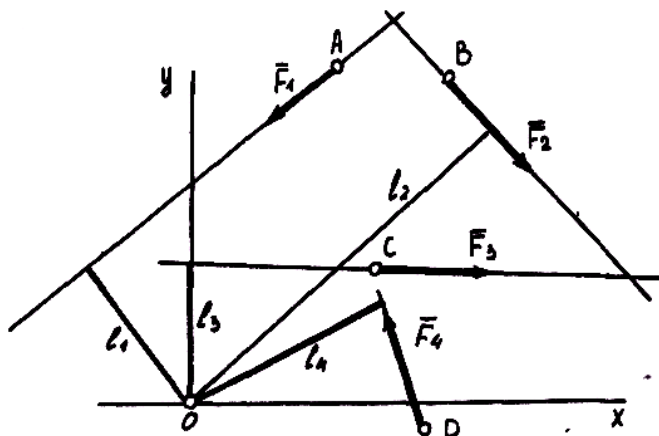


Рис. 4.2. Плоская система произвольно расположенных сил

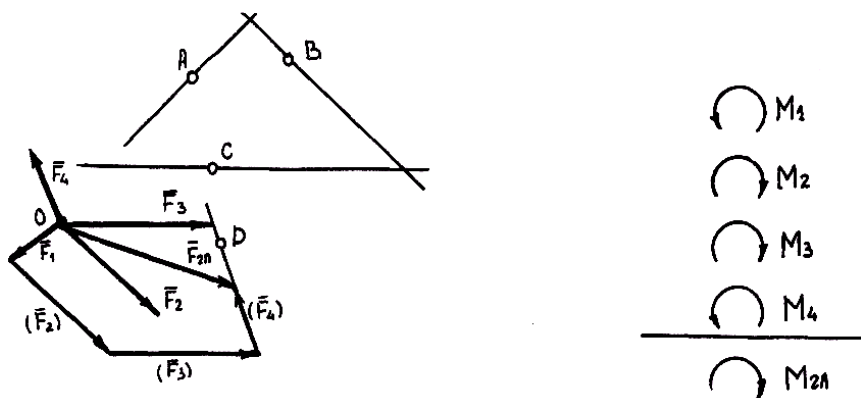


Рис. 4.3. Приведение системы сил к центру

Затем приведем к точке  $O$  силу  $\vec{F}_2$ . Перенесем ее в эту точку и присоединим пару с моментом  $\vec{M}_2 = M_0(\vec{F}_2)$ . Так же поступим с остальными силами  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$ , присоединив пары с моментами  $\vec{M}_3 = M_0(\vec{F}_3)$

и  $\bar{M}_4 = M_0(\bar{F}_4)$ . Как видно из рис. 4.3, в результате последовательного приведения заданных сил к точке образовалась система сходящихся сил и система присоединенных пар с моментами, равными моментам заданных сил относительно точки (центра) приведения.

С помощью силового многоугольника находим силу  $F_{\text{гл}}$ , эквивалентную системе приведенных сил. Сложив алгебраические моменты присоединенных пар, найдем момент одной эквивалентной им пары:

$$\bar{M}_{\text{гл}} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \bar{M}_4,$$

или, так как моменты присоединенных пар равны моментам данных сил относительно центра приведения:

$$\bar{M}_{\text{гл}} = M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) + M_0(\bar{F}_3) + M_0(\bar{F}_4).$$

Главный вектор системы  $\bar{F}_{\text{гл}} = \sum \bar{F}_k$ .

Главный момент системы  $\bar{M}_{\text{гл}} = \sum M_0(\bar{F}_k)$ .

Произвольная плоская система сил эквивалентна одной силе – *главному вектору* – и одной паре, момент которой равен *главному моменту*.

Допустим, что, приведя плоскую систему сил к точке, мы получили главный вектор  $\bar{F}_{\text{гл}}$  и пару сил с моментом  $\bar{M}_{\text{гл}}$  (рис. 4.4).

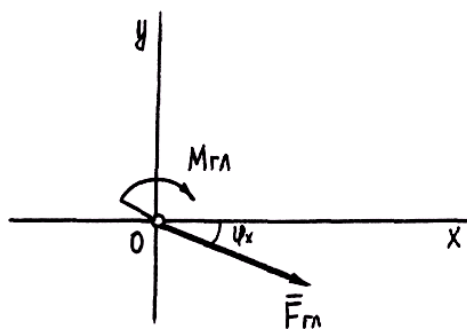


Рис. 4.4. Главный вектор и главный момент сил

Представим главный момент в виде пары сил  $(\overline{F}', \overline{F}_\Sigma)$ , численно равных главному вектору  $(\overline{F}_\Sigma = \overline{F}' = \overline{F}_{\text{гл}})$ , с плечом  $l = \frac{M_{\text{гл}}}{F_{\text{гл}}}$ . Расположим эту пару таким образом, чтобы одна из сил оказалась направленной вдоль линии действия главного вектора, но в противоположную сторону (рис. 4.5).

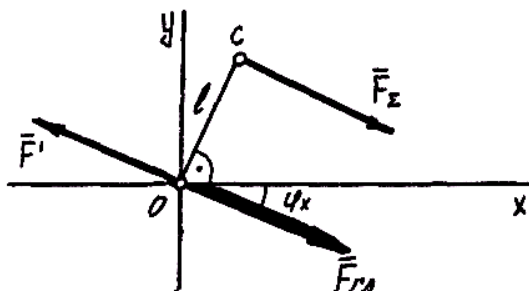


Рис. 4.5

Тогда силы  $\overline{F}'$  и  $\overline{F}_{\text{гл}}$  можно исключить, как взаимно уравновешенные, а оставшаяся пара  $\overline{F}_\Sigma$  и есть искомая равнодействующая рассматриваемой системы сил (рис. 4.6).

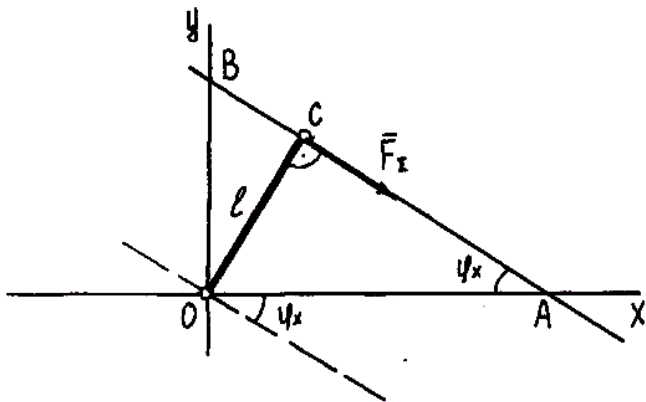


Рис. 4.6. Равнодействующая системы сил

Расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей:

$$OC = l = \frac{M_{\text{гл.}}}{F_{\Sigma}}$$

Следовательно, равнодействующая ПСПРС равна главному вектору и расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей равно частному от деления главного момента на модуль главного вектора или равнодействующей.

### 4.3. Теорема Вариньона

Непосредственно из равенства  $l = \frac{M_{\text{гл.}}}{F_{\Sigma}}$  вытекает важная зависимость между моментом равнодействующей и моментами составляющих сил, известная в механике как теорема Вариньона. Перепишем предыдущее равенство в таком виде:

$$F_{\Sigma} \cdot l = M_{\text{гл.}}$$

Из рис. 4.6 следует, что  $\bar{F}_{\Sigma} \cdot l = M_0(\bar{F}_{\Sigma})$  – момент равнодействующей относительно любой точки, а по формуле  $M_{\text{гл.}} = \sum M_0(\bar{F}_k)$ , поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$M_0(\bar{F}_{\Sigma}) = \sum M_0(\bar{F}_k),$$

т. е. момент равнодействующей ПСПРС относительно любой точки равен алгебраической сумме моментов сил системы, взятых относительно той же точки.

### 4.4. Уравнения равновесия и их различные формы

**Первая форма уравнений равновесия.** Если плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы проекций всех сил на оси  $X$  и  $Y$  равны нулю, а также равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки:



$$\begin{aligned}\sum M_0(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0.\end{aligned}$$

Уравнений равновесия три, т. е. в произвольной плоской уравновешенной системе число неизвестных сил не должно превышать трех.

**Вторая форма уравнений равновесия** (рис. 4.7).

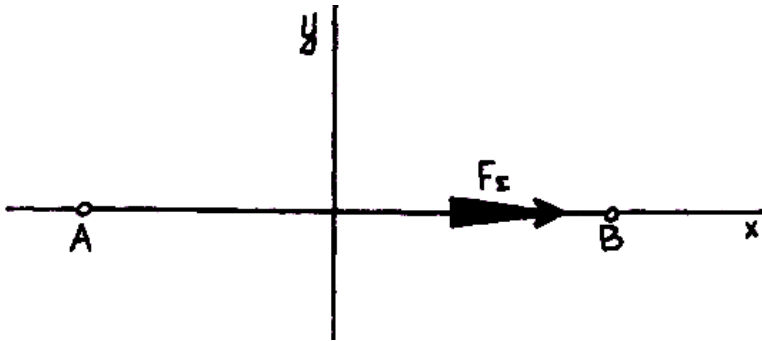


Рис. 4.7. Вторая форма уравнений равновесия

Если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно двух любых точек, а также алгебраическая сумма проекций сил на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки, равны нулю:

$$\begin{aligned}\sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0.\end{aligned}$$

**Третья форма уравнений равновесия.** Если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой, равны нулю:

$$\begin{aligned}\sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_C(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}$$

### *Частные случаи решения уравнений равновесия*

1. К телу может быть приложена уравновешенная система параллельных сил (рис. 4.8). Тогда, рационально расположив оси координат (например, ось  $X$  – перпендикулярно силам, а ось  $Y$  – параллельно им), получим

$$\begin{aligned}\sum F_k &= 0, \\ \sum M_0(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}$$

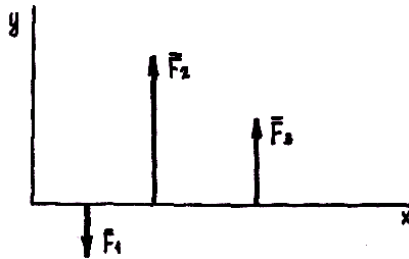


Рис. 4.8. Уравновешенная система параллельных сил

Если плоская система параллельных сил уравновешена, то алгебраическая сумма проекций сил на ось, параллельную силам, и алгебраическая сумма моментов сил относительно любой точки равны нулю.

2. Расположив центры моментов  $A$  и  $B$  на прямой, перпендикулярной направлениям сил (рис. 4.9), получим

$$\begin{aligned}\sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}$$

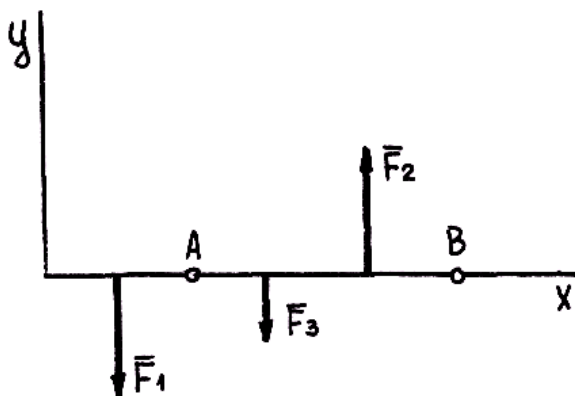


Рис. 4.9. Уравновешенная система параллельных сил

Если плоская система параллельных сил уравновешена, то равны нулю алгебраические суммы моментов сил относительно двух любых точек, лежащих на прямой, не параллельной линиям действия сил.

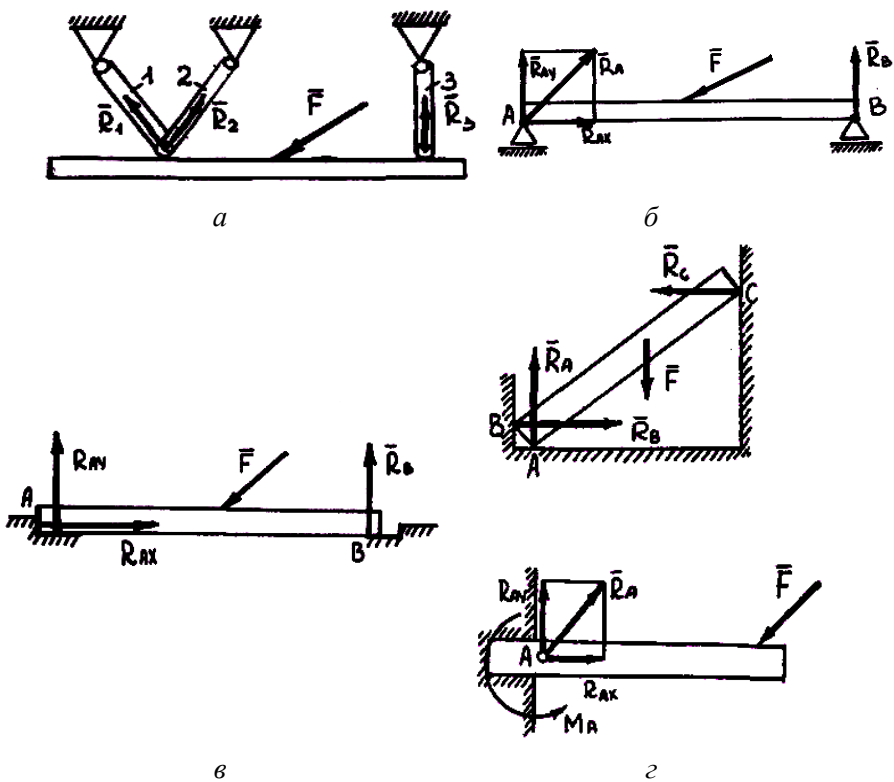
Для плоской системы параллельных сил можно составить два уравнения равновесия, т. е. для того, чтобы задача могла быть решенной, число неизвестных сил должно быть не больше двух. Вообще говоря, все задачи на равновесие системы сил, в которых число неизвестных не превосходит числа уравнений статики для этой системы, называются *статически определенными*. Если же число неизвестных сил превышает число уравнений статики, которые возможно составить для данной системы, то задача называется *статически неопределимой*.

#### 4.5. Балочные системы.

##### Разновидности опор и виды нагрузок

Объектом решения многих задач статики служат так называемые балки или балочные системы (рис. 4.10). *Балкой* называется конструктивная деталь какого-либо сооружения, в большинстве случаев выполняемая в виде прямого бруса с опорами в двух (или более) точках.

По способу приложения силы условно делятся на сосредоточенные и распределенные.



Жесткая заделка  
( $M_A$  – момент, препятствующий повороту балки)

Рис. 4.10. Балочные системы

1. **Сосредоточенные силы** (рис. 4.11). Предполагается, что нагрузка сосредоточена в точке.

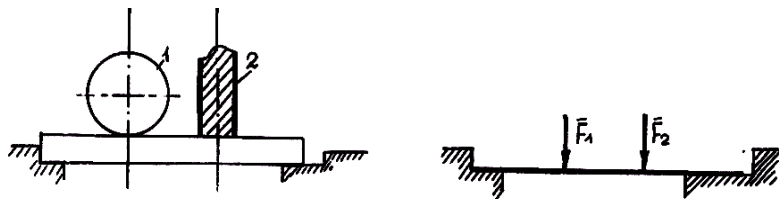


Рис. 4.11. Сосредоточенные силы

## 2. Равномерно распределенная нагрузка (рис. 4.12).

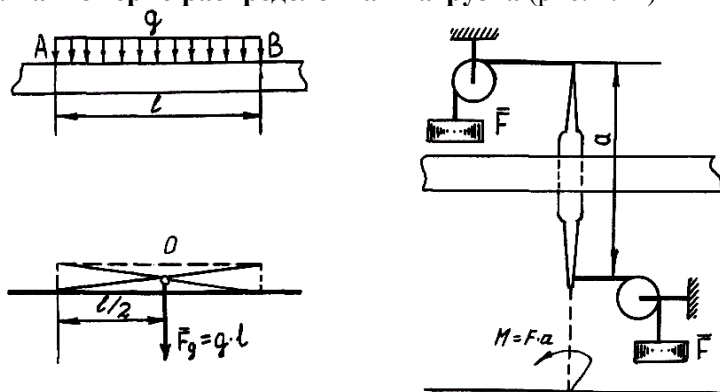


Рис. 4.12. Равномерно распределенная нагрузка

Равномерно распределенная нагрузка задается двумя параметрами – интенсивностью  $q$ , т. е. числом единиц силы (Н или кН), приходящихся на единицу длины (м), и длиной  $l$ . В задачах статики, где рассматриваются абсолютно недеформируемые (твердые) балки, равномерно распределенную нагрузку можно заменять равнодействующей сосредоточенной силой  $\overline{F}_q$ .

### 4.6. Реальные связи. Трение скольжения и его законы

Если связь идеальная (связь без трения), то ее реакция направлена по нормали к поверхности или к кривой, ограничивающей свободу движения тела (рис. 4.13).

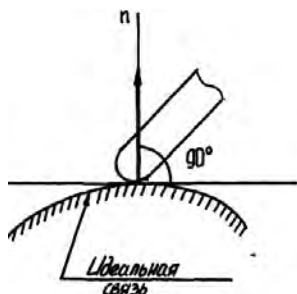


Рис. 4.13. Идеальная связь

Если же тело опирается на поверхность реальной связи (связь с трением), то ее реакция отклоняется от нормали на некоторый угол  $\varphi$  (рис. 4.14).

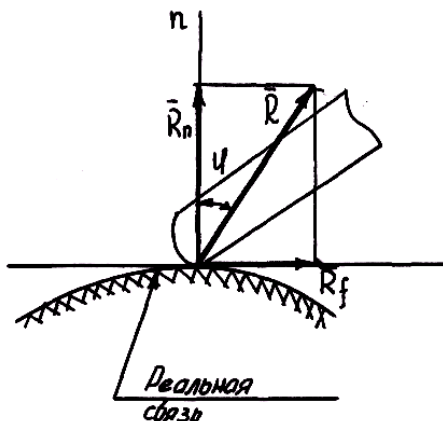


Рис. 4.14. Реальная связь

Таким образом, реакцию реальной связи можно рассматривать как геометрическую сумму составляющих – нормальной  $\bar{R}_n$  и касательной  $\bar{R}_t$ , которая и есть известная из физики сила трения.

$\bar{R}_t$  будет максимальной при  $\varphi = \varphi_0$ . Угол  $\varphi_0$  – максимальный угол, на который от нормали к поверхности реальной связи отклоняется ее реакция, называется **углом трения**:

$$\max \frac{R_f}{R_n} = \operatorname{tg} \varphi_0,$$

где  $\bar{R}_t$  – статическая сила трения или сила трения покоя.

Постоянное для двух соприкасающихся тел значение  $\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$  называется **статическим коэффициентом трения** (значения коэффициентов трения приводятся в различных физических или технических справочниках) или **коэффициентом трения покоя**.

## Основные законы трения

1. Сила трения действует в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и при движении направлена против относительного скольжения тела.

2. Статическая сила трения пропорциональна нормальной реакции:

$$\max R_f = f_0 \cdot R_0.$$

3. Статическая сила трения не зависит от размеров трущихся поверхностей.

4. Статический коэффициент трения ( $f_0$ ) зависит от материала соприкасающихся тел, физического состояния (влажности, температуры, степени загрязнения и т. д.) и качества обработки. (Законы трения относятся к числу не очень точных. Обычно наблюдаются значительные отклонения от них. Например, при увеличении продолжительности неподвижного контакта соприкасающихся тел статический коэффициент трения возрастает, так как в месте контакта постепенно происходит пластическое изменение поверхностей обоих тел и площади их соприкосновения увеличиваются. Следовательно, размеры трущихся поверхностей влияют на статический коэффициент трения, а значит и на силу трения).

После начала скольжения тела коэффициент трения несколько уменьшается и принимает значение динамического коэффициента трения  $f$ .

Следовательно,

$$f < f_0,$$
$$R_f = f \cdot R_n,$$

где  $R_f$  – сила трения скольжения.

## ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

### 5.1. Сложение пространственной системы сходящихся сил. Условие равновесия

Система сил, линии действия которых произвольно расположены в пространстве, называется *пространственной*.

Если к приложенным к точке  $A$  силам  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  добавить силу  $\vec{F}_3$ , не лежащую в плоскости  $\Pi$  действия двух первых сил, то получим простейшую (в количественном отношении) пространственную систему сходящихся сил (рис. 5.1).

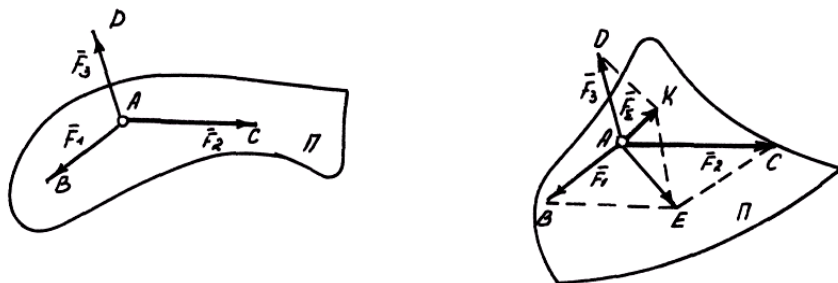


Рис. 5.1. Пространственная система сходящихся сил

Определим равнодействующую этих сил. Сначала построим параллелограмм  $ABEC$  на силах  $\vec{F}_1 = \overline{AB}$  и  $\vec{F}_2 = \overline{AC}$ . Его диагональ

$$\overline{AE} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Сложим  $AE$  с силой  $\vec{F}_3 = \overline{AD}$  и построим параллелограмм  $AEKD$ . Его диагональ

$$\overline{AK} = \vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Это векторное равенство выражает *правило параллелепипеда* при сложении приложенных к точке трех сил, не лежащих в одной плоскости.



Параллелограмм  $ABEC$  образует одну из граней параллелепипеда, в котором параллелограмм  $AEKD$  является диагональным сечением, а заданные силы  $\vec{F}_1 = \overline{AB}$ ,  $\vec{F}_2 = \overline{AC}$  и  $\vec{F}_3 = \overline{AD}$  – ребрами одного из его трехгранных углов. Таким образом, равнодействующая пространственной системы трех сил, сходящихся в одной точке (рис. 5.2), приложена в той же точке и по модулю и направлению равна диагонали параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны заданным силам:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2},$$

т. е. модуль равнодействующей трех сходящихся сил, расположенных в пространстве перпендикулярно друг другу, равен корню квадратному из суммы квадратов модулей этих сил.

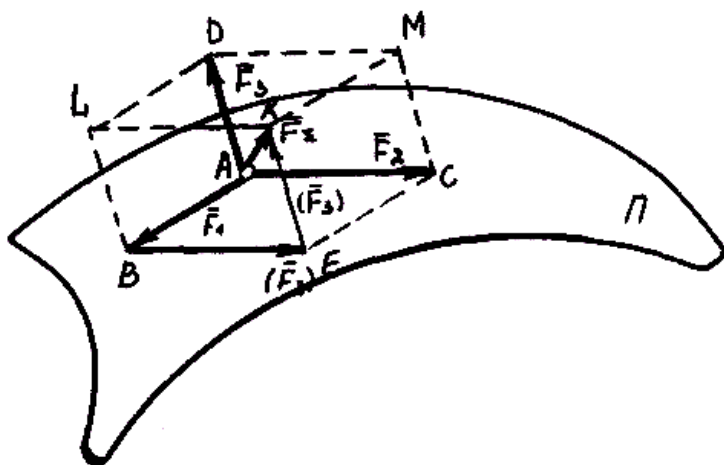


Рис. 5.2. Параллелепипед сил

Равнодействующая любого числа сходящихся сил, расположенных в пространстве, равна замыкающей стороне многоугольника, стороны которого равны и параллельны заданным силам (правило силового многоугольника) (рис. 5.3).

Аналитическое условие равновесия пространственной системы сходящихся сил выражается тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}\sum F_{Rx} &= 0, \\ \sum F_{Ry} &= 0, \\ \sum F_{Rz} &= 0.\end{aligned}$$

т. е. для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из трех осей координат были равны нулю.

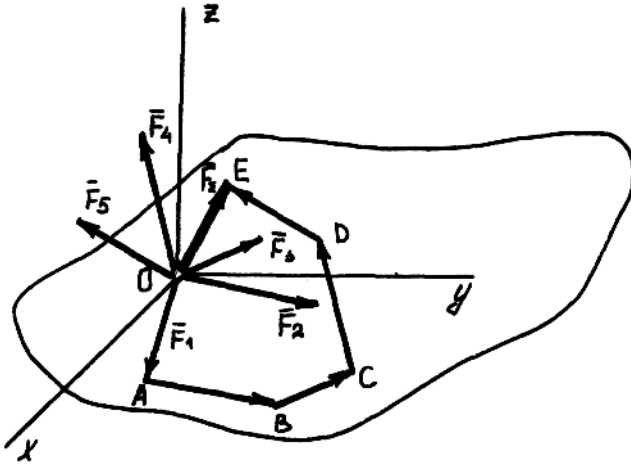


Рис. 5.3. Равнодействующая пространственной системы сходящихся сил

## 5.2. Момент силы относительно оси

Обозначив моменты силы  $\vec{F}$  относительно осей  $M_x(\vec{F})$ ,  $M_y(\vec{F})$  и  $M_z(\vec{F})$ , можем записать:

$$M_x(\vec{F}) = \pm F_{yz} \cdot l,$$

$$M_y(\vec{F}) = \pm F_{xz} \cdot l,$$

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot l,$$

где  $F_{yz}$ ,  $F_{xz}$  и  $F_{xy}$  – модули проекций сил на плоскости, перпендикулярные той оси, относительно которой определяется момент;

$l$  – плечи, равные длинам перпендикуляров от точки пересечения оси с плоскостью до проекции или ее продолжения.

Знак «плюс» или «минус» ставится в зависимости от того, в какую сторону поворачивается плечо  $l$  вектором проекции, если смотреть на плоскость проекции со стороны положительного направления оси; при стремлении вектора проекции повернуть плечо против хода часовой стрелки момент условимся считать положительным, и наоборот.

Следовательно, **моментом силы относительно оси** называется алгебраическая (скалярная) величина, равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 5.4).

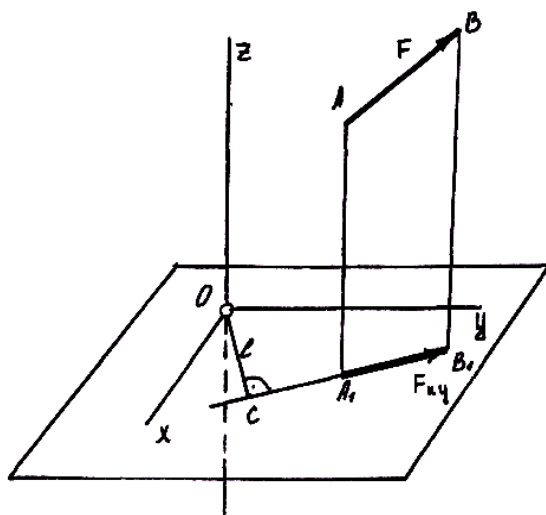


Рис. 5.4. Момент силы относительно оси

Рис. 5.4 иллюстрирует последовательность определения момента силы  $\vec{F}$  относительно оси  $Z$ . Если задана сила и выбрана (или задана) ось:

- а) то перпендикулярно оси выбирают плоскость (плоскость  $XOY$ );

б) силу  $F$  проецируют на эту плоскость и определяют модуль  $F_{xy}$  этой проекции;

в) из точки  $O$  пересечения оси с плоскостью опускают перпендикуляр  $OC$  к проекции  $F_{xy}$  и определяют плечо  $l = OC$ ;

г) глядя на плоскость  $XOY$  со стороны положительного направления оси  $Z$  (т. е. в данном случае сверху), видим, что  $OC$  поворачивается вектором  $\vec{F}_{xy}$  против хода стрелки часов, значит,

$$M_z(\vec{F}) = F_{xy} \cdot l.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости:

а) сила  $\vec{F}$  пересекает ось (в этом случае  $l = 0$ ) (рис. 5.5, а);

б) сила  $\vec{F}$  параллельна оси ( $F_{xy} = 0$ ), (рис. 5.5, б);

в) сила  $\vec{F}$  действует вдоль оси ( $l = 0$  и  $F_{xy} = 0$ ), (рис. 5.5, в).

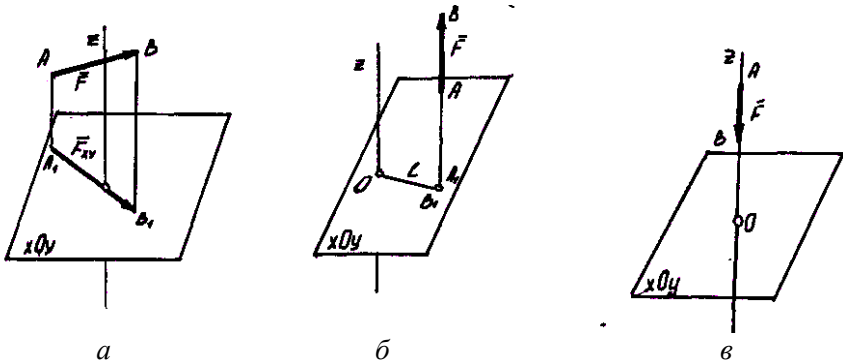


Рис. 5.5. Случаи равенства нулю момента силы

### 5.3. Пространственная система произвольно расположенных сил. Условие равновесия

Ранее подробно был изложен процесс приведения сил к точке и доказано, что любая плоская система сил приводится к силе – главному вектору – и паре, момент которой называется главным момен-

том, причем эквивалентные данной системе сил сила и пара действуют в той же плоскости, что и заданная система. Значит, если главный момент изобразить в виде вектора, то главный вектор и главный момент плоской системы сил всегда перпендикулярны друг другу.

Рассуждая аналогично, можно последовательно привести к точке силы пространственной системы. Но теперь главный вектор есть замыкающий вектор пространственного (а не плоского) силового многоугольника; главный момент уже нельзя получить алгебраическим сложением моментов данных сил относительно точки приведения. При приведении к точке пространственной системы сил присоединенные пары действуют в различных плоскостях и их моменты целесообразно представлять в виде векторов и складывать геометрически. Поэтому полученные в результате приведения пространственной системы сил главный вектор (геометрическая сумма сил системы) и главный момент (геометрическая сумма моментов сил относительно точки приведения), вообще говоря, не перпендикулярны друг другу.

Векторные равенства  $F_{\text{гл}} = 0$  и  $M_{\text{гл}} = 0$  выражают необходимое и достаточное условие равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил.

Если главный вектор равен нулю, то его проекции на три взаимно перпендикулярные оси также равны нулю. Если главный момент равен нулю, то равны нулю и три его составляющие на те же оси:

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_{Rx} = 0, \sum M_x(\bar{F}_R) = 0; \\ \sum \bar{F}_{Ry} = 0, \sum M_y(\bar{F}_R) = 0; \\ \sum \bar{F}_{Rz} = 0, \sum M_z(\bar{F}_R) = 0. \end{cases}$$

Значит, произвольная пространственная система сил статически определима лишь в том случае, когда число неизвестных не превышает шести.

Среди задач статики часто встречаются такие, в которых на тело действует пространственная система параллельных друг другу сил (рис. 5.6).

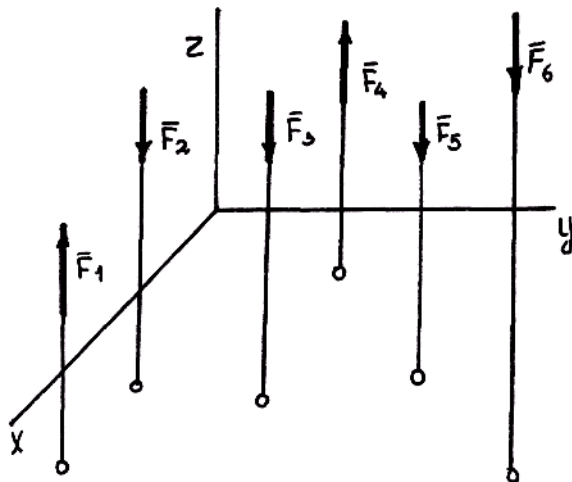


Рис. 5.6. Пространственная система параллельных сил

Уравнения равновесия для пространственной системы параллельных сил:

$$\begin{aligned}\sum F_{kz} &= 0, \\ \sum M_x(F_k) &= 0, \\ \sum M_y(F_k) &= 0.\end{aligned}$$

В пространственной системе параллельных сил неизвестных должно быть не больше трех, иначе задача становится статически неопределимой.

## ГЛАВА 6. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

### 6.1. Основные понятия кинематики

Раздел механики, занимающийся изучением движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил, называется *кинематикой*.

*Движение* – основная форма существования всего материального мира, *покой и равновесие* – частные случаи.

Всякое движение, и механическое в том числе, происходит в пространстве и во времени.

Все тела состоят из материальных точек. Чтобы получить правильное представление о движении тел, начинать изучение нужно с движения точки. Перемещение точки в пространстве выражается в метрах, а также в дольных (см, мм) или кратных (км) единицах длины, время – в секундах. В практике или жизненных ситуациях время часто выражают в минутах или часах. Отсчет времени при рассмотрении того или иного движения точки ведут от определенного, заранее обусловленного начального момента ( $t = 0$ ).

Геометрическое место положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета называется *траекторией*. По виду траектории движение точки делится на *прямолинейное* и *криволинейное*. Траектория точки может быть определена и задана заранее. Так, например, траектории искусственных спутников Земли и межпланетных станций вычисляются заранее, или если принять движущиеся по городу автобусы за материальные точки, то их траектории (маршруты) также известны. В подобных случаях положение точки в каждый момент времени определяется расстоянием (дуговой координатой)  $S$ , т. е. длиной участка траектории, отсчитанной от некоторой ее неподвижной точки, принятой за начало отсчета. Отсчет расстояний от начала траектории можно вести в обе стороны, поэтому отсчет в одну какую-либо сторону условно принимают за положительный, а в противоположную – за отрицательный, т. е. расстояние  $S$  – величина алгебраическая. Она может быть положительной ( $S > 0$ ) или отрицательной ( $S < 0$ ).

При движении точка за определенный промежуток времени проходит некоторый путь  $L$ , который измеряется вдоль траектории в направлении движения (рис. 6.1):

$$S_1 = L = \overline{OA}.$$

Если точка стала двигаться не из начала отсчета  $O$ , а из положения, находящегося на начальном расстоянии  $S_0$ , то

$$L = \overline{A_0A} = S_1 - S_0.$$



Рис. 6.1. Движение точки

Векторная величина, характеризующая в каждый данный момент времени направление и быстроту движения точки, называется *скоростью*. Единицы скорости:

$$1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{10^3}{3600} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 0,278 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость точки в любой момент ее движения направлена по касательной к траектории (рис. 6.2):

$$\vec{v}_{\text{сп}} = \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t}.$$

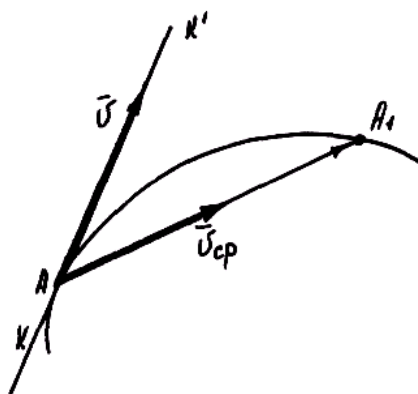


Рис. 6.2. Вектор скорости точки



Отметим, что это векторное равенство характеризует лишь положение  $\bar{v}_{\text{cp}}$ , а модуль средней скорости за время  $\Delta t$

$$v_{\text{cp}} = \frac{AA_1}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t},$$

где  $AA_1 = L$  – путь, пройденный точкой за время  $\Delta t$ .

Модуль средней скорости равен частному от деления пройденного пути на время, в течение которого этот путь пройден.

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения направления и числового значения скорости, называется *ускорением* (рис. 6.3):

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}, \quad \Delta v = v_2 - v_1.$$

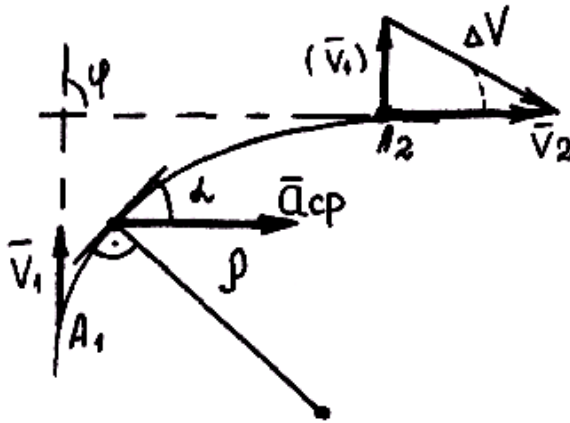


Рис. 6.3. Ускорение точки

При равномерном движении по криволинейной траектории точка тоже имеет ускорение, так как и в этом случае изменяется направление скорости (рис. 6.4):

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2$$

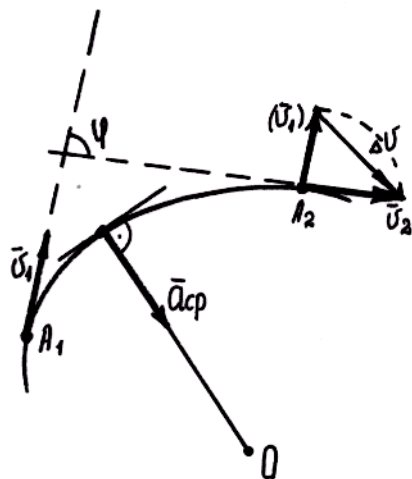


Рис. 6.4. К определению ускорения точки

За единицу ускорения принимают обычно  $1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

## 6.2. Способы задания движения точки

Существует три способа задания движения: естественный, координатный, векторный.

**Естественный способ задания движения точки.** Если кроме траектории, на которой отмечено начало отсчета  $O$ , задана зависимость  $S = f(t)$  между расстоянием  $S$  и временем  $t$ , это уравнение называется *законом движения точки по заданной траектории* (рис. 6.5).

Пример:  $S = 0,5t$ .

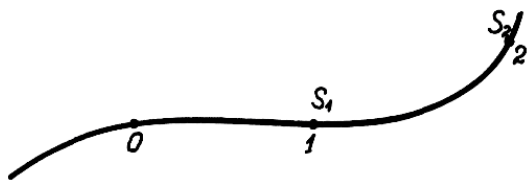


Рис. 6.5. Траектория движения точки

Пусть, например, задана некоторая траектория, движение точки по которой определяется уравнением  $S = 0,5t^2$   $S$ —м,  $t$ —с. Тогда в момент времени  $t_0 = 0$   $S_0 = 0$ , т. е. точка находится в начале отсчета  $O$ ; в момент времени  $t_1 = 1$  с точка находится на расстоянии  $S_1 = 0,5t_1^2 = 0,5 \cdot 1^2 = 0,5$  м; в момент времени  $t_2 = 2$  с точка находится на расстоянии  $S_2 = 0,5t_2^2 = 0,5 \cdot 2^2 = 2$  м от начала отсчета  $O$ .

**Координатный способ задания движения точки.** Когда траектория точки заранее не известна, положение точки в пространстве определяется тремя координатами: абсциссой  $X$ , ординатой  $Y$  и аппликатой  $Z$  (рис. 6.6):  $X = f_1(t)$ ;  $Y = f_2(t)$ ;  $Z = f_3(t)$  или, исключив время,  $\Phi(X, Y, Z) = 0$ .

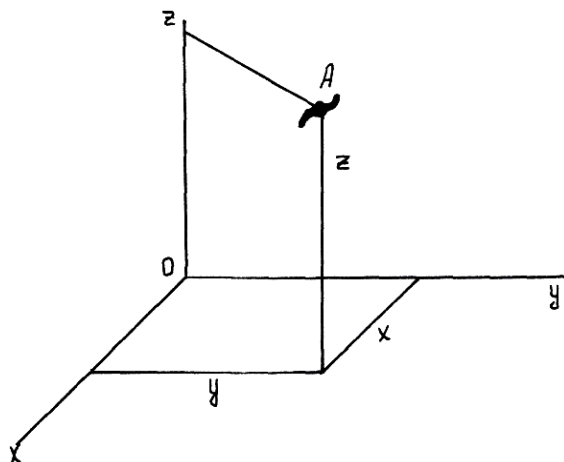


Рис. 6.6. Координатный способ задания движения точки

Эти уравнения выражают **закон движения точки в прямоугольной системе координат ( $OXYZ$ )**.

В частном случае, если точка движется в плоскости, закон движения точки выражается двумя уравнениями:  $X = f_1(t)$ ;  $Y = f_2(t)$  или  $\Phi(X, Y) = 0$ .

**Пример 6.1.** Движение точки в плоской системе координат задано уравнениями  $X = 2t$  и  $Y = 3t$  ( $X$  и  $Y$ —см,  $t$ —с) (рис. 6.7). Тогда

в момент времени  $t_0=0$   $X_0=0$  и  $Y_0=0$ , т. е. точка находится в начале координат; в момент времени  $t_1=1$  с координаты точки  $X_1=2t_1 \cdot 1=2$  см,  $Y_1=3t_1=3 \cdot 1=3$  см; в момент времени  $t_2=2$  с координаты точки  $X_2=2t_2=2 \cdot 2=4$  см,  $Y_2=3t_2=3 \cdot 2=6$  см и т. д.

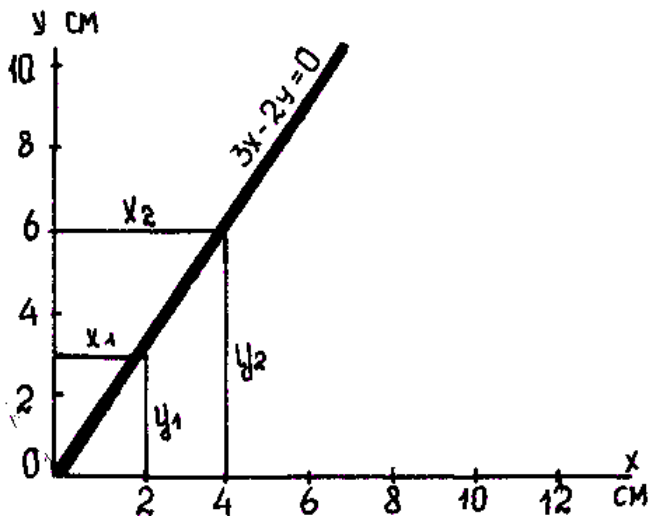


Рис. 6.7. К примеру 6.1

Зная закон движения точки в прямоугольной системе координат, можно определить **уравнение траектории точки**.

Например, исключив время  $t$  из заданных выше уравнений  $X=2t$  и  $Y=3t$ , получим уравнение траектории  $3x-2y=0$ . Как видим, в этом случае точка движется по прямой, проходящей через начало координат.

### 6.3. Определение скорости точки при естественном способе задания ее движения

Пусть движение точки  $A$  по заданной траектории происходит согласно уравнению  $S=f(t)$ , требуется определить скорость точки в момент времени  $t$  (рис. 6.8).

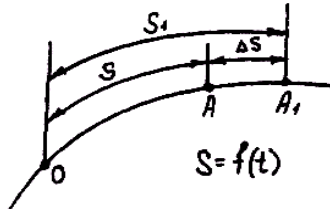


Рис. 6.8. Дуговая координата движения точки:

$t$  – положение точки  $A$ ;

$t + \Delta t$  – положение точки  $A_1$ ;

За время точка  $\Delta t$  проходит путь  $L = \Delta S = S_1 - S$ .

За промежуток времени  $\Delta t$  точка прошла путь  $L = \Delta S = S_1 - S$ , значение средней скорости на этом пути

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

но оно отличается от значения скорости в момент времени  $t$ . Скорость в заданный момент  $t$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = f'(t),$$

т. е. значение скорости точки, движение которой задано естественным способом, в любой момент времени равно первой производной от расстояния (дуговой координаты) по времени.

Направление скорости, как отмечалось выше, известно заранее.

#### 6.4. Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения

Вектор  $\bar{a}$  – ускорение точки в данный момент (рис. 6.9,  $a$ ) – есть геометрическая сумма касательного  $\bar{a}_t$  и нормального  $\bar{a}_n$  ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n.$$

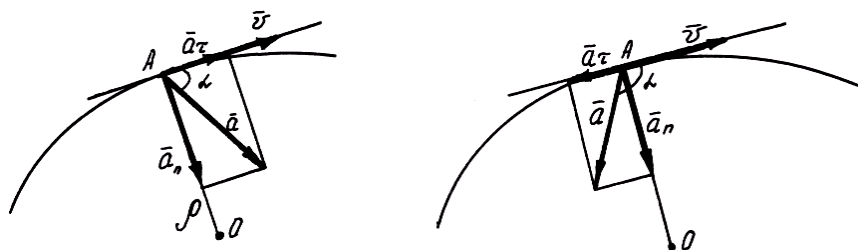


Рис. 6.9. Нормальное (а) и касательное (б) ускорения точки

Вектор  $\bar{a}_\tau$  в любой момент времени направлен по касательной (рис. 6.9, б), поэтому вектор  $\bar{a}_\tau$  называется **касательным**, или **тангенциальным ускорением**. Модуль касательного ускорения

$$\bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt} = f''(t),$$

равный производной от скорости в данный момент по времени или, иначе, второй производной от расстояния по времени, характеризует быстроту изменения значения скорости.

Доказано, что вектор  $\bar{a}_n$  в любой момент времени перпендикулярен касательной, поэтому он называется **нормальным ускорением**:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Значит, модуль нормального ускорения пропорционален второй степени модуля скорости в данный момент, обратно пропорционален радиусу кривизны траектории в данной точке и характеризует быстроту изменения направления скорости.

Модуль ускорения

$$|a| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

а направление  $a$  (угол  $\alpha = (\hat{a}, V)$ ) находим с помощью тригонометрических функций по одной из следующих формул:

$$\sin \alpha = \frac{a_n}{a};$$

$$\cos \alpha = \frac{a_t}{a};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_t}.$$

Если векторы  $\bar{v}$  и  $\bar{a}_t$  направлены в одну и ту же сторону, то движение точки называется *ускоренным*. При этом значения  $\bar{v}$  и  $\bar{a}_t$  имеют одинаковые знаки ( $v > 0, a_t > 0$  или  $v < 0, a_t < 0$ ). Если же векторы  $\bar{v}$  и  $\bar{a}_t$  направлены в противоположные стороны, то движение точки называется *замедленным*. В этом случае знаки  $\bar{v}$  и  $\bar{a}_t$  разные ( $v > 0, a_t < 0$  или  $v < 0, a_t > 0$ ).

### 6.5. Частные случаи движения точки

1. **Прямолинейное движение.** Если  $a_n = 0$ , то точка движется прямолинейно, так как при  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  направление скорости остается неизменным.

2. **Равномерное движение.** При  $a_t = 0, v = \text{const}$  уравнение равномерного движения

$$S = S_0 + vt.$$

При начальном расстоянии  $S_0 = 0$ , т. е. точка в момент начала движения находится в начале отсчета расстояний, уравнение равномерного движения упрощается:  $S = vt$ .

Если  $a_t = 0$  и  $a_n = 0$ , то движение точки называется *равномерным прямолинейным*. Если  $a_t = 0$  и  $a_n \neq 0$ , то точка движется равномерно по криволинейной траектории.

### ***Равномерное движение точки по окружности***

При таком движении (рис. 6.10)  $a_t = 0$  и  $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \text{const}$ , так как при равномерном движении  $v = \text{const}$ , а при движении по окружности  $\rho = r = \text{const}$ . Из формулы  $S = S_0 + vt$  скорость равномерного движения по окружности

$$v = \frac{S - S_0}{t}.$$

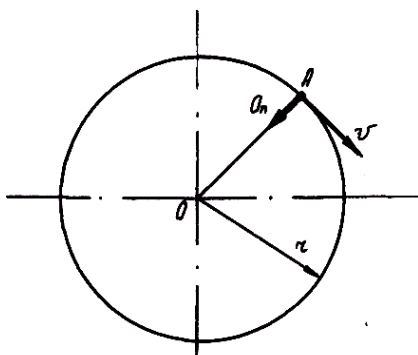


Рис. 6.10. Равномерное движение точки по окружности

Если принять  $t = T$  – периоду, т. е. времени одного обхода точкой окружности, то  $S - S_0 = 2\pi r$  и

$$v = \frac{2\pi r}{T} \text{ или } v = \frac{\pi d}{T},$$

где  $d = 2r$  – диаметр окружности.



3. **Равнопеременное движение.** Если  $a_t = \frac{dv}{dt} = \text{const}$ , то дви-

жение точки называется *равнопеременным*.

Уравнение равнопеременного движения точки

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}.$$

$v = v_0 + a_t t$  – скорость в любой момент времени.

$$a_n = 0 \text{ и } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_t^2} = a_t.$$

А. При равнопеременном прямолинейном движении, если не известно время  $t$ , получим первую вспомогательную формулу

$$S = S_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t}.$$

Если не известно  $a_t$ :

$$S = S_0 + \frac{v_0 + v}{2} t,$$

где  $\frac{v_0 + v}{2} = v_{\text{cp}}$  – средняя скорость точки при ее равномерном движении.

Б. Если равноускоренное движение точки начинается из начала отсчета траектории ( $S_0 = 0$ ) и без начальной скорости ( $v_0 = 0$ ), то предыдущие формулы приобретают более простой вид:

$$v = a_t t,$$

$$S = \frac{a_t t^2}{2};$$

$$S = \frac{v^2}{2a_t};$$

$$S = \frac{vt}{2}.$$

Примерами такого движения могут служить движение автомобиля при трогании с места или движение самолета на взлетной полосе, а также известное из физики свободное падение тел.

В. При свободном падении  $a_t = a = g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . В этом случае, если в формулах из пункта (Б)  $S$  заменить высотой падения  $H$ , то формулы примут вид

$$v = gt;$$

$$H = \frac{gt^2}{2};$$

$$H = \frac{v^2}{2g};$$

$$H = \frac{vt}{2}.$$

Предпоследняя из этих формул, представленная в виде  $v = \sqrt{2gH}$ , называется **формулой Галилея**.

## ГЛАВА 7. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 7.1. Поступательное движение

Движение твердого тела, при котором любой выбранный в теле отрезок прямой перемещается, оставаясь параллельным своему первоначальному положению, называется **поступательным**.

Рассмотрим две точки  $A$  и  $B$ , соединенные отрезком  $AB$  (рис. 7.1). Очевидно, что при перемещении отрезка  $AB$  параллельно

первоначальному положению ( $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ) точки  $A$  и  $B$  движутся по одинаковым траекториям, т. е. если траекторию  $BB_1B_2$  совместить с траекторией  $AA_1A_2$ , то они совпадут. Если вместе с точкой  $A$  рассмотреть движение точки  $C$ , то при движении тела отрезок  $AC$  также остается параллельным своему первоначальному положению ( $AC \parallel AC_1 \parallel AC_2$ ) и траектория точки  $C$  (кривая  $CC_1C_2$ ) одинакова с траекториями  $AA_1A_2$  и  $BB_1B_2$ :

$$v_A = v_B = v_C, \text{ или } v_{A1} = v_{B1} = v_{C1}, \text{ или } v_{A2} = v_{B2} = v_{C2};$$

$$a_A = a_B = a_C, \text{ или } a_{A1} = a_{B1} = a_{C1}, \text{ или } a_{A2} = a_{B2} = a_{C2}.$$

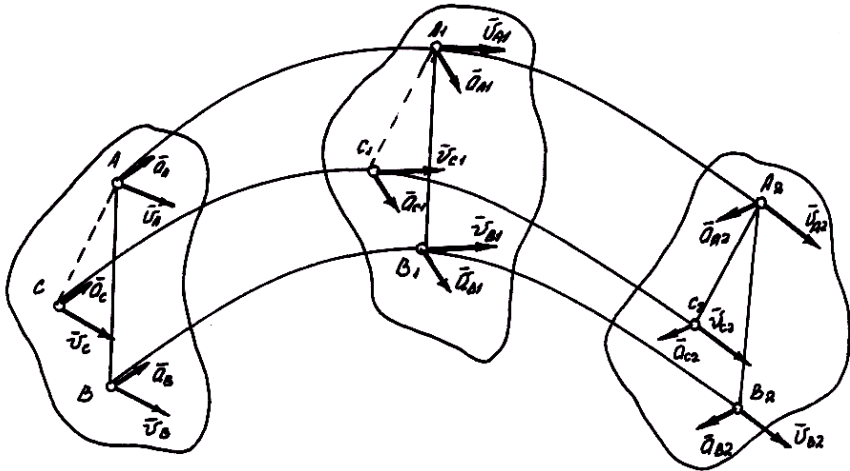


Рис. 7.1. К анализу поступательного движения твердого тела

Как видим, поступательное движение твердого тела полностью характеризуется движением любой его точки. Обычно поступательное движение тела задается движением его центра тяжести, иначе говоря, при поступательном движении тело можно считать материальной точкой.

Примерами поступательного движения тел могут служить какой-либо ползун 1, движущийся в прямолинейных направляющих 2 (рис. 7.2, а), или прямолинейно движущийся автомобиль (вернее, не

весь автомобиль, а его шасси с кузовом). Иногда криволинейное движение на поворотах дорог автомобилями или поездов условно принимают за поступательное. В подобных случаях говорят, что автомобиль или поезд движется с такой-то скоростью или с таким-то ускорением.

Примерами криволинейного поступательного движения служат движение вагончика (люльки) подвесной канатной дороги (рис. 7.2, б) или движение спарника (рис. 7.2, в), соединяющего два параллельных кривошипа. В последнем случае каждая точка спарника движется по окружности.

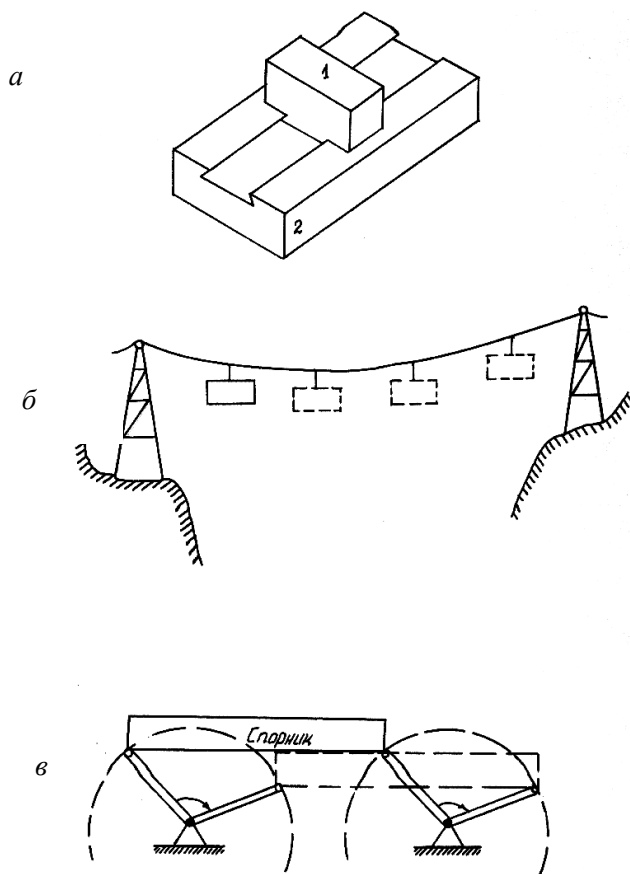


Рис. 7.2. Примеры поступательного движения тел:  
а – прямолинейного; б, в – криволинейного

## 7.2. Вращательное движение. Угловая скорость, угловое ускорение

Движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются по окружности, центры которой расположены на перпендикулярной этим окружностям неподвижной прямой, называется **вращательным**. Неподвижная прямая, на которой лежат центры круговых траекторий точек тела, называется его **осью вращения**. Для образования оси вращения достаточно закрепить какие-либо две точки тела. В качестве примеров вращательного движения тел можно привести движение дверей или створок окон при их открывании или закрывании.

