Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Сопротивление материалов машиностроительного профиля»

Л.Е. Реут

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ»

РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Рекомендовано учебно-методическим объединением высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию в области машиностроительного оборудования и технологий

Минск
БНТУ
2011

УДК 620.1(075.8)
ББК 30.121я7
Р 44

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов машиностроительного профиля БНТУ *А.И. Дудяк*;
кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов машиностроительного профиля БНТУ *А.А. Хмелев*

Реут, Л.Е.
Р 44 Курс лекций и практических занятий по дисциплине «Механика материалов». Растяжение–сжатие: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2011. – 148 с.

ISBN 978-985-525-701-2.

Учебно-методическое пособие издается под общим названием «Курс лекций и практических занятий по дисциплине “Механика материалов”» и представляет собой серию пособий, включающих основные темы и вопросы, необходимые для освоения курса. Первое издание серии посвящено теме деформации растяжения–сжатия. Она рассмотрена в полном теоретическом аспекте и проиллюстрирована большим количеством примеров и задач и методами их решения.

Издание предназначено для студентов машиностроительных специальностей всех форм обучения для изучения предмета и подготовки к экзаменам, а также для преподавателей при подготовке к лекциям и практическим занятиям.

УДК 620.1(075.8)
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-525-701-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов представляет собой фундаментальную общетехническую дисциплину, изучаемую во всех технических вузах и являющуюся основой технического образования инженера любой специальности.

Настоящее учебно-методическое пособие, которое издается под общим названием «Курс лекций и практических занятий по механике материалов», представляет собой серию брошюр, включающую основные темы и вопросы, необходимые для освоения курса. Каждая отдельная брошюра посвящена определенной теме и включает теоретическую часть с выводом и анализом формул, практические примеры и задачи и их решение, а также вопросы для самоконтроля, способствующие самостоятельному изучению предмета.

Тема «Растяжение–сжатие» посвящена изучению деформации, которая часто встречается на практике. Здесь рассмотрены вопросы напряжений и деформаций и связь между ними, построение эпюр, расчеты на прочность и жесткость. Представлен широкий класс статически неопределимых задач и методы их решения. Рассмотрены вопросы учета собственного веса, проектирование стержня равного сопротивления и ступенчатого стержня. В практической части предложено большое количество задач и их решение.

Пособие может быть использовано студентами машиностроительных специальностей всех форм обучения в качестве литературы для изучения предмета и подготовки к экзаменам. Пособие также может быть полезным преподавателям, читающим соответствующие курсы, для подготовки лекций и практических занятий.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. **Общее определение. Внутренние усилия, напряжения и деформации при растяжении и сжатии**

В общем случае пространственного нагружения элемента в сечении возникает шесть внутренних усилий (рис. 1), которые определяются методом сечений и каждое из которых связано со своим видом деформации:

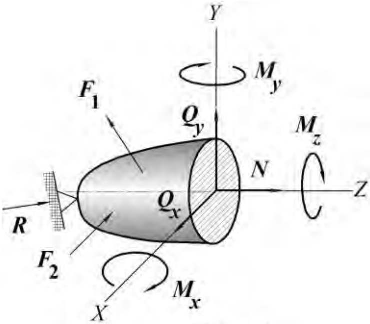


Рис. 1

N – продольная сила, связанная с деформацией *растяжения* или *сжатия*; Q_x и Q_y – поперечные силы, связанные с деформацией *сдвиг*; $\boldsymbol{M_x}$ и $\boldsymbol{M_y}$ – изгибающие моменты, связанные с деформацией *изгиб*; $\boldsymbol{M_z}$ – крутящий момент, связанный с деформацией *кручение*.

Если в сечении действует только одно внутреннее усилие, а остальные равны нулю, мы имеем дело с простейшей деформацией, и таких деформаций четыре: растяжение (сжатие), сдвиг, плоский изгиб и кручение. В данной теме будет изучаться первый случай нагружения, когда элемент испытывает только *растяжение* или *сжатие* вдоль геометрической оси, т. е. линии, проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

> *Центральным растяжением (сжатием) называется деформация, вызываемая силами, результирующая которых проходит по геометрической оси стержня. В этом случае в сечении возникает продольная сила N, а все остальные внутренние усилия равны нулю.*

Прочность элементов при растяжении и сжатии может сильно отличаться, однако с точки зрения теории напряженного состояния эти деформации представляют собой единый вид – это *линейное напряженное состояние*. Поэтому в отношении применяемых формул расчеты на сжатие не будут отличаться от расчетов на растяжение. Но это допустимо при сжатии только *жестких стержней.* Если же сжатию подвергаются гибкие стержни, т. е. стержни большой длины с относительно малым поперечным сечением, то здесь применяются принципиально другие решения. Такие стержни при сжатии искривляются, т. е. теряют *устойчивость*, и их расчет требует совершенно иных формул и методик.

1.1. Продольные силы. Эпюра продольных сил

Чаще всего растяжение или сжатие осуществляется силами, приложенными к концам стержня (рис. 2). Такой случай называется *простым растяжением* или *сжатием*.

Величина продольной силы N, возникающей в поперечном сечении, определяется методом сечений и составлением уравнения равновесия для отсеченной части. В случае *простого растяжения* или *сжатия* во всех сечениях стержня будут возникать одинаковые силы N, равные внешней силе. При этом будем считать, что ***если сила N направлена от сечения*** *– это растяжение и оно условно положительно,* ***если к сечению*** *– это сжатие и оно условно отрицательно*.