Представим себе тело в виде цилиндра, ось  $AB$  которого лежит в подшипниках (рис. 7.3).

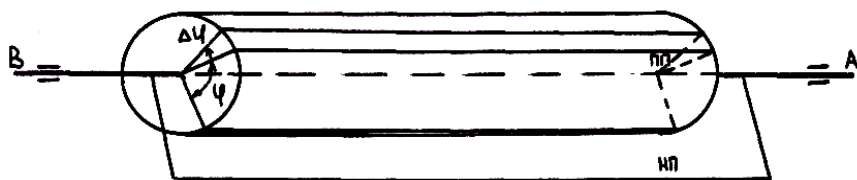


Рис. 7.3. К анализу вращательного движения твердого тела

Движением одной какой-либо точки однозначно определить вращательное движение тела нельзя.

Для установления закона вращательного движения тела, по которому можно определять его положение в данный момент, проведем через ось вращения тела связанную только с нею неподвижную полуплоскость  $НП$ , а внутри тела отметим подвижную полуплоскость, которая вращается около оси вместе с телом, теперь угол  $\varphi$ , образуемый в каждый данный момент времени полуплоскостями  $НП$  и  $ПП$ , точно определяет положение тела в пространстве (см. рис. 7.3). Угол  $\varphi$  называется **углом поворота** и выражается в радианах. Чтобы определять положение тела в пространстве в любой момент времени, необходимо знать зависимость между углом поворота  $\varphi$  и временем  $t$ , т. е. знать закон вращательного движения тела:

$$\varphi = f(t).$$

Быстрота изменения угла поворота во времени характеризуется величиной, которая называется **угловой скоростью**.

Представим, что в некоторый момент времени  $t$  положение вращающегося тела определяется углом поворота  $\varphi$ , а в момент  $t + \Delta t$  – углом поворота  $\varphi + \Delta \varphi$ . Следовательно, за время  $\Delta t$  тело повернулось на угол  $\Delta \varphi$ , и величина

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

называется **средней угловой скоростью**.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t).$$

Единицей угловой скорости является 1 рад/с. Характеристикой быстроты изменения угловой скорости служит **угловое ускорение**,

обозначаемое  $\varepsilon$ . Среднее ускорение  $\varepsilon_{\text{cp}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ ;

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = f''(t).$$

Единица углового ускорения 1 рад/с<sup>2</sup>.

Условимся угол поворота, отсчитываемый против хода часовой стрелки, считать положительным, а отсчитываемый по ходу часовой стрелки – отрицательным.

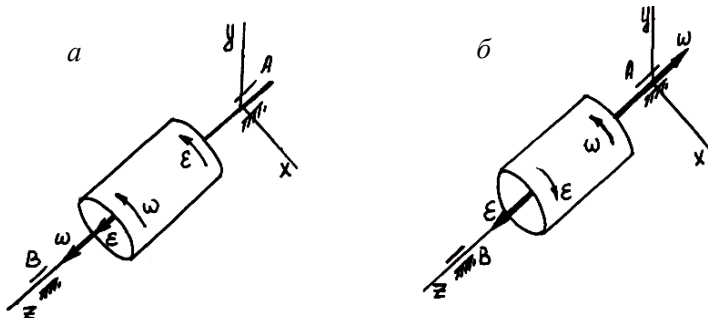


Рис. 7.4. К определению вида вращательного движения

Векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  – это скользящие векторы, которые направлены по оси вращения, чтобы, глядя из конца вектора  $\vec{\omega}$  (или  $\vec{\varepsilon}$ ), видеть вращение, происходящее против часовой стрелки.

Если векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  направлены в одну сторону (рис. 7.4, а), то вращательное движение тела **ускоренное** – угловая скорость возрастает. Если векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  направлены в противоположные стороны, то вращение тела **замедленное** – угловая скорость уменьшается (рис. 7.4, б).

### 7.3. Частные случаи вращательного движения

1. **Равномерное вращательное движение.** Если угловое ускорение  $\varepsilon = 0$  и, следовательно, угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}, \quad (7.1)$$

то вращательное движение называется равномерным. Из выражения (7.1) после разделения переменных получим

$$d\varphi = \omega \cdot dt.$$

Если при изменении времени от 0 до  $t$  угол поворота изменялся от  $\varphi_0$  (начальный угол поворота) до  $\varphi$ , то, интегрируя уравнение в этих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt,$$

получаем уравнение равномерного вращательного движения

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t,$$

которое в окончательном виде записывается так:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Если  $\varphi_0 = 0$ , то

$$\varphi = \omega t.$$

Таким образом, при равномерном вращательном движении угловая скорость

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} \text{ или при } \varphi_0 = 0 \quad \omega = \frac{\varphi}{t}.$$

**2. Равнопеременное вращательное движение.** Если угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const}, \quad (7.2)$$

то вращательное движение называется равнопеременным. Производя разделение переменных в выражении (7.2):

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt,$$

и приняв, что при изменении времени от 0 до  $t$  угловая скорость изменилась от  $\omega_0$  (начальная угловая скорость) до  $\omega$ , проинтегрируем уравнение в этих пределах:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt \quad \text{или} \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon t,$$

т. е. получим уравнение

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (7.3)$$

выражающее значение угловой скорости в любой момент времени.

Закон равнопеременного вращательного движения  $d\varphi = \omega dt$  или, с учетом уравнения (7.3):

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t \cdot dt.$$



Полагая, что в течение времени от 0 до  $t$  угол поворота изменялся от  $\varphi_0$  до  $\varphi$ , проинтегрируем уравнение в этих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt, \quad \text{или} \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Уравнение равнопеременного вращательного движения в окончательном виде

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (7.4)$$

Первую вспомогательную формулу получим, исключив из формул (7.3) и (7.4) время:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(\omega^2 + \omega_0^2)}{2\varepsilon}. \quad (7.5)$$

Исключив из тех же формул угловое ускорение  $\varepsilon$ , получим вторую вспомогательную формулу:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}, \quad (7.6)$$

где  $\frac{(\omega_0 + \omega)}{2} = \omega_{\text{cp}}$  – средняя угловая скорость при равнопеременном вращательном движении.

Когда  $\varphi_0 = 0$  и  $\omega_0 = 0$ , формулы (7.3)–(7.6) приобретают более простой вид:

$$\begin{aligned} \omega &= \varepsilon t; \\ \varphi &= \frac{\varepsilon t^2}{2}; \\ \varphi &= \frac{\omega^2}{2\varepsilon}; \\ \varphi &= \frac{\omega t}{2}. \end{aligned}$$

В процессе конструирования угловое перемещение выражают не в радианах, а просто в оборотах.

Угловая скорость, выражаемая количеством оборотов в минуту, называется **частотой вращения** и обозначается  $n$ . Установим зависимость между  $\omega$  ( $\text{с}^{-1}$ ) и  $n$  ( $\text{мин}^{-1}$ ). Так как  $\omega = \frac{\varphi}{t}$ , то при  $n$  ( $\text{мин}^{-1}$ ) за  $t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$  угол поворота  $\varphi = 2\pi n$ . Следовательно:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

При переходе от угловой скорости  $\omega$  ( $\text{с}^{-1}$ ) к частоте вращения  $n$  ( $\text{мин}^{-1}$ ) имеем

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

#### 7.4. Скорости и ускорения различных точек вращающегося тела

Определим скорость и ускорение любой точки в любой момент времени. Для этой цели установим зависимость между угловыми величинами  $\varphi$ ,  $\omega$  и  $\varepsilon$ , характеризующими вращательное движение тела, и линейными величинами  $\bar{S}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{a}_\tau$ ,  $\bar{a}_n$  и  $\bar{a}$ , характеризующими движение точек тела.

Допустим, что тело, показанное на рис. 7.5, вращается по закону, описываемому уравнением  $\varphi = f(t)$ . Требуется определить скорость  $v$  и ускорение  $a$  точки  $A$  этого тела, расположенной на расстоянии  $\rho$  от оси вращения  $O$ . Пусть тело за некоторое время  $t$  повернулось на угол  $\varphi$ , а точка  $A$ , двигаясь по окружности из некоторого начального положения  $A_0$ , переместилась на расстояние  $S = A_0A$ . Так как угол  $\varphi$  выражается в радианах, то

$$S = \rho\varphi, \tag{7.7}$$

т. е. расстояние, пройденное точкой вращающегося тела, пропорционально его углу поворота. Расстояние  $S$  и угол поворота  $\varphi$  – функции времени, а  $\rho$  – величина, постоянная для данной точки. Продифференцируем по времени обе части равенства (7.7) и получим

$$\frac{dS}{dt} = \rho \frac{d\varphi}{dt},$$

но  $\frac{dS}{dt} = v$  – скорость точки, а  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  – угловая скорость тела, поэтому

$$v = \rho \omega, \quad (7.8)$$

т. е. скорость точки вращающегося тела пропорциональна его угловой скорости.

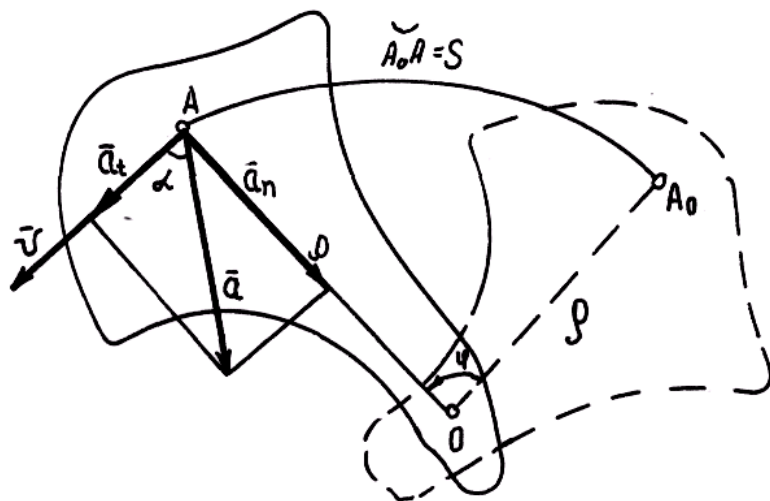


Рис. 7.5. К определению скорости и ускорения точки

Из формулы (7.8) видно, что для точек, расположенных на оси вращения,  $\rho = 0$  и скорости этих точек также равны нулю. По мере изменения  $\rho$ , т. е. у точек, находящихся дальше от оси вращения,

скорости тем больше, чем больше значение  $\rho$ . Пропорциональная зависимость скоростей различных точек вращающегося тела от их расстояний относительно оси вращения показана на рис. 7.6.

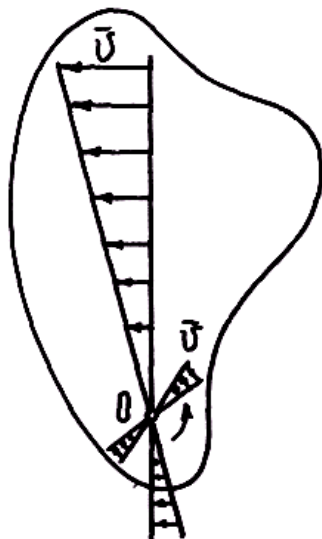


Рис. 7.6. Распределение скоростей при вращательном движении твердого тела

Продифференцировав обе части равенства (7.8), имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho d\omega}{dt},$$

но  $\frac{dv}{dt} = a_t$  – касательное ускорение точки, а  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$  – угловое ускорение тела, значит

$$a_t = \rho\varepsilon, \tag{7.9}$$

т. е. касательное ускорение точки вращающегося тела пропорционально его угловому ускорению.

Подставив в формулу  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  значение скорости из формулы (7.8), получим

$$a_n = \rho\omega^2, \quad (7.10)$$

т. е. нормальное ускорение точки вращающегося тела пропорционально второй степени его угловой скорости.

Из формулы  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$  после подстановки вместо  $a_\tau$  и  $a_n$  их значений из формул (7.9) и (7.10) получаем

$$a = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (7.11)$$

Направление вектора ускорения, т. е. угол  $\alpha = (\hat{a}, \hat{V})$ , определяется по одной из формул  $\sin \alpha = \frac{a_n}{a}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$ , причем последнюю из них теперь можно представить в таком виде:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\rho\omega^2}{\rho\varepsilon} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}. \quad (7.12)$$

Из формул (7.11) и (7.12) следует, что для точек тела при его вращательном движении по заданному закону можно сначала найти ускорение  $a$ , а затем разложить его на касательное ускорение  $a_\tau$  и нормальное ускорение  $a_n$ , модуль которых

$$a_\tau = a \cos \alpha \quad \text{и} \quad a_n = a \sin \alpha.$$

## 7.5. Способы передачи вращательного движения

В технике часто возникает необходимость передачи вращательного движения от одной машины к другой (например, от электро-

двигателя к станку) или внутри какой-либо машины от одной вращающейся детали к другой. Механические устройства, предназначенные для передачи и преобразования вращательного движения, называются *передачами*.

## ГЛАВА 8. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

### 8.1. Сложное движение точки

Примером сложного движения точки может служить:

а) лодка (если ее принять за материальную точку), плывущая от одного берега реки к другому;

б) шагающий по ступенькам движущегося эскалатора метро человек, который также совершает сложное движение относительно неподвижного свода туннеля.

Таким образом, при сложном движении точка, двигаясь относительно некоторой подвижной материальной среды, которую условимся называть *подвижной системой отсчета*, одновременно передвигается вместе с этой системой отсчета относительно второй системы отсчета, условно принимаемой за неподвижную.

Движение некоторой точки  $M$  по отношению к подвижной системе отсчета называется *относительным*. Движение подвижной системы отсчета вместе со всеми связанными с ней точками материальной среды по отношению к неподвижной системе отсчета для точки  $M$  называется *переносным*. Движение точки  $M$  по отношению к неподвижной системе отсчета называется *сложным*, или *абсолютным*.

Для того чтобы видеть сложное (абсолютное) движение точки, наблюдатель сам должен быть связан с неподвижной системой отсчета. Если же наблюдатель находится в подвижной системе отсчета, то он видит лишь относительную часть сложного движения.

Представим, что точка  $M$  за некоторое время переместилась относительно подвижной системы координат  $O_1X_1Y_1$  из начального положения  $M_0$  в положение  $M_1$  по траектории  $M_0M_1$  (траектории относительного движения точки) (рис. 8.1). За это же время  $\Delta t$  подвижная система координат  $O_1X_1Y_1$  вместе со всеми неизменно связанными с ней точками, а значит, и вместе с траекторией относи-

тельного движения точки  $M$  переместилась в неподвижной системе координат  $OXY$  в новое положение:

$$\bar{S}_{\text{абс}} = \bar{S}_{\text{пер}} + \bar{S}_{\text{отн.}}$$

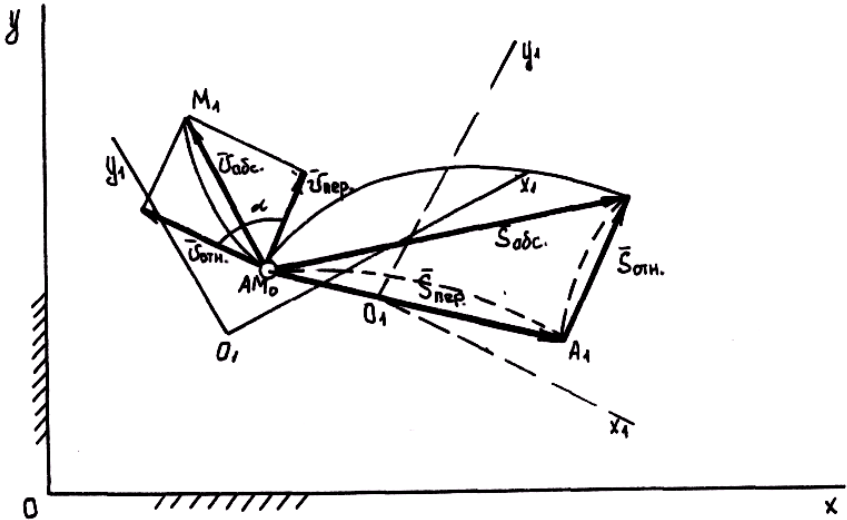


Рис. 8.1. К анализу сложного движения точки

Разделим обе части этого равенства на время движения  $\Delta t$ :

$$\frac{\bar{S}_{\text{абс}}}{\Delta t} = \frac{\bar{S}_{\text{пер}}}{\Delta t} + \frac{\bar{S}_{\text{отн.}}}{\Delta t}$$

и получим геометрическую сумму средних скоростей:

$$\bar{v}_{\text{абс.ср}} = \bar{v}_{\text{пер.ср}} + \bar{v}_{\text{отн.ср}}$$

которые направлены вдоль соответствующих векторов перемещений. Если теперь перейти к пределам при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то получим уравнение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{\text{абс. ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{\text{пер. ср}} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{\text{отн. ср}}$$

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{пер}} + \bar{v}_{\text{отн}}$$

выражающее **теорему сложения скоростей**: при сложном движении точки абсолютная скорость в каждый момент времени равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

Если задан угол  $(\bar{v}_{\text{пер}}, \bar{v}_{\text{отн}})$ , то модуль абсолютной скорости

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} \cos \alpha}$$

Углы, образуемые векторами абсолютной скорости  $\bar{v}_{\text{абс}}$  с векторами  $\bar{v}_{\text{пер}}$  и  $\bar{v}_{\text{отн}}$ , определяются по теореме синусов.

В частном случае при  $v_{\text{пер}} = v_{\text{отн}}$  при сложении этих скоростей образуется ромб (рис. 8.2, а) или равнобедренный треугольник (рис. 8.2, б) и, следовательно,

$$v_{\text{абс}} = 2v_{\text{пер}} \cos \frac{\alpha}{2} = 2v_{\text{отн}} \cos \frac{\alpha}{2}$$

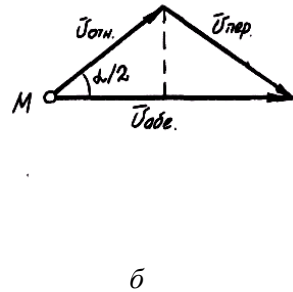
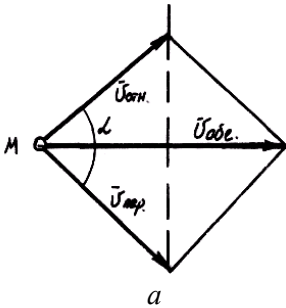


Рис. 8.2. Частный случай



## 8.2. Плоскопараллельное движение тела

Движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, называется **плоскопараллельным** (рис. 8.3).

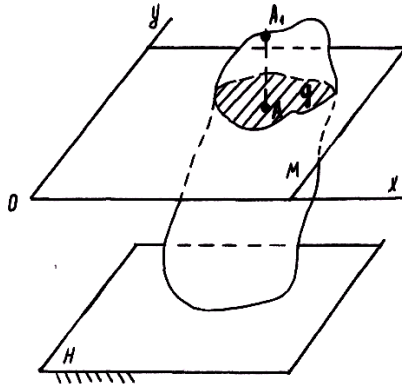


Рис. 8.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

Изучая плоскопараллельное движение тела  $M$ , достаточно рассматривать движение его плоского сечения  $q$  плоскости  $XOY$  (рис. 8.4).

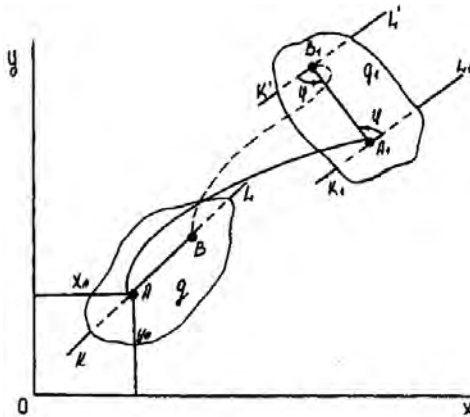


Рис. 8.4. К анализу плоскопараллельного движения твердого тела

Выберем в сечении  $q$  произвольную точку  $A$ , которую назовем полюсом. С полюсом  $A$  свяжем некоторую прямую  $KL$ , а в самом сечении вдоль прямой  $KL$  проведем отрезок  $AB$ , перемещая плоское сечение из положения  $q$  в положение  $q_1$ . Можно сначала передвинуть его вместе с полюсом  $A$  поступательно, а затем повернуть на угол  $\varphi$ .

Плоскопараллельное движение тела – движение сложное и состоит из поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса.

Закон плоскопараллельного движения можно задать тремя уравнениями:

$$x = f_1 t ;$$

$$y = f_2 t ;$$

$$\varphi = f_3 t .$$

Дифференцируя заданные уравнения плоскопараллельного движения, можно в каждый момент времени определить скорость  $\bar{v}_A$  и ускорение  $\bar{a}_A$  полюса, а также угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  тела.

**Пример 8.1.** Пусть движение катящегося колеса диаметром  $d$  (рис. 8.5) задано уравнениями

$$x_0 = 5t,$$

$$y_0 = \frac{d}{2},$$

$$\varphi = 20t.$$

где  $x_0$  и  $y_0$  – м,  $\varphi$  – рад,  $t$  – с.

Продифференцировав эти уравнения, находим, что скорость полюса  $O$   $v_0 = \frac{dx_0}{dt} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , угловая скорость колеса  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

Ускорение полюса и угловое ускорение колеса в данном случае

равны нулю. Зная скорость полюса и угловую скорость тела, можно затем определить скорость любой его точки.

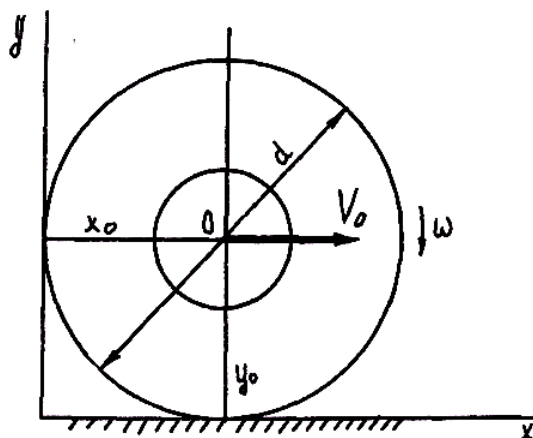


Рис. 8.5. К примеру 8.1

### 8.3. Определение скорости любой точки тела при плоскопараллельном движении

Пусть дано плоское сечение  $q$ , угловая скорость и скорость полюса которого в некоторый момент времени соответственно  $\omega$  и  $v_0$ . Требуется определить скорость какой-либо точки  $A$  (рис. 8.6).

Расчленим плоскопараллельное движение на составные части – поступательную и вращательную. При поступательном движении вместе с полюсом (переносное движение) все точки сечения, и точка  $A$  в том числе, имеют переносную скорость  $v_0$ , равную скорости полюса. Одновременно с поступательным сечение  $q$  совершает вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$  (относительное движение):

$$v_{AO} = \omega \cdot AO,$$

где  $v_{AO}$  – относительная скорость точки  $A$  ( $v_{AO} \perp AO$ ).

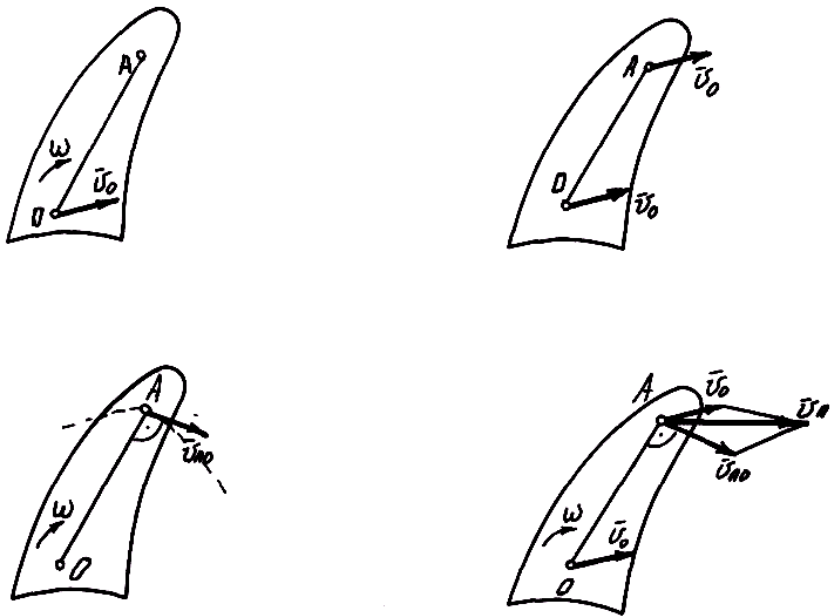


Рис. 8.6. К определению скорости тела при плоскопараллельном движении

Следовательно, в каждый данный момент времени

$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO},$$

т. е. абсолютная скорость точки тела при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки вокруг полюса.

Модуль абсолютной скорости может быть определен по формуле

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} \cos \alpha},$$

а направление – с помощью теоремы синусов. Если же направление абсолютной скорости известно, то ее модуль проще определить на основании следующей теоремы: проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Допустим, что известны скорости  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  точек  $A$  и  $B$  какого-либо тела (рис. 8.7). Приняв за полюс точку  $A$ , получим

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

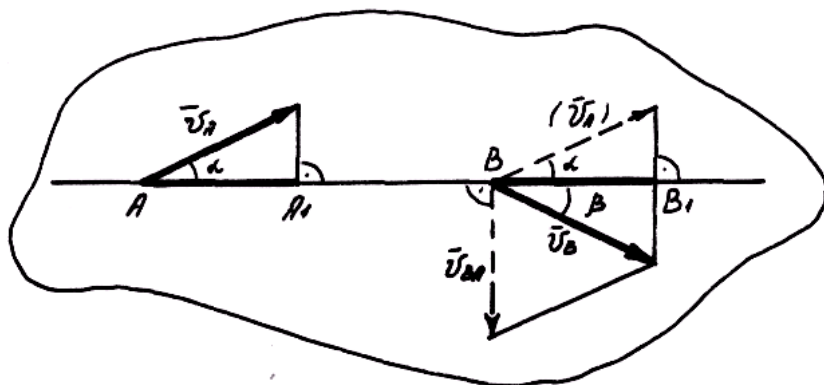


Рис. 8.7. Векторы скоростей точек плоской фигуры

Относительная скорость  $\vec{v}_{BA}$  перпендикулярна  $AB$ . Следовательно,  $AA_1 = BB_1$  или  $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$ . Теорема доказана.

## ГЛАВА 9. ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

### 9.1. Основные понятия и аксиомы динамики

Динамика изучает движение материальных тел под действием сил. В основе динамики лежат следующие аксиомы.

**Аксиома 1 (принцип инерции).** Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

**Аксиома 2 (основной закон динамики).** Ускорение материальной точки пропорционально действующей силе  $F$  и направлено по той прямой, по которой действует эта сила (рис. 9.1).

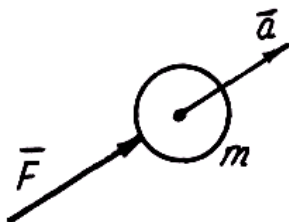


Рис. 9.1. К основному закону динамики

Математически вторая аксиома записывается векторным равенством

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где  $m$  – коэффициент пропорциональности, выражающий меру инертности материальной точки и называемый ее **массой**.

В Международной системе единиц (СИ) масса выражается в килограммах.

Зависимость между числовыми значениями (модулями) сил и ускорения выражается равенством

$$F = ma.$$

На все материальные тела вблизи Земли действует сила тяжести  $G$ . При свободном падении на Землю тела любой массы приобретают одно и то же ускорение  $g$ , которое называется **ускорением свободного падения**. Для свободно падающего тела из предыдущего уравнения следует зависимость:

$$G = ma.$$

Таким образом, значение силы тяжести тела в ньютонах равно произведению его массы на ускорение свободного падения.

**Аксиома 3 (закон независимости действия сил).** Если к материальной точке приложена система сил, то каждая из сил системы сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщила бы, действуя одна.

Таким образом, при одновременном действии на материальную точку массой  $m$ , например, четырех сил, ускорение  $\bar{a}$ , полученное точкой, можно определить геометрически сложив ускорения  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  и  $\bar{a}_4$ , возникающие под действием каждой силы в отдельности (рис. 9.2). В то же время ускорение  $\bar{a}$  пропорционально равнодействующей  $\bar{F}_\Sigma$  тех же сил:

$$\bar{F}_\Sigma = m\bar{a},$$

где  $\bar{F}_\Sigma = \sum \bar{F}_k$  и  $\bar{a} = \sum \bar{a}_k$ .

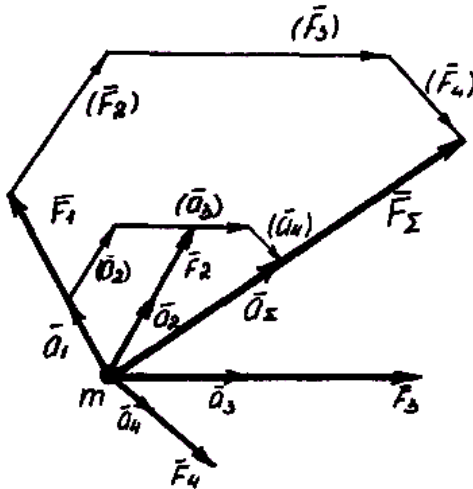


Рис. 9.2. К закону независимости действия сил

**Аксиома 4.** Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны.

## 9.2. Свободная и несвободная точки

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-либо связями, называется **свободной**. Примером свободной материальной точки может служить искусственный спутник Земли в околоземном пространстве или летящий самолет. Их перемещение в пространстве ничем не ограничено, поэтому летчик на спортивном самолете способен проделывать различные сложные фигуры высшего пилотажа.

Задачи динамики сводятся к двум основным:

- 1) задается закон движения точки, требуется определить действующую на нее силу или систему сил (первая задача динамики);
- 2) задается система сил, действующая на точку, требуется определить закон движения (вторая задача динамики).

Обе задачи динамики решаются с помощью основного закона динамики, записанного в форме  $\vec{F} = m\vec{a}$  или  $\vec{F}_\Sigma = m\vec{a}$ .

Материальная точка, свобода перемещения которой ограничена наложенными связями, называется **несвободной**. Примером несвободной материальной точки может служить движущийся по рельсам трамвай, если пренебречь его формой и размерами. Для несвободной материальной точки все внешние силы необходимо делить на две категории: *активные (движущие) силы и реакции связи (пассивные силы)*. В связи с этим первая задача динамики несвободной точки сводится к определению реакций связей, если заданы законы движения точки и действующие на нее активные силы. Вторая задача динамики сводится к тому, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить, во-первых, закон движения точки и, во-вторых, реакции связей.

Если несвободную материальную точку освободить от связей и заменить связи их реакциями, то движение точки можно рассматривать как свободное, а основному закону динамики придать такой вид:

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k = m\vec{a},$$

где  $\vec{F}_k$  – активные силы;

$\vec{R}_k$  – реакции связей;



$m$  – масса точки;

$\vec{a}$  – ускорение точки, полученное в результате действия внешних сил (активных и пассивных).

### 9.3. Силы инерции

Сила, численно равная произведению массы материальной точки на приобретенное ею ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется **силой инерции** (рис. 9.3):

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}.$$

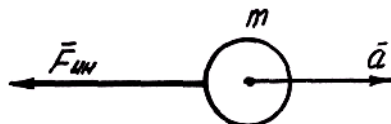


Рис. 9.3. Сила инерции

Сила инерции в действительности не приложена к получившей ускорение материальной точке, а действует на точку или тело, которое сообщает ускорение этой точке.

Поясним это несколькими примерами.

Тяжелый груз, масса которого  $m$ , висит на непрочной, но способной выдержать натяжение  $R = G$  нити (рис. 9.4, а). Если теперь резко потянуть нить вертикально вверх, то она может оборваться (рис. 9.4, б). На нить начинает действовать дополнительная сила инерции  $F_{\text{ин}}$ , численно равная  $m\vec{a}$ , противодействующая выходу груза из состояния инерции (рис. 9.4, в). Нить может оборваться и в том случае, если толкнуть в горизонтальном направлении подвешенный груз, заставив его раскачиваться на нити (рис. 9.4, г).

При криволинейном движении материальной точки (рис. 9.5) у нее возникает ускорение  $\vec{a}$ , которое обычно заменяют двумя составляющими ускорениями:  $\vec{a}_n$  (нормальное ускорение) и  $\vec{a}_t$  (касательное ускорение). Поэтому при криволинейном движении материальной точки возникают две составляющие силы инерции  $\vec{F}_{\text{ин}}$ : **нормальная (иначе центробежная) сила инерции**

$$\vec{F}_{ин.н} = -m\vec{a}_n$$

и касательная (иначе тангенциальная) сила инерции

$$\vec{F}_{ин.т} = -m\vec{a}_т;$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho};$$

$$F_{ин.н} = \frac{m \cdot v^2}{\rho} \text{ или } v = \rho \cdot \omega; F_{ин.н} = m\omega^2 \rho.$$

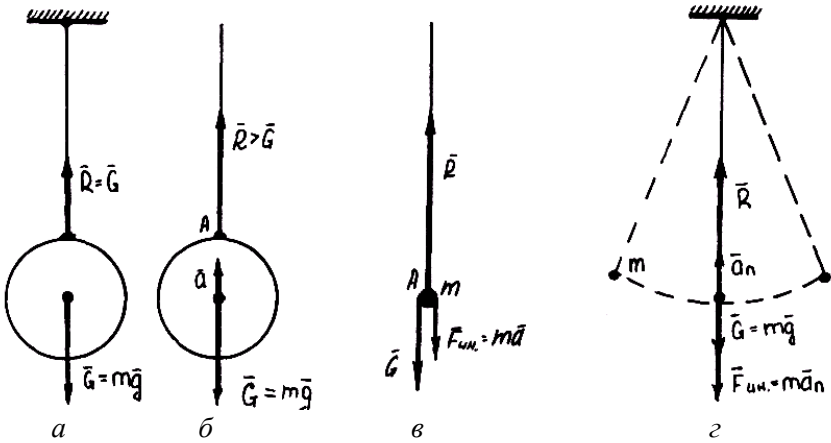


Рис. 9.4. К анализу действия сил инерции

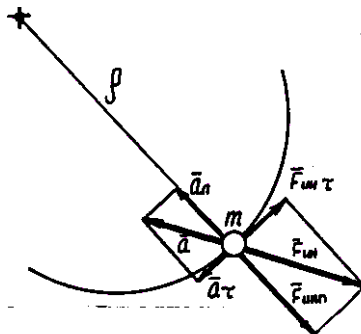


Рис. 9.5. Векторы ускорений и сил инерции

## 9.4. Принцип Даламбера

Силы инерции широко используются при расчетах и решении технических задач, причем использование сил инерции позволяет решения многих задач, в которых рассматривается движение несвободной материальной точки, свести к знакомым нам уравнениям статики:

$$\begin{aligned} -m\bar{a}_\tau &= \bar{F}_{\text{ин}}; \\ \sum \bar{F}_k + \sum \bar{R}_k + -m\bar{a} &= 0; \\ \sum \bar{F}_k + \sum \bar{R}_k + \bar{F}_{\text{ин}} &= 0. \end{aligned}$$

Условно прикладывая силу инерции  $\bar{F}_{\text{ин}}$  к движущейся материальной точке, можем считать, что активные силы  $\bar{F}_k$ , реакции связей  $\bar{R}_k$  и сила инерции  $\bar{F}_{\text{ин}}$  образуют уравновешенную систему (**принцип Даламбера**).

Решение задач динамики с помощью принципа Даламбера иногда называют **методом кинетостатики**.

## ГЛАВА 10. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

### 10.1. Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении

Если при действии постоянной силы  $\bar{F}$  на точку  $M$  (рис. 10.1) ее перемещение  $\overline{M_0M_1} = S$ , то скалярная мера действия силы называется **работой**:

$$W = FS \cos \alpha, \quad (10.1)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением действия силы и направлением перемещения.

В системе СИ работа выражается в джоулях: 1 Дж = 1 Н·м, килоджоулях: 1 кДж =  $10^3$  Дж, или в мегаджоулях: 1 МДж =  $10^6$  Дж. Из формулы (10.1) видно, что работа – величина алгебраическая.

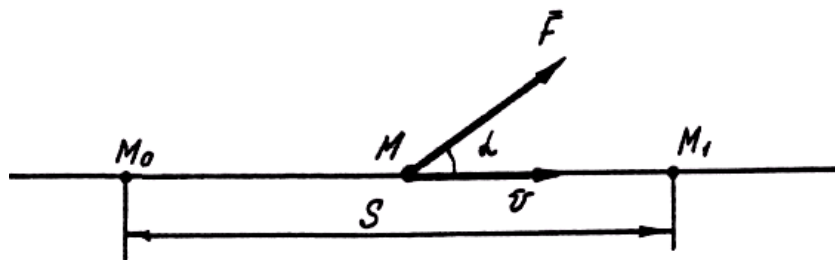


Рис. 10.1. Работа силы

1. При изменении угла  $\alpha$  в пределах  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  значение  $\cos \alpha > 0$ . Поэтому если угол  $\alpha$  – острый, то работа силы  $\vec{F}$  положительная. В частном случае, когда направление действия силы совпадает с направлением перемещений ( $\alpha = 0$ ),  $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$  и  $W = F \cdot S$ ,  $W > 0$ .

2. При изменении угла  $\alpha$  в пределах  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  значение  $\cos \alpha < 0$ . Следовательно, если угол  $\alpha$  – тупой, то работа силы  $\vec{F}$  отрицательная. В частном случае при  $\alpha = 180^\circ$   $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$  и  $W = -F \cdot S$ ,  $W < 0$ .

3. Заметим, что при  $\alpha = 90^\circ$  значение  $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$  и  $W = 0$ , т. е. работа силы, направленной перпендикулярно перемещению точки, равна нулю.

Рассмотренные выше три частных случая значений работы силы при  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$  аналогичны значениям работы силы тяжести. Работа силы тяжести не зависит от траектории движения точки и всегда равна произведению силы тяжести на разность высот в исходном и конечном положениях. Если точка  $M$  (рис. 10.2) перемещается из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ , то при любой траектории точки работа силы тяжести:

$$W = G \cdot h = G (h_1 - h_2) ,$$

где  $h_1$  – начальная высота точки над заданным уровнем на Земле;

$h_2$  – конечная высота над тем же уровнем.

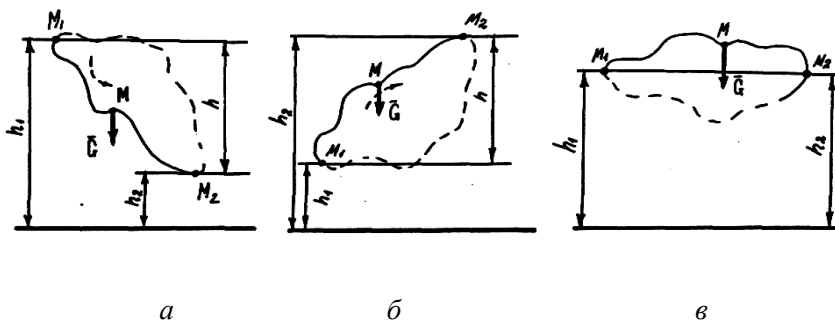


Рис. 10.2. Работа силы тяжести:

<p><i>a:</i> <math>h_1 &gt; h_2</math>  <math>h = h_1 - h_2 &gt; 0</math>  <math>W &gt; 0</math>  <math>G</math> – движущая сила</p>	<p><i>б:</i> <math>h_1 &lt; h_2</math>  <math>h = h_1 - h_2 &lt; 0</math>  <math>W &lt; 0</math>  <math>G</math> – сила сопротивления</p>	<p><i>в:</i> <math>h_1 = h_2</math>  <math>h = h_1 - h_2 = 0</math>  <math>W = 0</math></p>
--	---	---

## 10.2. Работа равнодействующей силы

Если на точку действует одновременно несколько сил, то алгебраическая сумма их работ равна работе равнодействующей силы.

Допустим, что перемещение точки  $\overline{M_0M_1} = S$  произошло при действии на нее трех сил:  $\overline{F}_1$ ,  $\overline{F}_2$  и  $\overline{F}_3$  (рис. 10.3). Тогда, обозначив работу каждой из сил соответственно  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$ , можем записать:

$$W_1 = F_1 \cos \alpha_1 S, \quad W_2 = F_2 \cos \alpha_2 S, \quad W_3 = F_3 \cos \alpha_3 S.$$

Сложив правые и левые части этих равенств, получим

$$W_1 + W_2 + W_3 = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 \cdot S.$$

Известно, что сумма проекций сил на некоторую ось равна проекции равнодействующей этих сил на ту же ось:

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = F_\Sigma \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$W_1 + W_2 + W_3 = F_{\Sigma} \cos \alpha.$$

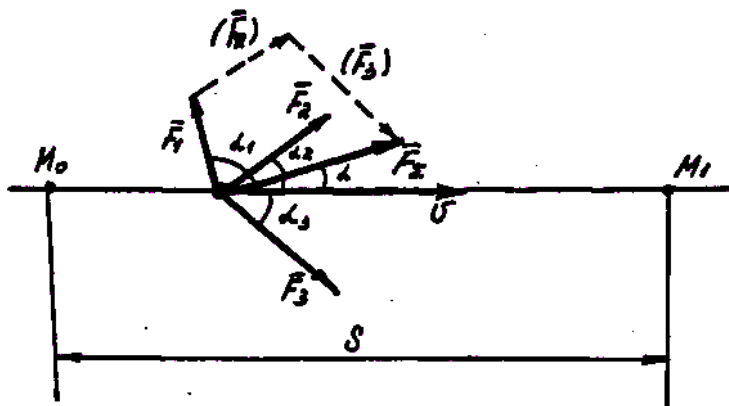


Рис. 10.3. Работа равнодействующей силы

Так как  $F_{\Sigma} \cos \alpha \cdot S = W_{\Sigma}$  и есть работа равнодействующей силы

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3,$$

то

$$W_1 + W_2 + W_3 = W_{\Sigma}$$

или в общем случае для любого числа сил:

$$\sum W_k = W_{\Sigma}.$$

При равномерном прямолинейном движении точки приложенная к ней система сил уравновешена (первая аксиома динамики), т. е.  $F_{\Sigma} = 0$ , и тогда

$$\sum W_k = 0$$

(алгебраическая сумма работ уравновешенной системы сил, приложенных к точке, равна нулю).

### 10.3. Работа переменной силы на криволинейном пути

Чтобы определить работу непостоянной силы  $F$  при перемещении точки  $M$  по криволинейной траектории  $M_0M_1$ , надо дугу  $M_0M_1$  траектории разделить на множество частей  $dS$ , настолько малых, что каждую из них можно считать отрезком прямой (рис. 10.4, а). Тогда работа силы  $F$  на перемещении  $dS$ , так называемая **элементарная работа**:

$$dW = F \cos \alpha \cdot dS.$$

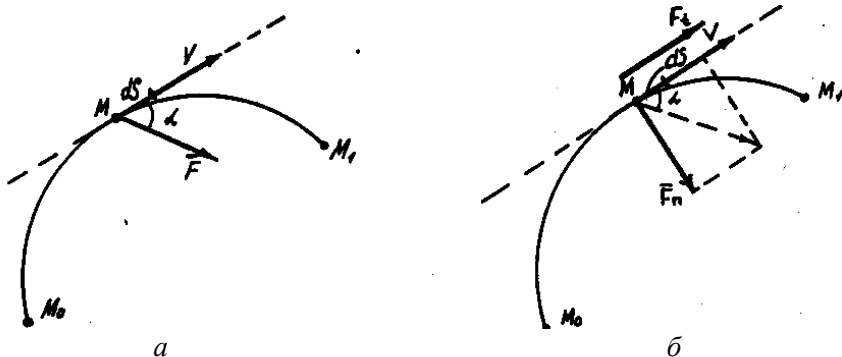


Рис. 10.4. Работа переменной силы при перемещении по криволинейной траектории

Просуммировав все элементарные работы переменной силы  $\vec{F}$ , получим ее работу на участке траектории от  $M_0$  до  $M_1$ :

$$W = \int_{M_0}^{M_1} F \cos \alpha \cdot dS. \quad (10.2)$$

Разложив силу  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}_n$  и  $\vec{F}_t$ , направленные соответственно по нормали и касательной, увидим, что работа нормальной составляющей равняется нулю и, следовательно, в формуле (10.2) произведение  $F \cos \alpha$  выражает модуль касательной составляющей силы  $\vec{F}$ , т. е.  $F_t = F \cos \alpha$ , и этой формуле можно придать вид

$$W = \int_{M_0}^M F_t \cdot dS.$$

Интегралы могут быть определены лишь в том случае, если известен закон движения точки.

#### 10.4. Мощность

Скалярная величина

$$P = \frac{W}{t},$$

характеризующая быстроту совершения работы, называется **средней мощностью силы**. В СИ мощность выражается в ваттах:

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}{\text{с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3};$$

$$P = \frac{FS \cos \alpha}{t} = F \cos \alpha \cdot v.$$

Если в течение некоторого времени  $t$  мощность машины остается постоянной или меняется несущественно, то произведенная работа выражается формулой

$$W = P \cdot t,$$

отсюда и появляется единица времени  $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 10^3 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3,6 \cdot 10^6$ .

#### 10.5. Механический коэффициент полезного действия

В технике работа сил обычно связана с преодолением различных сопротивлений, для выполнения этой работы создается множество разнообразных машин и механизмов.



Силы сопротивления  $F_c$ , которые преодолевает любая машина (механизм):

- полезное сопротивление  $F_{\text{пс}}$ , для преодоления которого машины или механизмы и предназначены;
- вредное сопротивление  $F_{\text{вс}}$ , которое приходится вынужденно преодолевать попутно с полезным.

Тогда вся работа, которую совершает машина или механизм:

$$W = W_{\text{пс}} + W_{\text{вс}},$$

где  $W_{\text{пс}}$  – работа по преодолении полезного сопротивления, отсюда

$$W_{\text{пс}} = W - W_{\text{вс}}.$$

Отношение полезной работы ко всей совершенной работе называется *механическим коэффициентом полезного действия*:

$$\eta = \frac{W_{\text{пс}}}{W} \cdot 100 \text{ \%}.$$

В технике распространены случаи работы машин при их последовательном соединении друг с другом.

Допустим, имеется совокупность трех механизмов с КПД  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta_3$  (рис. 10.5). Если работа, совершенная механизмами,  $W$  и их полезная работа  $W_{\text{пс}}$ , то КПД всех точек механизмов

$$\eta = \frac{W_{\text{пс}}}{W};$$

$$\eta_{\text{общ}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3.$$

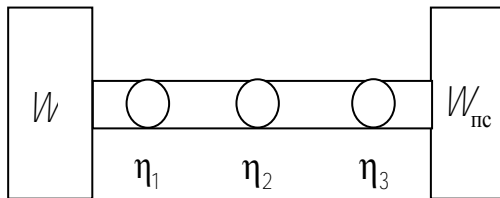


Рис. 10.5. Последовательное соединение машин

**Вывод:** чем длиннее «цепочка» совместно работающих механизмов, тем меньше её общий КПД, причем общий КПД всегда меньше самого низкого из числа перемножаемых КПД.

### 10.6. Работа сил на наклонной плоскости

Пусть требуется поднять на высоту  $h$  груз, сила тяжести которого  $G$  (рис. 10.6).

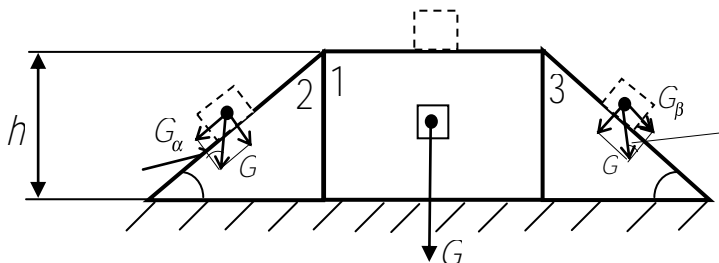


Рис. 10.6. Работа силы при поднятии груза

Предположим, что подъем осуществляется тремя способами:

- вертикально;
- по наклонной плоскости с углом подъема  $\alpha$ ;
- по менее крутой плоскости с углом подъема  $\beta$  ( $\beta < \alpha$ ).

Если считать, что груз перемещается равномерно, то работа при подъеме груза во всех трех случаях совершается одинаковая:

$$W = G \cdot h.$$

Но в первом случае приходится преодолевать силу тяжести  $G$ , во втором –  $G_\alpha$ , в третьем –  $G_\beta$ .

Так как  $\beta < \alpha$ , то  $\sin \alpha > \sin \beta$ , значит,  $G > G \sin \alpha > G \sin \beta$ .

Наклонная плоскость как одно из средств получения выигрыша в силе при перемещении тяжести широко используется в технике.

Если сила  $F$  направлена параллельно наклонной плоскости (рис. 10.7), то при перемещении вверх по наклонной плоскости тела на него кроме силы  $F$  действуют еще три силы:

– сила тяжести  $G$ , нормальная реакция наклонной плоскости  $R_n$ , значение которой

$$R_n = G \cos \alpha;$$

– сила трения  $R_f$ , значение которой

$$R_f = f \cdot R_n = f \cdot G \cos \alpha.$$

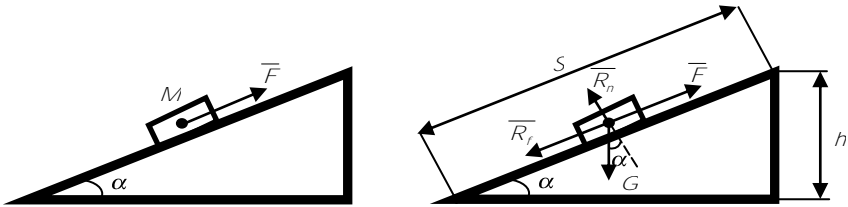


Рис. 10.7. Работа силы на наклонной плоскости

При равномерном подъеме тела  $M$  четыре силы образуют уравновешенную систему. Алгебраическая сумма работ этих сил равна нулю:

$$W_F + W_G + W_{Rf} + W_{Rn} = 0;$$

$$W_F = -W_G - W_{Rf} - W_{Rn},$$

где  $W_G$  – работа силы тяжести;

$W_{Rf}$  – работа силы трения;

$W_{Rn}$  – работа нормальной реакции.

$$W_G = G \cos(\alpha + 90^\circ) S = -G \cdot S \sin \alpha;$$

$$W_{Rf} = R_f S \cos 180^\circ = -R_f S = -f \cdot G \cdot S \cos \alpha;$$

$$W_{Rn} = R_n \cdot S \cos 90^\circ = 0;$$

$$W_F = G \cdot S \sin \alpha + f \cdot S \cdot G \cos \alpha = G \cdot S (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Если же требуется определить значение силы  $F$ , то с учетом того, что  $W_F = F \cdot S$ , получаем

$$F = \frac{W_F}{S} = \frac{G \cdot S(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{S} = G(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Полезную часть работы сил  $F$  составляет работа по подъему тела на высоту  $h = S \sin \alpha$  и тогда

$$W_n = G \cdot h = G \cdot S \sin \alpha.$$

Таким образом, КПД наклонной плоскости при подъеме груза силой направленной параллельно наклонной плоскости:

$$\eta = \frac{W_G}{W_F} = \frac{G \cdot S \sin \alpha}{G \cdot S \sin \alpha + f \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha};$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + f}.$$

**Вывод:** КПД наклонной плоскости зависит только от угла ее наклона и коэффициента трения при перемещении груза по плоскости.

### 10.7. Работа и мощность при вращательном движении тел

Допустим, что к рукоятке  $C$  колеса, насаженного на ось  $OZ$ , приложена сила  $\vec{F}$ , постоянно направленная перпендикулярно  $CO = r$  (рис. 10.8). При вращении колеса точка приложения силы  $\vec{F}$  перемещается по окружности и элементарная работа этой силы

$$dW = F \cdot dS.$$

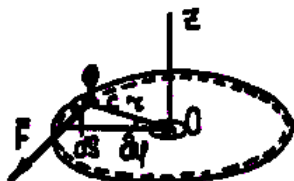


Рис. 10.8. Вектор силы при вращательном движении тела

Но так как  $dS = r d\varphi$ , то  $dW = F \cdot r \cdot d\varphi$ , где произведение  $F \cdot r = M_z$  называется **вращающим моментом**. Следовательно, при вращении тела элементарная работа

$$dW = M_z d\varphi.$$

При повороте колеса на угол  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  работа

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi.$$

Если при этом вращающий момент  $M_z = \text{const}$ , то

$$W = M_z \varphi$$

(работа при вращении тела равна произведению вращающего момента на угол поворота).

Разделив обе части этого равенства на  $t = t_2 - t_1$  (время действия вращающего момента), получим его мощность:

$$P = \frac{W}{t} = M_z \frac{\varphi}{t},$$

или, так как  $\frac{\varphi}{t} = \omega$ :

$$P = M_z \cdot \omega \quad (10.3)$$

(мощность при вращении тела равна произведению вращающего момента на угловую скорость).

Из формулы (10.3) вытекает важное следствие:

$$M_z = \frac{P}{\omega}$$

(при постоянной мощности вращающий момент обратно пропорционален угловой скорости).

### 10.8. Трение качения. Работа при качении тел

**Трением качения** называется сопротивление, возникающее при перекачивании одного тела по поверхности другого. Тело 1 и каток 2 (рис. 10.9) абсолютно недеформируемые. Малая сила  $F$  вместе с силой трения  $R_f$ , приложенной к катку в точке  $K$ , образуют пару  $(F, R_f)$ , под действием которой каток начинает катиться (рис. 10.9, а).

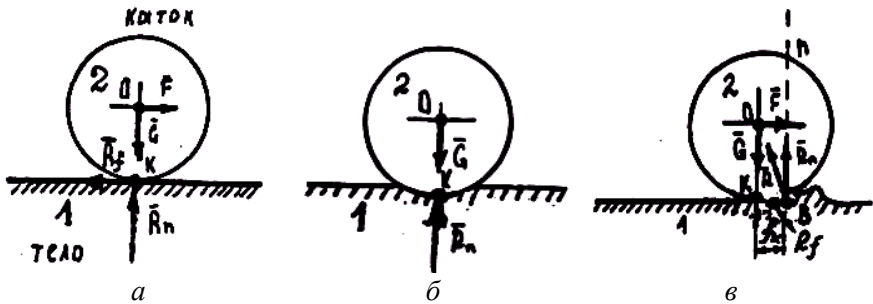


Рис. 10.9. Работа сил при качении тела

На самом деле абсолютно недеформируемых тел нет (рис. 10.9, б). При перекачивании катка силой  $\bar{F}$  деформация смещается вперед по направлению качения и место приложения полной реакции  $\bar{R}$  опорной поверхности также смещается несколько вперед на длину  $f_k$  относительно теоретической точки касания  $K$  и отклоняется от нормали  $B_n$  на небольшой угол (рис. 10.9, в).

При качении катка на него действуют четыре силы, образующие две пары сил: движущую пару  $(\bar{F}, \bar{R}_f)$  с моментом  $F \cdot r$  и пару сопротивления качению  $(\bar{G}, \bar{R}_n)$  с моментом  $R_n \cdot f_k$ . Момент пары сопротивления иначе называют **моментом трения качения**, а величину  $f_k$  — **коэффициентом трения качения**. Значение  $f_k$  зависит от материала тел и выражается обычно в сантиметрах. Напри-

мер, для трения мягкой стали по стали  $f_k = 0,005$  см, а для трения закаленной стали по стали (подшипники качения)  $f_k = 0,001$  см. Качение катка 2 начинается при условии

$$F \cdot r \geq R_n f_k.$$

Для перекаtywания катка сила

$$F \geq \frac{R_n f_k}{r}.$$

## ГЛАВА 11. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

### 11.1. Импульс силы. Количество движения. Кинетическая энергия

Любое взаимодействие тел, приводящее к какому-либо изменению движения, длится некоторое время. Векторная мера действия силы  $\vec{F} \cdot dt$ , равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия, называется **элементарным импульсом силы**. Направление вектора импульса совпадает с направлением вектора силы. Единица импульса в СИ – Н · с:

$$1 \text{ Н} \cdot \text{с} = 1 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Векторная мера механического движения точки  $m\vec{v}$ , равная произведению массы точки на ее скорость в данный момент времени, называется **количеством движения**. Направление вектора количества движения совпадает с направлением вектора скорости. Единица количества движения в СИ –  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ . Как видим, единицы импульса силы и количества движения одинаковы.

Скалярная мера механического движения точки  $\frac{mv^2}{2}$ , равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, называется **кинетической энергией**. Единица кинетической энергии – джоуль (Дж):

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

## 11.2. Теорема об изменении количества движения точки

Пусть на точку массой  $m$  действует система постоянных сил, равнодействующая которых  $\vec{F}_\Sigma$  согласно основному закону динамики

$$\vec{F}_\Sigma = m\vec{a},$$

$$\vec{F}_\Sigma \cdot \Delta t = m\vec{a} \cdot \Delta t,$$

$$\text{так как } \vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}, \text{ то } \vec{F}_\Sigma \cdot \Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad (11.1)$$

(изменение количества движения точки равно импульсу всех сил).

Спроецировав на оси координат обе части векторного равенства (11.1), в общем случае получим:

а) систему трех скалярных уравнений:

$$F_{\Sigma x} \cdot \Delta t = m \cdot v_{2x} - mv_{1x};$$

$$F_{\Sigma y} \cdot \Delta t = m \cdot v_{2y} - mv_{1y};$$

$$F_{\Sigma z} \cdot \Delta t = m \cdot v_{2z} - mv_{1z},$$

$$\text{где } F_{\Sigma x} = \sum F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum F_{ky}; \quad F_{\Sigma z} = \sum F_{kz};$$

б) если силы, действующие на точку, лежат в одной плоскости, то получим два скалярных уравнения;

в) если силы действуют вдоль одной прямой, то, спроецировав уравнение (11.1) на эту прямую, получим одно скалярное уравнение:

$$F_\Sigma \cdot \Delta t = m \cdot v_2 - mv_1.$$



### 11.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Пусть на точку действует система постоянных сил, равнодействующая которых  $\vec{F}_\Sigma$ . Допустим, что силы действуют вдоль одной прямой. Тогда

$$F_\Sigma = ma;$$

$$F_\Sigma \cdot \Delta S = ma \cdot \Delta S.$$

На прямолинейном пути

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \text{ и } \Delta S = v_{cp} \Delta t = \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t;$$

$$F_\Sigma \Delta S = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} m \cdot \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} m.$$

Отсюда с учетом того, что  $F_\Sigma \Delta S = W_\Sigma = \sum W_k$ ,

$$\sum W_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

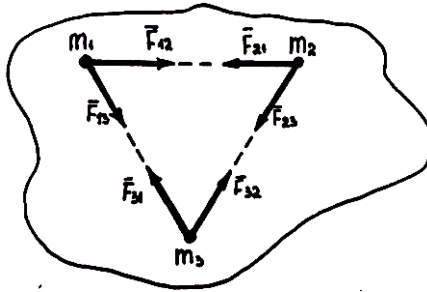
т. е. изменение кинетической энергии точки равно сумме работ действующих сил.

### 11.4. Понятие о механической системе

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется **механической системой** (рис. 11.1). Например, механическую систему образуют Земля и Луна или спортивный самолет и буксируемый им планер.

Любое материальное тело рассматривается в механике как механическая система, образуемая совокупностью материальных точек. Абсолютно твердое тело носит название **неизменяемой механической**

**системы**, так как расстояние между материальными точками остается неизменным. Изменяемые системы – любые машины или механизмы.



$F_{12}$   $F_{21}$   
 $F_{23}$   $F_{32}$   
 $F_{31}$   $F_{13}$   
 и т.д.

Рис. 11.1. К понятию о механической системе

Если рассматривать какую-либо механическую систему, то силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в эту систему, называются **внешними** ( $F_e, R_e$ ), а силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел этой же системы, называются **внутренними** ( $F$ ).

Главный вектор всех внутренних сил механической системы равен нулю, причем это условие соблюдается, только если рассматриваемая механическая система неизменяемая.

Движение механической системы зависит:

- 1) от действующих сил;
- 2) суммарной массы системы

$$m = \sum \Delta m_k,$$

где  $m$  – масса механической системы;

$\Delta m_k$  – массы ее отдельных точек;

- 3) положения центра масс системы.

Движение центра масс определяется (только при поступательном движении) уравнением

$$\bar{F}_{c\Sigma} = m\bar{a}_c,$$

где  $\bar{F}_{c\Sigma}$  – результирующая всех внешних сил, приложенных к точкам системы;

$m$  – масса системы;

$\bar{a}_c$  – ускорение центра масс системы.

Как видим, это уравнение аналогично основному уравнению динамики точки. Смысл его состоит в том, что центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и приложены все внешние силы.

### 11.5. Основное уравнение динамики вращающегося тела

Пусть твердое тело (рис. 11.2) под действием внешних сил  $\bar{F}_{ek}$  (эти силы на рис. 11.2 не показаны) вращается около оси  $OZ$  с угловым ускорением  $\varepsilon$ .

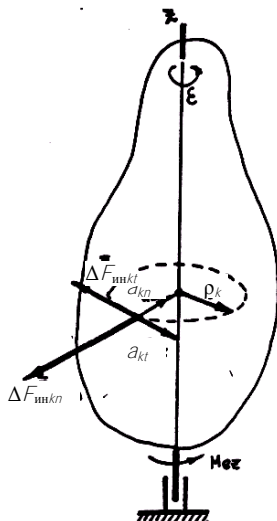


Рис. 11.2. К определению работы сил, действующих на вращающееся тело

Алгебраическая сумма моментов всех сил (активных сил и сил сопротивления) относительно оси  $OZ$

$$M_{ez} = \sum M_z F_{ek}$$

называется **вращающим моментом**.

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем его на множество материальных точек массами  $\Delta m_k$ . Каждая из этих точек движется по окружности радиуса  $\rho_k$ , с ускорением  $\bar{a}_k$ , которое разложим на касательное  $\bar{a}_{kt}$  и нормальное  $\bar{a}_{kn}$  ускорение.

Приложим к каждой материальной точке элементарные силы инерции: касательную  $\Delta \bar{F}_{ин. kt} = -\Delta m \bar{a}_{kt}$  и нормальную  $\Delta \bar{F}_{ин. kn} = -\Delta m \bar{a}_{kn}$ . Согласно принципу Даламбера, активные силы, силы реакции связей и силы инерции образуют уравновешенную систему. Поэтому алгебраическая сумма моментов всех этих сил относительно оси  $OZ$  должна быть равна нулю, т. е.

$$M_{ez} - \sum \Delta F_{ин. kt} \rho_{kt} = 0$$

(моменты сил  $\Delta \bar{F}_{ин. kt}$  относительно оси  $OZ$  равны нулю, так как линии действия этих сил пересекают ось).

У любой точки вращающегося тела числовое значение касательного ускорения  $a_{kt} = \varepsilon \rho_k$ , поэтому значение  $\Delta F_{ин. kt} = \Delta m a_{kt} = \Delta m_k \varepsilon \rho_k$ , где  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела. Тогда

$$M_{ez} = \varepsilon \sum \Delta m_k \rho_k^2.$$

Величина  $\sum \Delta m_k \rho_k^2 = I_z$ , равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от оси вращения, называется **моментом инерции тела (системы) относительно этой оси**.

Основное уравнение динамики вращающегося тела:

$$M_{ez} = \varepsilon \cdot I_z.$$

В СИ момент инерции тела выражается в  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

## 11.6. Кинетическая энергия тела. Кинетический момент

Кинетическая энергия тела складывается из кинетических энергий его отдельных точек.

1. При поступательном движении тела (рис. 11.3) скорости всех его точек равны между собой и равны  $v_c$  – скорости центра масс тела. Поэтому легко понять, что кинетическая энергия тела при поступательном движении

$$E_{\text{к.п}} = \frac{mv_c^2}{2},$$

где  $m$  – масса тела;

$v_c$  – значение скорости центра масс.

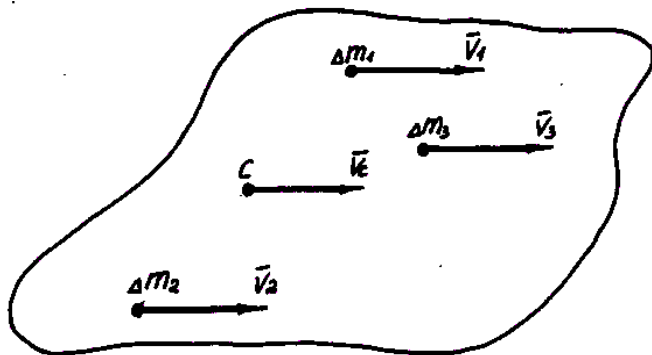


Рис. 11.3. К определению кинетической энергии при поступательном движении тела

2. При вращательном движении тела с некоторой угловой скоростью  $\omega$  (рис. 11.4) все его точки движутся по окружностям различных радиусов  $\rho_k$  и имеют скорости  $v_k = \omega \cdot \rho_k$ . Определив кинетическую энергию каждой точки  $\frac{\Delta m \cdot v_k^2}{2}$  и сложив ее по всему объему тела, получим

$$E_{\text{к.вр}} = \sum \frac{\Delta m_k v_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_k \omega^2 \rho_k^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_k \rho_k^2.$$

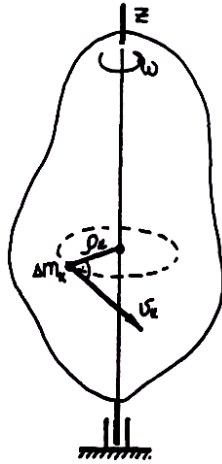


Рис. 11.4. К определению кинетической энергии при вращательном движении тела

А так как  $\sum \Delta m_k \rho_k^2 = I_Z$  – момент инерции тела относительно оси  $Z$ , для кинетической энергии находим такое выражение:

$$E_{\text{к.вр}} = \frac{I_Z \omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела при сложном его движении (в частности, при плоскопараллельном) складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения с угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс, т. е.

$$E_{\text{к}} = E_{\text{к.п}} + E_{\text{к.вр}} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_Z \omega^2}{2}.$$

Кроме кинетической энергии мерой вращательного движения тела является величина  $I_Z \omega$ , называемая **кинетическим моментом вращающегося тела**. Кинетический момент в СИ выражается в  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$ .

## РАЗДЕЛ 2 ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

### ГЛАВА 12. СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

#### 12.1. Основные понятия

*Механизмом* называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других твердых тел.

*Машиной* называется устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека. В зависимости от основного назначения различают энергетические, технологические, транспортные и информационные машины. *Энергетические машины* предназначены для преобразования энергии. К ним относятся, например, электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания, турбины, электрогенераторы. *Технологические машины* предназначены для преобразования обрабатываемого предмета, которое состоит в изменении его размеров, форм, свойств или состояния. *Транспортные машины* предназначены для перемещения людей и грузов. *Информационные машины* предназначены для получения и преобразования информации.

В состав машины обычно входят различные механизмы.

Всякий механизм состоит из отдельных твердых тел, называемых деталями. *Деталь* является такой частью машины, которую изготавливают без сборочных операций. Детали могут быть *простыми* (гайка, шпонка и т. п.) и *сложными* (коленчатый вал, корпус редуктора, станина станка и т. п.). Детали частично или полностью объединяют в узлы. *Узел* представляет собой законченную сборочную единицу, состоящую из ряда деталей, имеющих общее функциональное назначение (подшипник, муфта, редуктор и т. п.). Сложные узлы могут включать в себя несколько узлов (подузлов), например, в состав редуктора входят подшипники, валы с насаженными на них зубчатыми колесами и т. п. Одно или несколько жестко соединенных твердых тел, входящих в состав механизма, называются *звеном*.

В каждом механизме имеется *стойка*, т. е. звено неподвижное или принимаемое за неподвижное. Из подвижных звеньев выделяют входные и выходные. *Входным* называется звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев. *Выходным* звеном называется звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

*Кинематической парой* называется соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение.

## 12.2. Классификация кинематических пар. Кинематические цепи

По числу связей, наложенных кинематической парой на относительное движение ее звеньев, все кинематические пары делятся на пять *классов*. Свободное тело (звено) в пространстве обладает шестью степенями свободы.

Основные кинематические пары

№	Название кинематической пары	Изображение пары	Условное обозначение	Число степеней свободы	Число связей (номер класса)
1	2	3	4	5	6
1	Поступательная			1	5
2	Вращательная			1	5



1	2	3	4	5	6
3	Цилиндрическая			2	4
4	Сферическая			3	3
5	Плоскостная			3	3
6	Цилиндр-плоскость			4	2
7	Шар-плоскость			5	1

Поверхности, линии и точки, по которым соприкасаются звенья, называются **элементами** кинематической пары. Различают *низшие* (1–5) пары, элементами которых являются поверхности, и *высшие* (6, 7) пары, элементами которых могут быть только линии или точки.

## Кинематические цепи

**Кинематической цепью** называется система звеньев, связанных между собой кинематическими парами (рис. 12.1, 12.2).

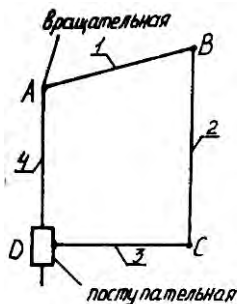


Рис. 12.1. Замкнутая плоская цепь

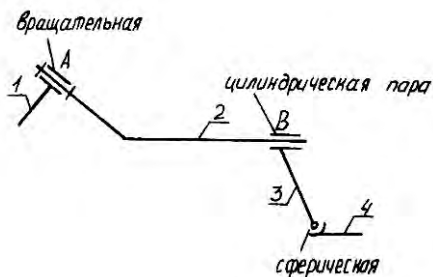


Рис. 12.2. Незамкнутая пространственная цепь

### 12.3. Структурный синтез и анализ механизмов

**Структурный синтез** механизма заключается в проектировании его *структурной схемы*, под которой понимается схема механизма, указывающая стойку, подвижные звенья, виды кинематических пар и их взаимное расположение.

Метод структурного синтеза механизмов, предложенный русским ученым Л.В. Ассуром в 1914 г., состоит в следующем: механизм может быть образован путем наложения структурных групп к одному или нескольким начальным звеньям и стойке.

**Структурной группой (группой Ассура)** называется кинематическая цепь, число степеней свободы которой равно нулю после присоединения ее внешними кинематическими парами к стойке и которая не распадается на более простые цепи, удовлетворяющие этому условию.

Принцип наложения иллюстрируется на примере образования 6-звенного рычажного механизма (рис. 12.3).

Для структурных групп плоских механизмов с низшими парами

$$W = 3n - 2P_n = 0,$$

откуда

$$P_n = \frac{3}{2} n,$$

где  $W$  – число степеней свободы;

$n$  – число подвижных звеньев;

$P_n$  – число низших пар.

Этому соотношению удовлетворяют следующие сочетания.

$n$	2	4	6	...
$P_n$	3	6	9	...

В роли одноподвижных пар выступают низшие пары. Простейшей является структурная группа, у которой  $n = 2$  и  $P_n = 3$ . Она называется *структурной группой второго класса*.

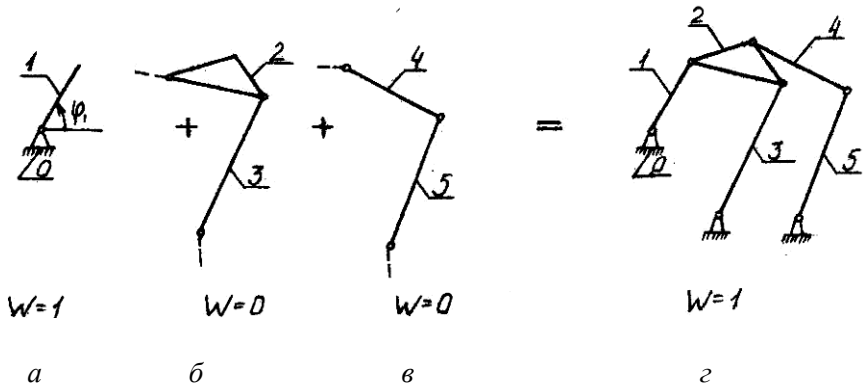


Рис. 12.3. Принцип наслоения структур.  
 $\varphi_1$  – угол поворота кривошипа (обобщенная координата)

**Порядок** структурной группы определяется числом элементов ее внешних кинематических пар, которыми она может присоединяться к механизму. Все группы второго класса имеют второй порядок.

Структурные группы, у которых  $n = 4$  и  $P_n = 6$ , могут быть третьего или четвертого класса (рис. 12.4).

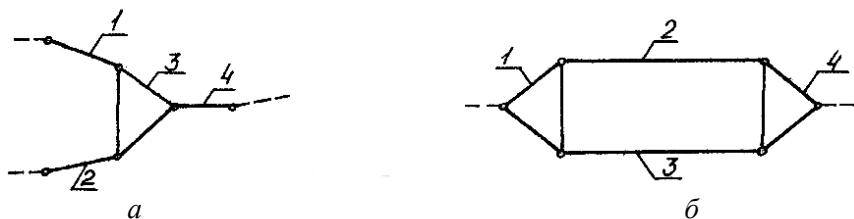


Рис. 12.4. Структурные группы:  
*a* – третьего класса; *б* – четвертого класса

**Класс** структурной группы в общем случае определяется числом кинематических пар в замкнутом контуре, образованном внутренними кинематическими парами.

Класс механизма определяется высшим классом структурной группы, входящей в его состав.

Порядок образования механизма записывается в виде формулы его строения. Для рассмотренного примера (см. рис. 12.3):  $(0,1) \rightarrow \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(4,5)$ , механизм второго класса. Римскими цифрами указывается класс структурных групп, а арабскими – номера звеньев, из которых они образованы. Здесь обе структурные группы относятся ко второму классу, второму порядку, первому виду.

#### 12.4. Конструктивно-функциональная классификация механизмов

Согласно этой классификации механизмы можно разделить на пять основных видов: рычажные, кулачковые, фрикционные, зубчатые механизмы и механизмы с гибкими звеньями.

К **рычажным механизмам** относятся механизмы, звенья которых образуют только вращательные, поступательные, цилиндрические и сферические пары. На рис. 12.5 показаны схемы наиболее распространенных рычажных механизмов: кривошипно-ползунного (рис. 12.5, *a*), шарнирного четырехзвенника (рис. 12.5, *б*), кулисного (рис. 12.5, *в*).

**Кривошип** – вращающееся звено, которое может совершать полный оборот вокруг неподвижной оси (звено 1 на всех трех схемах рис. 12.5). **Шатун** – звено, которое образует кинематические пары только с подвижными звеньями (звено 2 на рис. 12.5, *a*, *б*). **Ползун** –

звено, образующее поступательную пару со стойкой (звено 3 на рис. 12.5, а и звено 2 на рис. 12.5, в). **Коромысло** – вращающееся звено, которое может совершать только неполный оборот вокруг неподвижной оси (звено 3 на рис. 12.5, б). **Кулиса** – звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном поступательную пару (звено 3 на рис. 12.5, в).

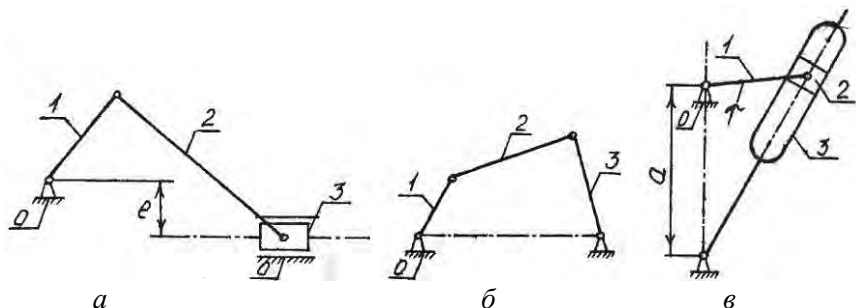


Рис. 12.5. Рычажные механизмы

К **кулачковым механизмам** относятся механизмы, в состав которых входит **кулачок** – звено, имеющее элемент высшей пары, выполненный в виде поверхности переменной кривизны. Кулачковые механизмы (рис. 12.6) предназначены для преобразования вращательного или возвратно-поступательного движения входного звена, которым, как правило, является кулачок 1, в возвратно-поступательное или возвратно-вращательное движение выходного звена-толкателя 2.

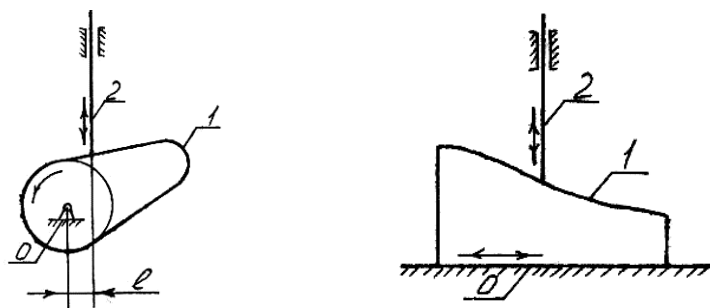


Рис. 12.6. Кулачковые механизмы

Основное достоинство кулачковых механизмов заключается в возможности получения практически любого закона движения толкателя за счет соответствующего выбора профиля кулачка.

Во *фрикционных механизмах* (рис. 12.7) движение от входного звена к выходному передается за счет сил трения, возникающих в местах контакта звеньев (высшая пара).

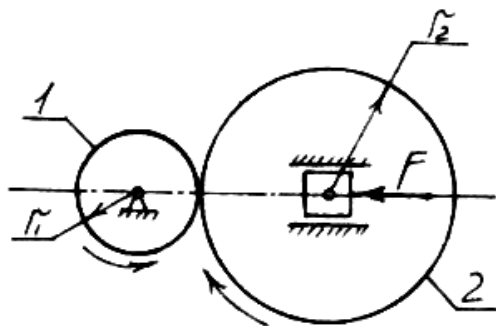


Рис. 12.7. Фрикционный механизм

К *зубчатым механизмам* относятся механизмы, в состав которых входят зубчатые звенья.

Механизмы *с гибкими связями* (рис. 12.8) применяют для передачи вращательного движения между валами при больших межосевых расстояниях.

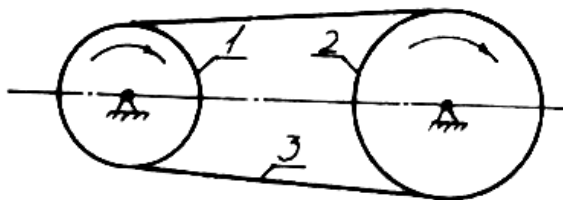


Рис. 12.8. Механизм с гибкой связью

## 12.5. Передаточное отношение

В механизмах, предназначенных для передачи вращательного движения (фрикционных, зубчатых и др.), основным кинематиче-

ским параметром является передаточное отношение, представляющее собой отношение угловых скоростей звеньев:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Очевидно, что

$$i_{21} = \frac{1}{i_{12}}.$$

При параллельных осях вращения звеньев передаточное отношение считается положительным, если направления угловых скоростей звеньев одинаковые, и отрицательным, если эти направления противоположные (см. рис. 12.7). Передаточное отношение может быть выражено через параметры механизма:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{Z_2}{Z_1},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы фрикционных катков;

$Z_1$  и  $Z_2$  – числа зубьев колес в случае зубчатой передачи.

## ГЛАВА 13. ОСНОВЫ РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

### 13.1. Общие сведения о передачах. Основные виды зубчатых передач

*Передачами* в машинах называются устройства, предназначенные для передачи энергии механического движения на расстояние и преобразования его параметров. Необходимость применения обусловлена несовпадением требуемых скоростей движения исполнительных органов с оптимальными скоростями двигателей; преобразованием видов движения (вращательного в поступательное), регулированием скорости, распределением потоков мощно-

сти между различными исполнительными органами машины, реверсированием движения.

По принципу работы механические передачи делятся на передачи с непосредственным соприкосновением звеньев (фрикционные, зубчатые, червячные, волновые, винт-гайка, шарнирно-рычажные) и передачи с гибкой связью (ременные, канатные, цепные).

Передачи выполняются с постоянным или переменным (регулируемым) передаточным отношением. В последнем случае регулирование может быть ступенчатое или бесступенчатое.

Наряду с механическими широко применяются гидравлические, пневматические и электрические передачи.

**Зубчатая передача** – это трехзвенный механизм, в котором два подвижных звена являются зубчатыми колесами, образующими между собой высшую пару. Достоинства: высокая надежность работы в широком диапазоне скоростей и нагрузок, малые габариты, большая долговечность, высокий КПД, сравнительно малые нагрузки на валы и подшипники, постоянство передаточного отношения, простота обслуживания. Недостатки: высокие требования к точности изготовления и монтажа, повышенный шум при больших скоростях.

В зависимости от расположения осей вращения колес различают следующие виды зубчатых передач: с параллельными осями (цилиндрические), с пересекающимися осями (конические), со скрещивающимися осями.

Цилиндрические передачи: с внешним (рис. 13.1, *а*) и внутренним зацеплением (рис. 13.1, *б*); частным случаем является реечная передача (рис. 13.1, *в*), осуществляющая преобразование вращательного движения в поступательное.

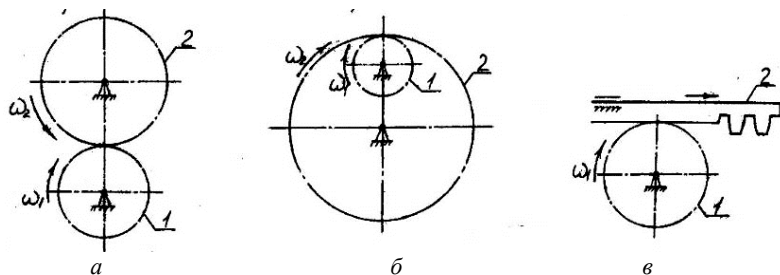


Рис. 13.1. Цилиндрические зубчатые передачи



Цилиндрические колеса могут быть с прямыми (рис. 13.2, *а*), косыми или винтовыми (рис. 13.2, *б*) и шевронными зубьями (рис. 13.2, *в*).

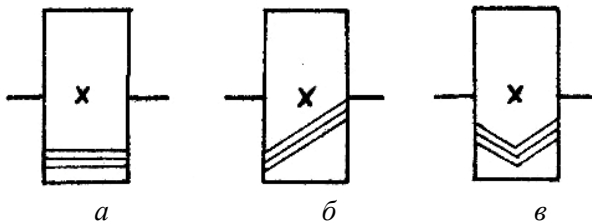


Рис. 13.2. Цилиндрические колеса

Конические передачи чаще всего выполняются ортогональными, у которых межосевой угол  $\Sigma = 90^\circ$  (рис. 13.3).

Конические колеса могут быть с прямыми, тангенциальными и криволинейными (чаще всего круговыми) зубьями (рис. 13.4).

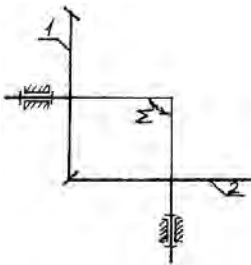


Рис. 13.3. Коническая передача

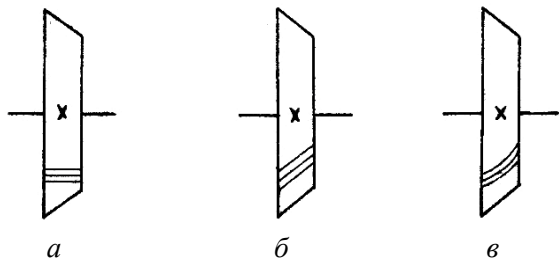


Рис. 13.4. Конические колеса

Червячная передача (рис. 13.5) состоит из червяка *1*, представляющего собой однозаходный или многозаходный винт, и червячного колеса *2*.

Зубчатое колесо передачи с меньшим числом зубьев называется **шестерней** ( $z_1$ ), а с большим числом зубьев – **колесом** ( $z_2$ ).

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

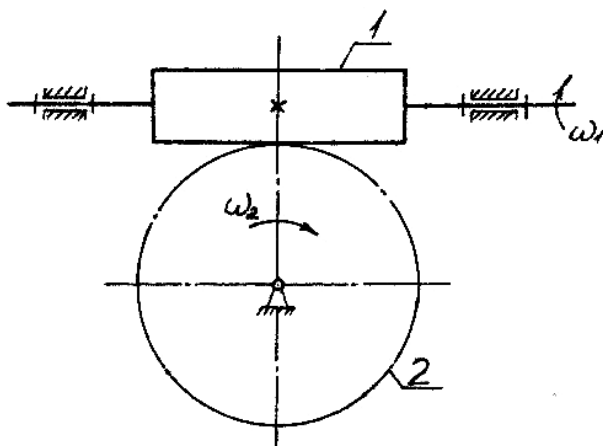


Рис. 13.5. Червячная передача

По соотношению угловых скоростей ведущего и ведомого звеньев зубчатые передачи делятся на понижающие (редукторы) и повышающие (мультипликаторы). У понижающих передач ведомое звено вращается с меньшей скоростью, чем ведущее ( $\omega_2 < \omega_1$ ), а у повышающих – наоборот ( $\omega_2 > \omega_1$ ).

### 13.2. Общие сведения о методах изготовления зубчатых колес

Существуют два принципиально различных метода изготовления зубчатых колес – метод копирования и метод обкатки (огибания).

При **методе копирования** профиль инструмента точно совпадает с профилем впадины изготавливаемого колеса. В качестве инструмента используются модульная дисковая (рис.13.6) или пальцевая фреза, фасонный резец и др. После обработки каждой впадины заготовка поворачивается на один угловой шаг:

$$\tau = \frac{360}{Z}.$$

Процесс повторяется до тех пор, пока не будут нарезаны все зубья ( $\tau$  – центральный угол). Так как форма эвольвенты зависит от

радиуса основной окружности, то колёса одного модуля, но с разным числом зубьев должны нарезаться фрезами с различной кривизной эвольвенты. Но бесконечное количество фрез иметь невозможно, поэтому промышленностью изготавливаются комплекты, состоящие из восьми фрез. Это приводит к неточности изготовления колес. Вторым существенным недостатком метода копирования является низкая производительность труда.

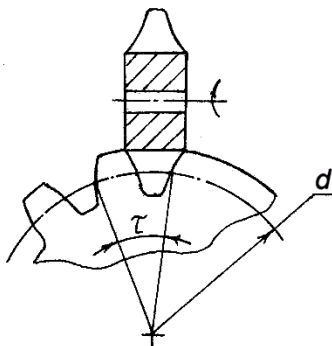


Рис. 13.6. Нарезание зубьев методом копирования

При *методе обкатки* инструмент и заготовка имеют такое же относительное движение, как два зубчатых колеса в зацеплении. Поэтому инструмент представляет собой колесо с зубьями эвольвентного профиля, заточенными для осуществления резания. Такое инструментальное колесо называется *долбяком* (рис. 13.7).

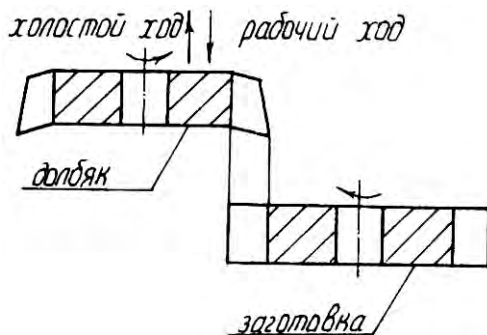


Рис. 13.7. Нарезание зубьев методом обкатки

Кроме долбяка используются зуборезная рейка с прямолинейными профилями зубьев или червячная фреза, которая в нормальном сечении витков имеет профиль рейки. Преимущества метода обкатки: высокая производительность, большая точность, возможность нарезания колес одного модуля с различными числами зубьев одним и тем же инструментом.

### 13.3. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения

Для получения больших передаточных отношений применяются многоступенчатые передачи, составленные из нескольких простых зубчатых передач. Рассмотрим трехступенчатую передачу (рис. 13.8).

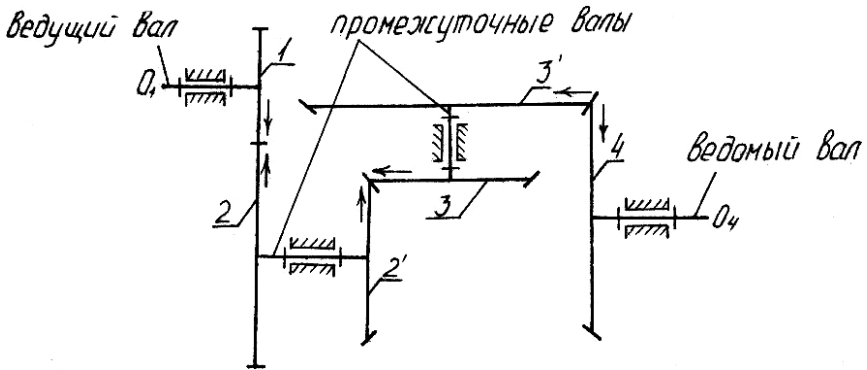


Рис. 13.8. Трехступенчатая передача

Передаточное отношение всего механизма

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}, \quad (13.1)$$

а передаточное отношение отдельных ступеней –

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{2'3} = \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \quad i_{3'4} = \frac{\omega_{3'}}{\omega_4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}.$$

Перемножим эти отношения:

$$i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (13.2)$$

Сравнивая выражения (13.1) и (13.2), получим

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4},$$

т. е. передаточное отношение многоступенчатой передачи равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней.

Колеса 1 и 4 вращаются в одну сторону. Таким образом,

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} = + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2'} \cdot \frac{Z_4}{Z_3'}.$$

Если все ступени являются цилиндрическими передачами, то в общем случае

$$i_{1n} = -1^k \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2'} \cdot \dots \cdot \frac{Z_n}{Z_{n-1}'},$$

где  $k$  – число внешних зацеплений.

Частным случаем многоступенчатой передачи является ступенчатый ряд с промежуточными (паразитными) колесами (рис. 13.9). Передаточное отношение для такой передачи

$$i_{14} = -1^3 \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2'} \cdot \frac{Z_4}{Z_3'} = - \frac{Z_4}{Z_1}.$$

Промежуточные колеса не влияют на величину общего передаточного отношения, но могут изменять его знак. Такие передачи применяются для изменения направления вращения ведомого звена, а также в случае передачи вращения между удаленными валами. В общем случае

$$i_{1n} = -1^k \frac{Z_n}{Z_1}.$$

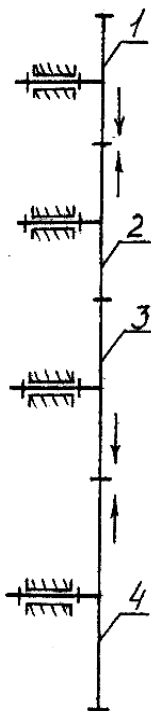


Рис. 13.9. Передача с промежуточными колесами

#### 13.4. Кинематика зубчатых механизмов с подвижными осями вращения

К механизмам с подвижными осями относятся механизмы, в составе которых имеется хотя бы одно колесо с перемещающейся в пространстве осью вращения (сателлит). Различают три вида таких механизмов:

- 1) дифференциальные;
- 2) планетарные;
- 3) замкнутые дифференциальные.

Рассмотрим один из простейших дифференциальных механизмов (рис. 13.10). Звенья 1 и 3 – центральные колеса, 2 – сателлит,  $H$  – водило. Водило  $H$  и соосные с ним центральные колеса 1 и 3 называются *основными звеньями*.

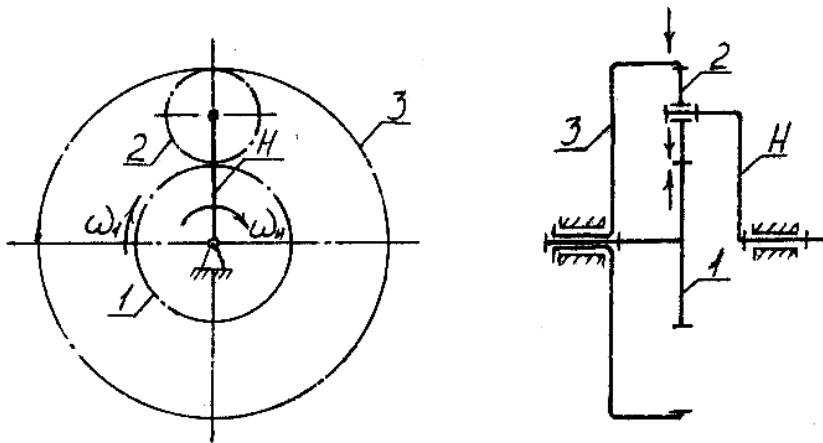


Рис. 13.10. Дифференциальная передача

Получим формулу, связывающую угловые скорости звеньев в дифференциальном механизме. Используем метод обращения движения. Сообщаем всем звеньям механизма дополнительную угловую скорость, равную угловой скорости водила  $H$ , но противоположно направленную, т. е.  $(-\omega_H)$ . При этом относительное движение звеньев не изменится, а угловые скорости в обратном движении будут следующими:

$$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H, \quad \omega_2^H = \omega_2 - \omega_H, \quad \omega_3^H = \omega_3 - \omega_H, \quad \omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0.$$

Таким образом, так как  $\omega_H^H = 0$ , то дифференциальный механизм превратился в зубчатый механизм с неподвижными осями. Для такого обращенного механизма

$$\frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = i_{13}^H \quad \text{или} \quad \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = i_{13}^H, \quad (13.3)$$

где  $i_{13}^H$  – передаточное отношение обращенного механизма, определяемое через число зубьев колес:

$$i_{13}^H = -\frac{Z_3}{Z_1}.$$

Полученное выражение (13.3) называется формулой Виллиса. В общем случае формула Виллиса имеет вид

$$\frac{\omega_a - \omega_H}{\omega_b - \omega_H} = i_{ab}^H. \quad ab$$

Если в дифференциальном механизме одно из центральных колес сделать неподвижным, то получится планетарный механизм (рис. 13.11).

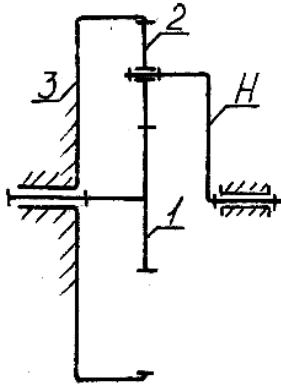


Рис. 13.11. Планетарная передача

Так как  $\omega_3 = 0$ , то из формулы  $\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = i_{13}^H$  получим:

$$\frac{\omega_1}{-\omega_H} + \frac{\omega_H}{\omega_H} = i_{13}^H,$$

$$-i_{1H}^\beta + 1 = i_{13}^H,$$

$$i_{1H}^\beta = 1 - i_{13}^H. \quad (13.4)$$

Выражение (13.4) называется формулой Виллиса для планетарных механизмов. В общем случае она имеет вид



$$i_{aH}^b = 1 - i_{ab}^H,$$

где индекс  $b$  соответствует неподвижному центральному колесу.

Планетарные механизмы часто называются планетарными передатками. Они позволяют получать большие передаточные отношения при малых габаритах.

## ГЛАВА 14. ОСНОВЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

### 14.1. Задачи и методы кинематического анализа механизмов. Масштабные коэффициенты

**Кинематический анализ** механизма состоит в определении движения его звеньев по заданному движению начальных звеньев. При этом считается известной кинематическая схема механизма, т. е. его структурная схема с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа.

Основные задачи кинематического анализа.

1. Определение положений звеньев и траекторий отдельных точек звеньев.
2. Определение линейных скоростей и ускорений точек, угловых скоростей и ускорений звеньев.
3. Определение передаточных отношений между звеньями.

Эти задачи могут решаться графическими, аналитическими и экспериментальными методами.

#### *Масштабные коэффициенты*

**Масштабным коэффициентом** называется отношение численного значения физической величины к длине отрезка в миллиметрах, изображающего эту величину.

Например, если длина звена равна  $l = 0,05$  м, а отрезок, изображающий это звено,  $AB = 50$  мм, то масштабный коэффициент длин  $\mu_l = 0,05/50 = 0,001$  м/мм, что соответствует чертежному масштабу  $1 : 1$ ; если же  $AB = 25$  мм, то  $\mu_l = 0,05/25 = 0,002$  м/мм ( $1 : 2$ ).

Масштабный коэффициент скоростей  $\mu_v, \frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$ . Если скорость некоторой точки  $A$   $v_A = 10$  м/с, а отрезок, изображающий  $v_A$ ,  $\rho_a = 50$  мм, то  $\mu_v = 10/50 = 0,2 \frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$ . Масштабный коэффициент ускорений  $\mu_a, \frac{\text{М}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}$ .

#### 14.2. Построение положений рычажных механизмов методом засечек

Кинематический анализ механизмов выполняется в порядке присоединения структурных групп.

Построение положений плоских механизмов второго класса обычно выполняется методом засечек. В качестве примера рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рис. 14.1).

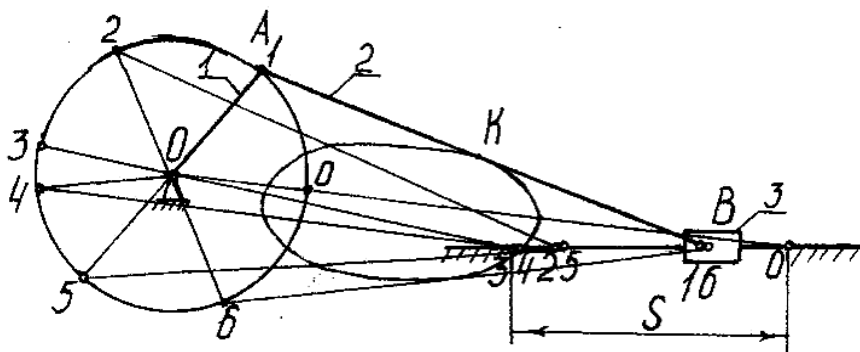


Рис. 14.1. Кривошипно-ползунный механизм

Вначале находим крайние положения механизма ( $0$  и  $3$ ), в которых кривошип  $1$  и шатун  $2$  располагаются на одной прямой. Для этого из центра  $O$  делаем засечки радиусами  $AB + OA$  и  $AB - OA$  на линии движения ползуна  $3$ . Далее делим окружность, описываемую точкой  $A$ , на равные части (например, на шесть) и отмечаем последовательные положения точки  $A - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , а затем методом засечек на линии движения ползуна получаем последовательные положения точки  $B - 0, 1, 2, 3$  (движение справа налево)  $4, 5, 6$

(движение слева направо).  $S$  – ход ползуна. В результате получаем последовательные положения всех звеньев механизма.

Траектория некоторой точки  $K$  шатуна получается, если все последовательные положения точки соединить плавной кривой.

### 14.3. Определение скоростей и ускорений рычажных механизмов методом планов

**Пример 14.1.** Дано: кривошипно-ползунный механизм (рис. 14.2),  $\omega_1 = 60$  рад/с или  $n_1 = 50$  об/мин,  $l_{OA} = 100$  мм,  $l_{AB} = 300$  мм,  $\varepsilon_1 = 5$  рад/с<sup>2</sup>.

Формула строения:  $I, 0,1 \rightarrow II, 2,3$ , механизм второго класса.

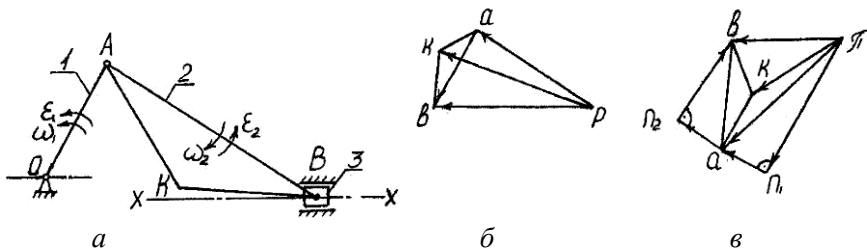


Рис. 14.2. К примеру 14.1

**Построение плана скоростей.** Скорость точки  $A$  начального звена

$$v_A = l_{OA} \omega_1 = l_{OA} \frac{\pi \cdot n_1}{30} = 0,1 \cdot 60 = 6 \text{ м/с},$$

где  $n_1$  – частота вращения кривошипа  $1$ ,  $\text{мин}^{-1}$ .

$$\mu_v = \frac{v_A}{\rho a} = \frac{6 \text{ м/с}}{60 \text{ мм}} = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

$v_A \perp OA$  в сторону  $\omega_1$ . Выбираем масштабный коэффициент скоростей  $\mu_v$  и определяем отрезок  $\rho a = v_A / \mu_v$ , мм, изображающий  $v_A$ . Точка  $\rho$  – полюс плана скоростей.

Рассматриваем структурную группу (2, 3). Для определения скорости точки  $B$  составляем векторное уравнение согласно теореме о плоскопараллельном движении:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (14.1)$$

где  $v_{BA}$  – скорость точки  $B$  во вращательном движении звена 2 относительно точки  $A$ ,  $\vec{v}_{BA} \perp AB$ ,  $\vec{v}_B \parallel x-x$ .

Уравнение (14.1) решаем графически. Для этого из полюса  $p$  откладываем отрезок  $pa$  в направлении вектора  $\vec{v}_A$ , из точки  $a$  проводим прямую в направлении вектора  $\vec{v}_{BA}$ , т. е. перпендикулярно  $AB$ , затем из полюса  $p$  проводим прямую в направлении суммарного вектора  $\vec{v}_B$ , т. е. параллельно  $x-x$ . Пересечение указанных направлений дает точку  $b$ . В результате находим

$$v_B = pb \mu_v, \quad v_{BA} = ab \mu_v, \quad \omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}.$$

Для определения направления угловой скорости  $\omega_2$  шатуна 2 переносим вектор относительной скорости  $\vec{v}_{BA}$  (отрезок  $ab$ ) в точку  $B$  и наблюдаем, в какую сторону он поворачивает звено 2 относительно точки  $A$ .

Скорость точки  $K$  шатуна находим на основании векторных уравнений

$$\vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA} \quad \text{и} \quad \vec{v}_K = \vec{v}_B + \vec{v}_{KB},$$

где  $\vec{v}_{KA}$  и  $\vec{v}_{KB}$  – относительные скорости, причем  $\vec{v}_{KA} \perp AK$ ,  $\vec{v}_{KB} \perp BK$ . В результате получим

$$v_K = pk \mu_v, \quad v_{KA} = ak \mu_v, \quad v_{KB} = bk \mu_v.$$

Отметим основные свойства планов скоростей.

1. Векторы абсолютных скоростей начинаются в полюсе плана.

2. Векторы относительных скоростей соединяют концы векторов абсолютных скоростей, причем вектор на плане направлен к той точке, которая стоит первой в индексе, например,  $\vec{v}_{BA}$  – от  $a$  к  $b$ .

3. Теорема подобия. Отрезки относительных скоростей точек, принадлежащих одному звену, образуют фигуру, подобную соответствующей фигуре звена и сходственно с нею расположенную. Сходственное расположение означает, что направления обхода одноименных контуров совпадают (например,  $a-b-k$  и  $A-B-K$  – по часовой стрелке). В рассмотренном примере  $\Delta abk \sim \Delta ABK$ .

**Построение плана ускорений.** Ускорение точки  $A$  начального звена

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t,$$

где  $\vec{a}_A^n$  – нормальное ускорение;

$\vec{a}_A^t$  – касательное (тангенциальное) ускорение.

$$\vec{a}_A^n = l_{OA} \omega_1^2, \quad \vec{a}_A^t = l_{OA} \varepsilon_1,$$

причем вектор  $\vec{a}_A^n$  направлен вдоль  $OA$  от  $A$  к  $O$ , а  $\vec{a}_A^t \perp OA$  в сторону  $\varepsilon_1$ .

Выбираем масштабный коэффициент ускорений  $\mu_a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}$ , и определяем отрезок  $\pi \eta_1 = a_A^n / \mu_a$ , мм, изображающий  $a_A^n$ , и отрезок  $\eta_1 a = a_A^t / \mu_a$ , мм, изображающий  $a_A^t$ . Точка  $\pi$  – полюс плана ускорений. Откладываем отрезки  $\pi \eta_1$  и  $\eta_1 a$  в соответствии с их направлениями. Тогда

$$a_A = \pi a \mu_a.$$

Рассматриваем структурную группу (2, 3). Для определения ускорения точки  $B$  составляем векторное уравнение согласно теореме о плоскопараллельном движении:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t, \quad (14.2)$$

где  $\vec{a}_{BA}^n$  и  $\vec{a}_{BA}^t$  – нормальная и касательная составляющие ускорения  $\vec{a}_{BA}$  точки  $B$  во вращательном движении звена 2 относительно точки  $A$ , причем вектор  $\vec{a}_{BA}^n$  направлен вдоль  $AB$  от  $B$  к  $A$ , а  $\vec{a}_{BA}^t \perp AB$ . Нормальная составляющая находится также по величине

$$\vec{a}_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}} \quad \text{или} \quad \vec{a}_{BA}^n = l_{AB} \omega_2^2.$$

Отрезок, изображающий  $\vec{a}_{BA}^n$ , равен

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}, \text{ мм.}$$

Уравнение (14.2) решаем графически. Для этого из точки  $a$  откладываем отрезок  $an_2$  в направлении вектора  $\vec{a}_{BA}^n$  из точки  $n_2$  проводим прямую в направлении вектора  $\vec{a}_{BA}^t$ , а из полюса  $\pi$  проводим прямую в направлении суммарного вектора  $\vec{a}_B$ , т. е. параллельно  $x - x$ . Пересечение указанных направлений дает точку  $b$ . В результате находим

$$a_B = \pi b \mu_a, \quad a_{BA}^t = n_2 b \mu_a, \quad a_{BA} = ab \mu_a, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}}.$$

Для определения направления углового ускорения  $\varepsilon_2$  шатуна 2 переносим вектор касательного ускорения  $\vec{a}_{BA}^t$  (отрезок  $n_2 b$ ) в точку  $B$  и наблюдаем, в какую сторону он поворачивает звено 2 относительно точки  $A$ .

Ускорение точки  $K$  находим на основании теоремы подобия, которая справедлива и для плана ускорений. Для этого методом засе-

чек строим  $\Delta abk$ , подобный  $\Delta ABK$  и сходственно с ним расположенный. Стороны  $ak$  и  $bk$  находим из пропорций

$$\frac{ak}{ab} = \frac{AK}{AB}, \quad \frac{bk}{ab} = \frac{BK}{AB},$$

откуда

$$ak = ab \frac{AK}{AB}, \quad bk = ab \frac{BK}{AB}.$$

В результате получим

$$a_k = \pi K \mu_a.$$

Основные свойства планов ускорений такие же, как и планов скоростей.

## ГЛАВА 15. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

### 15.1. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения

Основным кинематическим параметром зубчатого механизма является передаточное отношение.

**Передаточным отношением**  $i_{12}$  называется отношение угловой скорости звена 1 ( $\omega_1$ ) к угловой скорости звена 2 ( $\omega_2$ ) (рис. 15.1).

Очевидно, что

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{или} \quad i_{21} = \frac{1}{i_{12}}.$$

Если  $\omega_1 = \text{const}$  и  $\omega_2 = \text{const}$ , то

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{и} \quad i_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – частота вращения,  $\text{мин}^{-1}$ , звена 1 и звена 2.

Для механизмов с параллельными осями передаточное отношение считается положительным при одинаковом направлении угловых скоростей и отрицательным – при противоположном.

Для цилиндрической передачи знак «плюс» соответствует внутреннему зацеплению (рис. 15.1, б), а «минус» – внешнему (рис. 15.1, а).

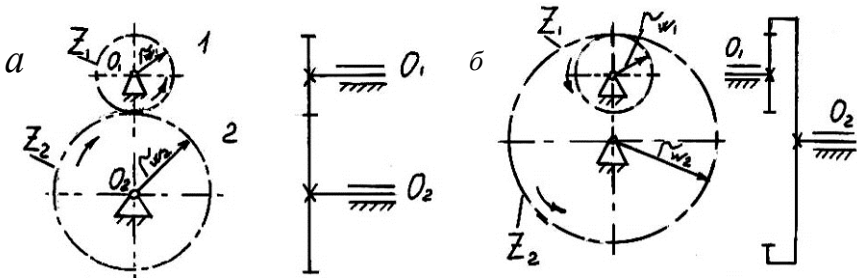


Рис. 15.1. К вопросу о передаточном отношении

Передаточное отношение можно представить в виде

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{W2}}{r_{W1}} = \pm \frac{Z_2}{Z_1}.$$

Многоступенчатый зубчатый механизм можно образовать последовательным соединением колес (рис. 15.2), при котором вращение от ведущего вала  $O_1$  передается ведомому валу  $O_4$  через промежуточные валы  $O_2$  и  $O_3$ , на каждом из которых помещено по два колеса: 2 и 2', 3 и 3'. Колёса 2 и 2' жестко соединены с валом  $O_2$  и имеют общую угловую скорость  $\omega_2$ ; аналогично колёса 3 и 3' также жестко соединены с валом  $O_3$  и имеют общую угловую скорость  $\omega_3$ .

На одной проекции (см. рис. 15.2) направление угловых скоростей показано круговыми стрелками, а на второй – прямыми.

При последовательном ступенчатом соединении колес передаточное отношение равно произведению передаточных отношений промежуточных зацеплений (см. рис. 15.2):



$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \left( -\frac{Z_2}{Z_1} \right) \cdot \left( -\frac{Z_3}{Z_2'} \right) \cdot \left( -\frac{Z_4}{Z_3'} \right) = -\frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2' Z_3'}$$

В данном случае имеем трехступенчатую передачу.

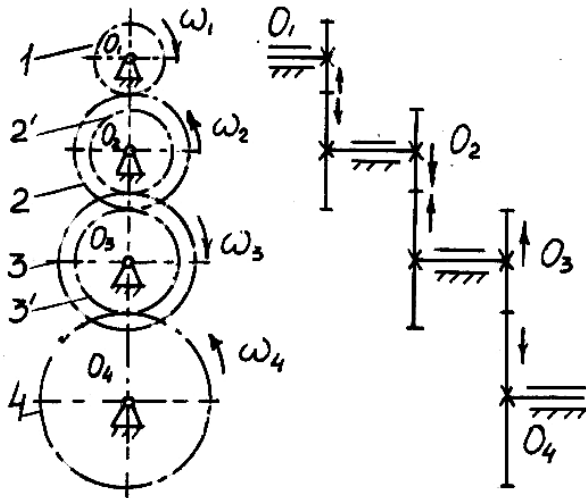


Рис. 15.2. Многоступенчатый зубчатый механизм

В общем случае передаточное отношение

$$i_{1n} = -1^k \frac{Z_2 Z_3 Z_4 \dots Z_n}{Z_1 Z_2' Z_3' \dots Z_{n-1}'}, \quad (15.1)$$

где  $k$  – число внешних зацеплений.

При простом последовательном соединении зубчатых колес (рис. 15.3) величина общего передаточного отношения не зависит от количества промежуточных (паразитных) колес:

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \left( -\frac{Z_2}{Z_1} \right) \cdot \left( -\frac{Z_3}{Z_2} \right) \cdot \left( -\frac{Z_4}{Z_3} \right) = -\frac{Z_4}{Z_1}$$

В общем случае

$$i_{1K} = -1^K \frac{Z_K}{Z_1}, \quad (15.2)$$

где  $K$  – число внешних зацеплений.

«Паразитные» колеса могут изменять знак передаточного отношения; например, при внешнем зацеплении (см. рис. 15.3) каждое четное колесо 2 и 4 вращается в сторону, противоположную вращению входного колеса 1, а каждое нечетное колесо 3 – в сторону вращения входного колеса 1.

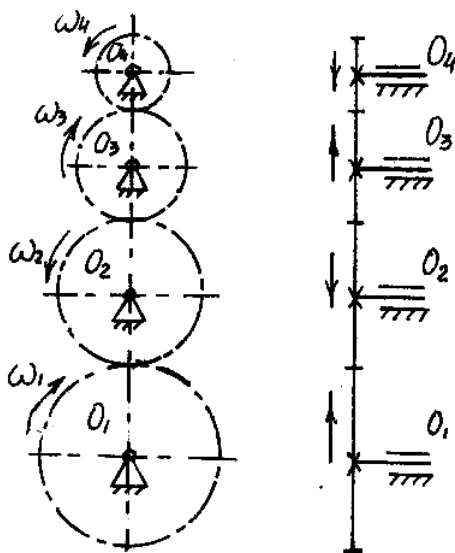


Рис. 15.3. Последовательное соединение зубчатых колес

На рис. 15.4 показано последовательное соединение, состоящее из трех колес: 1, «паразитное» 2 и выходное 3 с внутренним зацеплением. Передаточное отношение

$$i_{13} = -\frac{Z_3}{Z_1} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

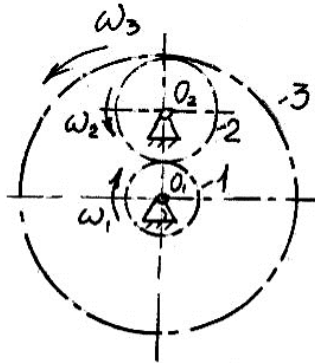


Рис. 15.4. Последовательное соединение трех колес

Передаточное отношение червячной передачи равно отношению числа зубьев колеса к числу витков червяка:

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

где  $Z_2$  – число зубьев червячного колеса;

$Z_1$  – число витков червяка;

$n_1$  и  $n_2$  – частота вращения червяка и колеса,  $\text{мин}^{-1}$ .

Механизм, изображенный на рис. 15.5, состоит из пары цилиндрических колес 1 и 2, пары конических колес 2', 3 и червячной пары 3' и 4, где звено 3' – червяк, а 4 – червячное колесо. Общее передаточное отношение для этого механизма

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_3}{Z_2'} \frac{Z_4}{Z_3'},$$

где  $Z_4$  – число зубьев червячного колеса;

$Z_3'$  – число витков червяка.

Знак для общего передаточного отношения можно поставить лишь для того случая, когда входной и выходной валы вращаются относительно осей, параллельных друг другу.

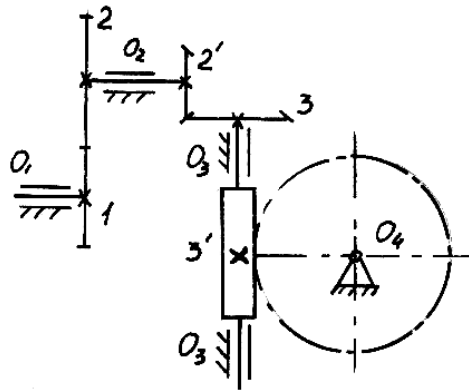


Рис. 15.5. Многоступенчатый механизм

## 15.2. Кинематика зубчатых механизмов с подвижными осями вращения

Зубчатая передача, у которой геометрическая ось хотя бы одного из колес подвижна, называется *планетарной*. Различные планетарные механизмы можно представить в виде трех типов передач.

1. Дифференциальные передачи, обладающие двумя степенями подвижности, у которых все основные звенья подвижны (рис. 15.6). Эти передачи позволяют суммировать два или несколько потоков мощности, поступающих от независимых источников, либо распределять их по независимым потребителям.

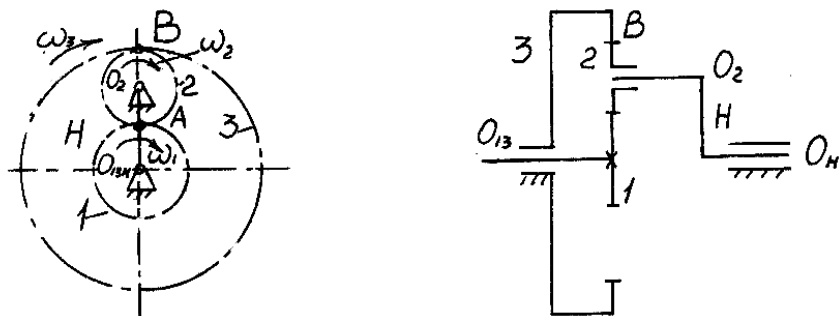


Рис. 15.6. Дифференциальная передача

2. Простые планетарные передачи, обладающие одной степенью подвижности, у которых одно из основных звеньев закреплено неподвижно (рис. 15.7, закреплено звено 3). Такие механизмы служат для последовательной передачи потока мощности.

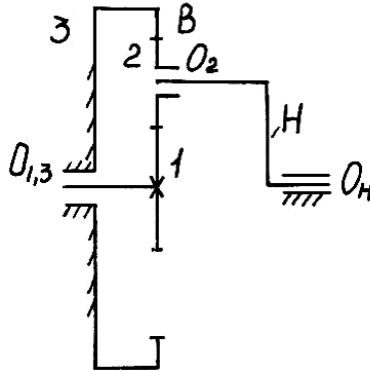


Рис. 15.7. Планетарная передача

3. Замкнутые дифференциальные передачи, получаемые из дифференциальных передач путем замыкания двух основных звеньев (центрального колеса и водила) простой передачей, состоящей из колес 1, 2, 3 (рис. 15.8). Такие передачи позволяют получить большие передаточные отношения при малых габаритах.

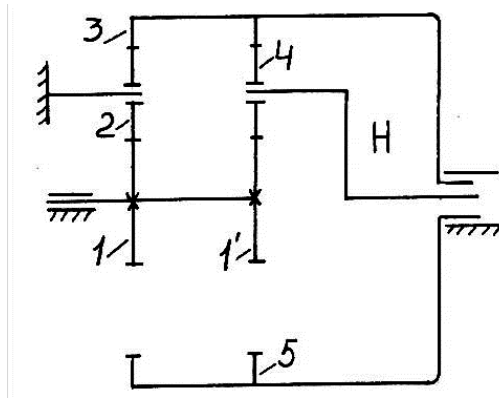


Рис. 15.8. Замкнутая дифференциальная передача

Рассмотрим механизм, изображенный на рис. 15.6. Определим число степеней подвижности, если  $n = 4$  – число звеньев,  $\rho_5 = 4$  и  $\rho_4 = 2$  – число кинематических пар  $\vee$  и  $\text{IV}$  класса.

Определенность в движении звеньев у этого механизма будет в том случае, если будут заданы законы движения двум звеньям.

Основными звеньями механизмов с подвижными осями являются водило ( $H$ ) и соосные с ним колёса ( $1$  и  $3$ ). В данном случае все основные звенья подвижные. Оба эти признака ( $W > 1$  и подвижные основные звенья) определяют **дифференциальный механизм**.

Определим степень подвижности для механизма, изображенного на рис. 15.7:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

У этого механизма колесо  $3$  (основное звено) неподвижно и  $W = 1$ . Оба признака определяют **планетарный механизм**. В механизмах замкнутых дифференциалов все основные звенья подвижные но число степеней подвижности равно единице ( $W = 1$ ). Таким образом, только по совокупности двух признаков механизмы с подвижными осями можно отнести к тому или иному типу.

Формулы (15.1), (15.2) для определения передаточного отношения планетарных и дифференциальных механизмов использовать нельзя, так как сателлит участвует в сложном движении, состоящем из вращения вокруг оси  $O_2$  и вращения вместе с водилом  $H$  вокруг оси  $O_n$  (см. рис. 15.6, 15.7).

Для вывода зависимостей, связывающих угловые скорости механизмов, имеющих подвижные оси, воспользуемся методом обращения движения.

Допустим, что в действительном движении звенья механизма (см. рис.15.6) имеют угловые скорости  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\omega_4$ . Сообщим всем звеньям скорость, равную угловой скорости водила, но противоположно ей направленную, т. е.  $\omega_H$ . В этом случае угловые скорости звеньев соответственно будут

$$\begin{aligned} \omega_1^H &= \omega_1 - \omega_H; & \omega_2^H &= \omega_2 - \omega_H; \\ \omega_3^H &= \omega_3 - \omega_H; & \omega_H^H &= \omega_H - \omega_H = 0. \end{aligned}$$

Так как водило  $H$  стало неподвижным ( $\omega_H^H = 0$ ), то мы получили «обращенный механизм» с неподвижными осями. Для этого механизма справедлива зависимость

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H},$$

где  $i_{13}^H$  – передаточное отношение «обращенного механизма», которое можно определить через число зубьев колес:

$$i_{13}^H = -\frac{Z_3}{Z_1}.$$

В правую часть предыдущей зависимости подставим значение относительных скоростей:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (15.3)$$

Полученное уравнение называется **формулой Виллиса для дифференциальных механизмов**. Левая часть, как показано выше, может быть выражена через число зубьев колес. Определенность в решении правой части будет иметь место, когда будут известны скорости двух ведущих звеньев. Установим, какой вид примет формула Виллиса для планетарного механизма, изображенного на рис. 15.7. У этого механизма колесо 3 жестко соединено со стойкой (заторможено), т. е.  $\omega_3 = 0$ .

Таким образом, имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}.$$

Откуда

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^H. \quad (15.4)$$

Полученную зависимость называют *формулой Виллиса для планетарных механизмов*, а передаточное отношение  $i_{1H}$  – *планетарным передаточным отношением*.

Как и для дифференциальных механизмов,  $i_{13}^H$  определяется через число зубьев колес. В общем случае

$$i_{kH} = 1 - i_{kl}^H,$$

где  $i_{kl}$  – передаточное отношение от звена  $k$  к звену  $l$  ( $l$  соответствует неподвижному центральному колесу).

Достоинством планетарных механизмов является возможность получения больших передаточных отношений при малых габаритах.

**Пример 15.1.** Определить передаточное отношение  $i_{H1}$  планетарного механизма (рис. 15.9), если  $z_1 = 100$ ,  $z_2 = 99$ ,  $z_2' = 100$ ,  $z_3 = 101$ .

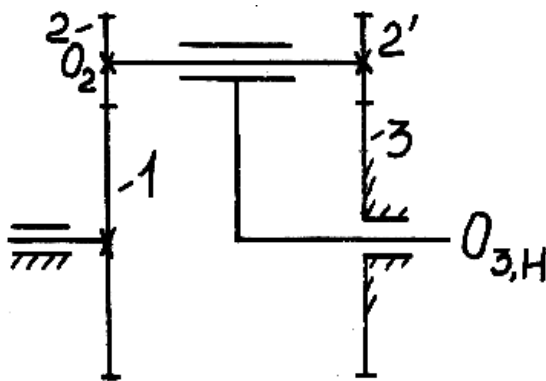


Рис. 15.9. К примеру 15.1

Это одноступенчатый планетарный редуктор. Используя формулу (15.4), запишем

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{1}{1 - i_{13}^H} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}} = \frac{1}{1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100}} = 10000.$$



**Пример 15.2.** В зубчатой передаче, показанной на рис. 15.10, входное коническое колесо 7 в данный момент имеет угловую скорость  $\omega_7 = 340 \text{ с}^{-1}$  и постоянное угловое ускорение  $\varepsilon_7 = 285 \text{ с}^{-2}$ , направленное по движению.

$$z_1 = z_2 = 18; z_2' = z_4' = 18; z_3 = z_5 = 30; z_3' = z_5' = 22; z_4 = z_6 = 70.$$

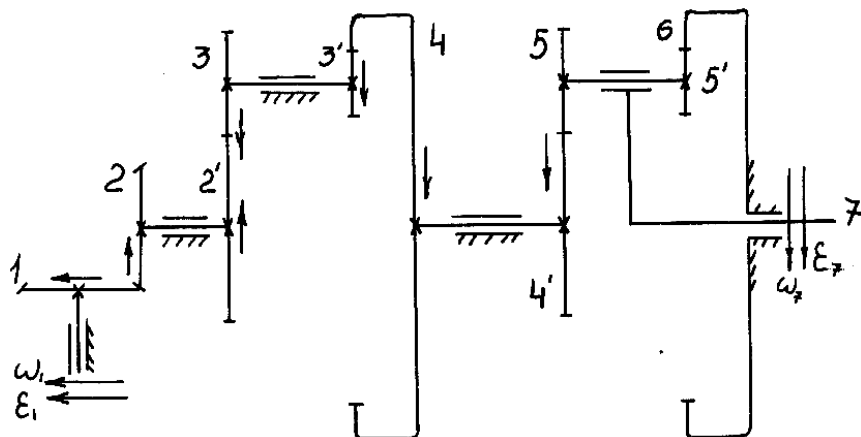


Рис. 15.10. К примеру 15.2

Принять средний модуль конического колеса  $m_m = 2 \text{ мм}$ , ширину колеса  $b = 20 \text{ мм}$ , плотность  $\rho = 8000 \text{ кг/м}$ , смещение центра масс (точки  $A$ , рис. 15.11)  $l = 2 \text{ мм}$ .

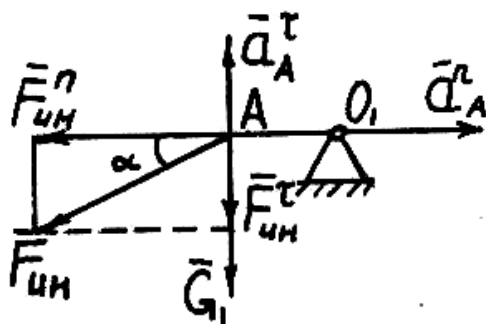


Рис. 15.11. Смещение центра масс

Определить:

- 1) передаточное отношение между входным и выходным звеньями и направление вращения;
- 2) угловую скорость и угловое ускорение выходного звена, их направление показать на схеме передачи;
- 3) время, в течение которого угловая скорость увеличится в два раза;
- 4) величину и направление силы инерции и момента пары сил инерции звена 7 в начале и конце найденного в предшествующем пункте промежутка времени, сравнить силу инерции с силой тяжести и показать на чертеже направления вращения, ускорения и инерционных нагрузок;
- 5) общий коэффициент полезного действия передачи.

### Решение

1. Определение передаточного отношения механизма.

$$i_{17} = i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_7} = \frac{\omega_1}{\omega_H}.$$

Выделим из механизма ступень с неподвижными осями, состоящую из колес  $Z_1, Z_2, Z_2', Z_3, Z_3', Z_4$ , и планетарную ступень, состоящую из колес  $Z_4', Z_5, Z_5', Z_6$  и водила  $H(\lambda)$ ;

а) для ступени с неподвижными осями

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4};$$

оси колес 1 и 4 непараллельные, поэтому знак передаточного отношения не определяем, а покажем направления вращения колес неподвижной ступени в соответствии с правилом стрелок:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2'} \cdot \frac{Z_4}{Z_3'} = \frac{18 \cdot 30 \cdot 70}{18 \cdot 18 \cdot 22} = 5,303;$$

б) чтобы определить передаточное отношение планетарной ступени, используем формулу Виллиса; остановим водило  $H(\lambda)$ , используя зависимость (15.3), получим

$$i_{4'6}^H = \frac{\omega_{4'} - \omega_H}{\omega_6 - \omega_H} = \left( -\frac{Z_5}{Z_{4'}} \right) \frac{Z_6}{Z_{5'}} = -\frac{Z_5 \cdot Z_6}{Z_{4'} \cdot Z_{5'}} = -\frac{30 \cdot 70}{18 \cdot 20} = -5,833;$$

колесо 6 неподвижно ( $\omega_6 = 0$ ), используя зависимость (15.4), получим

$$i_{4'H} = 1 - i_{4'6}^H = 1 + 5,833 = 6,833;$$

в) передаточное отношение всего механизма

$$i_{17} = i_{1H} = i_{14} \cdot i_{4'H} = 5,833 \cdot 6,833 = 39,859.$$

Передаточное отношение планетарной ступени  $i_{4'H} > 0$ . Следовательно, водило  $H$  ( $\lambda$ ) вращается в ту же сторону, что и колесо 4.

Покажем направление угловой скорости  $\omega_7$  и углового ускорения  $\varepsilon_7$  на чертеже стрелками. Поскольку  $\varepsilon_1 > 0$ , вращение ускоренное.

2. Угловая скорость и угловое ускорение ведомого звена 7 по модулю:

$$|\omega_7| = \frac{\omega_1}{|i_{17}|} = \frac{340}{39,86} = 8,52 \text{ с}^{-1};$$

$$|\varepsilon_7| = \frac{\varepsilon_1}{|i_{17}|} = \frac{285}{39,86} = 7,15 \text{ с}^{-2}.$$

3. Определить время, в течение которого угловая скорость увеличивается вдвое:  $\omega'_1 = 2\omega_1$ .

Для ускоренного вращения  $\omega'_1 = \omega_1 + \varepsilon t$ .

$$\text{Отсюда } t = \frac{\omega'_1 - \omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{2\omega_1 - \omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{340}{285} = 1,19 \text{ с.}$$

4. Для расчета момента инерции  $I_{01}$  коническое ведущее колесо со средним модулем  $m_m = 2$  мм,  $Z_1 = 18$  заменим цилиндром с диаметром, равным среднему делительному диаметру:

$$d_{m1} = m_m \cdot z_1 = 2 \cdot 18 = 36 \text{ мм} = 0,036 \text{ м}.$$

С учетом сказанного масса определяется по формуле

$$m_1 = \rho V = \rho \frac{\pi d_{m1}^2}{4} b_1 = 8000 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,036^2}{4} \cdot 0,02 = 0,163 \text{ кг},$$

где  $\rho$  – плотность,  $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$  (по условию).

$$I_{01} = \frac{1}{2} m_1 r_{m1}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,163 \cdot \frac{0,036^2}{4} = 2,64 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Вес колеса

$$G = m_1 g = 0,163 \cdot 9,8 = 1,6 \text{ Н}.$$

Смещение центра масс (точка  $A$  на рис. 15.11)  $l = 2 \text{ мм} = 0,002 \text{ м}$ .  
 Нормальная составляющая силы инерции

$$\vec{F}_{\text{ин}}^n = -m_1 \vec{a}_A^n.$$

Нормальное ускорение точки  $A$

$$a_A^n = \omega_1^2 l = 340^2 \cdot 0,002 = 231,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$\vec{F}_{\text{ин}}^n = 0,163 \cdot 231,2 = 37,7 \text{ Н}.$$

Касательное ускорение точки  $A$  и касательная составляющая силы инерции:

$$a_A^r = \varepsilon_1 l = 285 \cdot 0,002 = 0,57 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$\vec{F}_{\text{ин}}^r = m_1 a_A^r = 0,163 \cdot 0,57 = 0,093 \text{ Н}.$$

Определим полное ускорение точки  $A$ , силу инерции и направление силы инерции:

$$a_A = \sqrt{a_A^n^2 + a_A^t^2} = \sqrt{231,2^2 + 0,57^2} = 231,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$F_{\text{ин}} = \sqrt{F_{\text{ин}}^n^2 + F_{\text{ин}}^t^2} = \sqrt{37,7^2 + 0,093^2} = 37,7 \text{ Н};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_{\text{ин}}^t}{F_{\text{ин}}^n} = \frac{0,093}{37,7} = 2,46 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha = 8'.$$

В практических расчетах составляющей  $F_{\text{ин}}^t$ , как малой величиной, можно пренебречь и считать, что  $F_{\text{ин}} = F_{\text{ин}}^n = 37,7 \text{ Н}$ . Сравним силу тяжести и силу инерции:

$$\frac{F_{\text{ин}}}{G} = \frac{37,7}{1,6} = 23,6.$$

Силой веса по сравнению с силой инерции при практических расчетах также можно пренебречь.

Момент сил инерции

$$M_u = I_{01} \varepsilon = 2,64 \cdot 10^{-5} \cdot 285 = 0,00752 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Покажем направление всех векторных величин на чертеже.

5. Определение общего КПД механизма.

$$\eta = \eta_k \cdot \eta_{\text{ц}}^2 \cdot \eta_{\text{пл}}.$$

Здесь  $\eta_k = 0,95$  – КПД конической пары с учетом потерь в подшипниках.

$\eta_{\text{ц}} = 0,96$  – КПД цилиндрической пары (две пары по условию);

$\eta_{\text{пл}} = 0,96$  – КПД планетарной передачи.

$$\eta = 0,95 \cdot 0,96^2 \cdot 0,96 = 0,84.$$

## РАЗДЕЛ 3 ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

### ГЛАВА 16. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДЕТАЛИ

#### 16.1. Метод сечений

Под *внутренними силами* будем подразумевать не их абсолютные значения, а только те приращения, которые вызваны действующими на тело нагрузками,

Для расчета на прочность необходимо иметь возможность определять внутренние силы по заданным внешним силам.

Основу для решения этой задачи дает **метод сечений «Розу»**:

**Р** – разрезаем тело плоскостью на две части;

**О** – отбрасываем одну часть;

**З** – заменяем действие отброшенной части внутренними силами;

**У** – уравниваем оставшуюся часть и из уравнения равновесия определяем внутренние силы.

Применяя метод сечений, силы, являющиеся внутренними для тела в целом, переводят во внешние для одной из его частей, полученной в результате мысленно проведенного сечения.

Рассмотрим брус, находящийся в равновесии под действием произвольной системы внешних (активных и реактивных) сил (рис. 16.1). Рассечем его на две части (I и II) некоторой произвольной плоскостью, перпендикулярной его продольной оси, и отбросим одну из частей (например I) (рис. 16.2). Из теоретической механики известно, что любая система сил может быть приведена к ее главному вектору и главному моменту, которые статически эквивалентны заданной системе сил. Главный вектор системы – три составляющие по осям выбранной системы координат. Главный момент – три момента, каждый из которых стремится повернуть тело вокруг одной из координатных осей.

Составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающих в поперечном сечении бруса (рис. 16.3), носят название *внутренних силовых факторов (ВСФ)* в этом сечении.  $N_z$  – *продольная (или нормальная) сила*;  $Q_x, Q_y$  – *поперечные силы*;  $M_z$  – *крутящий момент*;  $Q_x, Q_y$  – *изгибающие моменты* (рис. 16.4).

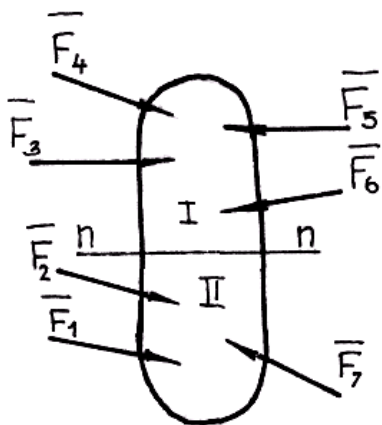


Рис. 16.1. Внешние силы

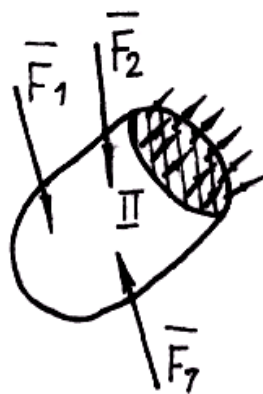


Рис. 16.2. Внутренние силы

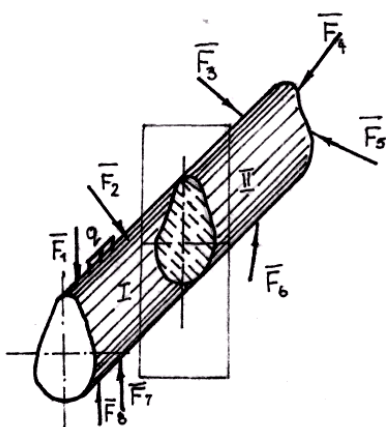


Рис. 16.3. Метод сечений

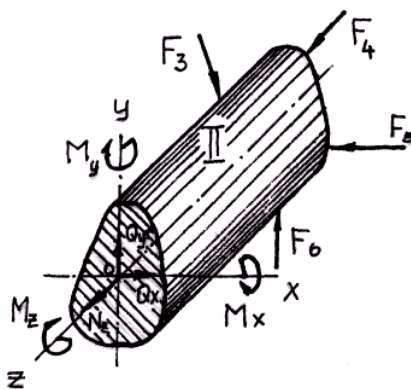


Рис. 16.4. Внутренние силы в произвольном сечении бруса

Имеют место следующие виды деформаций:

если  $N_z \neq 0$  – растяжение,  $Q_x \neq 0$  или  $Q_y \neq 0$  – срез;

если  $M_z \neq 0$  – кручение,  $M_x \neq 0$  или  $M_y \neq 0$  – изгиб.

Для определения каждого из внутренних силовых факторов надо составить соответствующее уравнение равновесия для всех сил, действующих на оставленную часть бруса (см. рис. 16.4).

$$\sum_{\substack{\text{ост.} \\ \text{части}}} Z = N_z + \sum_{\substack{\text{ост.} \\ \text{части}}} F_{iz} = 0.$$

Продольная сила в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на продольную ось  $OZ$  бруса всех внешних сил, приложенных к его оставленной части.

## 16.2. Напряжение как мера внутренних сил

Для суждения об интенсивности внутренних сил в определенной точке данного сечения введено понятие о **напряжении**.

Выделим в окрестности интересующей нас точки сечения малую площадку площадью  $\Delta A$ ; допустим, что на этой площадке возникает внутренняя сила  $\Delta R$  (рис. 16.5). Отношение этой внутренней силы к площади выделенной площадки называется *средним напряжением*  $\rho_{\text{ср}}$  в окрестности рассматриваемой точки по проведенному сечению (на площадке  $\Delta A$ ):

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

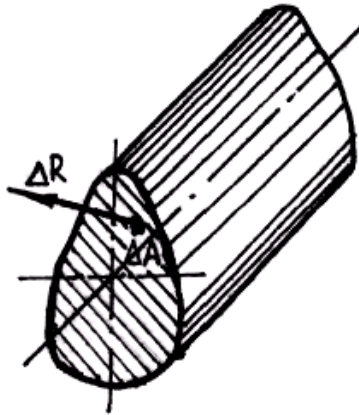


Рис. 16.5. Элементарная сила в точке сечения



**Истинное напряжение** в данной точке рассматриваемого сечения

$$\rho = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Отношение будет величиной конечной.

Напряжение в данной точке по рассматриваемому сечению есть величина векторная (вектор  $\Delta R$  делим на скаляр  $\Delta A$ ); направление этого вектора совпадает с предельным направлением вектора  $\Delta R$ .

Единица измерения напряжения – паскаль (Па).

**Паскаль** – это напряжение, при котором на площадке в  $1 \text{ м}^2$  возникает внутренняя сила, равная  $1 \text{ Н}$ ; но эта единица очень мала, поэтому используется кратная ей единица – мегапаскаль,  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ .

Разложим вектор напряжения  $p$  на две составляющие: одну – направленную по нормали к сечению (нормальное напряжение  $\sigma$ ), вторую – лежащую в плоскости сечения (касательное напряжение  $\tau$ ) (рис. 16.6). Между напряжениями  $p$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  существует следующая очевидная зависимость:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

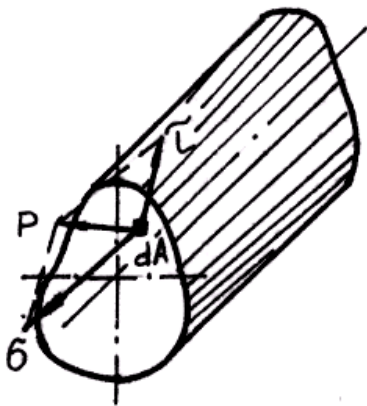


Рис. 16.6. Полное  $p$ , нормальное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  напряжения в точке

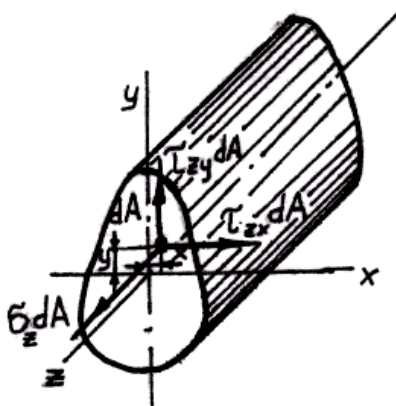


Рис. 16.7. Внутренние напряжения

В ряде случаев оказывается удобным разложить вектор  $p$  не на две, а на три составляющие, направленные параллельно координатным осям (рис. 16.7):

$$\rho = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}.$$

Правило индексов: первый индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия рассматриваемого напряжения, второй индекс показывает, какой оси параллельно данное напряжение.

Установим связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами в поперечном сечении бруса. Элементарные внутренние силы:

$$dN_z = \sigma dA;$$

$$dQ_x = \tau_{zx} dA;$$

$$dQ_y = \tau_{zy} dA.$$

Выражения составляющих главного вектора внутренних сил:

$$N_z = \int_A \sigma_z dA; \quad (16.1)$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad (16.2)$$

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA. \quad (16.3)$$

Умножая каждую из элементарных сил на расстояние до соответствующей оси, получаем элементарные моменты внутренних сил:

$$dM_z = (\tau_{zx} dA) y - (\tau_{zy} dA) x;$$

$$dM_x = (\sigma_z dA) y;$$

$$dM_y = (\sigma_z dA) x.$$

Суммируя элементарные моменты по всей площади сечения, получаем выражения для составляющих главного момента внутренних сил:

$$M_z = \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{zy}x) dA; \quad (16.4)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad (16.5)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA. \quad (16.6)$$

Выражения (16.1)–(16.6) не служат для вычисления внутренних силовых факторов. Они выражают их физическую сущность.

## **ГЛАВА 17. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОБЪЕМА МАТЕРИАЛА**

### **17.1. Напряженное состояние в точке.**

#### **Закон парности касательных напряжений.**

#### **Главные площадки и главные напряжения.**

#### **Классификация напряженных состояний**

Напряженное состояние в данной точке тела характеризуется совокупностью нормальных и касательных напряжений, возникающих на бесчисленном множестве различно ориентированных в пространстве площадок, которые можно провести через эту точку.

Предположим, что в окрестности исследуемой точки выделен бесконечно малый элемент, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и напряжения, возникающие на его гранях, известны.

Девять величин называют компонентами (рис. 17.1) напряженного состояния в данной точке.

Из условия равновесия выделенного элемента следует, что составляющие касательных напряжений, возникающих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру этих площадок, равны по абсолютному значению, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy};$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

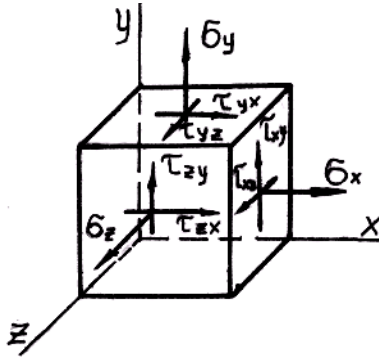


Рис. 17.1. Напряжения на гранях элементарного куба

Это положение называют **законом парности касательных напряжений**. Следовательно, из девяти компонентов напряженного состояния независимы лишь шесть.

Первое положение теории напряженного состояния может быть сформулировано следующим образом: *напряженное состояние* в точке тела задано, если известны напряжения на любых трех проходящих через нее взаимно перпендикулярных площадках.

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через исследуемую точку, имеются три взаимно перпендикулярные площадки, касательные напряжения на которых отсутствуют. Эти площадки и возникающие на них нормальные напряжения называют **главными**.

Классификацию видов напряженного состояния ведут по главным напряжениям. Если все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние называют **объемным, пространственным** или **трехосным**. В случае если одно из главных напряжений равно нулю, напряженное состояние называют **плоским**, или **двухосным**, наконец, если лишь одно из главных напряжений отлично от нуля, напряженное состояние **линейное**, или **одноосное**.

$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$  – объемное состояние;

$\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$  – плоское;

$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$  – линейное.

Элементы, выделенные главными площадками, для различных частных случаев напряженного состояния показаны на рис. 17.2: *а* – трехосное растяжение; *б* – трехосное сжатие; *в* – трехосное смешанное напряженное состояние; *г* – двухосное растяжение; *д* – двухосное сжатие; *е* – частный случай двухосного смешанного напряженного состояния – чистый сдвиг; *ж* – одноосное растяжение; *з* – одноосное сжатие. Площадки, свободные от напряжений, так называемые *нулевые главные площадки*, покрыты точками.

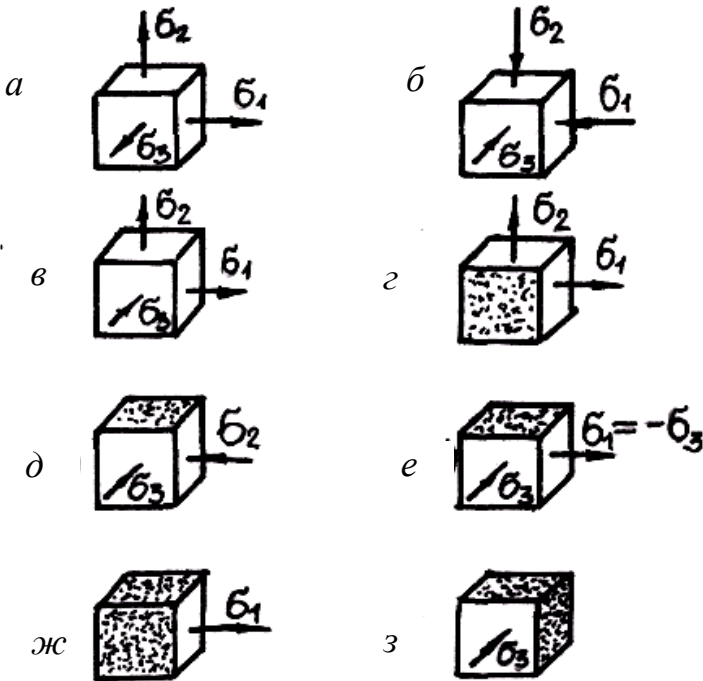


Рис. 17.2. Различные случаи напряженного состояния

## 17.2. Однородное растяжение бруса как пример реализации одноосного напряженного состояния материала

При растяжении (сжатии) прямого бруса в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила, обозначаемая  $N_z$  или  $N$  (рис. 17.3, 17.4).

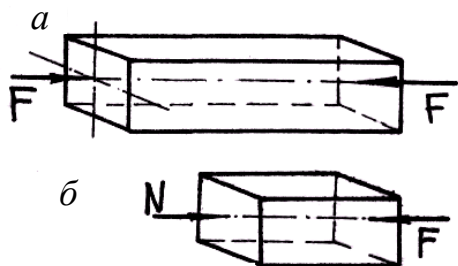


Рис. 17.3. Однородное сжатие бруса

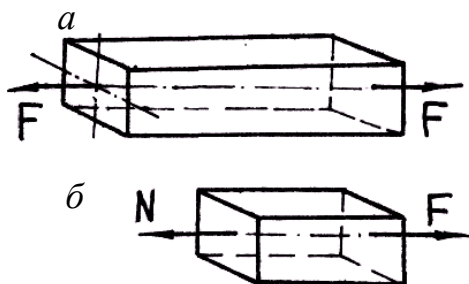


Рис. 17.4. Однородное растяжение бруса

Прямые брусья, работающие на растяжение или сжатие, часто называют **стержнями**.

Продольные силы, соответствующие деформации растяжения, условимся считать положительными, а сжатия – отрицательными. При растяжении продольная сила направлена от сечения (рис. 17.4, б), а при сжатии – к сечению (рис. 17.3, а).

Модуль и направление (знак) продольной силы определяются из уравнения равновесия, составленного для **отсеченной** (оставленной после проведения сечения) **части** бруса:

$$\sum_{\substack{\text{ост.} \\ \text{части}}} Z = 0; \quad N + \sum_{\substack{\text{ост.} \\ \text{части}}} F_{iz} = 0,$$

откуда

$$N = - \sum_{\substack{\text{ост.} \\ \text{части}}} F_{iz}.$$

**Продольной силой** в поперечном сечении бруса называется равнодействующая внутренних нормальных сил, возникающих в этом сечении:

$$N = \sigma \cdot A$$

В тех случаях когда продольные силы в различных поперечных сечениях бруса неодинаковы, закон их изменения по длине бруса удобно представить в виде графика, называемого **эпюрой продольных сил**.

Эпюра продольных сил – это график функции  $N = f(z)$ .

Эпюру продольных сил строят в первую очередь для того, чтобы использовать ее при расчете бруса на прочность.

**Напряжения.** При растяжении (сжатии) бруса в его поперечных сечениях возникают только **нормальные напряжения** (рис. 17.5):

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

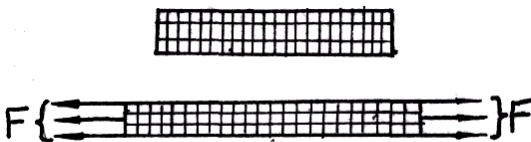


Рис. 17.5. Нормальные напряжения

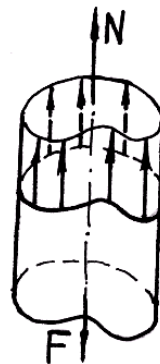


Рис. 17.6. Местные напряжения

При растяжении напряжения считают положительными. В местах резкого изменения формы и размеров поперечного сечения бруса также возникают *местные напряжения* (рис. 17.6). Это явление называют *концентрацией напряжений*.

В тех случаях когда нормальные напряжения в различных поперечных сечениях бруса неодинаковы, целесообразно показывать закон их изменения по длине бруса в виде графика – *эпюры нормальных напряжений*.

### 17.3. Продольная и поперечная деформации. Закон Гука. Модуль упругости. Коэффициент Пуассона

Вопрос об определении нормальных напряжений теснейшим образом связан с расчетами бруса на прочность. Умение вычислять деформации и перемещения необходимо для расчетов на *жесткость*, а также для определения сил в статически неопределимых системах.

Выделим из бруса, изображенного на рис. 17.7, бесконечно малый элемент длиной  $dz$ .

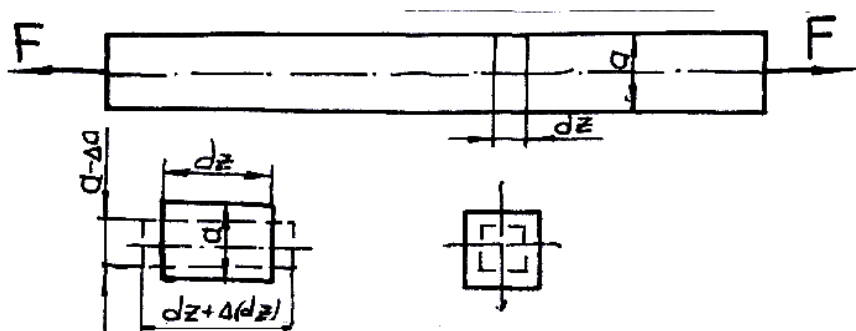


Рис. 17.7. К определению продольных и поперечных деформаций бруса при его растяжении

Отношение приращения (изменения) длины элемента к его первоначальной длине называется *относительным удлинением* или *продольной деформацией*:



$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}.$$

Очевидно, продольная деформация – безразмерная величина. В некоторых случаях ее выражают в процентах. При растяжении продольную деформацию считают положительной, а при сжатии – отрицательной.

Отношение изменения  $\Delta a$  размера поперечного сечения к его первоначальному значению называют **относительным поперечным сужением (расширением)**, или **поперечной деформацией**:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}.$$

Продольную и поперечную деформации называют также **линейными деформациями**.

В известных пределах нагружения между  $\varepsilon$  (деформацией) и соответствующим (действующим в ее направлении)  $\sigma$  напряжением существует прямо пропорциональная (линейная) зависимость, которая носит название **закона Гука** и записывается в виде

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называют **модулем продольной упругости** (модуль упругости 1-го рода; **модуль Юнга**).  $E$  имеет ту же размерность, что и напряжение, т. е. выражается в паскалях или мегапаскалях.

**Модуль продольной упругости** – физическая постоянная данного материала, характеризующая его жесткость: чем жестче материал, тем меньше он деформируется при данном напряжении.

Опытным путем установлено, что при простом растяжении или сжатии отношение поперечной деформации к продольной – величина постоянная для данного материала. Это отношение, взятое по абсолютному значению, называется **коэффициентом поперечной деформации**, или **коэффициентом Пуассона**:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Значения коэффициента Пуассона для различных материалов находятся в пределах от 0 до 0,5.

Минимальное значение коэффициент Пуассона имеет для пробки ( $\mu = 0$ ); максимальное – для каучука ( $\mu \approx 0,5$ ). Для большинства металлов и сплавов значение коэффициента Пуассона колеблется в сравнительно узких пределах: от 0,23 до 0,35 (в среднем примерно 0,3).

**Определение изменения длины (удлинения или укорочения) бруса.** Удлинение или укорочение равно

$$\Delta l = \frac{Nl}{E \cdot A}. \quad (17.1)$$

Выражение (17.1) часто *называют формулой Гука*, а произведение  $E \cdot A$  условно называют *жесткостью сечения бруса* при растяжении (сжатии). Жесткость бруса (участка бруса) определяется по формуле

$$c = \frac{E \cdot A}{l}$$

и численно равна силе, вызывающей удлинение (или укорочение) бруса, равное единице длины: 1 м или 1 см и т. п.

При расчетах в единицах СИ коэффициент жесткости выражают в ньютонах на метр (Н/м).

Величину, обратную коэффициенту жесткости, называют *коэффициентом податливости*:

$$\beta = \frac{1}{c} = \frac{1}{E \cdot A}.$$

Коэффициент податливости численно равен удлинению (укорочению) бруса, вызванному силой, равной единице силы: 1 Н или 1 кН:

$$\Delta l = \frac{N}{c}$$

или

$$\Delta l = \beta N.$$

#### 17.4. Частный случай плоского напряженного состояния – чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге

Рассмотрим частный случай плоского напряженного состояния, для которого отличные от нуля главные напряжения равны по модулю и противоположны по знаку (рис. 17.8).

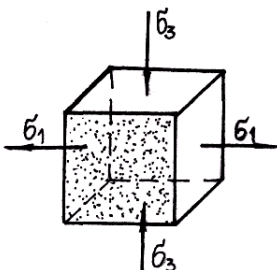


Рис. 17.8. Частный случай плоского напряженного состояния

Такое напряженное состояние носит название *чистого сдвига*. Максимальное главное напряжение следует обозначить  $\sigma_1$ , минимальное  $\sigma_3$ ; по условию  $\sigma_1 = -\sigma_3$ ; промежуточное главное напряжение  $\sigma_2 = 0$ .

*Чистым сдвигом* называют такое плоское напряженное состояние, при котором в окрестности данной точки можно выделить элемент таким образом, чтобы на четырех его гранях были только равные между собой касательные напряжения.

В качестве примера, иллюстрирующего возникновение чистого сдвига, рассмотрим кручение тонкостенной трубы (рис. 17.9, а). Из условия равновесия отсеченной части трубы, изображенной отдельно на рис. 17.9, б, следует, что в поперечном сечении (любом) возникает лишь один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_z$ , численно равный внешнему моменту  $M$ . В поперечном сечении трубы возникают касательные напряжения  $\tau$ .

**Деформация сдвига.** Изобразим элемент, выделенный площадками, на которых возникают только касательные напряжения (рис. 17.10). Учитывая, что нас интересуют деформации элемента, а не его перемещения как твердого тела, одну из граней будем считать неподвижной. Мерой деформации сдвига служит изменение перво-

начального прямого угла между гранями элемента, называемое **углом сдвига** и обозначаемое  $\gamma$ . Угол сдвига, выражается в радианах.

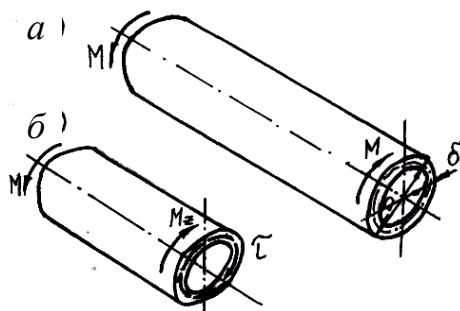


Рис. 17.9. Кручение тонкостенной трубы

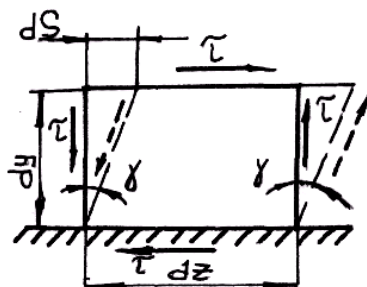


Рис. 17.10. Деформация элемента при сдвиге

Между углом сдвига и соответствующим касательным напряжением существует прямая пропорциональность – **закон Гука при сдвиге**:

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

Здесь  $G$  – упругая постоянная материала, характеризующая его **жесткость** при деформации сдвига и называемая **модулем сдвига** или **модулем упругости 2-го рода**:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Размерность модуля сдвига та же, что и напряжения.

## ГЛАВА 18. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

### 18.1. Экспериментальные исследования механических свойств при проведении стандартных испытаний на растяжение

Основные механические характеристики.

1. **Прочность** – способность материала не разрушаясь воспринимать внешние механические воздействия.
2. **Пластичность** – способность материала не разрушаясь давать значительные остаточные деформации.
3. **Упругость** – способность материала после снятия нагрузок восстанавливать свои первоначальные формы и размеры.
4. **Твердость** – способность материала сопротивляться проникновению в него другого тела, практически не получающего остаточных деформаций.

По характеру нагружения различают испытания статические, динамические и испытания на усталость (при переменных напряжениях).

По виду деформации различают испытания на растяжение, сжатие, срез, кручение, изгиб. Реже проводят испытания при сложном нагружении, например на совместное действие изгиба и кручения.

Механические испытания проводят на образцах, формы и размеры которых установлены государственными стандартами или техническими условиями (рис. 18.1).

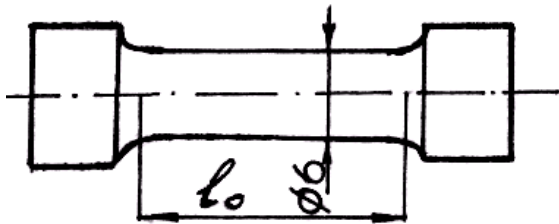


Рис. 18.1. Образец для проведения испытаний

**Статические испытания на растяжение.** Наиболее распространенным является испытание на растяжение статической нагрузкой.

Испытания проводят на разрывных или универсальных машинах с механическим или гидравлическим силообразованием.

Машина снабжена диаграммным аппаратом, который в процессе испытания вычерчивает график зависимости между силой  $F$ , растягивающей образец, и соответствующим удлинением  $\Delta l$  (рис. 18.2).

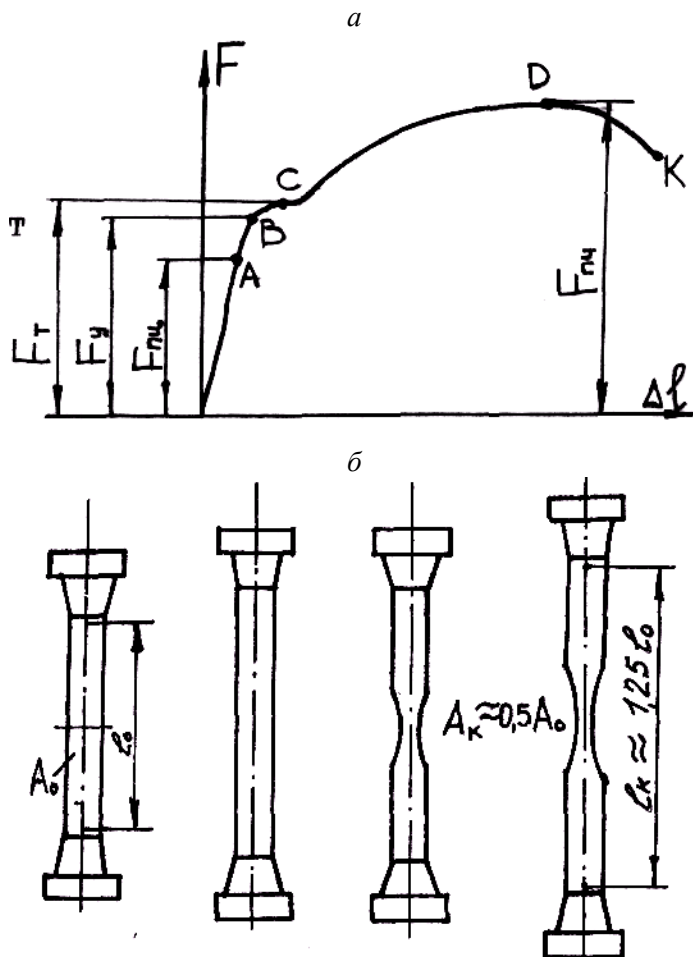


Рис. 18.2. График зависимости  $F(\Delta l)$  (а) при растягивании образца (б)

Для получения механических характеристик материала (т. е. для того, чтобы исключить влияние абсолютных размеров образца) эту диаграмму перестраивают: все ординаты делят на начальную пло-

щадь поперечного сечения  $A_0$ , а все абсциссы – на начальную расчетную длину  $l_0$ . В результате получают так называемую **условную диаграмму растяжения** (рис. 18.3).

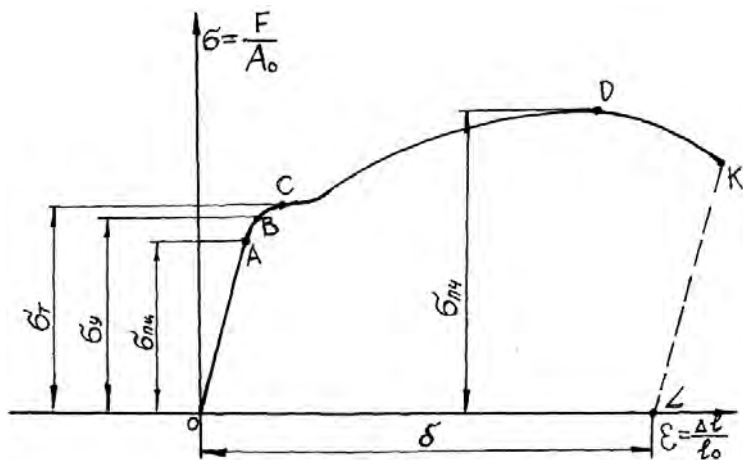


Рис. 18.3. Диаграмма растяжения образца

На рис. 18.3

$\sigma_{пч} = \frac{F_{пч}}{A_0}$  – **предел пропорциональности** – наибольшее напряжение, до достижения которого справедлив закон Гука;

жесткое деформации; до достижения которого в образце не возникают остаточные деформации;

$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}$  – **предел упругости** – наибольшее напряжение, до достижения которого в образце не возникает остаточных деформаций;

исходит рост пластических деформаций образца при практически постоянной нагрузке;

$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}$  – **предел текучести** – напряжение, при котором происходит рост пластических деформаций образца при практически постоянной нагрузке;

исходит рост пластических деформаций образца при практически постоянной нагрузке;

$\sigma_{пч} = \frac{F_{пч}}{A_0}$  – **предел прочности** (или **временное сопротивление**) – условное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой образцом до разрушения.

исходит рост пластических деформаций образца при практически постоянной нагрузке;

## 18.2. Условие прочности, коэффициент запаса прочности, допускаемые напряжения

Конструкционные материалы можно разделить на три основные группы: *пластичные, хрупкопластичные, хрупкие*.

Механические испытания материалов позволяют определить те напряжения, при которых образец из данного материала разрушается или в нем возникают заметные пластические деформации. Эти напряжения называют *предельными* (или *опасными*).

Отношение предельного напряжения  $\sigma_{\text{пред}}$  к наибольшему расчетному напряжению  $\sigma$ , возникающему в элементе конструкции при эксплуатационной нагрузке, обозначают буквой  $n$  и называют *коэффициентом запаса прочности* (или, как иногда говорят, *коэффициент запаса*):

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma}. \quad (18.1)$$

Значение  $n$  должно быть больше единицы ( $n > 1$ ), иначе прочность конструкции будет нарушена. Устанавливают значение минимально необходимого коэффициента запаса прочности. Этот коэффициент обозначают  $[n]$  и называют *требуемым* (или *нормативным*) *коэффициентом запаса прочности*.

Прочность элемента конструкции считают обеспеченной, если его расчетный коэффициент запаса прочности не ниже требуемого, т. е.

$$n \geq n.$$

Это неравенство называют *условием прочности*.

Используя выражение (18.1), перепишем условие прочности в виде

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma} \geq n. \quad (18.2)$$

Отсюда можно получить и такую форму записи условия прочности:

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}. \quad (18.3)$$



Правую часть последнего неравенства называют *допускаемым напряжением* и обозначают

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}.$$

В случае, если предельные, а следовательно, и допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, их обозначают соответственно  $[\sigma_p]$  и  $\sigma_c$ .

Пользуясь понятием «допускаемое напряжение», можно сказать, что прочность конструкции обеспечена, если возникающее в ней наибольшее напряжение не превышает допускаемого, т. е.

$$\sigma \leq \sigma.$$

Это неравенство, так же как и неравенства (18.2) и (18.3), называют *условием прочности*.

Будут встречаться три упоминавшиеся уже категории напряжений.

1. **Предельные** (или **опасные**) напряжения, при достижении которых появляются признаки непосредственного разрушения или возникают пластические деформации.

Эти напряжения зависят от свойств материалов и вида деформации, например, для серого чугуна предельное напряжение (предел текучести) при сжатии  $\sigma_{\text{пч.с}}$  примерно в четыре раза выше предельного напряжения при растяжении  $\sigma_{\text{пч.р}}$ .

2. **Допускаемые напряжения** – наибольшие напряжения, которые можно допустить в рассчитываемой конструкции из условий ее безопасной, надежной и долговечной работы.

Эти напряжения зависят от свойств материала, вида деформации и требуемого (принятого или заданного) коэффициента запаса прочности.

3. **Расчетные напряжения** – напряжения, которые возникают в элементе конструкции под действием приложенных к нему нагрузок.

Эти напряжения зависят от нагрузок, действующих на элемент конструкции, и его размеров.

## ГЛАВА 19. РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, МОДЕЛИРУЕМЫХ В ФОРМЕ СТЕРЖНЯ

### 19.1. Расчеты на прочность стержней при растяжении–сжатии

Условие прочности при растяжении–сжатии записывается в виде

$$\sigma \leq \sigma \quad \text{или} \quad n = \frac{\sigma_{\text{пред.}}}{\sigma} \geq n .$$

Под  $\sigma$  следует понимать **наибольшее расчетное напряжение**.

Незначительное превышение наибольших расчетных напряжений над допускаемыми, конечно, не опасно, так как допускаемое напряжение составляет лишь некоторую часть от предельного, обычно до 3 %.

В зависимости от цели расчета (постановки задачи) различают три вида расчетов на прочность:

- 1) проверочный;
- 2) проектный;
- 3) определение допускаемой нагрузки.

1. **При проверочном расчете** нагрузка бруса, его материал (а следовательно, допускаемое  $\sigma$  или предельное напряжение  $\sigma_{\text{пред.}}$ ) и размеры известны. Определению подлежит наибольшее расчетное напряжение, которое сравнивают с допускаемым. С проверочными расчетами встречаются при экспертизе выполненных проектов.

Расчетная формула (условие прочности при растяжении или сжатии) имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma ,$$

где  $\sigma$  – напряжение, возникающее в опасном поперечном сечении бруса (опасным называют сечение, для которого коэффициент запаса прочности имеет наименьшее значение);

$N$  – продольная сила в указанном сечении;

$A$  – площадь опасного поперечного сечения;

$\sigma$  – допускаемое напряжение ( $[\sigma_p]$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии).

В ряде случаев при проверочном расчете удобнее сопоставлять не расчетное напряжение с допускаемым, а сравнивать расчетный коэффициент запаса прочности для опасного сечения с требуемым, т. е. проверять, соблюдается ли неравенство

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma} \geq n .$$

2. **При проектном расчете** нагрузки и материал (допускаемые напряжения) известны, и в этом случае определяют требуемую площадь сечения бруса  $A$ .

3. В некоторых случаях проверочный расчет удобнее вести в форме **определения допускаемой нагрузки**. Это целесообразно, когда возникает необходимость в повышении нагрузок существующего оборудования и, следовательно, надо знать их предельно допускаемое по условию прочности значение.

При этом расчете размеры бруса и его материал (допускаемое напряжение) известны, определению подлежит нагрузка, которую можно допустить по условию его прочности. Определяют допускаемое значение продольной силы  $[N]$ . По этому значению с помощью метода сечений определяют допускаемое значение внешних сил – нагрузок.

## 19.2. Особенности расчета статически неопределимых стержневых систем

Если внутренние силы определялись только на основе условий равновесия отсеченной части системы (или отдельного бруса), системы называют **статически определимыми**.

Системы, в которых внутренние силовые факторы (ВСФ), в частности продольные силы, не могут быть определены с помощью только метода сечений, называют **статически неопределимыми системами**. Соответственно задачи, связанные с расчетом указанных систем, также принято называть **статически неопределимыми**.

Брус, изображенный на рис. 19.1, жестко заделан обоими концами; в заделках возникают реакции, направленные вдоль оси бруса.

Таким образом на брус действует система сил, направленных по одной прямой; статика в этом случае дает **одно уравнение равновесия**:

$$\sum X = 0,$$

неизвестных же сил – две.

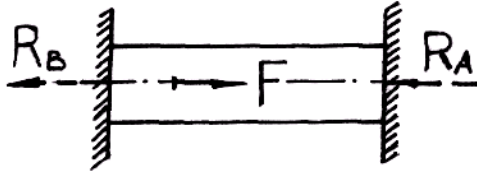


Рис. 19.1. Статически неопределимая система

Для решения статически неопределимой задачи помимо уравнений статики надо составить так называемые **уравнения перемещений**, основанные на рассмотрении деформации системы (это геометрическая сторона задачи) и применении закона Гука.

Пусть невесомая, весьма жесткая балка, нагруженная силой  $F$ , подвешена на стержнях (рис. 19.2). Стержни изготовлены из одинакового материала и имеют одинаковые сечения. Система один раз статически неопределима: для плоской системы параллельных сил статика дает два независимых уравнения равновесия, а неизвестных сил – три. Обозначим реакции, так же, как и силы, действующие на стержни, через  $N_1, N_2, N_3$ .

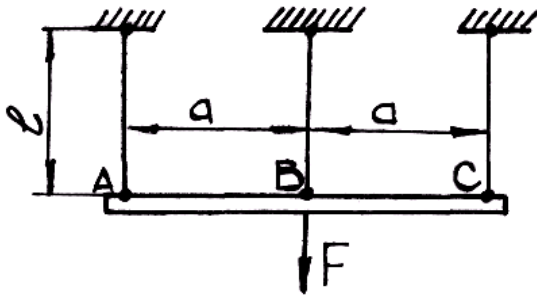


Рис. 19.2. Статически неопределимая задача

Составляем уравнения равновесия приложенных к балке сил (рис. 19.3):

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; \quad N_1 + N_2 + N_3 - F = 0; \\ \sum M_B = 0; \quad N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0. \end{aligned} \quad (19.1)$$

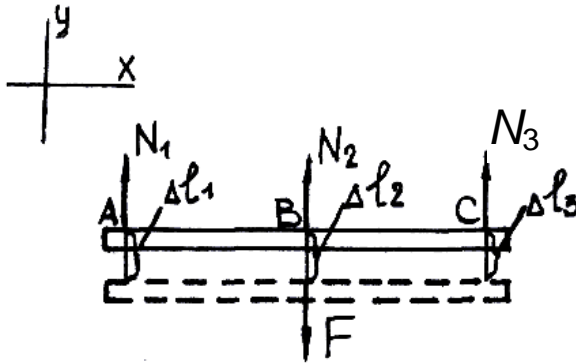


Рис. 19.3. Схема деформации системы

В результате деформации стержней балка займет положение, показанное на рис. 19.3 штриховыми линиями. Действительно, предположение о высокой жесткости балки позволяет пренебречь ее изгибом, а симметрия самой системы и нагрузки приводит к заключению, что все стержни удлиняются одинаково. Таким образом, геометрическая сторона задачи может быть выражена уравнением

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3.$$

Выражая удлинения стержней по формуле Гука, получим

$$\frac{N_1 l}{E \cdot A} = \frac{N_2 l}{E \cdot A} = \frac{N_3 l}{E \cdot A},$$

откуда

$$N_1 = N_2 = N_3. \quad (19.2)$$

Решая совместно уравнения (19.1) и (19.2), находим силы в стержнях:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{F}{3}.$$

### 19.3. Напряженно-деформированное состояние при прямом поперечном изгибе

*Изгиб* – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. В большинстве случаев одновременно с изгибающими моментами возникают и поперечные силы; такой изгиб называют *поперечным*; если поперечные силы не возникают, изгиб называют *чистым*.

Плоскость, проходящую через продольную ось бруса ( $OZ$ ) и одну из главных центральных осей его поперечного сечения ( $OY$ ), называют **главной плоскостью бруса** (рис. 19.4).

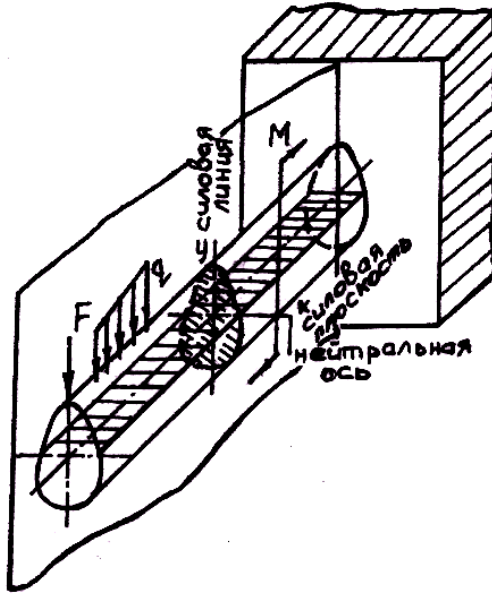


Рис. 19.4. Схема нагружения бруса при прямом поперечном изгибе

В случае если **силовая плоскость**, т. е. плоскость действия нагрузок, совпадает с одной из главных плоскостей (см. рис. 19.4), имеет место *прямой изгиб бруса*. В общем случае прямого изгиба в поперечных сечениях бруса возникают два внутренних силовых фактора: *поперечная сила*  $Q_y$  и *изгибающий момент*  $M_x$  (рис. 19.5).

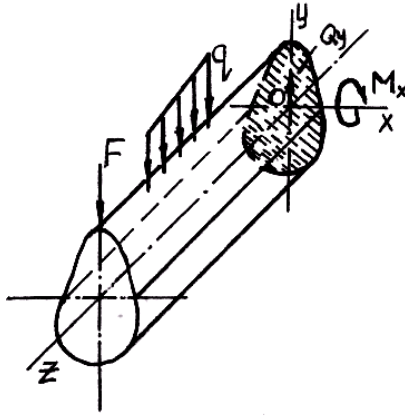


Рис. 19.5. Силовые факторы при изгибе

Границей между областями растяжения и сжатия является слой волокон, который лишь искривляется, не испытывая при этом ни растяжения, ни сжатия. Это так называемый *нейтральный слой*. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения бруса называется *нейтральной осью* или *нулевой линией* (см. рис. 19.4).

Брусья, работающие на прямой изгиб, принято называть *балками*. Схемы основных типов статически определимых балок показаны на рис. 19.6: *а* – простая консоль; *б* – двухопорная балка без консолей; *в* – двухопорная балка с одной консолью; *г* – двухопорная балка с двумя консолями. Расстояние между опорами балки называют *пролетом*, а длину балки, защемленной одним концом (рис. 19.9, *а*), иногда называют *вылетом*. *Консолью* называют часть балки, расположенную по одну сторону от опор (рис. 19.9, *в*, *г*).

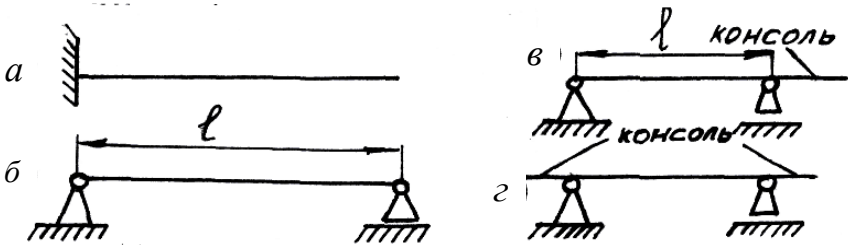


Рис. 19.6. Обозначение балочных конструкций

Учитывая, что при прямом поперечном изгибе все внешние силы расположены в одной плоскости, при определении ВСФ нет необходимости прибегать к аксонометрическим изображениям.

Брус (балку) изображают одной линией, к которой приложены заданные нагрузки. Эта линия представляет собой продольную ось бруса.

Рассмотрим двухопорную балку (рис. 9.7). Считаем, что опорные реакции известны.

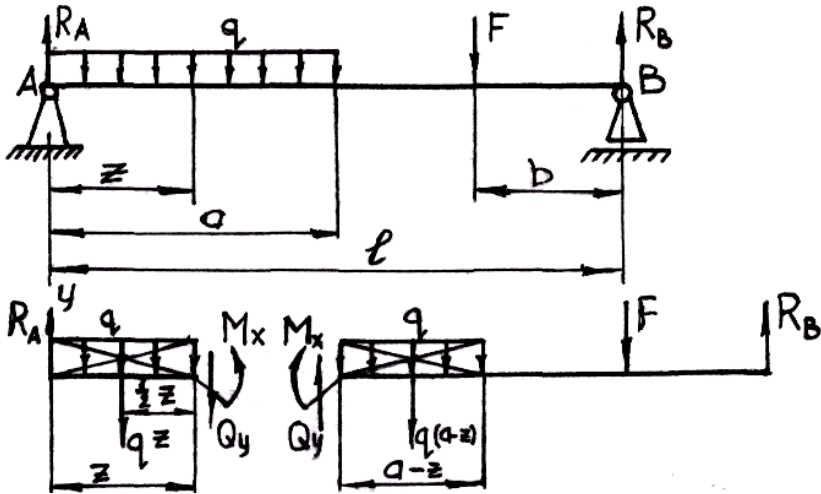


Рис. 19.7. К определению внутренних силовых факторов в сечении изгибаемой балки

Определяем реакции в опорах:

$$\sum Y = 0; R_A - qz - Q_y = 0,$$

откуда

$$Q_y = R_A - qz,$$

$$\sum M_k = 0; R_A z - qz \cdot \frac{z}{2} - M_x = 0,$$

откуда

$$M_x = R_A z - qz \cdot \frac{z}{2}.$$



Поперечная сила  $Q_y$  в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к его отсеченной части.

Изгибающий момент  $M_x$  в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к отсеченной части, относительно той точки продольной оси бруса, через которую проходит рассматриваемое сечение.

Для определенности при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов установим для них правила знаков.

При построении эпюр удобнее устанавливать знаки  $Q_y$  и  $M_x$  по внешним силам.

Внешняя сила, стремящаяся повернуть отсеченную часть балки по часовой стрелке вокруг той точки оси, которая соответствует проведенному сечению, вызывает положительную поперечную силу (рис. 19.8, а).

Внешняя сила (момент), изгибающая эту часть выпуклостью вниз, т. е. таким образом, что сжатые волокна находятся сверху, дает положительный изгибающий момент (рис. 19.8, б).

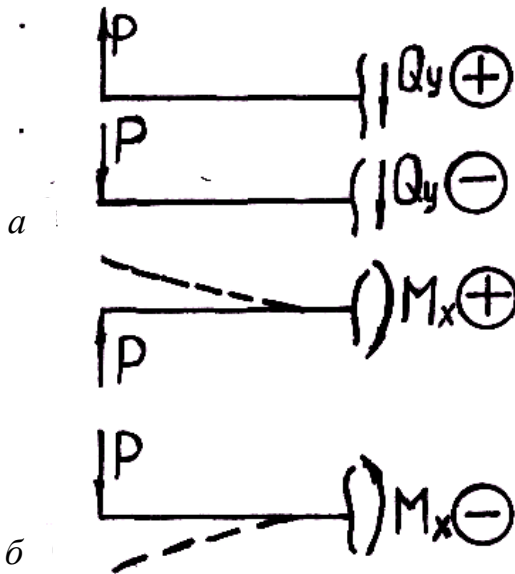


Рис. 19.8. Правило знаков для  $Q_y$  и  $M_x$

## 19.4. Условия прочности при прямом поперечном изгибе

Балки рассчитывают на прочность по наибольшим **нормальным** напряжениям, возникающим в их **поперечных** сечениях. При **поперечном изгибе** балок наряду с нормальными, как известно, возникают и касательные напряжения, но они в подавляющем большинстве случаев невелики и при расчетах на прочность не учитываются:

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA.$$

**Расчет балок из пластичных материалов.** Прочность балки из **пластичного** материала обеспечена, если наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения, возникающие в опасном поперечном сечении, не превышают допустимых. Для балки, поперечные размеры которой по всей длине постоянны (пока только такими балками и ограничимся), **опасное сечение** – то, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий момент.

Наибольшие нормальные напряжения возникают в точках опасного поперечного сечения, максимально удаленных от нейтральной оси. Будем называть эти точки **опасными**.  $Y_{\max}$  – расстояние от опасной точки до нейтральной оси. Тогда получим условие прочности в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{I_x} y_{\max} \leq \sigma, \quad (19.3)$$

где  $\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{x\max}$  – максимальный изгибающий момент;

$I_x$  – момент инерции относительно оси  $OX$  – осевой момент инерции;

$\sigma$  – допускаемое напряжение, принимаемое при статическом нагружении таким же, как и в случае растяжения (сжатия) бруса из того же материала.

В случае если поперечное сечение балки симметрично относительно нейтральной оси, формулу (19.3) оказывается возможным привести к более удобному виду. Для указанных сечений  $y_{\max} = h/2$ , где  $h$  – высота сечения (размер в направлении, перпендикулярном нейтральной оси), следовательно

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{I_x} \cdot \frac{h}{2}.$$

Разделим числитель и знаменатель этого выражения  $h/2$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{I_x / \frac{h}{2}}.$$

Введем обозначение

$$W_x = \frac{J_x}{h/2}$$

и получим окончательное условие прочности в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq \sigma ,$$

где  $W_x$  – осевой момент сопротивления, или момент сопротивления при изгибе.

**Момент сопротивления** – это геометрическая характеристика прочности бруса, работающего на прямой изгиб. Действительно, чем больше момент сопротивления, тем меньше напряжения, возникающие в поперечном сечении балки при данной нагрузке.

Формула представляет собой зависимость для проверочного расчета. Значения моментов сопротивления прокатных профилей (двутавров и швеллеров) приведены в таблицах соответствующих стандартов.

Моменты сопротивления круга, кольца и прямоугольника:

а) круг

$$W_x = \frac{I_x}{d/2} = \frac{\pi d^4 / 64}{d/2}$$

или

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3;$$

б) кольцо (рис. 19.9)

$$W_x = \frac{I_x}{d/2} = \frac{(\pi d^4 / 64)(1 - C^4)}{d/2}$$

или

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - C^4) \approx 0,1 d^3 (1 - C^4);$$

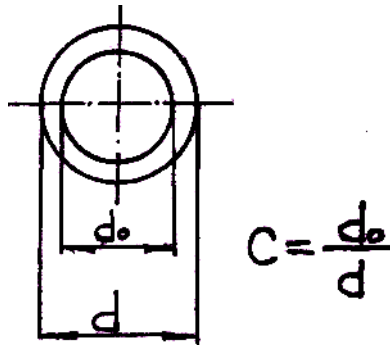


Рис. 11.9. К определению геометрических характеристик круглого сечения

в) прямоугольник

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{(bh^4) / 12}{h/2}$$

или

$$W_x = \frac{bh^2}{6},$$

где  $h$  – сторона прямоугольника, перпендикулярная оси, относительно которой вычисляется момент сопротивления.

Из приведенных примеров следует, что сечение надо располагать таким образом, чтобы силовая линия совпадала с той из главных осей, относительно которой момент инерции **минимален**, или, что то же самое, чтобы ось, относительно которой момент инерции **максимален**, была нейтральной осью сечения. Более кратко это можно сформулировать так: следует стремиться к тому, чтобы изгиб бруса происходил в плоскости его наибольшей жесткости.

### 19.5. Расчеты на жесткость при изгибе

В ряде случаев работающие на изгиб элементы машиностроительных и строительных конструкций должны быть рассчитаны не только на **прочность**, но и на **жесткость**. К деталям, рассчитываемым на жесткость, относятся, в частности, валы зубчатых и червячных передач и многие части металлорежущих станков.

Расчет на жесткость элемента конструкции, имеющего форму бруса, заключается в определении наибольших перемещений его поперечных сечений и сопоставлении их с допускаемыми, зависящими от назначения и условий эксплуатации данного элемента.

Рассмотрим простую консоль, нагруженную на свободном конце силой  $F$ , линия действия которой совпадает с одной из главных осей поперечного сечения балки (рис. 19.10).

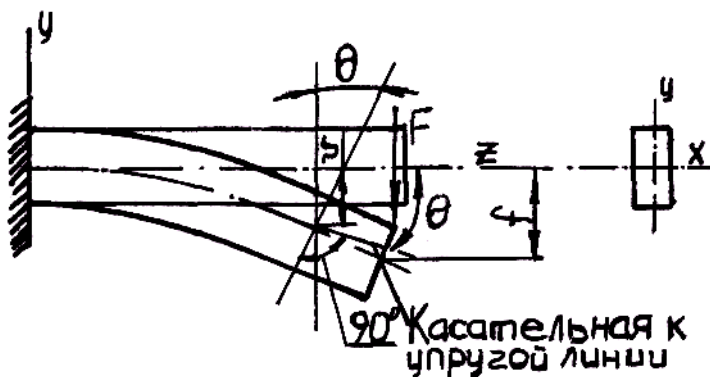


Рис. 19.10. Линейное и угловое перемещения сечения при изгибе

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей. Допущение о малости перемещений позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной оси недеформированного бруса. Эти перемещения принято называть *прогибами*. Прогиб произвольного сечения обозначим  $v$ , а наибольший прогиб – *стрелу прогиба* –  $f$ . Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений деформированного бруса, т. е. ось изогнутого бруса, условно называют *изогнутой осью*, или, чаще, *упругой линией*.

*Угол поворота*  $\theta$  поперечного сечения равен углу между касательной к упругой линии в данной точке и осью недеформированного бруса.

**Вывод:** ордината упругой линии и угол наклона касательной, проведенной к ней в данной точке, полностью определяют линейное и угловое перемещения соответствующего поперечного сечения балки.

В большинстве случаев условие жесткости выражается неравенством

$$f \leq f_{\text{доп}},$$

т. е. максимальный прогиб (стрела прогиба  $f$ ) не должен превышать допускаемого  $f_{\text{доп}}$ . Значение допускаемого прогиба зависит от назначения и условий работы рассчитываемой конструкции и колеблется в широких пределах. Обычно допускаемую стрелу прогиба указывают в долях пролета (межопорного расстояния  $l$ ) балки. Например, для ручных грузоподъемных кранов  $f_{\text{доп}} = l/400$ , для электрических  $f_{\text{доп}} = l/700$ , для валов и шпинделей металло-режущих станков  $f_{\text{доп}} = (0,0005-0,0010) l$ .

Для обеспечения нормальной работы подшипников скольжения и роликовых подшипников качения иногда ставится дополнительное условие жесткости – ограничение угла поворота опорных сечений:

$$\theta_{\text{оп. max}} \leq \theta_{\text{доп}}.$$

При этом допускаемый угол поворота составляет в среднем 0,001 радиан.

## 19.6. Кручение вала (стержня) круглого поперечного сечения

**Кручение** – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – **крутящий момент**, обозначаемый  $M_z$  или  $T_k$ .

На рис. 19.11 изображен брус, работающий на кручение под действием приложенных к нему скручивающих моментов ( $M_1, M_2, M_3, M_4$ ).

Во всех случаях будем считать, что алгебраическая сумма скручивающих моментов равна нулю, т. е. брус находится в равновесии.

Применяя метод сечений и рассматривая равновесие оставленной части (рис. 19.12), приходим к выводу, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении бруса, должны дать момент (**крутящий момент**), уравнивающий внешние моменты, приложенные к оставленной части.

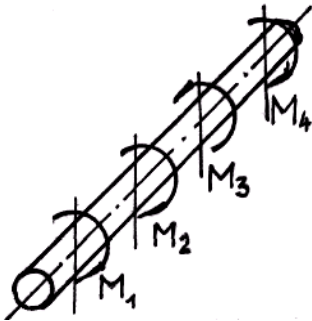


Рис. 19.11. Крутящие моменты вала

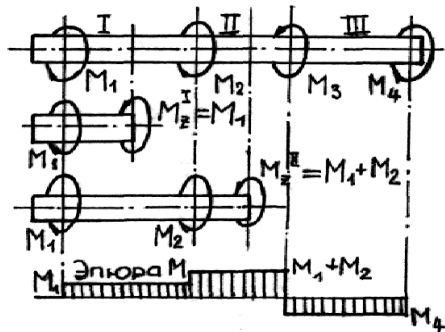


Рис. 19.12. Кручение вала

Итак, крутящий момент, возникающий в произвольном поперечном сечении бруса, численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к оставленной части.

При кручении бруса в его поперечных сечениях возникают только **касательные напряжения**.

Для расчета на прочность, так же как и при растяжении (сжатии) бруса, надо найти его **опасное сечение**. В случае, если размеры поперечного сечения по длине бруса постоянны, опасными будут сечения, в которых крутящий момент максимален. График, показы-

вающий закон изменения крутящих моментов по длине бруса, называется *эпюрой крутящих моментов* (см. рис. 19.12).

**Правило знаков:** будем считать крутящий момент положительным, если для наблюдателя, смотрящего на проведенное сечение, он представляется направленным по часовой стрелке (рис. 19.13). Соответствующий внешний момент направлен против часовой стрелки.

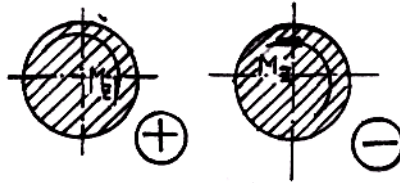


Рис. 19.13. Правило знаков для  $M_z$

### 19.7. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Прочность бруса, работающего на кручение, считают обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном сечении, не превышают допустимых:

$$\tau_{\max} \leq \tau_k .$$

Конечно, незначительное (до 5–6 %) превышение расчетного напряжения над допустимым не опасно.

Эпюры касательных напряжений для круглого сплошного и кольцевого поперечных сечений показаны на рис. 19.14.

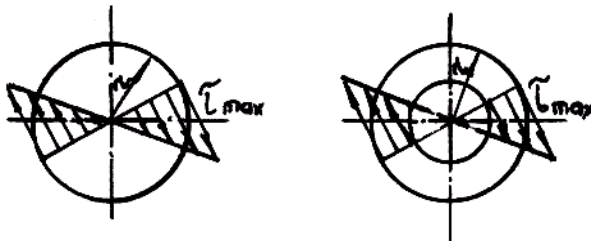


Рис. 19.14. Эпюры касательных напряжений поперечных сечений вала



В точках, равноудаленных от центра сечения, напряжения одинаковы.

Наибольшего значения касательные напряжения достигают в точках контура поперечного сечения:

$$\tau_{\max} = M_x \frac{r}{I_p},$$

где  $I_p$  – полярный момент инерции.

Введя обозначение  $W_p = \frac{I_p}{r}$ , получим следующее выражение для максимального касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}.$$

Величину  $W_p$ , мм<sup>3</sup>, равную отношению полярного момента инерции сечения к его радиусу, называют **полярным моментом сопротивления сечения**. Его размерность – L<sup>3</sup>. Очевидно, полярный момент сопротивления является геометрической характеристикой прочности бруса круглого поперечного сечения при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq \tau_k. \quad (19.4)$$

Эта формула служит для **проверочного расчета** на прочность.

При проектном расчете и при определении допускаемой нагрузки (момента) из формулы (19.4) соответственно находят  $W_p$

или  $M_z$ .

Для кольца

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}(1-C^4)}{d/2};$$

$$W_p = (\pi d^3/16)(1-C^4) \approx 0,2 d^3(1-C^4);$$

и для круга

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3.$$

Для конструкционной углеродистой стали обычно  $\tau_k = 20\text{--}35$  МПа.

Во многих случаях вал должен быть рассчитан не только на прочность, но и на жесткость при кручении.

Рассмотрим брус, жестко защемленный одним концом и нагруженный на свободном конце скручивающим моментом  $M$  (рис. 19.15). При деформации бруса его поперечные сечения повернутся на некоторые углы по отношению к своему первоначальному положению или, что то же самое, по отношению к неподвижному сечению (заделке). Угол поворота будет тем больше, чем дальше отстоит данное сечение от заделки. Так, для произвольного сечения I, отстоящего от заделки на расстоянии  $Z$ , он равен  $\varphi_z$ , для сечения II —  $\varphi_z + d\varphi$ . Здесь  $d\varphi$  — угол поворота сечения II относительно I или угол закручивания элемента бруса длиной  $\varphi_z$ .

Вообще, угол поворота вала при включении произвольного сечения равен углу закручивания части бруса, заключенной между этим сечением и заделкой. Таким образом, угол поворота  $\varphi$  торцового сечения представляет собой полный угол закручивания рассматриваемого бруса.

За меру жесткости при кручении принимают относительный угол закручивания (угол закручивания на единицу длины) вала, обозначаемый  $\varphi_0$  (встречается обозначение  $\theta$ ):

$$\varphi_0 = \theta = \frac{\varphi}{l}$$

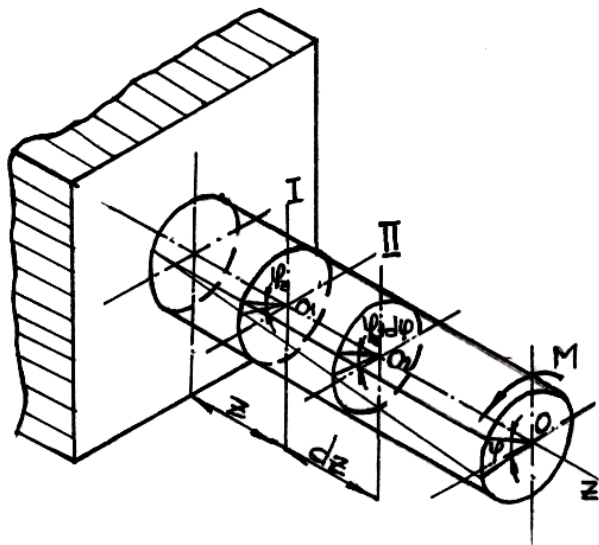


Рис. 19.15. Деформации вала при кручении

Угол закручивания бруса постоянного диаметра при одинаковом во всех поперечных сечениях крутящем моменте равен

$$\varphi = \frac{M_z l}{G I_p}$$

где  $l$  – длина рассматриваемого участка, мм.

В отличие от допускаемого напряжения, зависящего в первую очередь от материала вала, допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала.

Значения допускаемых углов закручивания, встречающихся в различных отраслях машиностроения, весьма разнообразны, наибо-

лее распространены значения  $[\theta] = (4,38-17,5) \cdot 10^3 \text{ рад/м} = 0,25-1,0 \text{ град/м}$ .

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{M_z}{GI_p} \leq \theta ,$$

где  $GI_p$  – условная жесткость сечения круглого бруса при кручении. Модуль сдвига  $G$  характеризует жесткость материала, а полярный момент инерции  $I_p$  является геометрической характеристикой жесткости бруса. Для стали  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

При проектном расчете отсюда определяют требуемое значение  $I_p$ :

$$I_p \geq \frac{M_z}{G \theta} ,$$

а затем вычисляют диаметр вала. Из двух значений диаметра вала, определенных из расчетов на прочность и жесткость, в качестве окончательного (исполнительного размера) должен быть, конечно, принят **больший**.

Для круга

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} ;$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_z}{\pi G \theta}} .$$

### **19.8. Условие прочности вала при совместном действии крутящего и изгибающего моментов**

При ориентировочном расчете валов влияние изгиба не учитывалось, но допускаемые напряжения на кручение принимались весьма невысокими, что должно было в известной мере компенсировать ошибку, являющуюся следствием пренебрежения изгибом.

Применение гипотез прочности позволяет рассчитывать валы, учитывая совместное действие изгиба и кручения.

При расчете валов, а также других элементов конструкций, испытывающих одновременное действие изгиба и кручения, влиянием поперечных сил, как правило, пренебрегают, так как соответствующие им касательные напряжения в опасных точках бруса, невелики по сравнению с касательными напряжениями от кручения и нормальными напряжениями от изгиба.

На рис. 19.16, *a* показан вал, на который насажены зубчатое колесо диаметром  $d_1$  и шкив ременной передачи диаметром  $d_2$ . На зубчатое колесо действуют окружная  $F_t$  и радиальная  $F_r$  силы, на шкив – силы  $F_1$  и  $F_2$  натяжения ветвей ремня. Для составления расчетной схемы вала (рис. 19.16, *б*) все силы должны быть приведены к его оси. При переносе силы  $F_t$  к оси вала добавляется скручивающая пара с моментом  $M_1 = F_t(d_1/2)$  (рис. 19.17, *a*); аналогично при приведении сил  $F_1$  и  $F_2$  получается скручивающая пара с моментом

$$M_2 = F_1(d_2/2) - F_2(d_2/2) = (F_1 - F_2)(d_2/2) \quad (\text{рис. 19.17, б}).$$

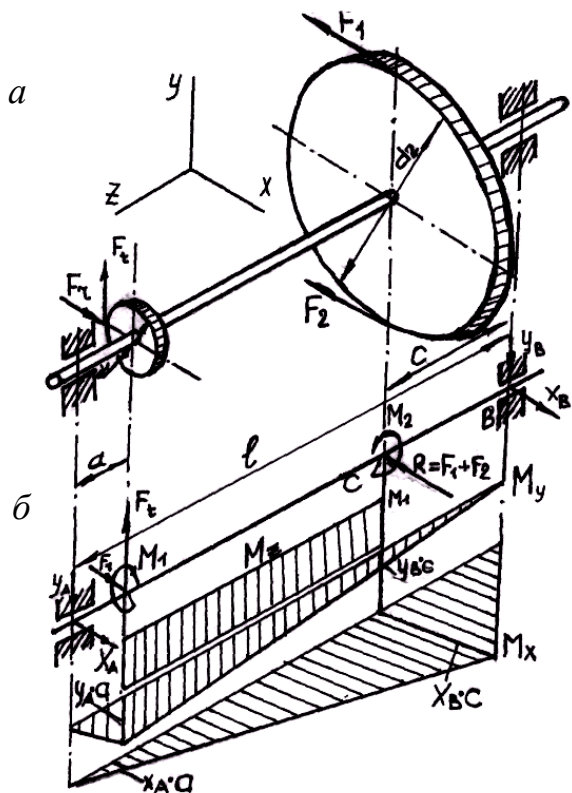


Рис. 19.16. Изгиб с кручением вала

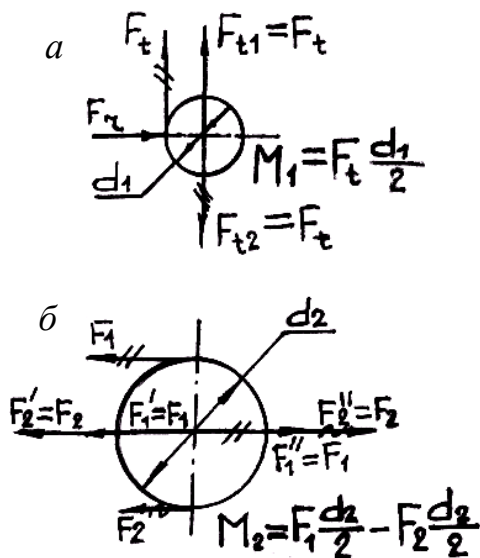


Рис. 19.17. Перенос сил к оси вала

При равномерном вращении вала (только такой случай и рассматривается)  $M_1 = M_2$ , что следует из основного уравнения динамики для вращательного движения.

На основе расчетной схемы определяют опорные реакции и строят эпюры  $M_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$ , по которым определяют опасное сечение вала.

$$M_n = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Для вала, диаметр которого по всей длине постоянен, опасным будет сечение, в котором одновременно возникают наибольшие крутящий  $M_2$  и изгибающий  $M_n$  моменты. В рассматриваемом случае опасным будет сечение  $C$  под серединой шкива.

Валы, как правило, изготавливают из среднеуглеродистой конструкционной или реже – легированной стали. Их расчет выполняют на основе третьей или пятой гипотез прочности.

Составим расчетную зависимость по третьей гипотезе прочности.

По формуле

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

подставляя в нее значения  $\sigma$  и  $\tau$ , получаем

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{M_{\text{и}}/W_{\text{и}}^2 + 4(M_z/W_p)^2}.$$

Учитывая, что для круглого (сплошного или кольцевого) сечения  $W_p = 2W_{\text{и}}$ , имеем

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{M_{\text{и}}/W_{\text{и}}^2 + (M_z/W_{\text{и}})^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_z^2}}{W_{\text{и}}}.$$

Внешне эта формула аналогична расчетной зависимости для определения максимальных нормальных напряжений при изгибе, поэтому величину, стоящую в числителе, называют **эквивалентным** (или **приведенным**) **моментом**, при этом условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{эKB}} = \frac{M_{\text{эKB}}}{W_{\text{и}}} \leq \sigma.$$

Расчет бруса круглого поперечного сечения на изгиб с кручением ведется аналогично расчету на изгиб, но вместо изгибающего момента в расчетную формулу входит так называемый **эквивалентный момент**, который зависит от изгибающих и крутящего моментов, а также от принятой гипотезы прочности. По гипотезе наибольших касательных напряжений,

$$M_{\text{эKB}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_z^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

При проектном расчете определяют требуемое значение момента сопротивления поперечного сечения:

$$W_{\text{и}} \geq M_{\text{эKB}} / \sigma.$$



Учитывая, что для сплошного круглого сечения  $W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3$ , получаем следующую формулу для определения требуемого диаметра вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{экв}}}{\pi \sigma}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0,1 \sigma}}$$

Понятие «эквивалентный момент» не имеет смысла при изгибе с кручением бруса некруглого поперечного сечения. Неприменимо оно и в случае, если помимо изгиба и кручения брус круглого сечения испытывает растяжение или сжатие.

Для бруса с постоянным диаметром опасная точка находится в сечении, для которого эквивалентный момент имеет наибольшее значение. Это сечение также называют **опасным**. Для отыскания опасного сечения иногда помимо эпюр  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  строят эпюру  $M_{\text{и}}$ , а затем эпюру  $M_{\text{экв}}$ . Практически в этом нет необходимости; в случае, если по эпюрам  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  положение опасного сечения определить нельзя, проще вычислить  $M_{\text{экв}}$  для нескольких сечений, чем строить эпюры  $M_{\text{и}}$  и  $M_{\text{экв}}$ .

## ГЛАВА 20. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

### 20.1. Понятие о критической силе для сжатого стержня. Формула Эйлера

Из физики известно, что равновесие тела устойчиво, если при малом отклонении от равновесного положения возникает сила или пара сил, возвращающая его в положение равновесия. Кроме устойчивого известны также неустойчивое и безразличное равновесия, но для механических конструкций допустимы лишь случаи устойчивого равновесия. Если по каким-либо причинам упругое тело или кон-

струкция при отклонении от равновесного положения не возвращается к исходному, то говорят, что произошла **потеря устойчивости**.

Явление потери устойчивости упругого тела рассмотрим на примере сжатого стержня. Представим, что на прямолинейный стальной стержень, зажатый одним концом в вертикальном положении (рис. 20.1, *а*) сверху надет шар. При небольшом значении силы тяжести  $G_1$ , сжимающей стержень, он сохраняет прямолинейную форму и находится в устойчивом равновесии.

Действительно, если отклонить шар вместе с верхней частью стержня в сторону, то под действием упругих сил стержень, колебавшись около положения равновесия, снова примет прямолинейную форму. Постепенно увеличивая сжимающую нагрузку путем установки более тяжелых шаров (рис. 20.1, *б*), увидим, что стержень хотя и сохраняет прямолинейную форму, но при отклонении от положения равновесия возвращается в исходное положение гораздо медленнее. Наконец, при некоторой нагрузке  $G_3$  (рис. 20.1, *в*) стержень изогнется, и прямолинейная форма устойчивого равновесия переходит в новую, криволинейную форму устойчивого равновесия.

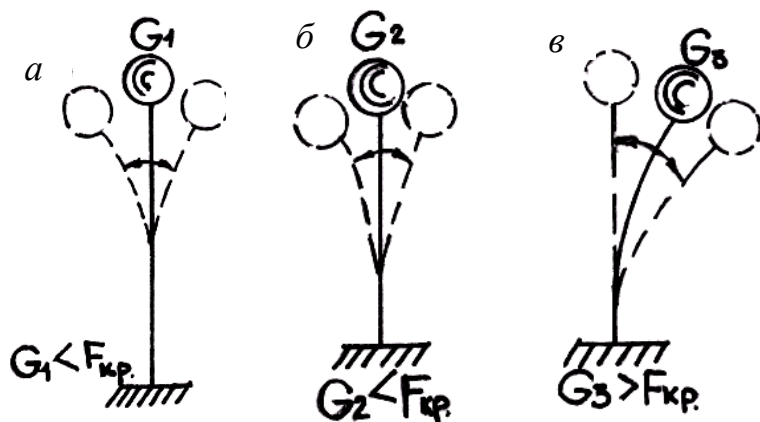


Рис. 20.1. Потеря устойчивости

Если теперь стержень принудительно выпрямить или, наоборот, изогнуть еще больше, он после нескольких колебаний займет исходное равновесное положение в изогнутом состоянии.

Максимальная сжимающая нагрузка  $F_{кр}$ , при которой прямолинейная форма стержня устойчива, называется **критической силой**.

Смысл расчета на устойчивость сжатого стержня заключается в том, чтобы он при некотором значении  $F$  осевой нагрузки сохранял устойчивость прямолинейной формы и обладал при этом некоторым запасом устойчивости (рис. 20.2):

$$S = \frac{F_{кр}}{F}.$$

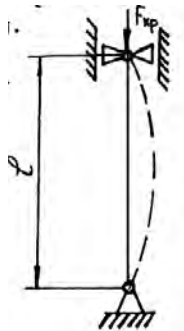


Рис. 20.2. К определению запаса устойчивости

Условие устойчивости сжатого стержня

$$S_y = \frac{F_{кр}}{F} \geq [S_y],$$

где  $[S_y]$  – коэффициент запаса устойчивости.

Допускаемая сжимающая сила

$$F = \frac{F_{кр}}{[S_y]}.$$

Задачу определения критической силы впервые чисто математически решил Л. Эйлер в 1744 г. Формула Эйлера имеет вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{\mu \cdot l^2}, \quad (20.1)$$

где  $I_{\min}$  – минимальное значение момента инерции площадки поперечного сечения стержня, так как потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости;

$l$  – длина стержня;

$\mu$  – коэффициент приведения длины, т. е. число, показывающее, во сколько раз следует увеличить длину шарнирно закрепленного с обоих концов стержня, чтобы критическая сила для него была равна критической силе стержня в данных условиях закрепления.

Экспериментальные исследования, связанные с проверкой формулы Эйлера, показывают, что при прочих равных условиях (одинаковые материал, форма и размеры поперечного сечения, а также длина стержня) значение критической силы зависит от способа закрепления его концов.

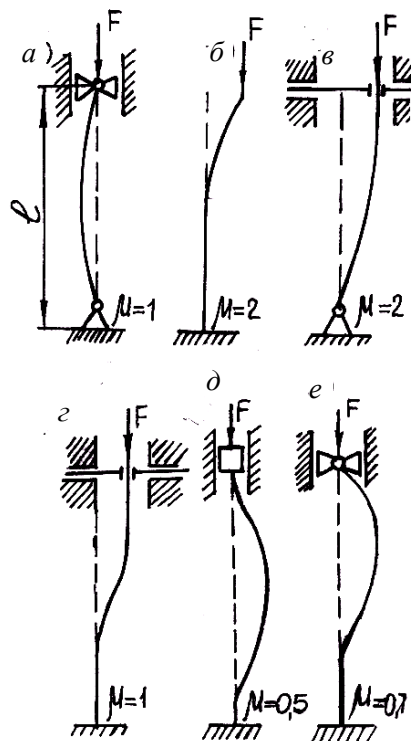


Рис. 20.3. Значения коэффициента приведения длины стержня при различных способах закрепления его концов

На рис. 20.3 изображены несколько случаев закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента приведения  $\mu$ :

- оба конца шарнирно закреплены (рис. 20.3, а);
- один конец жестко закреплен, другой – свободен (рис. 20.3, б);
- один конец закреплен шарнирно, второй имеет «плавающую» заделку (рис. 20.3, в);
- один конец заделан жестко, второй имеет «плавающую» заделку (рис. 20.3, г);
- оба конца заделаны жестко (рис. 20.3, д);
- один конец заделан жестко, другой закреплен шарнирно (рис. 20.3, е).

## 20.2. Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера

При осевом нагружении стержня в его поперечных сечениях возникают нормальные напряжения сжатия, которые возрастают по мере увеличения нагрузки. Нормальные напряжения, соответствующие критической силе, называются **критическими**:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A}.$$

После подстановки значения критической силы из формулы (20.1) получим

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\text{min}}}{(\mu l)^2 A}. \quad (20.2)$$

Линейную величину  $\sqrt{I_{\text{min}}/A} = i_{\text{min}}$  называют **минимальным радиусом инерции сечения**.

Таким образом,  $I_{\text{min}}/A = i_{\text{min}}^2$  и формула (20.2) принимает вид

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \cdot i_{\text{min}}^2}{(\mu l)^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{\text{min}})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Безразмерная величина  $\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \lambda$  называется *гибкостью стержня*.

Она характеризует сопротивляемость стержня потере устойчивости; с увеличением гибкости уменьшается сопротивляемость стержня потере устойчивости. Заметим, что гибкость  $\lambda$  стержня не зависит от материала стержня, а определяется его длиной, формой и размерами сечения.

Определяя значение критической силы, Эйлер исходил из рассмотрения упругой линии изогнутого стержня, поэтому формула

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

справедлива только в пределах применимости закона Гука, иначе говоря, до тех пор, пока критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала стержня, т. е. при условии

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}.$$

Отсюда

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Стоящая в правой части неравенства постоянная для данного материала безразмерная величина называется *предельной гибкостью*:

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Применимость формулы Эйлера определяется условием  $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ .

Формула Эйлера применима только в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости того материала, из которого он изготовлен. Как правило, многие конструкции имеют стержни с гибкостью меньше предельной.

# РАЗДЕЛ 4 РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ МАШИН ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ И ДЕТАЛЕЙ ОТРАСЛИ

## ГЛАВА 21. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 21.1. Геометрический расчет эвольвентных прямозубых передач

Рассмотрим сечение цилиндрического зубчатого колеса (рис. 21.1) с внешними зубьями плоскостью, перпендикулярной к оси колеса (главное, или торцовое сечение). Выделяют окружность вершин зубьев ( $r_a$ ,  $d_a$ ) и окружность впадин ( $r_f$ ,  $d_f$ ), между которыми заключен зуб колеса. Высота зуба  $h = r_a - r_f$ .

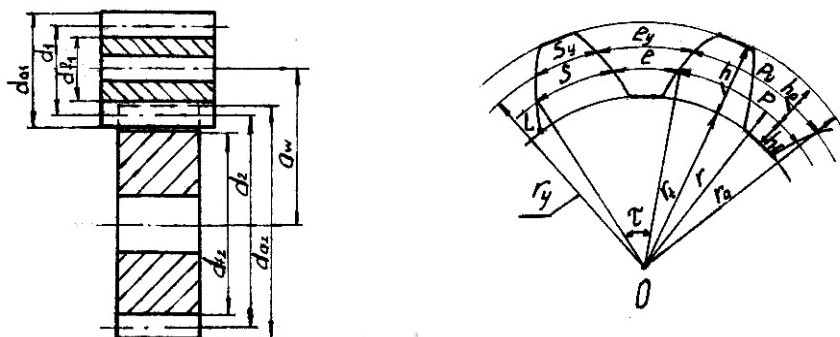


Рис. 21.1. Сечение цилиндрического зубчатого колеса

Эвольвентный профиль и окружность впадин соединяются переходной кривой. Общая точка  $L$  эвольвенты и переходной кривой называется **граничной точкой профиля**.

Расстояние между одноименными профилями двух соседних зубьев, измеренное по дуге окружности, называется **окружным шагом зубьев**. Для окружности произвольного радиуса  $r_y$

$$p_y = S_y + e_y,$$

где  $\rho_y$  – окружной шаг;

$S_y$  – окружная толщина зуба;

$e_y$  – окружная ширина впадины.

Длину окружности можно выразить через шаг  $\rho_y$  и число зубьев  $Z$ .

$$\pi d_y = Z \cdot \rho_y,$$

откуда

$$d_y = \frac{\rho_y}{\pi} \cdot Z = m_y \cdot Z,$$

где  $m_y = \frac{\rho_y}{\pi}$  – окружной модуль.

Модуль и шаг зависят от окружности, к которой они относятся.

На колесе выделяется расчетная окружность, на которой шаг и модуль зубьев равны шагу и модулю зуборезного инструмента. Эта окружность называется **делительной** ( $r, d$ ), а модуль зубьев на делительной окружности называется **расчетным модулем зубчатого колеса**:

$$m = \frac{\rho}{\pi},$$

где  $\rho$  – шаг по делительной окружности (делительный шаг). Значения  $m$  регламентированы СТ СЭВ 310–76, ГОСТ 9563–80:

1-й ряд – 0,8; 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5 и т. д.;

2-й ряд – 0,9; 1,125; 1,375; 1,75; 2,25; 2,75 и т. д.

Диаметр делительной окружности

$$d = mz,$$

$$h = 2,25m,$$

$$h = h_a + h_f;$$

$$h_a = m,$$

$$h_f = 1,25m,$$



$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m z_1 + z_2}{2};$$

$$d_a = d + 2h_a = d + 2m,$$

$$d_f = d - 2h_f = d + 2,5m.$$

Центральный угол  $\tau = \frac{360^\circ}{z}$  называется **угловым шагом зубьев**.

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}.$$

В основе зуборезного инструмента, используемого для нарезания эвольвентных цилиндрических колес по методу обкатки, лежит исходный производящий контур, под которым понимается контур зубьев зуборезной рейки в сечении плоскостью, перпендикулярной к направлению ее зубьев. Параметры этого контура стандартизованы (СТ СЭВ 308–76 для  $m \geq 1$  мм), ГОСТ 13755–81 (рис. 21.2).

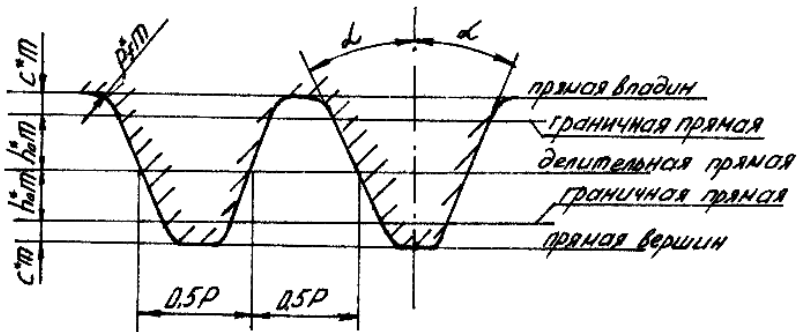


Рис. 21.2. Параметры исходного контура зубчатой рейки

Высота зуба исходного производящего контура

$$h = 2 h_a^* + c^* m,$$

где  $h_a^* = 1$  – коэффициент высоты головки зуба;

$c^* = 0,25$  – коэффициент радиального зазора.

Угол  $\alpha = 20^\circ$  называется *углом главного профиля*.

Прямая, по которой толщина зуба равна ширине впадины, называется *делительной*. Зубчатые колеса бывают:

- 1) без смещения исходного контура (некорректированные);
- 2) со смещением.

Если делительная прямая исходного производящего контура касается делительной окружности нарезаемого колеса, то нарезается колесо без смещения, в противном случае нарезается колесо со смещением (рис. 21.3).

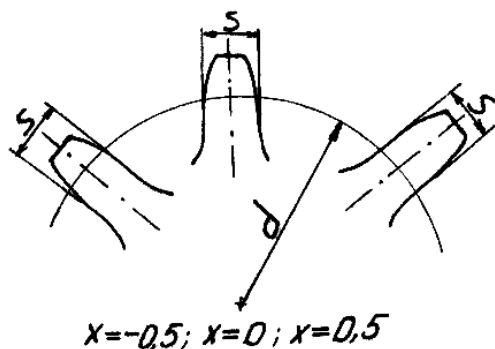


Рис. 21.3. Колеса со смещением и без смещения

В зависимости от коэффициентов смещения зацепляющихся колес различают следующие типы передач:

- 1) передача без смещения ( $x_1 = x_2 = 0$ );
- 2) равносмещенная передача ( $x_1 = -x_2 \neq 0, x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$ );
- 3) положительная передача ( $x_\Sigma > 0$ );
- 4) отрицательная передача ( $x_\Sigma < 0$ ).

В передачах без смещения и равносмещенных<sup>1</sup>  $\alpha_w = \alpha$  (угол зацепления равен углу главного профиля),  $d_{w1,2} = d'_{1,2}$  (делительные окружности одновременно являются и начальными), высота зуба  $h = 2,25m$ . В передачах без смещения

<sup>1</sup> Размеры даны для колес с внешними зубьями.

$$S_{1,2} = e_{1,2} = \frac{\pi m}{2} = \frac{\pi \rho}{2\pi} = 0,5 \rho;$$

$$m = \frac{\rho}{\pi}.$$

Межосевые расстояния для стандартных редукторов нормированы:  $a_w = 40; 50; 63; 80; 100; 125; 160; 180; 200; 225; 250; 280; 315$  и т. д.

При нарезании зубьев без смещения можно изготовить колесо лишь с  $z_{1\min} \geq 17$  (если  $x_s > 0$ , то  $z_{1\min} = 12$ ).

При окружных скоростях колес  $z_2 = uz_1$ ;  $v \leq 6$  м/с,  $z_1$  и  $z_2$  принимают кратными друг другу; при  $v \geq 6$  м/с, для  $z_1$  и  $z_2$  принимают взаимно простые числа зубьев.

Расчет геометрических параметров цилиндрических зубчатых передач выполняется по ГОСТ 16530–83.

## 21.2. Особенности геометрии косозубых, шевронных и конических передач

Развернем на плоскость поверхность делительного цилиндра (рис. 12.4). Угол  $\beta$  называется углом наклона линии зуба. Два колеса в зацеплении должны иметь одинаковые углы  $\beta$ , причем при внешнем зацеплении направление винтовых линий у них разное (на одном колесе – правое, а на другом – левое).

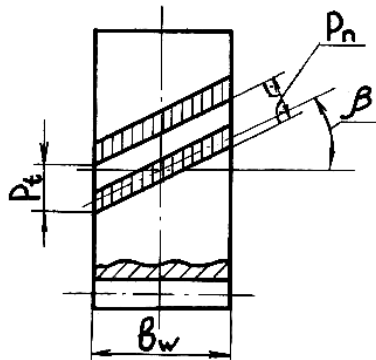


Рис. 12.4. Развертка поверхности делительного цилиндра на плоскость

У косозубых колес различают окружной шаг  $\rho_t$  (в торцовом сечении), нормальный шаг  $\rho_n$  (в нормальном сечении) и соответственно окружной (торцовый) модуль  $m_t = \frac{\rho_t}{\pi}$ , нормальный модуль

$$m_n = \frac{\rho_n}{\pi}.$$

Стандартным расчетным модулем является нормальный модуль, т. е.  $m = m_n$ .

Очевидны следующие соотношения:

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta};$$

$$\rho_t = \frac{\rho_n}{\cos \beta}.$$

Зацепление косозубых колес в торцовом сечении аналогично зацеплению прямозубых колес. Поэтому геометрический расчет косозубых колес производится по формулам для прямозубых колес с подстановкой в них параметров торцового сечения. Например, диаметры делительных окружностей определяются по формулам

$$d_1 = m_t \cdot z_1 = \frac{m_n \cdot z_1}{\cos \beta};$$

$$d_2 = m_t \cdot z_2 = \frac{m_n \cdot z_2}{\cos \beta}.$$

В косозубой передаче каждый зуб входит в зацепление не сразу по всей длине, а постепенно.

Для передач ( $m_n = m_c$ )  $x_1 = x_2 = 0$

$$a_w = \frac{m \cdot z_1 + z_2}{2 \cdot \cos \beta} = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Угол наклона линии зуба назначают  $\beta = 8-15^\circ$ , для шевронных  $\beta = 30-45^\circ$ . Угол  $\beta < 8^\circ$  выполнять не следует, так как утрачиваются преимущества косозубых передач перед прямозубыми.

### 21.3. Особенности геометрии конических колес

Конические зубчатые передачи служат для передачи вращения между валами с пересекающимися осями. Угол между осями (межосевой угол)  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$  теоретически может быть в диапазоне  $10^\circ < \Sigma < 170^\circ$ . Наибольшее распространение получили передачи с углом  $\Sigma = 90^\circ$ .  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – углы делительного конуса шестерни и колеса. Конические прямозубые колеса нарезаются на зуборезных станках инструментами, в основу которых положен зуб исходной рейки (ГОСТ 13754–81,  $h_a^* = 1$ ;  $c^* = 0.2$ ;  $\alpha = 20^\circ$ ) (рис. 21.5).

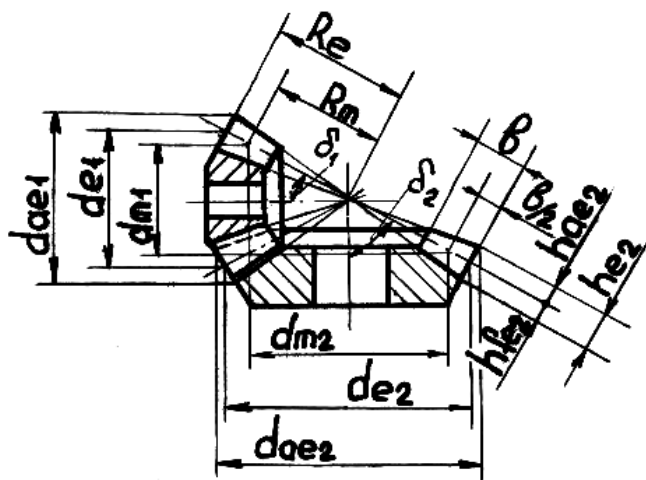


Рис. 21.5. Основные геометрические параметры конических колес

Так как зубья на боковых поверхностях конусов отличаются от зубьев цилиндрических колес тем, что их размеры (толщина, высота) по мере приближения к вершине конуса уменьшаются, то соответственно изменяются шаг и модуль зацепления, а также и диаметры вершин, делительный и впадин зубьев.

Основные параметры зацепления конической прямозубой передачи

$$d_m = m_{tm}Z, \quad d_e = m_{te}Z,$$

где  $d_m$  – средний делительный диаметр;

$d_e$  – внешний делительный диаметр;

$Z$  – число зубьев шестерни и колеса;

$m_{tm}$  – средний окружной модуль;

$m_{te}$  – внешний окружной модуль, значения которого согласуют с СТ СЭВ 310–76, ГОСТ 13755–81.

$$m_{tm} = m_{te} (1 - 0,5k_{be}) = m_{te} - \frac{b \sin \delta_1}{Z_1},$$

где  $k_{be} = \frac{b}{R_e}$  – коэффициент ширины зубчатого венца;

$b$  – ширина зубчатого венца;

$R_e$  – внешнее конусное расстояние.

Внешнее конусное расстояние

$$R_e = \frac{m_{te}Z_1}{2 \sin \delta_1} = 0,5 m_{te} Z_1 \sqrt{u^2 + 1}.$$

Модуль  $m_{te}$  определяет выбор параметров режущего инструмента. Высота головки зуба  $h_{ae} = m_{te}$  и ножки  $h_{fe} = 1,2 m_{te}$ .

Диаметры вершин зубьев и впадин конического зубчатого колеса:

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta = d_e + 2m_{te} \cos \delta;$$

$$d_{fe} = d_e - 2h_{fe} \cos \delta = d_e - 2,4m_{te} \cos \delta.$$

Передаточное число при  $\Sigma = 90^\circ$

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{dm_2}{dm_1} = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1 = i.$$

Среднее конусное расстояние  $R_m = R_e - 0,5b$ .

## 21.4. Усилия в зацеплении зубчатых передач

При определении сил в зацеплении используют методы теоретической механики, а силами трения пренебрегают ввиду их малости.

Нормальная сила  $F_n$  направлена по линии зацепления (как по общей нормали к рабочим поверхностям зубьев).

**Прямозубая цилиндрическая передача** (рис. 21.6).

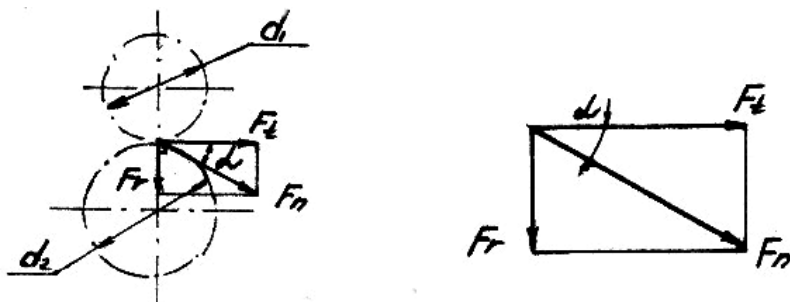


Рис. 21.6. Силы, действующие в зацеплении прямозубых цилиндрических колес

Силу  $F_n$  раскладывают на окружную  $F_t$  и радиальную  $F_r$  составляющие:

$$\vec{F}_n = \vec{F}_t + \vec{F}_r,$$

где  $F_t = \frac{2T}{d}$  – сила, изгибающая зуб;

$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_w$  – сила, сжимающая зуб;

$T$  – вращающий момент на колесе (шестерне);

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha_w},$$

$\alpha_w = \alpha$  – угол главного профиля;

$\alpha_w$  – угол зацепления.

Векторы радиальных сил у колес с внешним зацеплением направлены к центру, а у колес с внутренним зацеплением – от центра зубчатого колеса.

**Косозубая и шевронная цилиндрические передачи.** Силу в зацеплении передачи раскладывают на окружную  $F_t$ , осевую  $F_a$  и радиальную  $F_r$  составляющие (рис. 21.7, а):

$$F_t^* = \frac{F_t}{\cos\beta},$$

$$F_t = \frac{2T}{d},$$

$$F_r = F_t^* \operatorname{tg}\alpha_n = F_t \frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\cos\beta},$$

$$F_a = F_t \operatorname{tg}\beta,$$

$$F_n = \frac{F_t^*}{\cos\alpha_n} = \frac{F_t}{\cos\alpha_n \cos\beta},$$

где  $\alpha_n$  – угол зацепления косозубой передачи в нормальном сечении;  
 $\beta$  – угол наклона линии зуба.

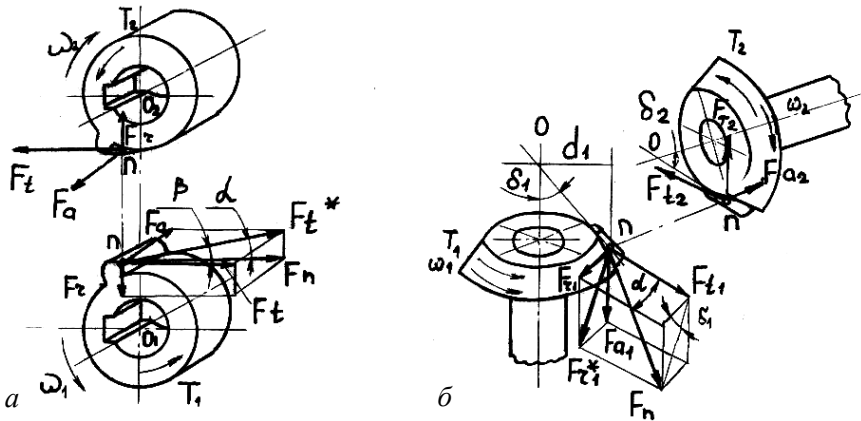


Рис. 21.7. Усилия в зацеплениях цилиндрических косозубых (а) и конических (б) колес

Осевая сила  $F_a$ , стремящаяся сдвинуть колесо вдоль оси вала, дополнительно нагружающая опоры валов, детали корпусов, является недостатком косозубых передач.



Направление окружной и радиальной сил такое же, как и в прямозубой передаче. Осевая сила параллельна оси колеса, а направление вектора зависит от направления вращения колеса и направления линии зуба (рис. 21.8)

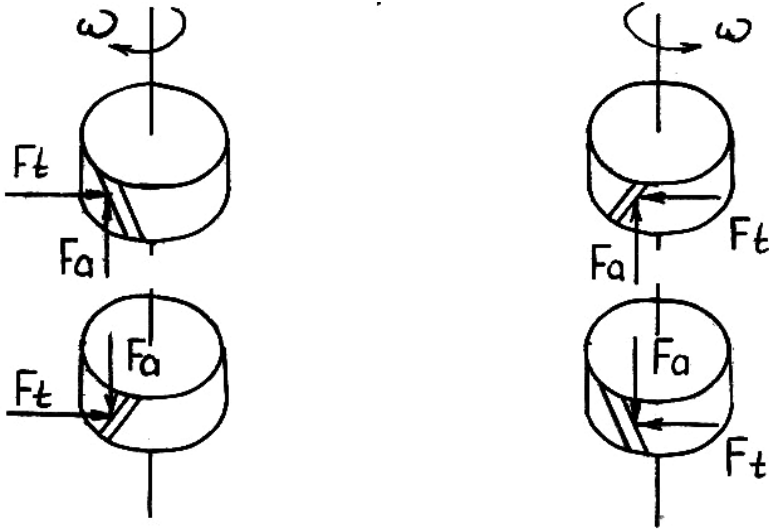


Рис. 21.8. Направления сил на ведущем колесе цилиндрической косозубой передачи

**Конические зубчатые передачи.** В зацеплении прямозубой конической передачи (см. рис. 21.7, б) нормальная сила  $F_n$  также раскладывается на три составляющие, рассчитываемые по среднему делительному диаметру  $d$ :

$$F_t = \frac{2T}{d};$$

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha};$$

$$F_r^* = F_t \operatorname{tg} \alpha;$$

$$F_r = F_r^* \cos \delta_1 = F_t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1;$$

$$F_a = F_r^* \sin \delta_1 = F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1.$$

Направления сил на ведущем и ведомом колесах противоположны, и имеют место равенства  $F_{a_1} = F_{r_2}$  и  $F_{r_1} = F_{a_2}$ .

## 21.5. Материалы и термообработка для зубчатых колес

Зубчатые колеса изготавливают из сталей, чугуна и неметаллических материалов. Колёса из неметаллических материалов имеют небольшую массу и не корродируют, а передачи с ними бесшумны в работе. Но невысокая прочность материалов и, как следствие, большие габариты передачи, сравнительно высокая стоимость изготовления колес ограничивают их применение в силовых механизмах.

Чугунные зубчатые колеса дешевле стальных, их применяют в малонагруженных открытых передачах. Они имеют малую склонность к заеданию и хорошо работают при слабой смазке, но не выдерживают ударных нагрузок.

Наибольшее распространение в силовых передачах имеют колёса из сталей Ст5, Ст6, 35, 35Л, 40, 40Л и др., которые, как правило, подвергают термообработке для повышения нагрузочной способности.

Колеса малонагруженных передач в машинах общего назначения, а также колёса передач, габариты которых не ограничены, подвергают объемной закалке с высоким отпуском до твердости 300–350 НВ при диаметре колес до 150 мм. Колёса диаметром свыше 150 мм имеют твердость не менее 200 НВ. Зубья колес, подвергнутых такой обработке, имеют приблизительно одинаковую твердость по всему сечению и могут быть нарезаны после термообработки, благодаря этому отпадает необходимость выполнения доводочных операций.

Для предотвращения заедания рабочих поверхностей нижний предел твердости шестерни (меньшего колеса), как показывает практика, должен быть на 30–50 единиц выше верхнего предела твердости колеса.

Колёса высоконагруженных передач в транспортных машинах и передач ограниченных габаритов должны иметь твердость зубьев более 400 НВ.

## 21.6. Расчеты зубьев на сопротивление усталости по изгибным и контактным напряжениям

**1. Расчет зубьев на прочность при изгибе.** Условие прочностной надежности зуба:

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP},$$

где  $\sigma_F$  – максимальное напряжение в опасном сечении зуба;

$\sigma_{FP}$  – допускаемое напряжение изгиба для материала зуба.

Для оценки прочностной надежности зубчатой передачи необходимо иметь уравнение, связывающее максимальные напряжения в опасном сечении с внешней нагрузкой на зуб и размерами опасного сечения (параметрами передачи).

**А. Прямозубые цилиндрические передачи.** Расчет выполняют для наиболее опасного случая – однопарного зацепления, когда вся внешняя нагрузка передается одной парой зубьев:

$$\sigma_F = y_F \frac{F_t}{b_w m} K_{Fa} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{Fv},$$

где  $y_F$  – коэффициент формы зуба;

$F_t$  – окружная сила;

$b_w$  – ширина венца колеса;

$m$  – модуль зацепления;

$K_{Fa}$  – коэффициент, учитывающий одновременное участие в передаче нагрузки нескольких пар зубьев ( $K_{Fa} = 1$ );

$K_{F\beta}$  – коэффициент концентрации нагрузки;

$K_{Fv}$  – коэффициент динамической нагрузки.

**Б. Косозубые цилиндрические передачи.** Напряжения в зацеплении косозубого цилиндрического колеса

$$\sigma_F = y_F y_\beta \frac{F_t}{\varepsilon_\alpha \cdot b_w \cdot m} K_{Fa} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{Fv},$$

где  $y_\beta = 1 - \frac{\beta}{140^\circ}$  – коэффициент, учитывающий наклон зубьев;

$\varepsilon_\alpha$  – коэффициент перекрытия;

$$b_W = \psi_{Bd} \cdot d_1,$$

где  $\psi_{Bd}$  – коэффициент ширины колеса;

$\psi_{Bd} = 0,6-1,4$  для колес низкой твердости (не более 350 НВ);

$\psi_{Bd} = 0,4-0,9$  (для колес твердости более 350 НВ).

Ширину зубчатых колес принимают в зависимости от диаметра шестерни.

**В. Конические передачи.** В опасном сечении зуба конического колеса максимальные напряжения

$$\sigma_F = y_F \frac{F_t}{v_F \cdot b \cdot m} K_{Fa} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{Fv},$$

где  $v_F$  – экспериментальный коэффициент, учитывающий пониженную нагрузочную способность конических передач по сравнению с цилиндрическими передачами из-за конструктивных особенностей;

$v_F = 0,85$  – для конических прямозубых передач;

$v_F \approx 1-1,2$  – для передач с круговыми зубьями;

$m$  – модуль в среднем нормальном сечении зуба.

**2. Расчет на контактную прочность активных поверхностей зубьев.** Расчет зубьев выполняют для фазы зацепления в полюсе:

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP},$$

где  $\sigma_H$  – максимальное контактное напряжение на активной поверхности зубьев;

$\sigma_{HP}$  – допускаемое контактное напряжение.

Контактные напряжения  $\sigma_H$  одинаковы для обоих колес, поэтому расчет выполняют для того колеса, у которого  $\sigma_{HP}$  меньше.

Для расчета зубчатой передачи на контактную прочность необходимо иметь уравнение, связывающее максимальное напряжение  $\sigma_H$  с внешней нагрузкой и параметрами передачи.

**А. Прямозубые и косозубые передачи.** Предел контактной выносливости:

$$\sigma_H = Z_H \cdot Z_m \cdot Z_\varepsilon \sqrt{\frac{F_t \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\nu}}{2b_w \cdot a_w} \cdot \frac{u \pm 1}{u}},$$

где  $Z_H$  – коэффициент, учитывающий форму сопряженных поверхностей;

$Z_m$  – коэффициент, учитывающий механические свойства материалов колес (модули упругости  $E_1$  и  $E_2$  и коэффициенты Пуассона,  $\nu_1$  и  $\nu_2$ );

$Z_m = 275$  – для стальных колес;

$Z_\varepsilon$  – коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий:

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}} \text{ – для прямозубых передач.}$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \text{ – для косозубых передач.}$$

$K_{H\alpha} = 1$  в предварительных расчетах;

$K_{H\beta}$  и  $K_{H\nu}$  – из таблиц;

$a_w$  – межосевое расстояние;

$b_w$  – ширина колеса;

$u$  – передаточное число.

$b_w$  принимают в зависимости от межосевого расстояния:

$$\frac{b_w}{a_w} = \psi_{Ba},$$

где  $\psi_{Ba}$  – коэффициент ширины колеса;

$\psi_{Ba} = 0,315\text{--}0,5$  – при симметричном положении колес;

$\psi_{Ba} = 0,25\text{--}0,4$  – при несимметричном;

$\psi_{Ba} = 0,2\text{--}0,25$  – при консольном расположении.

**Б. Конические передачи (прямозубые).** Расчет производят по формуле (21.1), где вместо коэффициента  $v_F$  подставляют коэффициент  $v_H$  (установлен экспериментально, учитывает особенности прочности конических передач). Для прямозубых передач  $v_H = 0,85$ .

## ГЛАВА 22. ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 22.1. Общие сведения. Геометрические и кинематические особенности червячных передач

**Червячная передача** представляет собой передачу, у которой ведущее колесо (червяк) выполнено с малым числом зубьев ( $z_1 = 1-4$ ), а ведомое (червячное) колесо имеет большое число зубьев ( $z_2 > 28$ ). Угол скрещивания осей обычно составляет  $90^\circ$ .

Червяки бывают следующих видов:

- архимедов червяк, торцовым профилем которого является архимедова спираль (рис. 22.1);
- конволютный;
- эвольвентный, представляющий собой косозубое зубчатое колесо с очень большим углом наклона и малым числом зубьев.

Червяки имеют стандартный угол профиля  $\alpha = 20^\circ$  в осевом сечении.

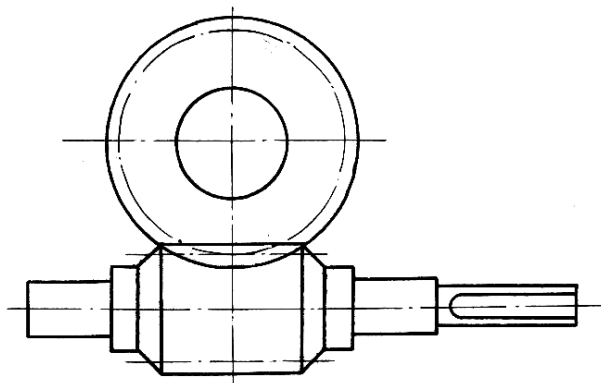


Рис. 22.1. Передача с цилиндрическим червяком

*Достоинства червячных передач* состоят в возможности получения больших передаточных отношений в одной ступени (обычно

$i = 10-60$ , реже  $i = 60-100$ ), плавности и бесшумности работы, возможности самоторможения.

*Основной недостаток передач* – низкий КПД, который ведет к большому тепловыделению и для отвода теплоты часто требует применения специальных устройств (обдув, оребрение корпуса и др.). Это, а также необходимость применения цветных металлов существенно ограничивают области использования червячных передач (мощность до 50–60 кВт, окружная скорость – до 15 м/с).

Диаметры колес определяются, как для цилиндрических зубчатых колес при коэффициенте высоты головки  $h_a^* = 1$  и коэффициенте радиального зазора  $c^* = 0,2$ .

Диаметр делительного цилиндра червяка (рис. 22.2)

$$d_1 = q \cdot m,$$

где  $q$  – коэффициент диаметра червяка, принимаемый в зависимости от модуля  $m$  для обеспечения жесткости;

$m = \frac{\rho}{\pi}$  – осевой модуль червяка, стандартизован ГОСТ 19642–74

( $m = 1; 1,25; 1,6; 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 8; 10; 12,5$  и т. д.);

$\rho$  – шаг червяка.

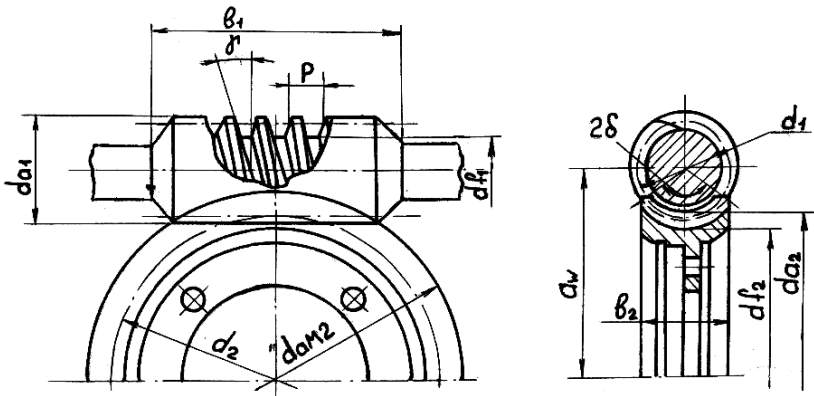


Рис. 22.2. Зацепление червячной передачи

Делительный угол подъема винтовой линии  $\gamma$  (обычно 5–20°) определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\pi m z_1}{\pi d_1} = \frac{z_1}{q},$$

где  $z_1 = 1; 2; 4$  – число витков (заходов) червяка.

При меньшем числе заходов  $z_1$  угол  $\gamma$  будет меньше, ниже будет и КПД; при больших  $z_1$  увеличиваются радиальные габариты и стоимость передачи. В передачах мощных приводов из-за больших потерь и сильного нагрева не рекомендуют использовать однозаходные червяки.

При  $u = 10-18, 18-40$  число заходов соответственно 4 и 2, а при  $u > 40$  число заходов 1.

Диаметры окружностей вершин и впадин червяка

$$\begin{aligned} d_{a1} &= d_1 + 2h_a^* m, \\ f_{r1} &= d_1 - 2h_f^* m, \end{aligned}$$

где  $h_a^* = 1,0$  – коэффициент высоты головки;

$h_f^* = h_a^* + c^*$  – коэффициент высоты ножки;  $c^* = 0,2$  – коэффициент радиального зазора.

Червячное колесо является косозубым с углом наклона линии зуба  $\beta = \gamma$ . Диаметр колеса

$$d_2 = m z_2,$$

где  $z_2$  – число зубьев колеса.

Межосевое расстояние

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m q + m z_2}{2}.$$

Длина  $b_1$  нарезной части червяка принимается такой, чтобы обеспечить зацепление с возможно большим числом зубьев колеса.

Ширина колеса  $b_2$  назначается из условия получения угла обхвата червяка колесом:

$$2\delta \approx \frac{2b_2}{d_{a1} - 0,5m}.$$



За один оборот червяка зуб колеса, контактирующий с некоторым его витком, переместится по окружности на расстояние  $\pi m z_1$  подъема витка и колесо повернется на угол  $\frac{\pi m z_1}{\pi d_2}$ . Передаточное отношение червячной передачи

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\pi d_2}{\pi m z_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Обычно  $i = 20-60$  в силовых передачах,  $i \leq 300$  в кинематических цепях приборов и делительных механизмов.

**В червячном зацеплении** наблюдается скольжение. Витки червяка скользят при движении по зубьям колеса.

Для уменьшения износа материалы червяка и колеса должны образовывать антифрикционную пару, имеющую минимально возможный коэффициент трения. Для повышения прочности и жесткости червяки обычно изготавливают из стали 40ХН, 12ХН3А, 30ХГСА и др., а колеса – из бронз БрА9Ж3Л, БрА10Ж4Н4Л или венцы колес – из бронзы БрО10Ф1.

#### **КПД передачи**

$$\eta = \frac{T_2 \omega_2}{T_1 \omega_1},$$

где  $T_1$  и  $\omega_1$  – вращающий момент и угловая скорость червяка;

$T_2$  и  $\omega_2$  – то же для колеса.

В предварительном расчете можно для  $z_1 = 1; 2; 4$  соответственно принять  $\eta = 0,7-0,75; 0,75-0,82; 0,87-0,92$ .

Невысокий КПД свидетельствует о том, что в червячной передаче значительная часть энергии превращается в теплоту. Вызванное этим повышение температуры ухудшает защитные свойства масляного слоя, увеличивает опасность заедания и выхода передачи из строя.

#### **22.2. Усилия в зацеплении. Расчет зубьев колес.**

##### **Тепловой расчет червячных передач**

**Статика передачи.** При определении сил полагают, что главный вектор (равнодействующая)  $F_n$  контактных давлений, действующих на площадках контакта зубьев, приложен в полюсе П и направлен по линии зацепления (рис. 22.3). Силы, действующие в зацеплении:

$$F_{n1} = \frac{2T_1}{d_1} = F_{a2}';$$

$$F_{t2} = \frac{2T_2}{d_2} = F_{a1}';$$

$$\cos \alpha = \frac{F_n^*}{F_n};$$

$$F_n = \frac{F_n^*}{\cos \alpha};$$

$$\cos \gamma = \frac{F_{a1}'}{F_n^*};$$

$$F_n^* = \frac{F_{a1}'}{\cos \gamma} = \frac{F_{t2}}{\cos \gamma};$$

$$\sin \alpha = \frac{F_r}{F_n};$$

$$F_n = \frac{F_{t2}}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma};$$

$$F_r = F_n \cdot \sin \alpha = \frac{F_{t2} \operatorname{tg} \alpha}{\cos \gamma}.$$

Вращающий момент на колесе при ведущем червяке

$$T_2 = T_1 \cdot i \cdot \eta.$$

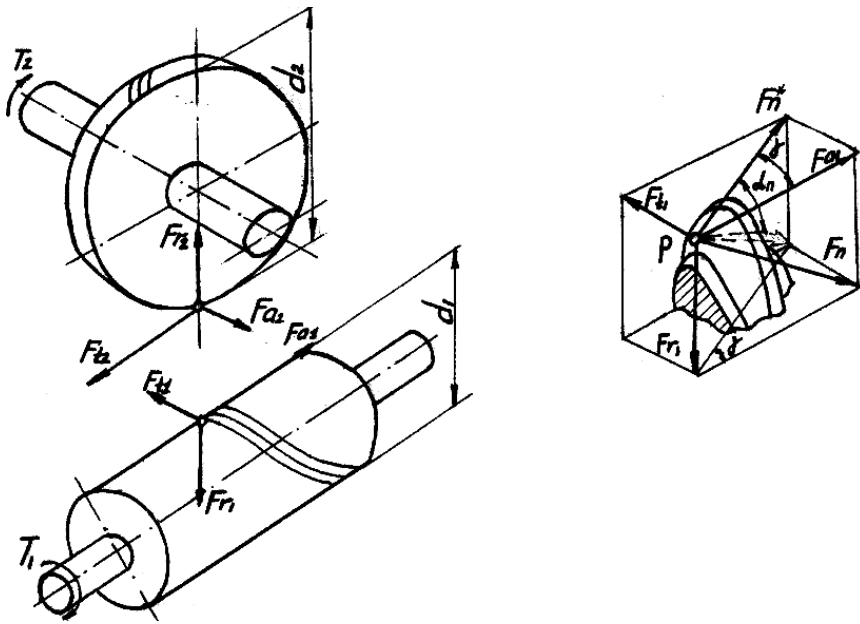


Рис. 22.3. Усилия в червячной передаче

**Расчет зубьев колес на выносливость при изгибе.** Витки червяка на прочность не рассчитывают, так как его материал значительно прочнее материала колеса. При расчете используются те же соотношения, что и при расчете косозубых колес.

$$\sigma_F = 0,7 Y_F \frac{F_{t2}}{b_2 m_n} \leq \sigma_{FP},$$

где  $Y_F$  – коэффициент формы зуба;

$m_n = m \cos \gamma$  – модуль зацепления в нормальном сечении.

**Расчет передач на контактную выносливость и заедание.** Расчет передач обычно выполняют по контактным напряжениям, а допускаемые напряжения устанавливают на основе экспериментальных исследований и эксплуатации такими, чтобы исключить заедание зубьев. Условие прочностной надежности передачи имеет обычный вид:

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}.$$

**Тепловой расчет и охлаждение червячных передач.** Червячные передачи работают с большим выделением теплоты. В результате температура масла в ванне агрегата (редуктора) может достигнуть предельного значения (75–95 °С) и передача потеряет работоспособность из-за заедания.

Для предотвращения чрезмерного нагрева масла проводят расчет червячного редуктора на нагрев.

Уравнение теплового баланса для червячной передачи, работающей в закрытом корпусе в непрерывном режиме без охлаждения, можно записать в виде

$$1000 (1 - \eta) P_1 = K_T (t - t_0) A (1 + \psi), \quad (22.1)$$

где  $\eta$  – КПД передачи;

$P_1$  – передаваемая мощность, кВт;

$K_T = 8 - 17,5$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С) – коэффициент теплопередачи корпуса (большие значения принимают при хорошей циркуляции воздуха);

$t$  и  $t_0$  – соответственно температура масла и окружающего воздуха, °С;

$A$  – площадь свободной поверхности охлаждения корпуса, включая 70 % площади поверхности ребер и бобышек, м<sup>2</sup>;

$\psi$  – коэффициент, учитывающий теплоотвод в раму или плиту (равен 0,3 при прилегании основания корпуса по большой поверхности).

Площадь свободной поверхности можно найти из приближенного соотношения

$$A \approx 20 a_w^{1,7},$$

где  $a_w$  – межосевое расстояние передачи, мм.

Произведение в левой части равенства (22.1) равно количеству теплоты, выделяемой передачей. Правая часть этого равенства показывает количество теплоты, отводимой через поверхность корпуса.

Если охлаждение вентилятором недостаточно эффективно, то следует применить водяное охлаждение или увеличить размеры редуктора.

## ГЛАВА 23. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 23.1. Общие сведения. Ремни. Шкивы

Ременная передача обычно состоит из двух *шкивов* 1 и 2, соединенных между собой *ремнем* 3, и *натяжного устройства* 4, создающего контактные давления между ремнем и шкивами и обеспечивающего за счет сил трения передачу энергии. Чаще всего начальное натяжение создается при монтаже передачи (без натяжного устройства) (рис. 23.1, а).

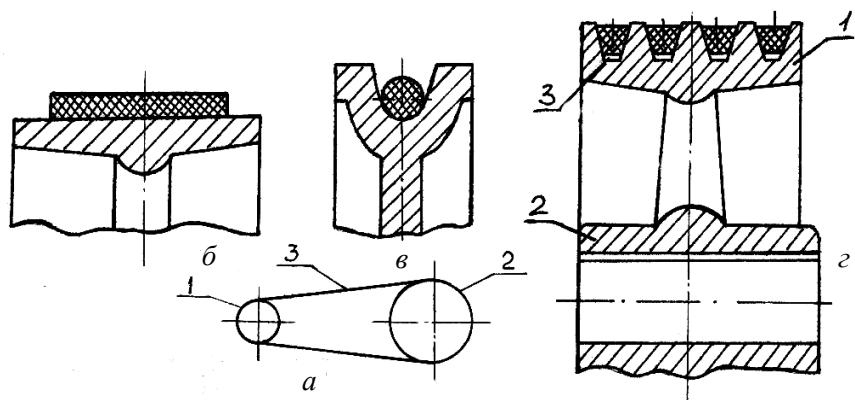


Рис. 23.1. Ременные передачи

Обычно с помощью ремня передают движение между параллельными валами, вращающимися в одну сторону.

По форме сечения ремней различают плоско-, кругло- и клиноременные передачи (рис. 23.1, б, в, з).

*Основные достоинства передач:* простота конструкции, сравнительно малая стоимость, способность передавать вращательное движение на большие расстояния и работать с высокими скоростями, плавность работы и малый шум, малая чувствительность к толчкам, ударам и перегрузкам, отсутствие смазочной системы.

*Основные недостатки:* невысокая долговечность ремня, большие радиальные габариты, значительные нагрузки на валы и опоры, непостоянство передаточного отношения.

Передача используется как понижающая частоту вращения. Передаваемая мощность – до 50 кВт, окружная скорость – до 50 м/с,

максимальное передаточное отношение 6 для передач без натяжного ролика и 10 для передач с натяжным роликом; допускаемая кратковременная перегрузка до 300 %.

Ременную передачу применяют обычно в качестве быстроходной ступени привода, устанавливая ведущий шкив на вал двигателя. В этом случае ее габариты и масса оказываются сравнительно небольшими.

**Конструкции ремней и шкивов.** Ремни должны обладать достаточно высокой прочностью при действии переменных нагрузок, иметь большой коэффициент трения в контакте со шкивом и высокую износостойкость.

**Плоские** ремни имеют прямоугольное сечение (см. рис. 23.1, б, 23.2) и малую толщину. Их получают путем соединения (склеиванием, сшиванием) концов полос ткани (прорезиненной, хлопчатобумажной, шерстяной, капроновой и др.), кожи и синтетических материалов.

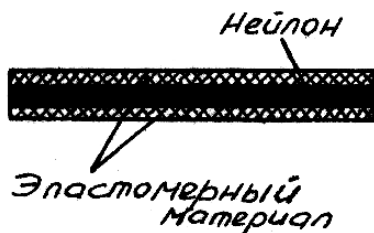


Рис. 23.2. Конструкция плоского ремня

Ремни **тканые** толщиной 0,5 и 0,7 мм изготавливают из мешковых капроновых тканей просвечивающего переплетения. Их пропитывают раствором полиамида С-6 и покрывают пленкой на основе этого же полиамида, совмещенного с нитрильным каучуком. Растягивающую нагрузку в таких ремнях передают уточные нити ткани. Модуль упругости ремней  $E = 1200-1370$  МПа, напряжение начального натяжения ветвей  $\sigma_0 = 5-10$  МПа.

Ремни **кордшнуровые прорезиненные** выполняют с анидным кордшнуром диаметром 1,1 мм, который располагают в слое резины по винтовой линии. Для обеспечения прочности конструкции на наружной и внутренней поверхностях ремня имеется ткань ОТ-40. Ремни применяют при окружной скорости до 35 м/с.

В промышленности применяют *синтетические* ремни фирмы «Хаба-сит» (Швейцария) толщиной 0,7–2,8 мм со склеенным стыком. По сравнению с тканями эти ремни имеют большую (в три раза) прочность и допускают скорость до 100 м/с.

Плоские ремни из синтетических материалов получают преимущественное распространение в высокоскоростных приводах благодаря высокой прочности и большой долговечности (напряжения изгиба в тонких ремнях невелики), хорошему сцеплению ремня со шкивом (коэффициент трения  $f = 0,5-0,6$ ) и высокой тяговой способности, а также высокой точности вращения.

**Круглые** ремни (кожаные, капроновые и др.) применяют в машинах малой мощности (швейных и бытовых машинах, настольных станках и др.) (рис. 23.1, в).

**Клиновые** ремни в настоящее время используются наиболее широко. Они обеспечивают передачам большую тяговую способность и меньшие габариты по сравнению с плоскоремennыми передачами, могут передавать вращение на несколько валов одновременно, допускают передаточное отношение  $i = 6-8$  без натяжного ролика. Однако они менее быстроходны (скорость до 30 м/с), имеют более низкий КПД (на 1–2 %) и могут применяться лишь как открытые.

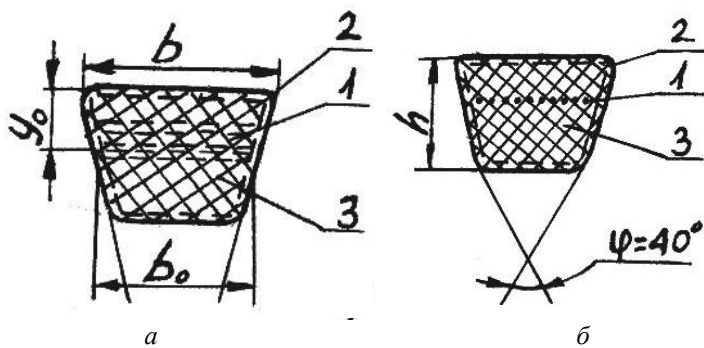


Рис. 23.3. Конструкции клиновых ремней

Клиновые ремни изготовляют бесконечными, слойной конструкции (рис. 23.3, а, б), имеющей несущий кордовый слой 1 (работает на растяжение), резиновый или резиноканевый слой 3 и обертку из прорезиненной ткани 2. Несущий слой на основе материалов из химических волокон (капрона, лавсана, вискозы, анида располагают в

продольном направлении ремня на нейтральной поверхности для разгрузки его от напряжений изгиба.

Модуль упругости прочных химических волокон и несущего слоя существенно выше модуля упругости резины, поэтому этот слой воспринимает основную часть нагрузки.

Резиновые слои (подушки), расположенные над несущим слоем (в зоне растяжения) и под ним (в зоне сжатия), обеспечивают ремню требуемую форму и демпфирующие свойства. Обертка из прорезиненной ткани придает ремню каркасность, предохраняет внутренние элементы от внешних воздействий и повышает износостойкость.

Клиновые ремни выполняют с углом клина  $\varphi = 40^\circ$  и отношением большего основания трапецевидного сечения к высоте  $b/h \approx 1,6$  (нормальные ремни) и  $b/h \approx 1,2$  (узкие ремни). Размеры поперечного сечения (обозначаются О, А, Б, В, Г, Д, Е по мере увеличения площади) и длина нормальных ремней определены ГОСТ 1284–80.

Получили распространение *поликлиновые* ремни (рис. 23.4) с высокопрочным полиэфирным кордом в плоской части, также работающие на шкиве с клиновыми канавками. Рекомендуемое число ребер – от 2 до 20, допускаемое – 50. При одинаковой мощности ширина такого ремня в 1,5–2 раза меньше ширины комплекта обычных клиновых ремней. Благодаря высокой гибкости допускается применение шкивов меньшего диаметра, чем в клиноременной передаче, большая быстроходность (до 40–50 м/с) и большие передаточные отношения (до 15).

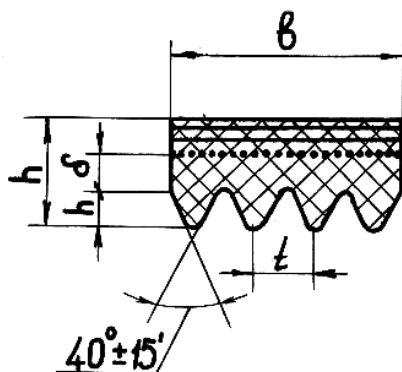


Рис. 23.4. Поликлиновый ремень



**Шкивы.** Их конструктивные формы определяются преимущественно их размерами (обычно наружным диаметром), типом передачи, видом производства (единичное, серийное, массовое), возможностями предприятия-изготовителя.

Шкивы большого диаметра для облегчения выполняют с углублениями и отверстиями, а также с четырьмя–шести спицами (рис. 23.5). Такие шкивы условно состоят из трех частей: *обода* (1) – части шкива, несущей ремень; *ступицы* (2) – части шкива, с помощью которой его соединяют с валом; *спиц* (3) (или диска), связывающих обод со ступицей.

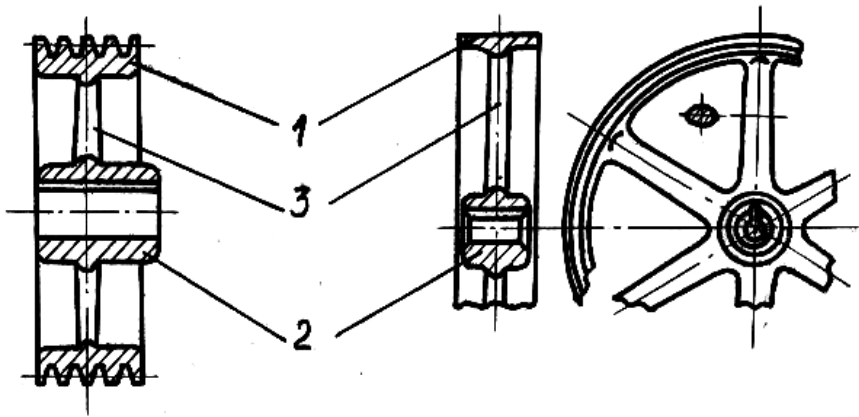


Рис. 23.5. Конструкция шкивов

Шкивы изготавливают из чугуна марок СЧ 10 и СЧ 15, легких сплавов и пластмасс при работе передачи с небольшими скоростями и из сталей (25Л, 15 и др.) при окружных скоростях свыше 30 м/с.

**Особенности монтажа и эксплуатации передач.** Начальное натяжение оказывает существенное влияние на работоспособность передач, поэтому его необходимо контролировать. Обычно контроль начального натяжения осуществляют путем прикладывания небольшой поперечной нагрузки (например, груза с силой тяжести  $F_g = 10\text{--}50\text{ Н}$ ) посередине ветви и измерения стрелы  $f$  провисания ремня под грузом. В этом случае сила начального натяжения  $F_0 = 0,5F_g l_n / f$  ( $l_n$  – половина свободной длины ветви).

## 23.2. Скольжение ремня

### Кинематические и геометрические параметры передачи.

Движение ремня по шкиву сопровождается упругим скольжением.

Причину этого явления можно понять из рассмотрения деформации упругого ремня на заторможенном шкиве. Предположим, что к обоим концам ремня подвешены одинаковые грузы, создающие в ремне силы  $F_1$  (рис. 23.6, а). В результате между шкивом и ремнем возникнут некоторые контактные давления, а спадающие ветви ремня получат относительные удлинения

$$\varepsilon_1 = \frac{F_1}{E \cdot A},$$

где  $E \cdot A$  – жесткость сечения ремня при растяжении.

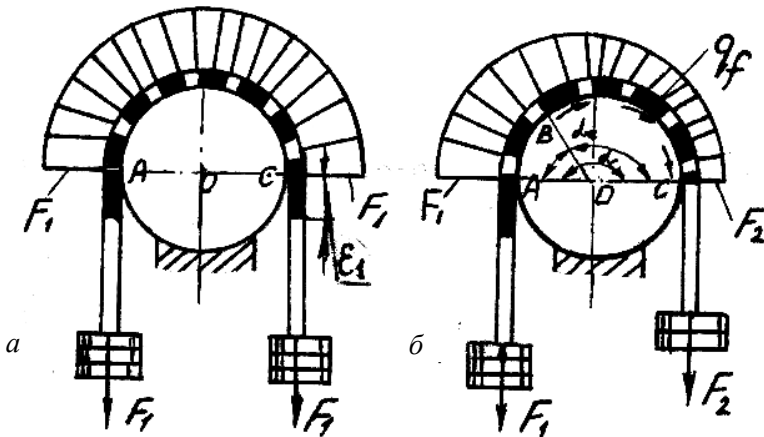


Рис. 23.6. Схемы деформаций ремня на шкиве

Если теперь на одном конце, например, правом, несколько уменьшить груз и тем самым силу в ветви до значения  $F_2$  (рис. 23.6, б), то относительное удлинение правого конца уменьшится до значения  $\varepsilon_2 = \frac{F_2}{E \cdot A}$ , а относительное удлинение левого конца останется прежним. Относительное сокращение длины

$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$  элемента правой спадающей ветви распространится вдоль ремня по дуге обхвата от точки  $C$  к точке  $A$ , вызывая скольжение ремня по шкиву справа налево. Так как ремень прижат к шкиву, то скольжение вызовет силы трения  $q_f$ , направленные навстречу относительному скольжению. Скольжение ремня и изменение деформаций прекратятся в некоторой точке  $B$  дуги обхвата. Ее положение можно определить из равенства разности сил  $F_1$  и  $F_2$  суммарной силе трения. На дуге  $BA$  ремень будет находиться в покое. Сумма длин дуг  $AB$  и  $BC$  равна длине дуги обхвата шкива ремнем ( $AC$ ), определяемой **углом обхвата**  $\alpha$ . Угол  $\alpha_c$ , соответствующий дуге  $BC$ , называют **углом скольжения**. По мере уменьшения силы  $F_2$  (или увеличения силы  $F_1$ ) дуга упругого скольжения растет за счет уменьшения дуги покоя. Так как скольжение ремня связано с его упругими свойствами, то его называют упругим.

**Полезная нагрузка** (окружная сила)  $F_t$  передачи, развиваемая в основном за счет сил трения на дуге скольжения:

$$F_t = F_1 - F_2 = \frac{2T_1}{d_1},$$

где  $F_1$  – сила натяжения ведущей ветви, набегающей на ведущий шкив;

$F_2$  – сила натяжения ведомой ветви, сбегаящей с ведущего шкива;

$T_1$  – вращающий момент;

$d_1$  – диаметр ведущего шкива.

Положение точки  $B$  на шкиве также зависит от нагрузки и условий трения.

**Кинематика передачи.** При вращении ведущего шкива с угловой скоростью  $\omega_1$  его окружная скорость  $v = 0,5\omega_1 d_1 = v_1$  (здесь  $v_1$  – скорость ведущей ветви ремня). В результате упругого скольжения ремень сбегает с ведущего шкива в точке  $C$  со скоростью  $v_2 < v_1$ . Коэффициент упругого скольжения

$$\varepsilon = \frac{v_1 - v_2}{v_1} = 1 - \frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{\omega_2 d_2}{\omega_1 d_1},$$

где  $\omega_2$  и  $d_2$  – угловая скорость и диаметр ведомого шкива.

Передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1 (1 - \varepsilon)}.$$

В расчетах на основании экспериментов принимают  $\varepsilon = 0,01$  – для плоскоремennых передач;  $\varepsilon = 0,015 - 0,020$  – для клиноремennых передач.

**Основные геометрические параметры.** Минимальное межосевое расстояние в плоскоремennых передачах

$$a_{\min} = 1,5 - 2 \cdot d_1 + d_2.$$

В клиноремennых передачах (на основании практики)

$$a_{\min} = 0,55 d_1 + d_2 + h,$$

а максимальное межосевое расстояние

$$a_{\max} = 1,5 - 2 \cdot d_1 - d_2.$$

Требуемая длина ремня для передачи при заданном (или желательном) межосевом расстоянии  $a$  и угле обхвата  $\alpha$  определяется как сумма прямолинейных участков и дуг обхвата:

$$l \approx 2a + \frac{\pi d_1 + d_2}{2} + \frac{d_2 - d_1}{4a}.$$

Угол обхвата меньшего шкива

$$\alpha_1 = 180^\circ - \frac{d_2 - d_1}{a} \cdot 57^\circ.$$

### 23.3. Усилия и напряжения в ремнях. Тяговая способность и КПД передачи

Начальное натяжение ремня – необходимое условие работы ременной передачи. Сила  $F_{\text{нач}}$  (начального натяжения ремня) вызывает в его ветвях силы

$$F_0 = \frac{F_{\text{нач}}}{2 \cos \gamma},$$

где  $\gamma$  – угол наклона ветви ремня к линии центров передачи. При действии вращающего момента  $T_1$  силы в ветвях будут равны  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 23.7).

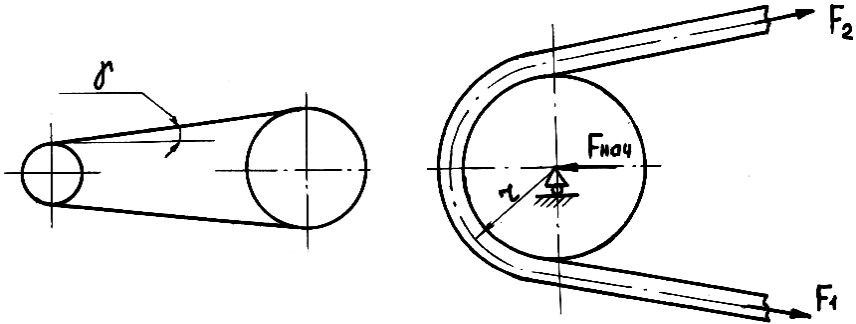


Рис. 23.7. Силы натяжения ветвей ремня

Напряжения в сечениях ведущей и ведомой ветвей ремня от начального натяжения

$$\sigma_0 = \frac{F_0}{A},$$

и при действии внешней нагрузки

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A},$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения ремня.

Наибольшие напряжения испытывают наружные волокна в зоне контакта ремня с малым шкивом. Здесь к основным растягивающим напряжениям  $\sigma_1$  от полезной нагрузки добавляются дополнительные напряжения растяжения  $\sigma_{ц}$  и  $\sigma_{и}$  соответственно от центробежных сил и изгиба ремня (как стержня) вокруг шкива (рис. 23.8), следовательно,

$$\sigma_{1max} = \sigma_1 + \sigma_{ц} + \sigma_{и}.$$

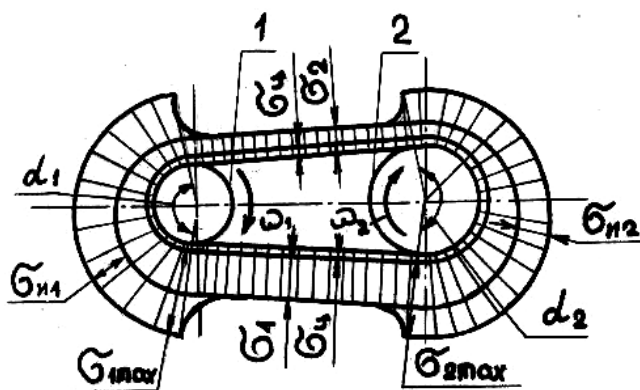


Рис. 23.8. Распределение напряжений в ремне

Фактическую тяговую способность передачи характеризует окружная сила  $F_t$  или вращающий момент  $T_1$ , который может развить ведущий шкив:

$$T_1 = \psi F_0 \cdot d_1, \quad (23.1)$$

где  $\psi$  – коэффициент тяги.

Из равенства (23.1) видно, что тяговая способность передачи возрастает при увеличении силы  $F_0$  начального натяжения ветвей ремня и коэффициента тяги  $\psi$ . С увеличением силы  $F_0$  возрастает сила натяжения  $F_1$  ведущей ветви под нагрузкой и существенно снижается долговечность ремня.

Для получения высокой тяговой способности передач с плоским ремнем рекомендуется обеспечивать  $\alpha \geq 150^\circ$ .

Благодаря хорошему сцеплению ремня со шкивом клиноременные передачи хорошо работают при углах обхвата  $\alpha \geq 120^\circ$ .

Коэффициент тяги

$$\psi = \frac{F_t}{2F_0}$$

Экспериментально установлено, что коэффициенты тяги  $\psi$  и упругого скольжения ремня  $\varepsilon$  взаимосвязаны (кривая скольжения, рис. 23.9).

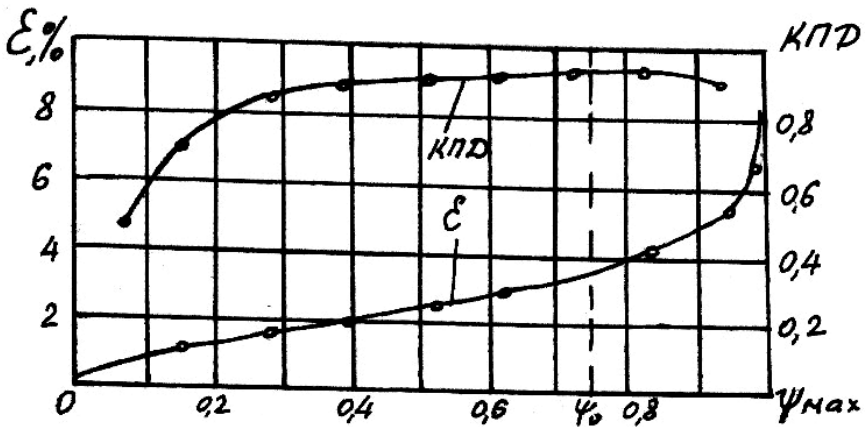


Рис. 23.9. Кривая скольжения и зависимость КПД от коэффициента тяги в клиноременной передаче

**КПД передач.** При работе плоскоремной передачи часть энергии расходуется на упругий гистерезис при циклическом деформировании ремня (растяжение, сдвиг, изгиб), на скольжение ремня по шкивам, аэродинамическое сопротивление движению ремня и шкивов, а также трение в подшипниках валов передачи.

В клиноременной передаче к этим потерям добавляются потери на трение при радиальном перемещении ремня в процессе его входа в канавку и выхода из нее.

КПД ременной передачи

$$\eta = \frac{T_2 \cdot \omega_2}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{T_2}{T_1 i}$$

зависит от коэффициента тяги  $\psi$  (см. соотношение (23.1)) и соответствующего ему коэффициента относительного скольжения ремня  $\varepsilon$  (см. рис. 23.9). Наибольший КПД соответствует некоторому значению  $\psi_0$  на линейном участке кривой скольжения. Когда  $\psi > \psi_0$ , КПД снижается из-за нарастания потерь на трение.

При оптимальной нагрузке  $\eta = 0,97-0,98$  для плоскоременной передачи и  $0,92-0,97$  – для клиноременной.

**Главные критерии работоспособности передачи.** Опыт эксплуатации ременных передач показал, что их работоспособность ограничена *тяговой способностью и долговечностью ремня*.

Расчет ременных передач на тяговую способность основан на показателях тяговой способности и долговечности.

Для расчета используют условие работоспособности передачи в виде

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A} \leq \sigma_t, \quad (23.2)$$

где  $\sigma_t$  – удельная окружная сила, называемая полезным напряжением;

$A$  – площадь поперечного сечения ремня (комплекта ремней);

$\sigma_t$  – допускаемое полезное напряжение.

Удельная окружная сила  $\sigma_t$  – параметр, характеризующий тяговую способность передачи.

**Расчет тяговой способности передач с нормальными и узкими клиновыми ремнями** сводится к определению требуемого числа ремней по соотношению, вытекающему из условия (23.2):

$$z = \frac{F_t \cdot C_z}{A_1 \cdot \sigma_t},$$

где  $C_z$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между ремнями в комплекте (технологическое ограничение),  $C_z = 0,85-1$ ;

$A_1$  – площадь сечения одного ремня.

**Расчет тяговой способности плоскоременной передачи** сводится к определению ширины ремня:



$$b = \frac{F_t \cdot C_p}{h \cdot \sigma_t},$$

где  $C_p$  – коэффициент динамичности, учитывающий режим работы передачи.

$h$  – толщина ремня.

## ГЛАВА 24. ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 24.1. Общие сведения. Цепи. Материалы

Цепными называют передачи с помощью цепей. Обычно передача состоит из ведущей 1 и ведомой 2 звездочек, связанных между собой приводной цепью 3 (в машиностроении применяют также грузовые и тяговые цепи) (рис. 24.1).

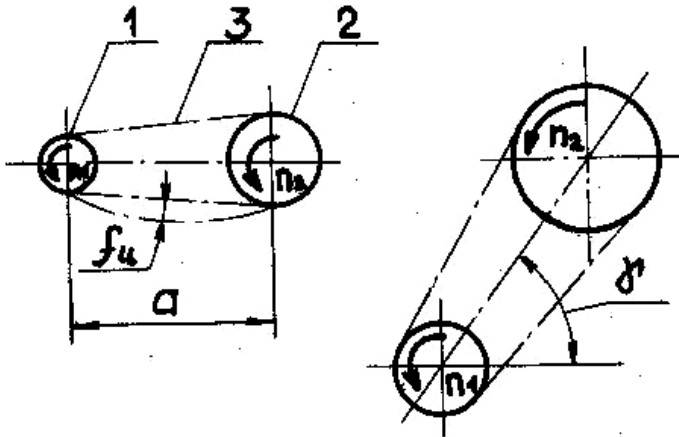


Рис. 24.1. Цепные контуры

Цепные передачи используют в качестве понижающих или повышающих для передачи вращения между параллельными валами. Передаваемая мощность обычно не превышает 100 кВт, межосевое расстояние до 6–8 м.

Цепные передачи в сравнении с ременными имеют значительно меньшие габариты и нагрузки на валы, более высокий КПД ( $\eta = 0,96-0,98$ ), в них исключено окружное проскальзывание цепи по звездочке.

*Недостатки передачи:* «вытягивание» цепей (увеличение шага цепей вследствие износа шарниров) и, как следствие, необходимость применения натяжных устройств, необходимость ухода при эксплуатации (смазка, регулирование), шум, неравномерность хода.

**Роликовая цепь** состоит из последовательно чередующихся внутренних 1 и внешних 2 звеньев, которые шарнирно соединены между собой. Каждое звено выполнено из двух пластин, напрессованных на втулки 3 (у внутренних звеньев) или оси 4 (у наружных звеньев). Втулки и оси образуют шарниры, которые обеспечивают «гибкость» цепи. Для уменьшения износа зубьев звездочек на втулку перед сборкой звена надевают ролик 5, свободно вращающийся на ней (рис. 24.2).

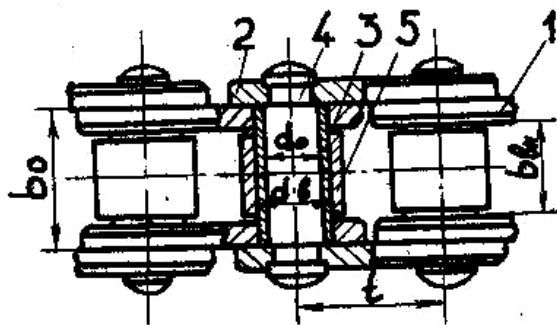


Рис. 24.2. Роликовая цепь

Основным параметром приводных цепей является шаг  $t$  – расстояние между осями двух смежных роликов наружного или внутреннего звена, от которого зависит несущая способность цепи. Основные размеры и характеристики цепей зависят от шага.

**Материалы.** Пластины (2, 1 на рис. 24.2) цепей изготавливают из среднеуглеродистых и легированных сталей 45, 50, 40X, 40XH и др. и затем закалывают до твердости не менее 32 HRC. Оси, втулки и ролики (4, 3, 5 на рис. 24.2) обычно изготавливают из сталей 15, 15X, 20X, 12ХН3А и др., цементуют и подвергают закалке до твердости

не менее 45 HRC. Звездочки тихоходных слабонагруженных передач изготавливают из чугуна СЧ 20 с закалкой или из других антифрикционных высокопрочных марок чугуна.

Звездочки быстроходных и тяжелонагруженных передач изготавливают из углеродистых легированных сталей (45, 40Х, 40ХН) или из сталей 15, 20, 12Х2Н4А.

Для обеспечения удовлетворительной работы цепи на средних и повышенных скоростях минимальное число зубьев ведущей звездочки ограничивают. На основании экспериментальных исследований, опыта проектирования и эксплуатации передач во многих странах принято  $z_{1\min} \geq 19$  при  $v_{ц} > 2$  м/с, где  $v_{ц}$  – скорость цепи. В тихоходных передачах допускается  $z_{1\min} = 13-15$ .

## 24.2. Усилия в элементах передачи. Расчет передачи

Натяжение от силы тяжести

$$F_g = \frac{q \cdot a^2}{8 f_{ц}},$$

где  $q$  – масса цепи длиной 1 м;

$a$  – межосевое расстояние;

$f_{ц}$  – стрела провисания.

Провисание обеспечивает более плавную работу передачи и меньшее изнашивание в шарнирах цепи. Стрелу провисания ведомой ветви новой цепи на основании практического опыта назначают равной  $f_{ц} = 0,02a$  при  $\gamma \leq 40^\circ$  и  $(0,015-0,01)a$  при  $\gamma > 40^\circ$ , где  $\gamma$  – угол наклона ветви к горизонту.

В процессе работы под нагрузкой ведущая ветвь растягивается силой

$$F_1 = F_t + F_q + F_v + F_d,$$

где  $F_t$  – окружная сила;

$F_q$  – натяжение в ведомой ветви от силы тяжести;

$F_v = q \cdot v_{ц}^2$  – натяжение цепи от действия центробежных сил;

$F_d$  – динамическая нагрузка в передаче от неравномерного хода цепи.

В расчетах цепных передач влияние  $F_d$  на работоспособность учитывают с помощью специальных коэффициентов.

Ведомая ветвь под нагрузкой растягивается силой

$$F_2 = F_q + F_v.$$

Окружная сила

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{P}{v_c},$$

где  $P$  – мощность, передаваемая цепью;

$d_1$  – диаметр делительной окружности ведущей звездочки.

Нагрузка на валы цепной передачи при средних скоростях движения цепи ( $v_c < 15$  м/с)

$$F_r = k \cdot F_t,$$

где  $k = 1,15$  (для горизонтальной передачи) и  $1,05$  (для вертикальной).

Число зубьев  $z_1$  и  $z_2$  звездочек выбирают из условия обеспечения минимальных габаритов и более плавного хода цепи.

На практике стремятся к тому, чтобы  $a = (30-50)t$ .

В основу расчета износостойкости шарниров положено условие триботехнической надежности в форме

$$P_{и} \leq P_{и}^{\ast},$$

где  $P_{и}$  и  $[P_{и}]$  – соответственно расчетное и допускаемое по износостойкости давление (удельная нагрузка) в шарнире.

Расчетное давление в шарнире связано с внешней нагрузкой и геометрическими параметрами цепи очевидным соотношением, вытекающим из уравнения равновесия звена цепи:

$$P_{и} = \frac{F_t}{A_{оп}} \cdot \frac{K_d}{K_m} = P \frac{K_d}{K_m},$$

где  $P = \frac{F_t}{A_{оп}}$  – номинальное давление в шарнире;

$K_d$  – коэффициент динамичности;  
 $K_m$  – коэффициент, учитывающий число рядов цепи (равен 1; 1.7; 2.5; 3 соответственно для  $m = 1; 2; 3; 4$ );  
 $A_{оп}$  – опорная поверхность шарнира.  
 Коэффициенты  $K_d$  и  $K_m$  представляют собой ограничения эксплуатационного и конструктивного характера.

## ГЛАВА 25. НЕСУЩИЕ ДЕТАЛИ И ОПОРНЫЕ УСТРОЙСТВА МЕХАНИЗМОВ

### 25.1. Валы и оси. Классификация. Расчет на прочность. Материалы

Для поддержания вращающихся деталей и передачи вращающего момента от одной детали к другой (в осевом направлении) в конструкциях используют прямые валы в форме тел вращения, устанавливаемые в подшипниковых опорах.

В зависимости от воспринимаемых сил различают простые валы, торсионные валы и оси.

**Расчет на прочность.** Этот расчет является основным для валов приводов, поэтому его выполняют в три этапа.

*На первом этапе* (предварительный расчет) при отсутствии данных об изгибающих моментах диаметр вала (в миллиметрах) приближенно может быть найден по известному вращающему моменту  $T$  из условия прочности по заниженным значениям допускаемых напряжений при кручении:

$$d = \sqrt[3]{\frac{1000T}{0,2 \tau_k}} = \sqrt[3]{\frac{9554P}{0,2 \tau_k n}}$$

где  $T$  – вращающий момент, Н·м;

$\tau_k$  – допускаемое напряжение на кручение (12–20 МПа для стальных валов);

$P$  – передаваемая мощность, кВт;

$n$  – частота вращения вала, мин<sup>-1</sup>.

На втором этапе разрабатывают конструкцию вала, обеспечивая условия технологичности изготовления и сборки.

На третьем этапе производят проверочный расчет – оценку статической прочности и сопротивления усталости. Здесь же выполняют расчеты на жесткость, устойчивость и колебания.

На статическую прочность валы рассчитывают по наибольшей возможной кратковременной нагрузке (с учетом динамических и ударных воздействий), повторяемость которой мала и не может вызвать усталостного разрушения (например, по нагрузке в момент пуска установки). Валы могут быть нагружены постоянными напряжениями, например, от неуравновешенности вращающихся деталей.

Так как валы работают в основном в условиях изгиба и кручения, а напряжения от осевых сил малы, то **эквивалентное напряжение** в точке наружного волокна по энергетической теории прочности определяют по формуле

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 3\tau_{\text{к}}^2},$$

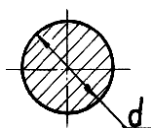
где  $\sigma_{\text{и}}$  и  $\tau_{\text{к}}$  – соответственно наибольшее напряжение в расчетном сечении вала от изгиба моментом  $M_{\text{и}}$  и кручения моментом  $M_{\text{к}}$ .

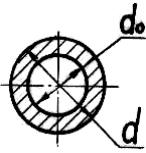
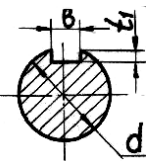
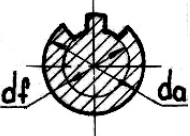
Напряжения

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{x}}}, \quad \tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{з}}}{W_{\text{p}}},$$

где  $W_{\text{x}}$  и  $W_{\text{p}}$  – соответственно осевой и полярный моменты сопротивления сечения вала.

Моменты сопротивления сечений валов

Форма сечения	Эскиз	Момент сопротивления
Круглое		$W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32}$ $W_{\text{к}} = 2W_{\text{и}}$

Форма сечения	Эскиз	Момент сопротивления
Кольцевое		$W_{и} = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \xi^4)$ $W_{к} = 2W_{и}$ $\xi = d_0/d$
Со шпоночной канавкой		$W_{и} = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bh}{16d} (2d - h)^2$ $W_{к} = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bh}{16d} (2d - h)^2$
Со шлицами		$W_{и} = \frac{\pi d^4 - bZ}{32D} (D - d)(D + d)^2$ $W_{к} = 2W_{и}$

Так как  $W_{\rho} = 2W_{x}$ , то можно записать

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_{и}^2 + 0,75 M_z^2},$$

где  $d$  – диаметр вала.

Обычно крутящий момент  $M_z$  (внутренний силовой фактор) в расчетном сечении вала равен вращающему моменту  $T$  (внешней нагрузке на вал).

Запас прочности по пределу текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экр}}} \leq n_T.$$

Обычно принимают  $n_T = 1,2-1,8$ .

Сечение (сечения), в котором следует определить запас  $n_T$ , находят после построения эпюр изгибающих и крутящих моментов. Ес-

ли нагрузки действуют на вал в разных плоскостях, то сначала силы проецируют на координатные оси и строят эпюры моментов в координатных плоскостях. Далее производят геометрическое суммирование изгибающих моментов.

Если угол между плоскостями действия сил не более  $30^\circ$ , то для простоты считают, что все силы действуют в одной плоскости.

Технические условия на изготовление валов зависят от требований к конструкции. Обработку валов обычно производят в центрах.

Наиболее жесткие требования по точности и шероховатости поверхности предъявляются к шейкам валов, на которые устанавливают подшипники качения. Шероховатость  $Ra$  шеек назначают равной 0,32–1,25 мкм. Овальность и конусность мест посадки определяются допуском на диаметр шейки.

Для изготовления валов используют углеродистые стали марок 20, 30, 40, 45 и 50, легированные стали марок 20X, 40X, 40XH, 18X2H4A, 40XH2MA и др., титановые сплавы BT3-1, BT6 и BT9.

Выбор материала, термической и химико-термической обработки определяется конструкцией вала и опор, условиями эксплуатации. Так, например, быстроходные валы, вращающиеся в подшипниках скольжения, требуют высокой твердости цапф (посадочных хвостовиков валов), поэтому такие валы изготавливают из цементуемых сталей 12X2H4A, 18XГТ или азотируемых сталей 38X2MЮА и др. Валы-шестерни по этой же причине выполняют из цементуемых сталей 12XH3A, 12X2H4A и т. п. Валы под насадные зубчатые колеса серийных редукторов изготавливают из улучшенной стали 45 (255–285 НВ) и 40X (269–302 НВ). Участки валов, контактирующие с уплотнительными манжетами, должны иметь твердость поверхности не менее 30 HRC.

Длинные полые валы иногда выполняют (намоткой) из композиционных материалов.

## 25.2. Опоры валов и осей. Классификация подшипников

Подшипники бывают:

- скольжения;
- качения.

**Подшипник скольжения** является парой вращения, он состоит из **опорного участка вала (цапфы) 1** и соответственно **подшипника 2**, в котором скользит цапфа (рис. 25.1).



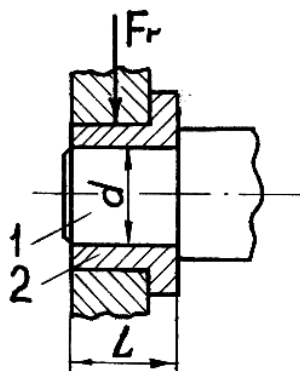


Рис. 25.1. Подшипник скольжения

**Подшипники качения** являются основным видом опор вращающихся (качающихся) деталей. Подшипник состоит из **наружного 1** и **внутреннего 2** колец, между которыми расположены **тела качения 3**. Для предохранения тел качения от соприкосновения между собой их отделяют друг от друга **сепаратором 4**, который существенно уменьшает потери на трение (рис. 25.2).

Подшипники качения стандартизованы, их изготавливают подшипниковые заводы в условиях высокоспециализированного массового производства. Поэтому инженеру приходится проектировать подшипники качения крайне редко. Гораздо чаще требуется подобрать подшипник для узла опоры, спроектировать корпус опоры, обеспечивая технологичность, контроле- и ремонтпригодность узла, а также оценить остаточную долговечность подшипника при модернизации или форсировании режима работы оборудования.

**Классификация.** Подшипники качения классифицируют по нижеперечисленным признакам.

I. По форме тел качения подразделяют:

- **на шариковые;**
- **роликовые** с короткими цилиндрическими, коническими, бочкообразными, игольчатыми и витыми роликами (рис. 25.3).

II. По направлению воспринимаемых относительно оси вала сил разделяют на типы:

- **радиальные** (см. рис. 25.2, а, 25.3, а), воспринимающие преимущественно радиальные нагрузки, действующие перпендикулярно оси вращения подшипника;

- *радиально-упорные* (см. рис. 25.2, б, 25.3, б), воспринимающие одновременно действующие радиальные и осевые нагрузки;
- *упорно-радиальные*, воспринимающие осевые нагрузки при одновременном действии незначительной радиальной нагрузки;
- *упорные*, воспринимающие только осевые силы.

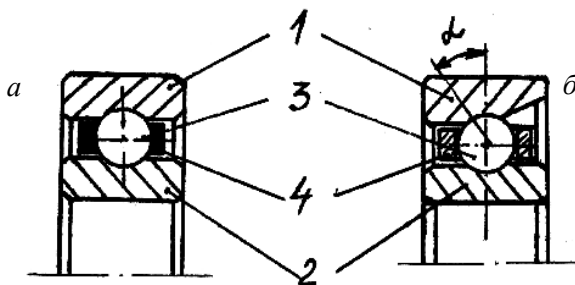


Рис. 25.2. Шарикоподшипники

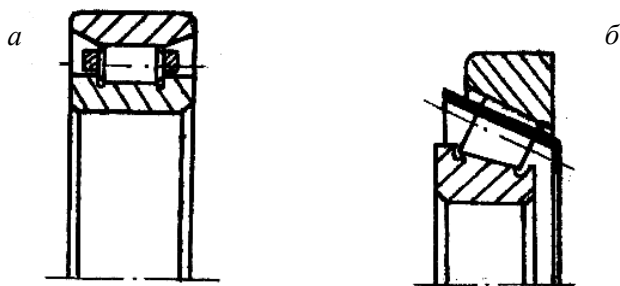


Рис. 25.3. Роликоподшипники

III. По способности самоустановки подшипники подразделяют на *несамоустанавливающиеся* и *самоустанавливающиеся*, допускающие поворот оси внутреннего кольца по отношению к оси наружного кольца.

IV. По числу рядов тел качения, расположенных по ширине, подшипники делят на *однородные* (см. рис. 25.2, 25.3), *двухрядные*, *четырёхрядные* и *многорядные*.

Основными потребительскими (внешними) характеристиками подшипников являются грузоподъемность, быстроходность, масса, габариты, потери энергии.

Подшипники одного и того же диаметра отверстия по наружному диаметру и ширине подразделяют на серии: сверхлегкую, особо легкую, легкую, легкую широкую, среднюю, среднюю широкую и тяжелую (рис. 25.4).

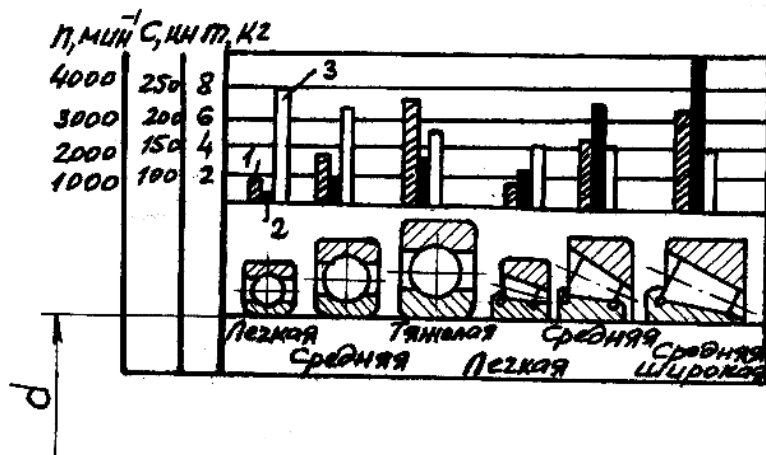


Рис. 25.4. Сравнительные параметры радиальных шарикоподшипников и радиально-упорных роликоподшипников различных серий при одинаковом диаметре отверстия  $d = 80$  мм:  
 1 – масса  $m$ ; 2 – динамическая грузоподъемность  $C$ ;  
 3 – предельная частота вращения  $n$

Для особо высокой частоты вращения и легких нагрузок целесообразно использовать подшипники сверхлегкой и особо легкой серий. Для восприятия повышенных и тяжелых нагрузок при высокой частоте вращения используют подшипники легкой серии, а при недостаточной их грузоподъемности в одной опоре размещают по два подшипника.

Кроме стандартных подшипников по специальному обоснованию изготавливают *особые подшипники*.

*Достоинства и недостатки подшипников.* Подшипники качения имеют ряд достоинств по сравнению с подшипниками скольжения:

- меньшие (в два-три раза) осевые размеры;
- меньшее трение и сопротивление пуску под нагрузкой и вращению при небольших и средних частотах вращения, постоянство сопротивления вращению;

– простоту технического обслуживания и подачи смазочного материала;

– низкую стоимость и взаимозаменяемость.

*Недостатки* подшипников качения по сравнению с подшипниками скольжения следующие: большие радиальные размеры; малая радиальная жесткость и, как следствие, склонность к возникновению колебаний вала из-за ритмичного прокатывания через нагруженную зону опоры; более сложный монтаж; большее сопротивление вращению (из-за трения между телами качения, кольцами, сепаратором и гидравлических потерь) при высоких частотах вращения и, как следствие, низкая долговечность (из-за перегрева).

Промышленность изготавливает подшипники качения пяти классов точности: 0, 6; 5; 4 и 2. Обозначения даны в порядке повышения точности, определяемой допусками на изготовление элементов, а также нормами плавности вращения (хода).

Основные размеры подшипников установлены ГОСТ 3478–79 (СТ СЭВ 402–76). В них входят: внутренний  $d$  и наружный  $D$  диаметры, ширина  $B$  (высота  $H$ ) и радиус  $r$  фасок колец.

**Материалы деталей подшипников.** Кольца и тела качения подшипников изготавливают в основном из шарикоподшипниковых высокоуглеродистых хромистых сталей ШХ15 и ШХ15СГ, ШХ20СГ, а также цементуемых легированных сталей 18ХГТ, 20Х2Н4А и др. При рабочей температуре до 100 °С тела качения и кольца обычно имеют твердость 60–64 HRC, шарики – 62–65 HRC.

Кольца и тела качения подшипников, работающих при повышенных температурах (до 500 °С), в агрессивных средах, изготавливают из жаропрочных и коррозионно-стойких сталей.

Сепараторы подшипников подвержены интенсивному изнашиванию из-за трения скольжения с телами качения и кольцами, поэтому сепараторы изготавливают из антифрикционных материалов. Сепараторы массовых подшипников изготавливают штамповкой из мягкой углеродистой стали, обладающей неплохими антифрикционными свойствами. Сепараторы высокоскоростных подшипников выполняют массивными из текстолита, фторопласта, дуралюмина, латуни и бронзы (материалы перечислены в порядке увеличения быстроходности подшипника).

Основные типы подшипников и их характеристики приведены в справочниках.

### 25.3. Динамическая грузоподъемность подшипников качения. Выбор подшипников и определение их ресурса

**Динамическая грузоподъемность подшипников.** Расчет удобнее выполнять по действующей нагрузке  $R$ :

$$L = \left( \frac{C}{R} \right)^q \leq L_p,$$

где  $L$  – номинальная долговечность подшипника, млн оборотов;

$C$  – динамическая грузоподъемность, Н;

$R$  – эквивалентная нагрузка, Н;

$q$  – показатель степени кривой усталости подшипника;

$L_p = \frac{6n}{10^5} L_n$  – расчетная долговечность подшипника, млн оборотов;

$n$  – частота вращения кольца, мин<sup>-1</sup>;

$L_n$  – расчетная долговечность подшипника, ч.

Под **динамической грузоподъемностью  $C$  радиальных и радиально-упорных подшипников** понимают (по договоренности) постоянную радиальную нагрузку (в ньютонах), которую подшипник с неподвижным наружным кольцом может воспринимать в течение номинальной долговечности в 1 млн оборотов. **Динамическая грузоподъемность упорных и упорно-радиальных подшипников** – постоянная центральная осевая нагрузка (в ньютонах), которую подшипник может воспринимать в течение номинальной долговечности в 1 млн оборотов одного из колец.

Принимают  $q = 3$  ( $m = 9$ ) для шарикоподшипников и  $q = 3,33$  ( $m = 6,66$ ) для роликоподшипников.

Эквивалентную нагрузку для подбора подшипников определяют с учетом особенности их работы в эксплуатационных условиях:

$$R = \chi V F_r + y F_a K_B K_T,$$

где  $\chi$  – коэффициент радиальной нагрузки;

$V$  – коэффициент вращения ( $V = 1$  при вращении внутреннего кольца,  $V = 1,2$  при вращении наружного кольца);

$F_r$  – радиальная сила;

$y$  – коэффициент осевой нагрузки;

$F_a$  – осевая сила;

$K_b$  – коэффициент безопасности, учитывающий влияние на долговечность подшипников характера внешних нагрузок;

$K_T$  – температурный коэффициент.

**Выбор подшипников и определение их ресурса.** Выбор подшипников качения производят по приведенной нагрузке  $R$  и расчетному ресурсу  $L$  (в млн оборотов) по формуле

$$C_{\text{расч}} = R^q \sqrt{L}.$$

Используя полученное расчетное значение динамической грузоподъемности, по справочнику или каталогу выбирают подшипник; при этом должно быть соблюдено условие  $C_{\text{расч}} \leq C$  ( $C$  – динамическая грузоподъемность подшипника по каталогу).

Если подшипник принят по конструктивным соображениям, то расчетом проверяют его ресурс:

$$L_h = \frac{10^5}{6n} \left( \frac{C}{R} \right)^q, \text{ ч.}$$

$$1 \text{ с}^{-1} (\omega) \approx 10 \text{ мин}^{-1} (n).$$

## 25.4. Муфты механических приводов. Общие сведения и классификация

**Муфтами** называют устройства, предназначенные для передачи вращения между валами совместно работающих узлов (агрегатов) машин, между частями составных валов (в валопроводах, трансмиссиях), а также для соединения валов с расположенными на них деталями (зубчатыми колесами, звездочками и т. д.).

Муфты бывают:

- общего назначения.
- управляемые;
- предохранительные.

1. Простейшую конструкцию имеют **втулочные муфты** (рис. 25.5, *а, б*), применяемые для соединения валов диаметрами до 60–70 мм (здесь рассматриваются лишь приводные механические муфты). В качестве муфт используют также торсионы со шлицевыми хвостовиками, входящими в шлицевые отверстия в хвостовиках соединяемых валов. Для облегчения монтажа приводов муфты выполняют обычно сборными, состоящими из полумуфт, которые соединяют после установки узлов на раме (станине и т. п.) с помощью болтов (рис. 25.5, *в*) и другими способами. Широко распространены муфты в виде автономных устройств (узлов), изготавливаемых на специализированных предприятиях (производствах). Это упрощает стандартизацию муфт. Для фиксирования их на хвостовиках соединяемых валов обычно используют шпоночные и шлицевые соединения (**муфты общего назначения**).

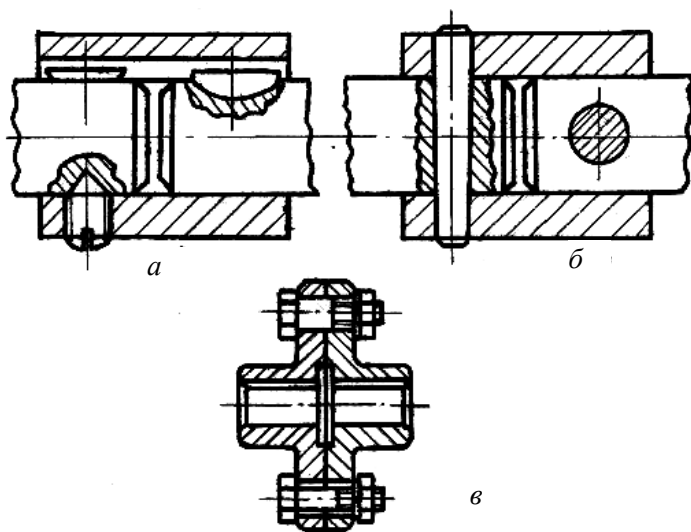


Рис. 25.5. Глухие муфты

2. Управляют работой (включают и выключают исполнительный механизм при работающем двигателе, облегчают пуск машины и др.) **управляемые муфты**.

3. Регулируют параметры (ограничивают частоты вращения (максимальную и минимальную), предохраняют детали и машины

от случайных (недопустимых) перегрузок) **предохранительные муфты**.

Основной нагрузкой для муфт является вращающий момент. В связи с этим их нагрузочную способность принято оценивать **допустимым вращающим моментом**  $T_n$ , значения которого вместе с размерами, массой и другими данными указывают в паспортах муфт.

Наибольший длительно действующий момент  $T_{дл}$  для муфт может быть определен теоретически или экспериментально. В упрощенном расчете, используя опыт проектирования и эксплуатации машин, принимают

$$T_{дл} = \frac{T_n}{K}; \quad T_n = K \cdot T_{дл},$$

где  $K = K_б \cdot K_д$  – коэффициент режима работы;

$K_б = 1,0–1,8$  – коэффициент безопасности, учитывающий характер последствий при выходе муфты из строя;

$K_д = 1,0–1,5$  – коэффициент, учитывающий характер передаваемой нагрузки (меньшие значения принимают при спокойной нагрузке, большие – при ударной и реверсивной).

Муфты разнообразны по конструкции. Наиболее распространенные из них стандартизованы и рассмотрены ниже. Выбор типа муфт производят в соответствии с конструктивными особенностями и требованиями, предъявляемыми к приводу (машине) в целом.

## 25.5. Муфты общего назначения. Особенности расчета

Муфты общего назначения:

- глухие;
- упругие;
- компенсирующие.

**Глухими** называют муфты, образующие жесткое соединение валов (составной вал). К их числу относят **втулочные** и **фланцевые муфты** (см. рис. 25.5), которые компенсируют радиальные смещения осей валов до 5 мкм для исключения чрезмерных дополнительных сил.

Несущая способность втулочных муфт обычно ограничена прочностью соединений (шпоночных, штифтовых, болтовых).



Для передачи больших вращающих моментов применяют фланцевые муфты, у которых полумуфты снабжены торцовыми зубьями. Такие муфты соединяют с валами с помощью сварки или эвольвентных шлицевых соединений.

**Упругие муфты** за счет использования своих упругих силовых элементов способны не только компенсировать радиальные и угловые смещения, но и демпфировать колебания, амортизировать толчки и удары.

**Упругие втулочно-пальцевые муфты** типа МУВП по ГОСТ 21424–75 применяют в приводе от электродвигателя и в других случаях для валов диаметрами 9–160 мм при вращающих моментах 6,3–16000 Н·м. Стандартом предусмотрены муфты типа I (с цилиндрическим отверстием для валов) и типа II (с коническим отверстием для валов); они могут быть выполнены в двух исполнениях: для длинных и коротких концов валов. Вращающий момент между полумуфтами передается через резиновые гофрированные втулки 1, надетые на пальцы 2. Муфты, в зависимости от типоразмера, допускают радиальное смещение осей валов на 0,2–0,4 мм, продольное смещение валов на 10–15 мм и угловое смещение на 1°. Их работоспособность определяется стойкостью втулок. Диапазон рабочих температур – от минус 40 до плюс 50 °С.

Для ограничения износа среднее контактное давление пальца на втулку

$$P = \frac{2T_{\text{дл}}}{z \cdot D_m \cdot d_n \cdot l} \leq P_i,$$

где  $z = 6$  – число пальцев;

$D_m$  – диаметр окружности расположения осей пальцев;

$d_n$  – диаметр пальцев;

$l$  – длина упругого элемента;

$[P]$  – допускаемое давление для резиновых втулок (обычно 2 МПа).

## 25.6. Предохранительные муфты

Включение и выключение предохранительных муфт обычно происходит автоматически, поэтому иногда их называют **самодействующими** или **самоуправляющимися**.

Основные требования к таким муфтам – точность срабатывания, быстродействие, надежность.

Предохранительные муфты служат для защиты механизмов, машин от перегрузок. Они срабатывают, если вращающий момент на ведомом валу механизма превышает некоторую предельную величину.

Предохранительные муфты бывают двух типов.

1. Фрикционные предохранительные муфты.

2. Предохранительные муфты с разрушающимся элементом – штифтом (рис. 25.6). Они просты и надежны в работе, обладают сравнительно высокой точностью срабатывания. Штифты изготавливают из хрупких материалов (высокоуглеродистой стали, чугуна, бронзы и др.), чтобы повысить быстродействие, и размещают в закаленных до высокой твердости втулках из сталей 40X, У8А, У10А и др.

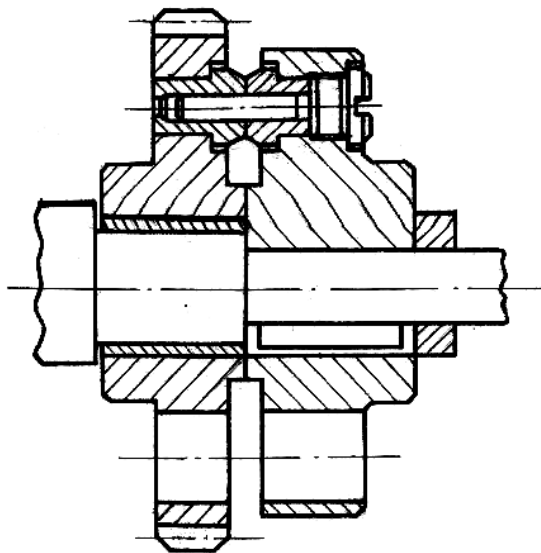


Рис. 25.6. Предохранительная муфта с разрушающимся элементом

Для обеспечения чистого среза штифтов торцы втулок в собранной муфте должны соприкасаться друг с другом.

После разрушения штифта (штифтов) от перегрузки муфта разъединяет кинематическую цепь и полумуфты вращаются относительно друг друга.

Диаметр штифта

$$d_{\text{шт}} = \sqrt{\frac{4T_n}{\pi \cdot R_1 \cdot z \cdot \tau_{\text{ср}}}},$$

где  $R_1$  – радиус муфты до оси срезного штифта;

$z$  – число штифтов (обычно  $z = 1-2$ );

$\tau_{\text{ср}}$  – предел прочности штифта на срез.

Для закаленных штифтов из стали 45 и Ст 5  $\tau_{\text{ср}} = 420 \text{ Н/мм}^2$ .

## ГЛАВА 26. СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ И УЗЛОВ МАШИН

Неразъемные соединения бывают сварные, паяные, клеевые, заклепочные, с натягом.

### 26.1. Сварные соединения. Общие сведения и характеристика. Изображения и обозначения на чертежах швов сварных соединений

Соединение деталей сваркой широко применяется в технике. При помощи сварки соединяются детали машин, механизмов, металлоконструкций, мостов, гражданских и промышленных зданий и т. п.

Сварное соединение может быть выполнено в основном двумя способами: сваркой плавлением и сваркой давлением.

При сварке плавлением поверхности кромок свариваемых деталей плавятся и после остывания образуют прочный сварной шов. Чаще всего сварка плавлением осуществляется газовой или дуговой (электродуговой) сваркой (рис. 26.1).

При газовой сварке горючий газ (например, ацетилен), сгорая в атмосфере кислорода, образует пламя, используемое для плавления. В зону плавления вводится прутковый присадочный материал, в результате плавления которого образуется сварной шов.

Сварка давлением осуществляется при совместной пластической деформации предварительно нагретых поверхностей свариваемых деталей. Эта деформация происходит за счет воздействия внешней силы. Сварка давлением осуществляется, как правило, одним из ви-

дов контактной электросварки: точечной (рис. 26.2, а), шовной-роликовой (рис. 26.2 б) и др.

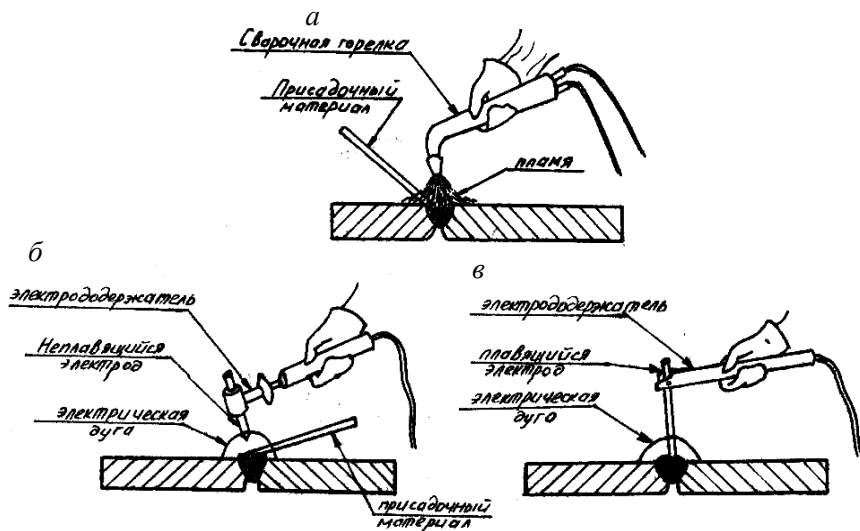


Рис. 26.1. Выполнение сварных соединений

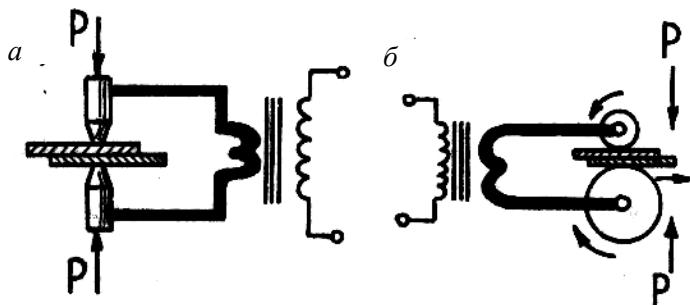


Рис. 26.2. Схемы сварки давлением

Помимо упомянутых способов в современной технике применяются и многие другие способы сварки: электрошлаковая, в защитных газах, ультразвуковая, лазером, индукционная и др.

ГОСТ 2.312–72 устанавливает условные изображения и обозначения на чертежах швов сварных соединений. Штриховка изображения сечений свариваемых деталей выполняется в разные стороны.

Сварные швы делятся на однопроходные и многопроходные в зависимости от числа проходов сварочной дуги.

Независимо от способа сварки видимый шов условно изображается сплошной основной линией, а невидимый – штриховой. От изображения шва проводят линию-выноску, заканчивающуюся односторонней стрелкой (рис. 26.3).

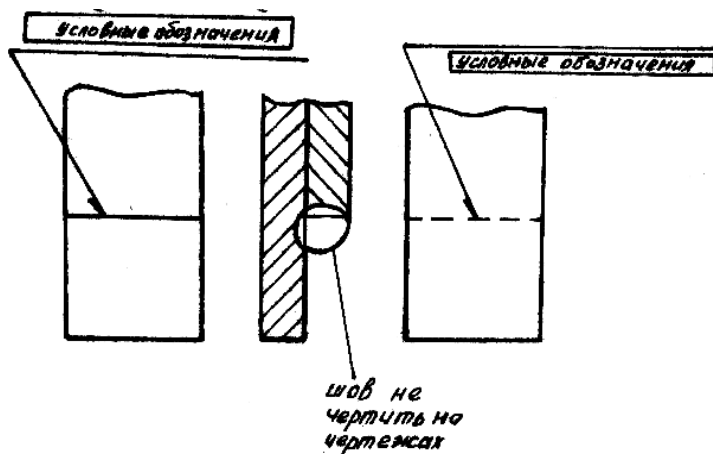


Рис. 26.3. Изображение сварных швов на чертежах

ГОСТ 2.312–72 устанавливает вспомогательные знаки, входящие в обозначение шва и характеризующие его.

1. Знак, проставляемый перед размером катета
2. Шов прерывистый с цепным расположением. Угол наклона линии около  $60^\circ$
3. Шов прерывистый с шахматным расположением
4. Шов по незамкнутой линии. Знак применяют, если расположение шва неясно из чертежа
5. Шов по замкнутой линии. Диаметр знака 3–5 мм
6. Шов выполнить при монтаже изделия, т. е. при установке его по монтажному чертежу на месте применения

ГОСТ 2.312-72

Знаки выполняются сплошными тонкими линиями.

Знаки (за исключением знака 5) должны быть одинаковой высоты с цифрами, входящими в обозначение шва.

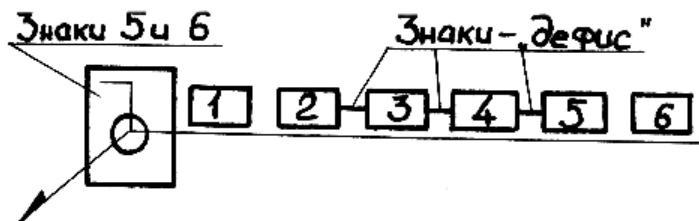


Рис. 26.4. Структура условного обозначения стандартного шва

Структура условного обозначения стандартного сварного шва приведена на схеме (рис. 26.4). На схеме применены следующие обозначения:

- 1) обозначение стандарта на типы и конструктивные элементы швов сварных соединений;
- 2) буквенно-цифровое обозначение шва по предыдущему стандарту;
- 3) условное обозначение способа сварки по этому же стандарту (допускается не указывать);
- 4) для швов, тип которых характеризуется катетом шва, про-  
ставляют:
  - а) знак 1;
  - б) размер катета в миллиметрах;
- 5) для прерывистого шва про-  
ставляют (рис. 26.5):
  - а) размер длины элемента провариваемого участка  $l$ , мм;
  - б) знак 2 или 3;
  - в) размер шага  $t$ , мм;
- 6) знак 4.

В сварочном производстве применяются стандартные сварные швы, параметры которых определяются соответствующими стандартами.

Типы швов определяет ГОСТ 5264–80. Сварные соединения из алюминия и алюминиевых сплавов выполняются швами по ГОСТ 14806–69. ГОСТ 16310–70 предусматривает типы швов для сварки изделий из винилпласта и полиэтилена. Кроме того, суще-

ствует еще ряд стандартов (ГОСТ 11533–75; ГОСТ 15164–78; ГОСТ 14776–69; ГОСТ 15878–70 и т. д.), определяющих типы и конструктивные элементы швов иных сварных соединений, а также способы их сварки.

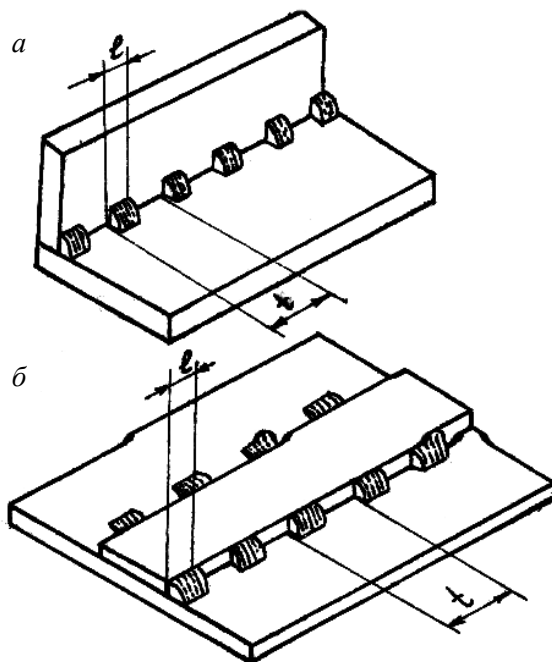


Рис. 26.5. Прерывистые сварные швы

Каждый стандартный шов имеет буквенно-цифровое обозначение, полностью определяющее конструктивные элементы шва. Буквенная часть обозначения определяется видом сварного соединения.

1. Стыковое соединение (С) – свариваемые детали соединяются по своим торцовым поверхностям.

2. Угловое соединение (У) – свариваемые детали расположены под углом и соединяются по кромкам.

3. Тавровое соединение (Т) – торец одной детали соединяется с боковой поверхностью другой детали.

4. Соединение внахлестку (Н) – поверхности соединяемых деталей частично перекрывают друг друга.

Между кромками свариваемых деталей предусматривается зазор величиной 0–5 мм. В зависимости от требований, предъявляемых к сварному соединению, кромки свариваемых деталей подготавливаются по-разному. Сварка может выполняться во всех четырех видах сварного соединения без скоса кромок и со скосом одной или двух кромок. Скосы могут быть симметричными и несимметричными, прямолинейными и криволинейными.

Совокупность всех конструктивных особенностей стандартного шва обозначается *цифрой*, которая совместно с буквенным обозначением вида сварного соединения определяет буквенно-цифровое обозначение типа шва по соответствующему стандарту, например: С1, С2, С3, ..., У1, У2, У3, ..., Т1, Т2, Т3, ..., Н1, Н2, ... и т. п.

По способу осуществления механизации технологического процесса различают ручную, полуавтоматическую и автоматическую сварку. Соответствующие стандарты (ГОСТ 2.312–72, ЕСКД) устанавливают условные обозначения способов сварки. Например:

П – полуавтоматическая сварка под флюсом;

А – автоматическая сварка под флюсом;

ПЗ – полуавтоматическая сварка плавящимся электродом в защитных газах;

АНЗ – автоматическая сварка неплавящимся электродом в защитных газах;

АЗ – автоматическая сварка плавящимся электродом в защитных газах и др.

Швы сварных соединений могут выполняться усиленными (рис. 26.6). Усиление (выпуклость) шва определяется величиной  $q$ . Некоторые типы швов (отдельные швы тавровых, нахлесточных и угловых соединений) характеризуются величиной  $K$  (рис. 26.6, а), называемой катетом шва.

Условное обозначение шва, изображенного на рис. 26.7, расшифровывается следующим образом:

1)  $\overline{\square}$  – шов выполняется при монтаже изделия;

2) ГОСТ 5264–80 – шов для сварки деталей из углеродистой стали ручной дуговой сваркой (в условном обозначении шва способ сварки не указан);

3) С18 – стыковой двусторонний шов со скосом двух кромок. Размеры скоса кромок приведены в ГОСТ 5264–80, который устанавливает форму кромок;



- 4) знаки 4 указывают, что усиление снято с обеих сторон;  
 5) шероховатость поверхности шва: с лицевой стороны –  $Rz20$ , с обратной стороны –  $Rz80$ .

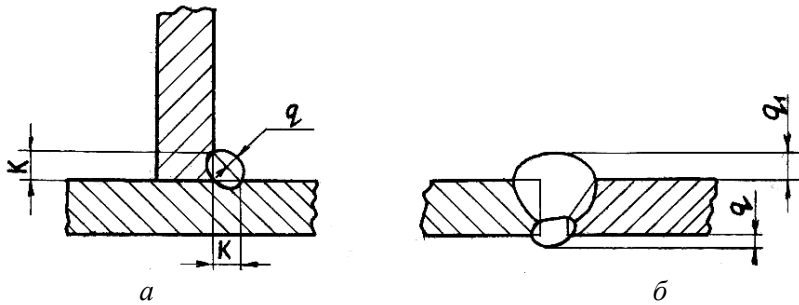


Рис. 26.6. Усиленные сварные швы

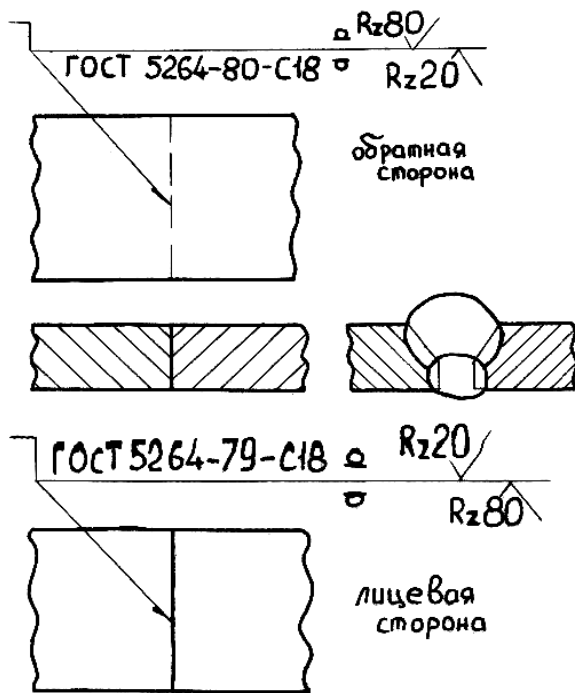


Рис. 26.7. Стыковые сварные соединения

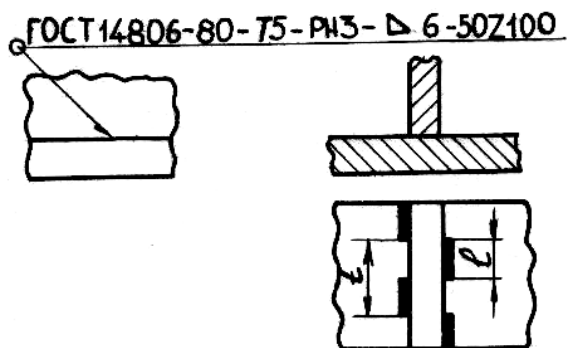


Рис. 26.8. Тавровое сварное соединение

На рис. 26.8 представлен сварной шов, характеризующийся следующими данными:

- 1) ○ – шов выполнен по замкнутой линии;
- 2) ГОСТ 14806-80 – шов для сварки алюминия;
- 3) Т5 – тавровый двусторонний шахматный шов без скоса кромок (любая сторона принимается за лицевую);
- 4) РНЗ – ручная сварка неплавящимся электродом в защитных газах (допускается не указывать);
- 5) ▷ 6 – катет шва 6 мм;
- 6) длина провариваемого участка / 50 мм;
- 7) шаг  $t$  100 мм.

Диаметр сварной точки устанавливают в зависимости от толщины  $S$  свариваемых деталей:  $d = 1,2S + 4$  мм. Рекомендуемое расстояние между точками  $a = 3d$  при сварке двух элементов и  $a = 4d$  при сварке трех элементов.

## 26.2. Расчет на прочность и проектирование сварных соединений при постоянных нагрузках

Расчет и проектирование сварных соединений (конструкций) сводится к выбору вида соединения, способа сварки, марки электрода, рациональному размещению сварных швов, определению сечения и длины швов из условия равнопрочности наплавленного металла и материала соединяемых деталей. Размеры соединяемых де-

талей обычно известны заранее из условий прочности, жесткости, устойчивости или конструктивных соображений.

Сварные швы бывают:

- 1) стыковые;
- 2) лобовые;
- 3) фланговые (угловые);
- 4) комбинированные.

**Стыковые швы** рассчитывают на прочность по номинальному сечению соединяемых деталей (без учета утолщения швов) как целые детали. От внешней растягивающей силы  $F$  в сечении шва возникают напряжения растяжения

$$\sigma_p = \frac{F}{l \cdot S}, \quad \sigma_p = \frac{N}{A}, \quad (26.1)$$

где  $l$  и  $S$  – соответственно длина шва и толщина соединяемых деталей.

Условие прочностной надежности

$$\sigma_p \leq [\sigma'_p]. \quad (26.2)$$

В расчетах принимают  $[\sigma'_p] = (0,9-1,0)[\sigma_p]$ , где  $[\sigma_p]$  – допускаемое напряжение при растяжении основного материала.

Допустима растягивающая сила при обращении неравенства (26.2) в равенство  $F = [\sigma'_p] \cdot l \cdot S$ .

**Нормальные напряжения** в шве при совместном действии внешней силы  $F$  и изгибающего момента  $M$  (рис. 26.9)

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} + \frac{F}{l \cdot S} \leq [\sigma'_p], \quad (26.3)$$

где  $M$  – момент сопротивления сечения шва (детали) при изгибе.

**Лобовые и фланговые (угловые) швы** разрушаются по сечению, проходящему через биссектрису прямого угла (рис. 26.10).



Рис. 26.9. К расчету сварного соединения встык

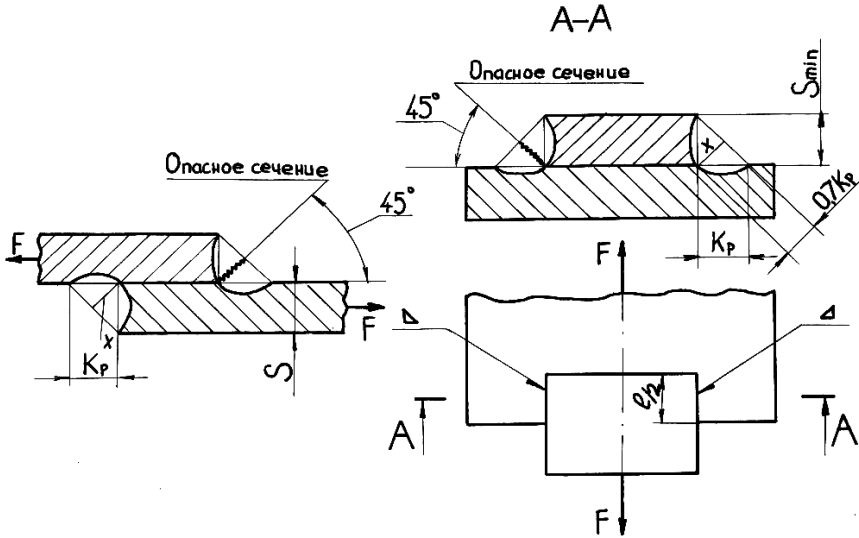


Рис. 26.10. К расчету лобовых и фланговых сварных швов

Площадь расчетного сечения

$$A = L \cdot K_p \cdot \cos 45^\circ = 0,7 K_p \cdot L,$$

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{K_p},$$

$$x = \cos 45^\circ \cdot K_p = 0,7 K_p,$$

$$A = x \cdot L = 0,7 K_p \cdot L,$$

где  $L$  – общая длина (периметр) сварного шва;

$K_p$  – расчетный катет шва.

Угловой шов при нагружении испытывает сложное напряженное состояние. Однако в упрощенном расчете такой шов условно рассчитывают на срез.

Условие прочности шва по допускаемым напряжениям:

$$\tau = \frac{F}{0,7 K_p \cdot L} \leq \tau_{ш} ,$$

где  $\tau$  – номинальное напряжение среза;

$\tau_{ш}$  – допускаемое напряжение в сварном шве при срезе.

В расчетах принимают

$$K_p = (0,9-1,2) \cdot S_{\min},$$

где  $S_{\min}$  – наименьшая толщина свариваемого элемента  $K_{p\min} > 3$  мм при  $S > 3$  мм.

$$l \geq 30 \text{ мм}; l_a \geq 30 \text{ мм}; l_\phi \leq 50 K.$$

**Допустимая растягивающая нагрузка**

$$F = 0,7 K_p \cdot L \cdot \tau_{ш} .$$

**Соединение комбинированным** (лобовым и фланговым) **швом** при действии момента в плоскости стыка при упрощенном расчете рассчитывают, полагая, что швы работают независимо.

**Тавровые соединения**, выполненные угловыми швами, рассчитывают по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_{ш}} \leq \tau_{ш}$$

с учетом числа швов.

Момент сопротивления продольного сечения шва

$$W_{ш} = \frac{0,7 K_p \cdot h^2}{6} ,$$

где  $h$  – высота листа ( $h \gg K_p$ ).

Если такие соединения сварены, как и соединения встык, то расчет выполняют по формулам (26.1) и (26.3).

*Угловые соединения* не используются как силовые; их применяют, как правило, для образования профилей из отдельных элементов.

### 26.3. Соединения пайкой и склеиванием

При соединении пайкой в отличие от сварки место спайки нагревается лишь до температуры плавления припоя, которая намного ниже температуры плавления материала соединяемых деталей. Соединение деталей получается благодаря заполнению зазора между ними расплавленным припоем.

Швы неразъемных соединений, получаемые пайкой и склеиванием, условно изображают по СТ СЭВ 138–76.



Припой или клей в разрезах (рис. 26.11, *а, б, г, д, е*) и на видах (рис. 26.11, *в*) изображают линией, которая в два раза толще основной сплошной. Для обозначения пайки (рис. 26.11, *а, б, в*) или склеивания (рис. 26.11, *г, д, е*) применяют условные знаки, которые наносят на линии-выноске от сплошной основной линии. Швы, выполненные пайкой или склеиванием по периметру, обозначаются линией-выноской, заканчивающейся окружностью диаметром 3–4 мм (рис. 26.11, *б, д*).

На изображении паяного соединения при необходимости указывают размеры шва и обозначения шероховатости поверхности.

В соединениях пайкой и склеиванием место соединения элементов в разрезах и на видах показывают утолщенной (в два раза) контурной линией.

Если же соединяемые элементы показаны в сечении зачерненными, то место соединения изображается просветом.

Обозначение соединений пайкой и склеиванием производится с помощью символов и знаков, проставляемых на линии-выноске, которая заканчивается стрелкой, указывающей непосредственно шов, или точкой при указании невидимых частей соединения.

Для пайки применяется символ ; для склеивания – .

На полке линии-выноски ставится номер пункта технических требований, где указана марка припоя или клея.

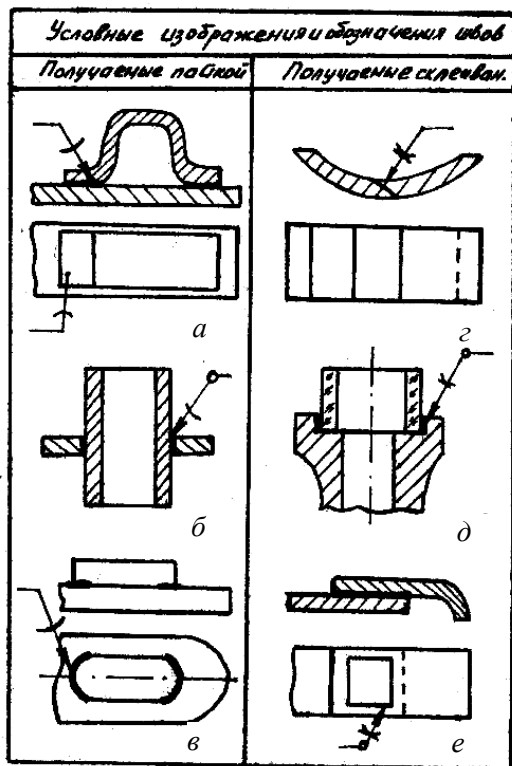


Рис. 26.11. Паяные и клеевые соединения

## 26.4. Соединения типа «вал–ступица».

### Общая характеристика и особенности расчета

Для передачи вращения от вала к ступице зубчатого колеса, шкива, звездочки и других соосных деталей широко используют различные соединения зацеплением. В **соединениях зацеплением** (шпоночных, шлицевых и др.) передача нагрузки осуществляется за счет силового замыкания деталей через шпонки, зубья и другие подобные детали. Благодаря этому соединения являются разъемными, осуществляют фиксацию деталей в окружном направлении и допускают осевое взаимное смещение деталей в процессе работы. Однако трудоемкость изготовления таких соединений довольно высокая.

### 26.4.1. Шпоночные соединения

Соединение двух соосных цилиндрических деталей (вала и ступицы) для передачи вращения между ними осуществляется с помощью **шпонки 1** – специальной детали, закладываемой в пазы соединяемых вала 2 и ступицы 3 (рис. 26.12).

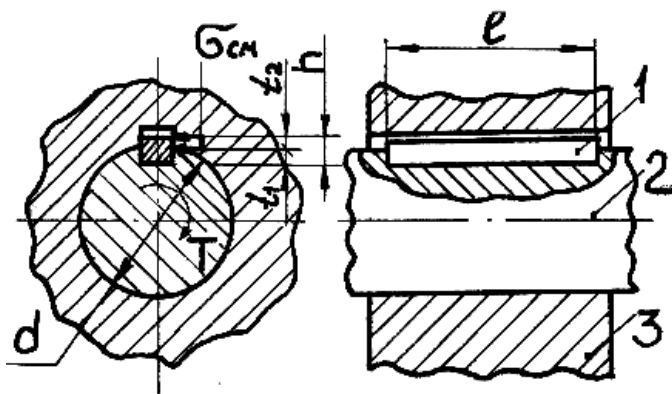


Рис. 26.12. Соединение призматической шпонкой

В машиностроении применяют **ненапряженные** (без нагрузки) **соединения** (с помощью призматических и сегментных шпонок) и **напряженные** (с помощью клиновых шпонок). Шпонки этих типов стандартизованы, их размеры выбирают по ГОСТ 23360–78, ГОСТ 24071–80 и ГОСТ 24068–80.

Основные достоинства соединений: простота конструкции и возможность жесткой фиксации насаживаемой детали в окружном направлении.

Однако соединения трудоемки в изготовлении, требуют ручной пригонки или подбора. Это ограничивает использование соединений в машинах крупносерийного и массового производства. Не рекомендуется применение соединений для быстро вращающихся валов ответственного назначения из-за сложности обеспечения концентричной посадки сопрягаемых деталей.

Основным для соединений призматическими шпонками является **условный расчет на смятие** (упругопластическое сжатие в зоне контакта).



Если принять для упрощения, что напряжения в зоне контакта распределены равномерно и плечо равнодействующей этих напряжений равно  $0,5d$  (где  $d$  – диаметр вала), то средние контактные напряжения (напряжения смятия, вызывающие смятие рабочих граней)

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{d \cdot l_p \cdot t_2} \leq \sigma_{\text{см}} \text{ ,} \quad (26.4)$$

где  $T$  – вращающий момент;

$l_p$  – рабочая длина шпонки (см. рис. 26.12);

$t_2 = 0,4h$  – глубина врезания шпонки в ступицу;

$\sigma_{\text{см}}$  – допускаемое напряжение на смятие.

На практике сечение шпонки подбирают по ГОСТ 23360–78 в зависимости от диаметра вала, а длину  $l$  шпонки назначают на 5–10 мм меньше длины ступицы. Затем по формуле (26.4) оценивают прочность соединения на смятие или вычисляют предельный момент, соответствующий напряжению  $\sigma_{\text{см}}$ .

### 26.4.2. Шлицевые соединения

**Общие сведения.** Шлицевое соединение условно можно рассматривать как многошпоночное, у которого шпонки выполнены как одно целое с валом. По сравнению со шпоночными соединениями они имеют меньшие радиальные габариты, высокую несущую способность, взаимозаменяемы и обеспечивают хорошее центрирование деталей. Эти преимущества позволяют использовать соединения в условиях массового производства конструкций и при большей частоте вращения валов (рис. 26.14).

По форме поперечного сечения различают три типа соединений: прямоугольные ГОСТ 1139–80; эвольвентные ГОСТ 6033–80; треугольные (изготавливаются по отраслевым стандартам).

**Проектирование и расчет соединений.** Основные размеры (наружный диаметр  $D$  и длину  $l$ ) шлицевого соединения задают при конструировании вала. Длину соединения принимают не более  $1,5D$ ; при большей длине существенно возрастают неравномерность распределения нагрузки вдоль зубьев и трудоемкость изготовления.

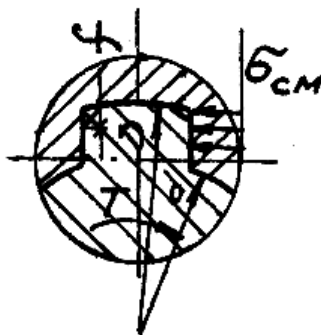


Рис. 26.13. Расчетная схема зуба шлицевого соединения

Учитывая, что соединения в машинах выходят из строя преимущественно из-за повреждения рабочих поверхностей зубьев (смятие, износ) и усталостного разрушения шлицевых валов, после проектирования выполняют проверочный расчет зубьев.

Условие прочности по допускаемым напряжениям смятия имеет вид

$$\sigma_{см} = \frac{2T}{z \cdot d_m \cdot h \cdot l \cdot \psi} \leq \sigma_{см} ,$$

где  $d_m$  – средний диаметр соединения;

$z$  – число зубьев;

$h$  и  $l$  соответственно высота и длина поверхности контакта зубьев;

$\psi$  – коэффициент, учитывающий неравномерное распределение нагрузки между зубьями и вдоль зубьев ( $\psi = 0,5-0,7$ );

$\sigma_{см}$  – допускаемое напряжение смятия на боковых поверхностях.

### 26.4.3. Профильные соединения

**Общие сведения.** Профильными называют соединения, в которых ступица (втулка) насаживается на фасонную поверхность вала и таким образом обеспечивается жесткое фиксирование деталей в окружном направлении и передача вращения (рис. 26.14).

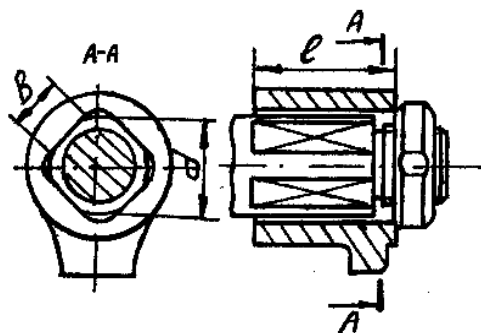


Рис. 26.14. Профильное соединение

Профильные соединения рассчитывают на смятие. Условие прочности по допускаемым напряжениям для соединения

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{3T}{b^2 l} \leq \sigma_{\text{см}} ,$$

где  $l$  – длина соединения, обычно  $l = (1-2)d$ ;

$b$  – ширина прямолинейной части грани;

$\sigma_{\text{см}}$  – допускаемое напряжение смятия, для термообработанных поверхностей  $\sigma_{\text{см}} = 100-140$  МПа.

#### 26.4.4. Штифтовые соединения

Штифтовые соединения применяют при небольших нагрузках, преимущественно в приборостроении.

Основные типы штифтов стандартизованы. Их изготавливают из углеродистых сталей 30, 45, 50 и др.

Штифтовое соединение работает на срез и смятие. Для расчета соединения используют те же зависимости. **Условие прочности при срезе радиального штифта** (рис. 26.15)

$$\tau = \frac{4F_t}{i \cdot A_t} \leq \tau_c ,$$

### а условие прочности на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F_t}{A_{\text{см}}} \leq \sigma_{\text{см}} \text{ ,}$$

где  $F_t$  – срезающая сила (осевая или окружная);

$i$  – число поверхностей среза;

$A_{\text{с}} = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь штифта при срезе;

$A_{\text{с}} = d D - d_1$  – площадь поверхности смятия (сжатия);

$\tau_{\text{с}} = 70\text{--}80$  МПа – допускаемое напряжение при срезе;

$\sigma_{\text{см}} = 200\text{--}300$  МПа – допускаемое напряжение при смятии.

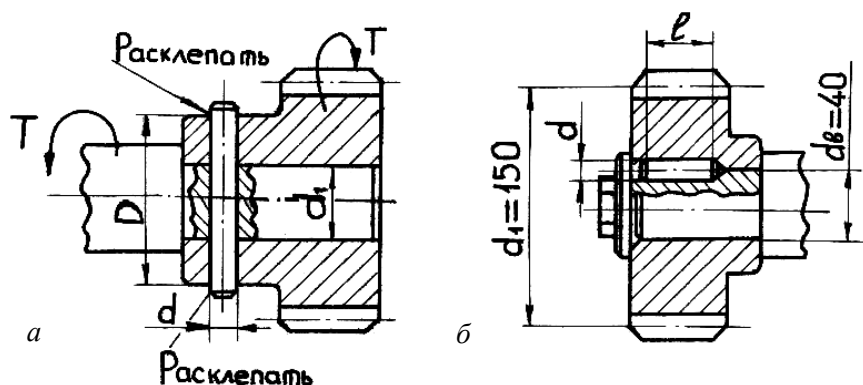


Рис. 26.15. Схемы к расчету соединений радиальным (а) и осевым (б) штифтами:  
 $d$  – диаметр штифта;  $d_1$  – диаметр вала

Срезающая сила при передаче вращающего момента  $F_t = \frac{2T}{d_1}$ .

**Осевые штифты (круглые шпонки)** применяют в машиностроении для передачи вращающего момента в неразъемных соединениях. Штифты диаметром  $d = (0,1\text{--}0,15)d_{\text{в}}$  и длиной  $l = (3\text{--}4)d_{\text{в}}$  ( $d_{\text{в}}$  – диаметр вала) устанавливают по посадке с натягом  $H7/r6$  в отверстия, совместно просверленные и развернутые при сборке в валу и ступице по

стыку посадочных поверхностей (рис. 26.15, б). Материалы детали и вала должны иметь примерно одинаковую твердость для исключения увода сверла в сторону менее твердого материала.

Число штифтов для передачи заданного вращающего момента

$$z = \frac{2T}{l \cdot d \cdot d_b \cdot \tau_c}$$

Многоштифтовые соединения этого типа по прочности близки к шлицевым.

## 26.5. Резьбовые соединения

Резьбовыми называют соединения деталей с помощью резьбы. Они являются наиболее распространенным видом разъемных соединений.

### 26.5.1. Крепежные детали и стопорящие устройства

Наибольшее распространение среди резьбовых деталей получили крепежные болты, винты, шпильки, гайки. Под **болтом** или **винтом** понимают стержень с головкой и одним резьбовым концом. **Шпилька** имеет два резьбовых конца. **Гайка** – это деталь с резьбовым отверстием.

С помощью этих деталей образуют разъемные соединения болтом, винтом и шпилькой в разнообразных конструкциях. Тип соединения определяется прочностью материалов соединяемых деталей, частотой сборки и разборки соединений в эксплуатации, а также особенностями конструкции и технологии изготовления соединяемых деталей.

Для предохранения повреждений поверхностей соединяемых деталей при завинчивании и увеличения опорной поверхности гайки используют шайбы.

При статических нагрузках самоотвинчивания резьбовых деталей не наблюдается, так как все крепежные резьбы выполняются самотормозящимися (явление самоотвинчивания не должно наблюдаться). При динамических и вибрационных нагрузках может произойти самоотвинчивание гаек и винтов.

Для предотвращения самоотвинчивания резьбовых деталей применяют различные средства стопорения. Основные из них – контргайки, пружинные шайбы, стопорные шайбы, шплинты. Если не требуется разборка соединения, гайки устанавливают внаклеп, производят кернение, расклепывание и приварку.

Штифты, винты, упругие контргайки, проволока также могут выполнять функции стопорения.

Болты, винты, шпильки и гайки изготавливают из мало- и среднеуглеродистых сталей Ст 3 кп, Ст 5, 10, 10 кп, 15, 20, 30, 45 и др. В ответственных случаях (ударные нагрузки, высокие температуры) применяют легированные стали 40Х, 38ХА, 30ХГСА, 35ХГСА, 40ХН2МА и др., а также титановые сплавы (резьбовые детали из титановых сплавов по сравнению со стальными имеют повышенную прочность и примерно в два раза легче).

Пружинные шайбы изготавливают из рессорно-пружинных сталей 65, 70, 75, 65Г.

Гайки изготавливают из стали Ст 3.

Механические характеристики материалов крепежных деталей нормированы ГОСТ 1759–82. Для стальных болтов, винтов и шпилек предусмотрено 12, а для гаек – семь классов прочности и соответствующие им марки сталей.

### ***26.5.2. Резьба и ее параметры***

Резьба является основным элементом резьбового соединения. Она образует выступы по винтовой линии на поверхности винта и гайки (наружная и внутренняя), может изготавливаться на цилиндрической (цилиндрическая резьба) и конической (коническая резьба) поверхностях заготовки, бывает правая, если винтовая линия направлена вверх слева направо, и левая – при направлении ее вверх права налево. Наиболее применяемые правые резьбы. Если на поверхность детали наносится один винтовой выступ, резьбу называют однозаходной. Применяют также многозаходные резьбы.

Основные параметры цилиндрической резьбы (рис. 26.16):

$d, D$  – наружные диаметры соответственно болта и гайки;

$d_1, D_1; d_2, D_2$  – внутренние и средние диаметры резьбы;

$d_3$  – внутренний диаметр болта по дну впадины;

$P$  – шаг (расстояние между одноименными сторонами двух смежных профилей);

$\psi$  – угол подъема резьбы, т. е. угол развертки винтовой линии по среднему диаметру резьбы:  $\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho_h}{\pi d_2}$ ;

$\rho_h$  – ход резьбы (осевое перемещение гайки за один оборот): для однозаходной резьбы  $\rho_h = \rho$ , для многозаходной  $\rho_h = n \cdot \rho$ , где  $n$  – число заходов резьбы (рис. 26.17).

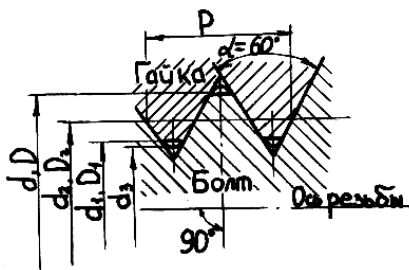


Рис. 26.16. Метрическая резьба

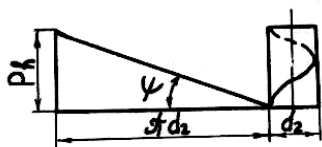


Рис. 26.17. Образование винтовой линии

По форме профиля крепежные резьбы бывают треугольные и круглые; резьбы винтовых механизмов (ходовые резьбы) – трапецидальные, упорные, прямоугольные.

Метрическая резьба (ГОСТ 24705–81) – основной вид резьбы крепежных деталей (см. рис. 26.16). Она бывает с крупным и мелким шагом, но чаще выполняют наиболее износостойкую и технологичную резьбу с крупным шагом.

Дюймовая резьба подобна метрической ( $\alpha = 55^\circ$ , у метрической  $\alpha = 60^\circ$ ).

Трубные резьбы (цилиндрическая и коническая) служат для соединения труб и арматуры.

Трапецидальная резьба технологична, отличается высокой прочностью витков и является основной для винтовых механизмов.

Упорная резьба имеет несимметричный профиль витков и выполняется на винтах, воспринимающих значительную одностороннюю нагрузку.

Прямоугольная резьба сложна в изготовлении и применяется редко.

Геометрические параметры резьб (кроме прямоугольной) и их допуски стандартизованы.

Резьбу получают методом резания, накатыванием, литьем и прессованием.

### 26.5.3. Силовые зависимости в резьбовом соединении

Надежность резьбового соединения оценивается легкостью сборки (легкостью затяжки гайки или болта) и сохранностью затяжки (самоторможением).

При завинчивании гайки надо преодолеть момент сопротивления затяжки

$$T_3 = T_p + T_T,$$

где  $T_p$  – момент сил трения в резьбе;

$T_T$  – момент сил трения на опорном торце гайки.

Для определения  $T_p$  и  $T_T$  необходимо установить зависимость между силами, возникающими в винтовой паре при завинчивании.

Развернем среднюю винтовую линию резьбы на плоскость, а гайку представим в виде ползуна (рис. 26.18, а).

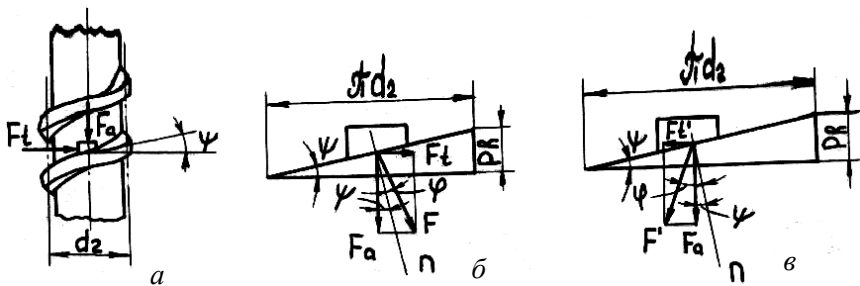


Рис. 26.18. К анализу сил в винтовой паре

При подъеме ползуна по наклонной плоскости (это соответствует завинчиванию гайки) сила  $F$  взаимодействия наклонной плоскости с движущимся ползуном представляет собой равнодействующую нормальной силы и силы трения. Из схемы сил, действующих на ползун (рис. 26.18, б),



$$F_t = F_a \cdot \operatorname{tg} \psi + \varphi ,$$

где  $\varphi = \operatorname{arctg} f' = \operatorname{arctg} \left[ \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right]$  – приведенный угол трения;

$$f' = \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ – приведенный коэффициент трения в резьбе;}$$

$f$  – коэффициент трения.

При перемещении ползуна вниз (рис. 26.18, в)

$$F_t = F_a \cdot \operatorname{tg} \varphi - \psi ,$$

где  $F_t$  – окружная сила при отвинчивании гайки.

Полагая, что сила  $F_t$  сосредоточена и приложена к среднему радиусу резьбы  $0,5d_2$  (см. рис. 26.19, а):

$$T_p = F_t \cdot 0,5d_2 = 0,5d_2 \cdot F_a \cdot \operatorname{tg} \psi + \varphi . \quad (26.5)$$

Силу трения на торце гайки  $f_1 \cdot F$ , зависящую от коэффициента трения  $f_1$  на торце гайки, считают сосредоточенной и приложенной к среднему радиусу опорной поверхности (рис. 26.19, а):

$$T_r = 0,5 \cdot F_a \cdot f_1 \cdot D_{\text{cp}},$$

$$D_{\text{cp}} = \frac{D_1 + d_0}{2}.$$

Момент завинчивания гайки  $T_3$ , прикладываемый к ключу:

$$T_3 = T_p + T_r = 0,5 F_a \cdot d_2 \cdot \left[ \operatorname{tg} \psi + \varphi + \frac{D_{\text{cp}}}{d_2} \cdot f_1 \right]. \quad (26.6)$$

Момент сопротивления затяжки  $T_3$  преодолевается моментом силы, приложенной к гаечному ключу (рис. 26.19, б). Приравняв оба момента, получим

$$F_{\text{кл}} \cdot l_{\text{кл}} = 0,5 F_a \cdot d_2 \cdot \left[ \operatorname{tg} \psi + \varphi + \frac{D_{\text{ср}}}{d_2} \cdot f_1 \right]. \quad (26.7)$$

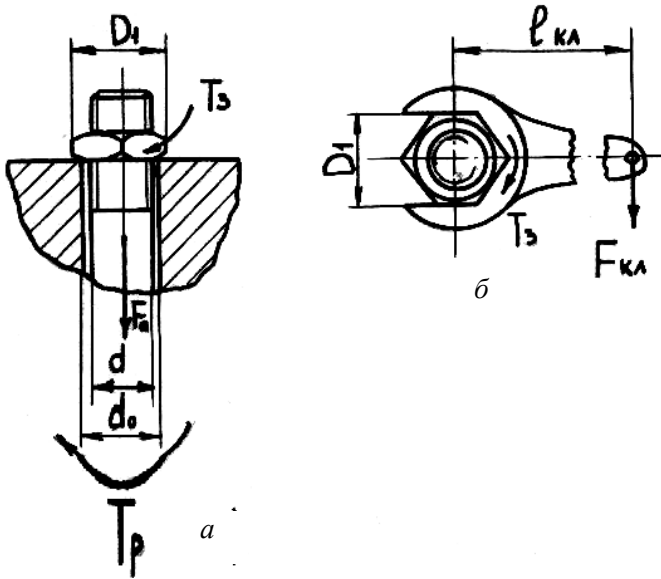


Рис. 26.19. К определению момента завинчивания

Величины, входящие в формулу (26.7), имеют определенные значения. Например, при стандартном ключе  $l_{\text{кл}} = 15d$  для метрических резьб можно принять:  $\psi = 2,5^\circ$ ;  $d_2 \approx 0,9d$ ;  $D_{\text{ср}} \approx 1,4d$ ;  $f \approx f_1 \approx 0,1-0,2$ . Из анализа формулы (26.7) следует, что обычно  $F_a \approx 60-100 F_{\text{кл}}$ . Таким образом, сила в 1 Н, приложенная на конце ключа, создает силу прижатия деталей 60–100 Н. Такой выигрыш в силе обеспечивает легкость сборки соединения.

#### 26.5.4. Самоторможение и коэффициент полезного действия винтовой пары

Если при опускании ползуна по наклонной плоскости (см. рис. 26.18, в)  $F_t' > 0$  или  $\operatorname{tg} \varphi - \psi > 0$ , то резьба будет самотормозящейся. Условие самоторможения:

$$\psi < \varphi.$$

Для крепежных резьб угол подъема резьбы  $\psi = 2^\circ 30' - 3^\circ 30'$ , а приведенный угол трения  $\varphi$  изменяется в зависимости от коэффициента трения в пределах от  $6^\circ$  (при  $f' \approx 0,1$ ) до  $11^\circ$  (при  $f' \approx 0,2$ ). Таким образом, все крепежные резьбы – самотормозящиеся. Это объясняет важное преимущество крепежной резьбы – надежное стопорение гайки (винта) в любом положении. Однако это свойство проявляется главным образом при статических нагрузках. При переменных нагрузках условие самоторможения не соблюдается. Поэтому необходимо стопорение резьбовых соединений.

Коэффициент полезного действия винтовой пары определяют как отношение  $\frac{T_3'}{T_3}$ , где  $T_3$  находят по формуле (26.6), а  $T_3'$  – по той же формуле, но без учета сил трения ( $f_1 = 0$ ,  $\varphi = 0$ ). Для собственно винтовой пары ( $T_T = 0$ )

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi + \varphi}.$$

С увеличением  $\psi$  и уменьшением  $\varphi$  коэффициент полезного действия возрастает. Для самотормозящейся винтовой пары, где  $\psi < \varphi$ ,  $\eta < 0,5$ ; т. к. большинство винтовых механизмов самотормозящиеся, их КПД меньше 0,5.

### 26.5.5. Расчет резьбовых соединений на прочность

Виды разрушения резьбовых крепежных деталей: разрыв стержня по резьбе или переходному сечению у головки; повреждение или разрушение резьбы (смятие и износ, срез, изгиб); повреждение головки болта (винта).

Размеры стандартных болтов, винтов и шпилек отвечают условию равнопрочности всех элементов соединения. Поэтому можно ограничиваться расчетом по одному, основному критерию – прочности нарезной части, а размеры винтов, болтов и гаек принимать по таблицам стандарта в зависимости от рассчитанного диаметра резьбы. Длину болта, винта и шпильки выбирают в зависимости от толщины соединяемых деталей.

Рассмотрим расчет на прочность резьбовых соединений при постоянной нагрузке.

Болт нагружен внешней силой  $F$  (болт без предварительной затяжки), например, нарезанный участок крюка для подвешивания груза. Опасным является сечение крюка, ослабленное нарезкой (рис. 26.20). Из условия прочности на растяжение

$$\sigma_p = \frac{4F}{\pi \cdot d_3^2} \leq [\sigma_p], \quad (26.8)$$

откуда

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot [\sigma_p]}}, \quad (26.9)$$

где  $[\sigma_p] = 0,6[\sigma_T] = 0,6 \cdot \sigma_T$  – допускаемое напряжение при растяжении болта из углеродистой стали.

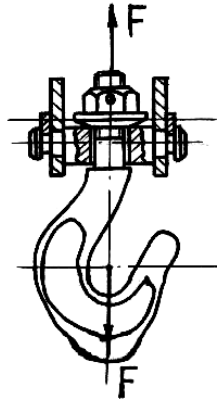


Рис. 26.20. Крюковая подвеска

Болт затянут силой затяжки  $F_3$ , а внешняя нагрузка отсутствует (ненагруженные крышки, кронштейны и т. п.). Стержень болта испытывает совместное действие растяжения и кручения, т. е. растягивается осевой силой  $F_3$  от затяжки болта и скручивается моментом, равным моменту сил трения в резьбе  $T_p$  (формула (26.5)), Прочность таких болтов (рис. 26.21) определяют по эквивалентному напряжению

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma_p],$$

где  $\sigma_p$  – напряжение от растяжения, определяемое по формуле (26.8) при  $F = F_3$ ;

$\tau_k$  – напряжение от кручения:

$$\tau_k = \frac{16T_p}{\pi d_3^2};$$

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_r}{S};$$

$S$  – требуемый коэффициент запаса прочности болта, принимаемый в зависимости от материала болта, характера нагрузки и диаметра болта.

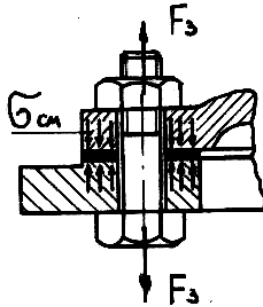


Рис. 26.21. К расчету болта, нагруженного только силой затяжки

Для стандартных метрических резьб  $\sigma_s \approx 1,3\sigma_p$ , т. е. расчет болта на совместное действие растяжения и кручения можно заменить расчетом на растяжение, но по увеличенной в 1,3 раза силе  $F_p$ . Для метрических резьб

$$F_p = 1,3F_s.$$

Расчетный диаметр резьбы болта определяют по формуле (26.9), принимая

$$F = F_p.$$

Болтовое соединение нагружено силами, сдвигающими детали в стыке. Условием надежности соединения является отсутствие сдвига деталей в стыке.

В соединении с зазором (рис. 26.22, а) болт устанавливают с предварительной затяжкой. Внешняя сила  $F$  непосредственно на болт не передается, поэтому его рассчитывают на растяжение по силе затяжки  $F_s$ .

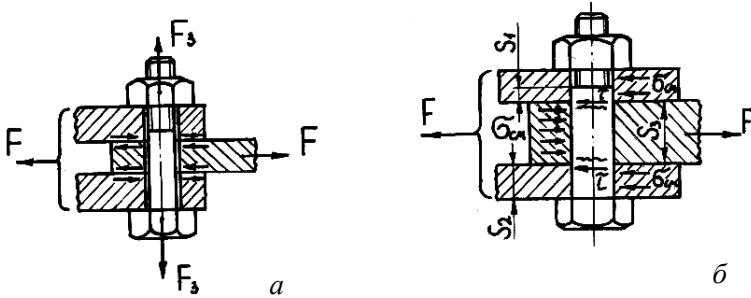


Рис. 26.22. К расчету болта, нагруженного поперечной силой:  
а – поставленного с зазором; б – без зазора

Во избежание сдвига деталей при наличии зазора сила трения на поверхностях стыка должна быть не меньше внешней сдвигающей силы  $F$ :

$$F \leq i \cdot F_{\text{тр}} = i \cdot F_3 \cdot f \quad \text{или} \quad F_3 = \frac{K \cdot F}{Z \cdot i \cdot f},$$

где  $i$  – число стыков в соединении;

$f$  – коэффициент трения;

$K$  – коэффициент запаса ( $K = 1,3-1,5$  при статической и  $K = 1,8-2,0$  при переменной нагрузке);

$Z$  – число болтов в соединении.

Болт в этом случае рассчитывают по силе затяжки:

$$d_3 \geq 1,3 \sqrt{\frac{K \cdot F}{i \cdot f \cdot Z \cdot [\sigma_p]}}.$$

При установке болта без зазора (рис. 26.22, б) предварительная затяжка не требуется. Болт испытывает срез и смятие. Стержень болта рассчитывают на срез, а при тонких деталях – и на смятие. Условия прочности

$$\tau = \frac{4F}{i \cdot \pi \cdot d_0^2} \leq \tau,$$

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{d_0 \cdot S} \leq \sigma_{\text{см}},$$

где  $\tau$ ,  $\tau$  – соответственно расчетное и допускаемое напряжения для материала болта на срез,  $\tau = (0,2-0,3) \sigma_T$ ;

$d_0$  – диаметр ненарезанной части болта;

$\sigma_{\text{см}}$ ,  $\sigma_{\text{см}}$  – соответственно расчетное и наименьшее допускаемое напряжения смятия (для материала болта или детали),  $\sigma_{\text{см}} = (0,8-1,0) \sigma_T$ ;

$S$  – наименьшая толщина детали.

Болт затянут, а внешняя нагрузка стремится раскрыть стык (болты для крепления крышек резервуаров для газа и жидкости, нагруженные давлением выше атмосферного, крепления цилиндров, насосов, станин к фундаментам и др.). Затяжка болтов должна обеспечить герметичность соединения или нераскрытие стыка (не допустить появления зазора) под нагрузкой. Эта задача решается с учетом деформации деталей соединения.

Внешняя нагрузка  $F = \frac{R}{Z}$  ( $R$  – равнодействующая нагрузки;  $Z$  – число болтов) вызывает удлинение болта на  $\Delta\delta$  (рис. 26.23), а деформация деталей уменьшается на ту же величину. Нагрузка со стороны деталей на болт также уменьшится. Именно поэтому считают, что болт воспринимает часть внешней нагрузки  $\chi \cdot F$ .

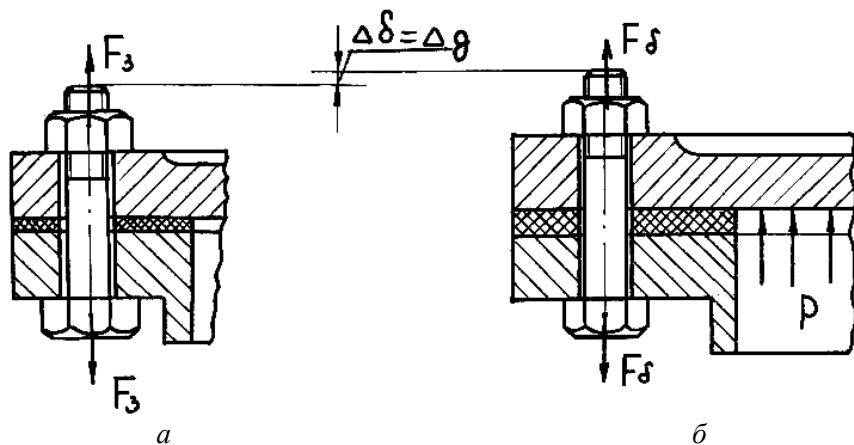


Рис. 26.23. К расчету затянутого болта с учетом деформации и соединенных деталей

Суммарная нагрузка на затянутый болт

$$F_\delta = F_3 + \chi F, \quad (26.10)$$

где  $\chi$  – коэффициент внешней нагрузки, показывающий, какая часть внешней нагрузки воспринимается болтом (учитывает податливость болта и соединяемых деталей).



Величина  $\chi$  – определяется по условию равенства дополнительных деформаций болта и деталей:

$$\chi F \cdot \lambda_b = 1 - \chi F \cdot \lambda_d, \quad (26.11)$$

где  $\lambda_b, \lambda_d$  – коэффициенты податливости соответственно болта и деталей, численно равные изменению их длины при действии силы, равной 1 Н.

Из равенства (26.11) следует, что

$$\chi = \frac{\lambda_d}{\lambda_b + \lambda_d}.$$

Точный расчет коэффициента  $\chi$  сложен, а так как на практике величину затяжки болтов в большинстве случаев не контролируют, то смысл точного расчета теряется.

При приближенных расчетах принимают:

– для соединений стальных и чугунных деталей без упругих прокладок  $\chi = 0,2-0,3$ ;

– для соединения тех же деталей, но с упругими прокладками (резина, полиэтилен, асбест, паронит и др.)  $\chi = 0,4-0,5$ .

Предварительная затяжка болта  $F_3$  должна быть больше минимальной силы предварительной затяжки болта:

$$F_{3\min} = 1 - \chi F.$$

Из условия сохранения плотности стыка соединяемых деталей (невозможности образования зазора) принимают

$$F_3 = K_3 (1 - \chi) F,$$

где  $K_3$  – коэффициент запаса предварительной затяжки: при постоянной нагрузке  $K_3 = 1,25-2,0$ ; при переменной  $K_3 = 2,5-4$ .

При расчете на прочность, если возможна последующая затяжка болта, его рассчитывают по расчетной нагрузке  $F_p$  с учетом кручения:

$$F_n = 1,3F_s + \chi F. \quad (26.12)$$

### 26.5.6. Расчет резьбовых соединений при переменном режиме нагружения

Крепежные детали, работающие при переменном режиме нагружения, рассчитывают на усталость. Болты устанавливаются с предварительной затяжкой, при которой создается напряжение  $\sigma_s = 0,4-0,6 \sigma_T$ . Вследствие этого циклическое изменение расчетной силы  $F_6$  значительно меньше по сравнению с изменением внешней силы  $F$ .

Расчет на усталость ведут как проверочный по двум коэффициентам запаса прочности: по амплитуде цикла и по наибольшему напряжению цикла (рис. 26.24). Предварительно болт рассчитывают из условия его статической прочности с учетом формул (26.10) или (26.12).

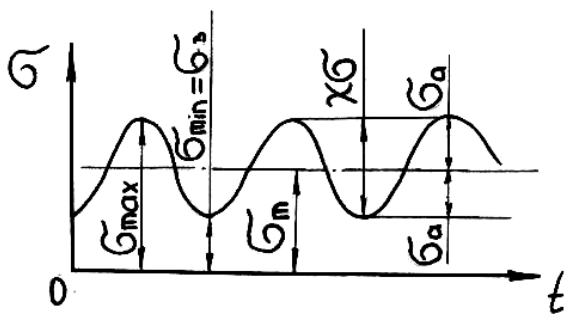


Рис. 26.24. Циклы переменных напряжений

Коэффициент запаса прочности по амплитуде цикла

$$S_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \geq S_a,$$

где  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости материала болта (шпильки);

$\sigma_a$  – амплитуда переменных напряжений:

$$\sigma_a = \frac{\chi F}{0,5\pi \cdot d_3^2};$$

$S_a$  – требуемый коэффициент запаса прочности по амплитуде

$$S_a = 2,5-4,0.$$

Коэффициент запаса по наибольшему напряжению цикла

$$S = \frac{\sigma_r}{\sigma_3 + 2\sigma_a} = \frac{\sigma_r}{\sigma_m + \sigma_a} \geq S ,$$

где  $S_a = 1,25-2,5$ .

При  $S_a \geq S_a$  и  $S \geq [S]$  болт удовлетворяет условию прочности при действии переменных напряжений.

За счет уменьшения коэффициента внешней нагрузки может быть повышена прочность резьбового соединения при переменных нагрузках. Это может быть достигнуто уменьшением податливости стыка и увеличением податливости болта, в частности, диаметр стержня болта уменьшают до диаметра  $d_3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

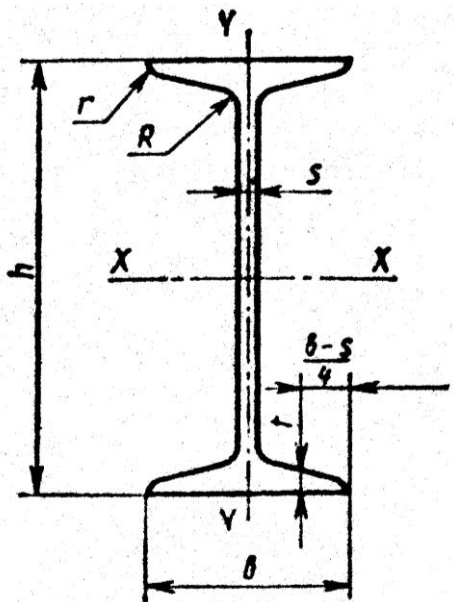
1. Аркуша, А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике / А.И. Аркуша. – М.: Высш. школа, 1989; 1990; 1999.
2. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Машиностроение, 1975. – 639 с.
3. Артоболевский, И.И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И.И. Артоболевский, Б.В. Эдельштейн. – М.: Машиностроение, 1975. – 256 с.
4. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.

5. Гернет, М.М. Курс теоретической механики / М.М. Гернет. – М.: Высшая школа, 1970. – 440 с.
6. Дубейковский, Е.Н. Сопротивление материалов: учебное пособие для машиностроительных специальностей техникумов / Е.Н. Дубейковский, Е.С. Савушкин. – М.: Высшая школа, 1985. – 192 с.
7. Иосилевич, Г.Б. Прикладная механика: учеб. для вузов / Г.Б. Иосилевич, Г.Б. Строганов, Г.С. Маслов; под ред. Г.Б. Иосилевича. – М.: Высшая школа, 1989. – 360 с.
8. Ицкович, Г.М. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / Г.М. Ицкович, А.И. Винокуров, Н.В. Барановский. – 4-е изд. – Л.: Судостроение, 1972.
9. Каленик, В.В. Текст лекций по разделу «Теория механизмов и машин» курса «Прикладная механика» для студентов немеханических специальностей / В.В. Каленик, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1983.
10. Кильчевский, Н.А. Основы теоретической механики / Н.А. Кильчевский, Н.И. Ремизова, Н.Н. Шепелевская. – Киев: Техніка, 1968. – 260 с.
11. Кинасошвили, Р.С. Сопротивление материалов / Р.С. Кинасошвили. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. – 384 с.
12. Методические указания по решению задач по курсу «Прикладная механика» для студентов немеханических специальностей: в 2 ч. / А.А. Миклашевич [и др.]. – Минск: БПИ, 1985. – Ч 2. – 37 с.
13. Мовкин, М.С. Теоретическая механика / М.С. Мовкин, А.Б. Израелит. – Л.: Судостроение, 1972.
14. Никитин, Е.М. Теоретическая механика для техникумов / Е.М. Никитин. – М.: Наука, 1971 (и последующие издания).
15. Осадчий, В. И. Руководство к решению задач по теоретической механике / В.И. Осадчий, А.М. Фаин. – М.: Высш. школа, 1972.
16. Павловский, М.А. Теоретическая механика: в 2 ч. / М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфеева, О.Ф. Бойчук. – Киев: Вища школа, 1989; 1990. – 350 с.
17. Подскребко, М.Д. Задания по расчетно-графическим работам курса «Прикладная механика»: в 2 ч. / М.Д. Подскребко,

- С.С. Томило, А.Н. Шинкевич. – Минск: БИМСХ, 1990. – Ч. 1. – 59 с.
18. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для техн. вузов / И.М. Миролубов [и др.]. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.
  19. Прикладная механика: методические указания и контрольные задания для студентов-заочников / под ред. П.Г. Гузенкова. – М.: Машиностроение, 1982. – 112 с.
  20. Прикладная механика: учеб. пособие/ А.Т. Скойбеда [и др.]; под общ. ред. А.Т. Скойбеда. – Минск: Вышэйшая школа, 1997. – 552 с.
  21. Руденок, Е.Н. Техническая механика: сб. заданий: учеб. пособие / Е.Н. Руденок, В.П. Соколовская. – Минск: Высшая школа, 1990. – 238 с.
  22. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
  23. Сборник задач по технической механике / В.В. Багреёв [и др.]. – Л.: Судостроение, 1968.
  24. Соколов, Б.Ф. Методические указания к семестровым заданиям по объединенному курсу «Теоретическая и прикладная механика» / Б.Ф. Соколов [и др.]. – Челябинск: Челябинский ин-т механизации и электрификации сельского хозяйства, 1985.
  25. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
  26. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. – 400 с.
  27. Шапиро, Д.М. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для машиностроительных техникумов / Д.М. Шапиро, А.И. Подорванова, А.Н. Миронов. – 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1970.
  28. Юдин, В.А. Теория механизмов и машин / В.А. Юдин, Л.В. Петрокас. – М.: Машиностроение, 1977. – 527 с.
  29. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: в 2 ч. / А.А. Яблонский. – 7-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 1999. – Ч. 1: Статика, кинематика.

ПРИЛОЖЕНИЕ  
СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

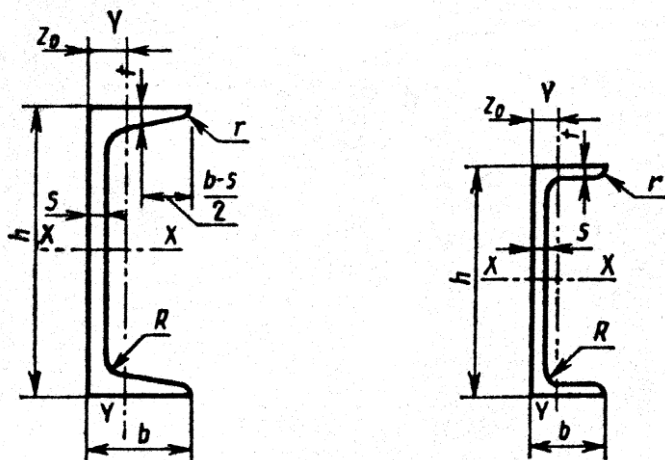
III. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. ГОСТ 8239–89.



Обозначения:  
 $h$  – высота двутавра;  
 $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $R$  – радиус внутреннего скругления;  
 $r$  – радиус скругления полки.

Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>			<i>X</i> – <i>X</i>				<i>Y</i> – <i>Y</i>		
	мм								<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>S<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>I<sub>y</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	87,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

П2. Сталь горячекатаная. Швеллер. ГОСТ 8240–89



Обозначения:

$h$  – высота;

$b$  – ширина полки;

$s$  – толщина стенки;

$t$  – толщина полки;

$R$  – радиус внутреннего скругления;

$r$  – радиус скругления полки;

$Z_0$  – расстояние от оси  $Y-Y$  до наружной грани стенки.



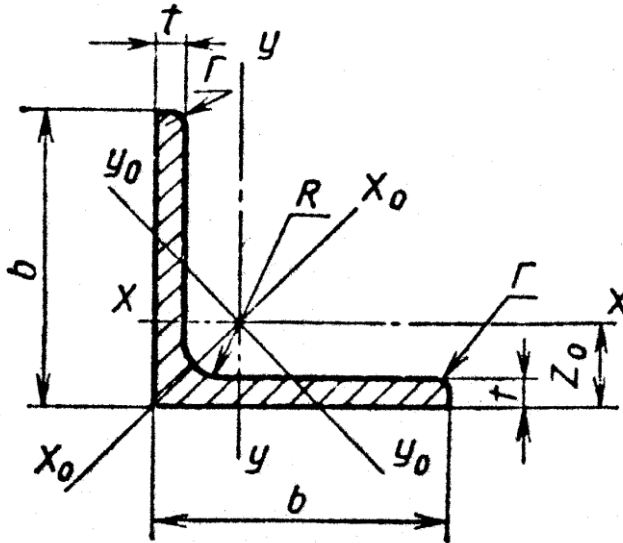
## Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

Номер швеллера	Размеры						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							Z <sub>0</sub> , см
	h	b	s	t	R	r			X-X				Y-Y			
					не более				I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см	
	мм															
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,0	20,00	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,0	20,50	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,0	25,10	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,0	31,60	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,0	37,30	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,0	43,60	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,0	51,80	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,0	61,70	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,0	73,40	3,23	2,75

## Швеллеры с параллельными гранями полок

Номер швеллера	Размеры						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							Z <sub>0</sub> , см
	h	b	s	t	R	r			X-X				Y-Y			
					не более				I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>2</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см	
	мм															
5П	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,61	5,95	2,99	0,98	1,21
6,5П	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,12	1,29
8П	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,5	3,16	13,30	13,90	3,31	1,24	1,38
10П	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	8,59	175,0	34,9	3,99	20,50	22,60	7,37	1,44	1,53
12П	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,30	10,40	305,0	50,8	4,79	29,70	34,90	9,84	1,62	1,66
14П	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,60	12,30	493,0	70,4	5,61	40,90	51,50	12,90	1,81	1,82
16П	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,10	14,20	750,0	93,8	6,44	54,30	72,80	16,40	2,00	1,97
16aП	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30	827,0	103,0	6,51	59,50	90,50	19,60	2,15	2,19
18П	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,26	70,00	100,00	20,60	2,20	2,14
18aП	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40	1200,0	133,0	7,34	76,30	123,00	24,30	2,35	2,36
20П	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40	1530,0	153,0	8,08	88,0	134,00	25,20	2,39	2,30
22П	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00	2120,0	193,0	8,90	111,0	178,00	31,00	2,58	2,47
24П	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00	2910,0	243,0	9,75	139,0	248,00	39,50	2,85	2,72
27П	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70	4180,0	310,0	10,90	178,0	314,00	46,70	2,99	2,78
30П	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80	5830,0	387,0	12,00	224,0	393,00	54,80	3,12	2,83
33П	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50	8010,0	486,0	13,10	281,0	491,00	64,60	3,25	2,90
36П	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,40	41,90	10850,0	603,0	14,30	350,0	611,00	76,30	3,38	2,99
40П	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,50	48,30	15260,0	763,0	15,80	445,0	760,00	89,90	3,51	3,05

ПЗ. Сталь горячекатаная. Уголки равнополочные:  
ГОСТ 8509–86



Обозначения:

- $b$  – ширина полки;
- $t$  – толщина полки;
- $R$  – радиус внутреннего закругления;
- $r$  – радиус скругления полки;
- $I$  – момент инерции;
- $i$  – радиус инерции;
- $Z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
- $I_{xy}$  – центробежный момент инерции.

Пример условного обозначения равнополочного уголка размерами 50×50×3 мм высокой точности прокатки (А) из стали марки СтЗсп, категории 3, подгруппы 1:

$$\text{Уголок} \frac{50 \times 50 \times 3 - \text{А ГОСТ} 8509 - 86}{\text{СтЗсп} 3 - 1 \text{ ГОСТ} 535 - 79}$$



Номер уголка	$b_0$	$t$ , мм	$R$ , мм	$r$ , мм	Площадь попереч- ного сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей									Мас- са 1 м угол- ка, кг	
						$X - X$			$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$			$I_{xy_0}$ , см <sup>4</sup>		$Z_0$ , см
						$I_{X_0}$ , см <sup>4</sup>	$W_{X_0}$ , см <sup>3</sup>	$i_{X_0}$ , см	$I_{X_0, \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{X_0, \max}$ , см	$I_{Y_0, \min}$ , см <sup>4</sup>	$W_{Y_0}$ , см <sup>3</sup>	$i_{Y_0}$ , см			
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6			5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
		7*			6,56	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
		8*			7,41	16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
5,6	56	4	6	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6*	60	4	7,0	2,3	4,72	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71
		5			5,83	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58
		6			6,92	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43
		8			9,04	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
		6			7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
		5			6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
		6			8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
		7			9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39
		8			10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37
		10*			13,11	57,90	11,82	2,10	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29

Номер уголка	$b_0$	$t$ , мм	$R$ , мм	$r$ , мм	Площадь попереч- ного сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей									Мас- са 1 м угол- ка, кг	
						$X-X$			$X_0-X_0$		$Y_0-Y_0$			$I_{xy}$ , см <sup>4</sup>		$Z_0$ , см
						$I_{Xx}$ , см <sup>4</sup>	$W_{Xx}$ , см <sup>3</sup>	$i_{Xx}$ , см	$I_{X_0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{X_0 \max}$ , см	$I_{Y_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$W_{Y_0}$ , см <sup>3</sup>	$i_{Y_0}$ , см			
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
		6			8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89
		7			10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
		8			11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02
		9			12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
		6			9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
		7			10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
		8			12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
		10*			15,14	83,58	15,67	2,42	140,31	3,04	36,82	11,09	1,56	56,70	2,35	11,88
12*	17,90	102,74	18,42	2,40	162,27	3,01	43,21	12,62	1,55	59,50	2,42	14,05				
9	90	6	100	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
		7			12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
		8			13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
		9			15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
		10*			17,17	128,60	20,07	2,74	203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	75,30	2,59	13,48
		12*			20,33	149,67	23,85	2,71	235,88	3,41	62,40	16,53	1,75	86,20	2,67	15,96

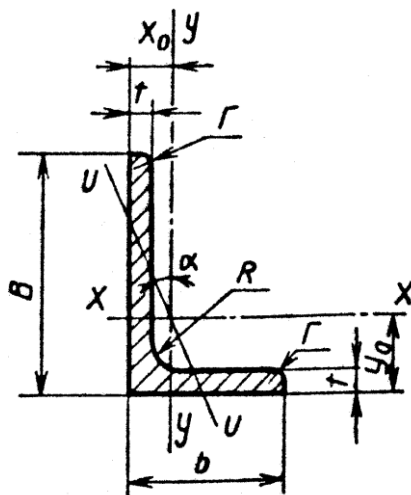
Номер уголка	$b_0$	$t$ , мм	$R$ , мм	$r$ , мм	Площадь попереч- ного сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей									Мас- са 1 м угол- ка, кг			
						$X-X$			$X_0-X_0$		$Y_0-Y_0$			$I_{xy}$ , $\text{см}^4$		$Z_0$ , см		
						$I_{Xx}$ , $\text{см}^4$	$W_{Xx}$ , $\text{см}^3$	$i_{Xx}$ , см	$I_{X_0, \max}$ , $\text{см}^4$	$i_{X_0, \max}$ , см	$I_{Y_0, \min}$ , $\text{см}^4$	$W_{Y_0}$ , $\text{см}^3$	$i_{Y_0}$ , см					
10	100	6,5	120	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06		
		7			13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79		
		8			15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25		
		10			19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10		
		12			22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90		
		14			26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63		
		15*			27,99	250,68	35,95	2,99	395,87	3,76	105,48	24,62	1,94	145,00	3,03	21,97		
		16			29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06	23,30		
11	110	7	120	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89		
		8			17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50		
12*	120	8			18,80	259,75	29,68	3,73	412,45	4,68	107,04	23,29	2,39	153,00	3,25	14,76		
		10			23,24	317,16	36,59	3,69	503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	187,00	3,33	18,24		
		12			27,60	371,80	43,30	3,67	590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	218,00	3,41	21,67		
		15			33,99	448,90	52,96	3,63	711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	262,00	3,53	26,68		
12,5	125	8			140	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	15,46
		9					22,0	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30
		10	24,33	359,82			39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10		
		12	28,89	422,23			47,05	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68		
		14	33,37	481,76			54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20		
		16	37,77	538,56			61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315	3,68	29,65		

Номер уголка	$b_0$	$t$ , мм	$R$ , мм	$r$ , мм	Площадь попереч- ного сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей									Мас- са 1 м угол- ка, кг			
						$X-X$			$X_0-X_0$		$Y_0-Y_0$			$I_{xy}$ , $\text{см}^4$		$Z_0$ , см		
						$I_{X_0}$ , $\text{см}^4$	$W_{X_0}$ , $\text{см}^3$	$i_{X_0}$ , см	$I_{X_0 \max}$ , $\text{см}^4$	$i_{X_0 \max}$ , см	$I_{Y_0 \min}$ , $\text{см}^4$	$W_{Y_0}$ , $\text{см}^3$	$i_{Y_0}$ , см					
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,78	19,41		
		10			27,33	512,59	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45		
		12			32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50		
15*	150	10			29,33	634,76	58,07	4,65	1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	374,00	4,07	23,02		
		12			34,89	747,48	68,90	4,63	1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	440,00	4,15	27,39		
		15			43,08	908,38	84,66	4,59	1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	534,00	4,27	33,82		
		18			51,09	1060,08	99,86	4,56	1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	621,00	4,38	40,11		
16	160	10			16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
		11					34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
		12	37,39	912,89			78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	28,35		
		14	43,57	1046,47			90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	33,97		
		16	49,07	1175,19			102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52		
		18	54,79	1290,24			114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01		
18	180	20	60,40	1418,85			125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,44		
		11	38,80	1216,44			92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85	30,47		
		12	42,19	1316,62			100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12		
		15*	52,18	1607,36			123,74	5,55	2554,99	7,00	659,73	93,11	3,56	948,00	5,01	40,96		
		18*	61,99	1884,07			146,36	5,51	2992,69	6,95	775,44	106,88	3,54	1108,00	5,13	48,66		
		20*	68,43	2061,11			161,07	5,49	3271,31	6,91	850,92	115,71	3,53	1210,00	5,20	53,72		



Номер уголка	$b_0$	$t$ , мм	$R$ , мм	$r$ , мм	Площадь попереч- ного сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей									Масса 1 м уголка, кг	
						$X-X$			$X_0-X_0$		$Y_0-Y_0$			$I_{xy}$ , см <sup>4</sup>		$Z_0$ , см
						$I_{X_0}$ , см <sup>4</sup>	$W_{X_0}$ , см <sup>3</sup>	$i_{X_0}$ , см	$I_{X_0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{X_0 \max}$ , см	$I_{Y_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$W_{Y_0}$ , см <sup>3</sup>	$i_{Y_0}$ , см			
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,69	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13			50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14			54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16			61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,62
		18*			69,30	2620,64	182,22	6,15	4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	1544,00	5,62	54,40
		20			76,54	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
		24*			90,78	3350,66	236,77	6,08	5313,50	7,65	1387,73	167,74	3,91	1963,00	5,85	71,26
		25			94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02
		30			11,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	47,40
		16			68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02	53,83
		18			78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75	61,55
25	25	18	24,0	8,0	87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	223,39	4,96	3089,00	6,83	68,86
		20			96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91	76,11
		22			106,12	6270,32	348,26	7,09	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00	83,31
		25			119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11	93,97
		28			133,12	7716,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23	104,50
		30			141,96	8176,52	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31	111,44

**П4. Сталь горячекатаная.**  
**Уголки неравнополонные: ГОСТ 8510–86**



Обозначения:

- $B$  – ширина большей полки;
- $b$  – ширина меньшей полки;
- $t$  – толщина полки;
- $R$  – радиус внутреннего скругления;
- $r$  – радиус скругления полки;
- $I$  – момент инерции;
- $i$  – радиус инерции;
- $x_0, y_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полки;
- $I_{xy}$  – центробежный момент инерции.

Пример условного обозначения неравнополочного уголка размерами 63×40×4 мм высокой точности прокатки (А) из стали марки Ст3сп, категории 3, подгруппы 1:

$$\text{Уголок} \frac{63 \times 40 \times 4 - \text{А ГОСТ} 8510 - 86}{\text{Ст} 3\text{сп} 3 - 1 \text{ ГОСТ} 535 - 79}$$

Номер уголка	В, мм	b, мм	t, мм	R, мм	r, мм	Пло- щадь попе- речного сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей									x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	I <sub>xy</sub> , см <sup>4</sup>	Угол наклона оси, tga	Масса l м уголка, кг
							x-x			y-y			u-u							
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>u min</sub> , см					
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2*	30	20	3			1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,0	0,43	0,427	1,12
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17		
			4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52		
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48		
			4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94		
4/3*	40	30	5	3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,37		
			4	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,26		
			5	3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,46		
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68		
			4	2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20		
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,9		
			4	3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,4		
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81		
			5	4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46		
6,3/4,0	63	40	4	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17		
			5	4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91		
			6	5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63		
			8	7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03		
6,5/5*	65	50	5	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36		
			6	6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18		
			7	7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98		
			8	8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77		

Номер уголка	В, мм	b, мм	t, мм	R, мм	r, мм	Пло- щадь попе- речного сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей									x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	I <sub>xy</sub> , см <sup>4</sup>	Угол наклона оси, tga	Масса l м уголка, кг
							x-x			y-y			u-u							
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>					
7/4.5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	60	5	8,0	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79
			6			7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7*			8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8			9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20	0,384	4,49
			6			7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92
8/6*	80	60	6	8,0	2,7	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
			7			9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70
			8			12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
			10			15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14
10/6,5*	100	65	7	10,0	3,3	11,23	114,05	16,87	3,19	38,22	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38,00	0,415	8,81
			8			12,73	128,31	19,11	3,18	42,26	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,64	0,414	9,99
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30
11/7	110	70	6,5	10,0	3,3	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
			8			13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93

Номер уголка	В, мм	b, мм	t, мм	R, мм	r, мм	Пло- щадь попе- речного сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей									x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	I <sub>xy</sub> , см <sup>4</sup>	Угол наклона оси, tga	Масса 1 м угол- ка, кг
							x-x			y-y			u-u							
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>u min.</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>u min.</sub> , см					
12,5/8	125	80	7	11,0	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
			8			15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406	12,58
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00	0,404	15,47
			12			23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00	0,400	18,34
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,00	0,411	14,13
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409	17,46
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87	605,97	56,04	5,19	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00	0,391	17,96
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390	19,85
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00	0,388	23,58
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385	27,26
18/11	180	110	10	14,0	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	267,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376	22,20
			12			33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374	26,40
20,12,5	200	125	11	14,0	4,7	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,00	0,392	27,37
			12			37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392	29,74
			14			43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390	34,43
			16			49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388	39,07

Учебное издание

НИКОЛАЕНКО Владимир Лаврентьевич

# МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие для студентов  
немашиностроительных специальностей вузов

Редактор Т.Н. Микулик  
Компьютерная верстка Д.А. Исаева

---

Подписано в печать 31.01.2011.

Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 17,09. Уч.-изд. л. 13,36. Тираж 200. Заказ 699.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.  
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.  
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.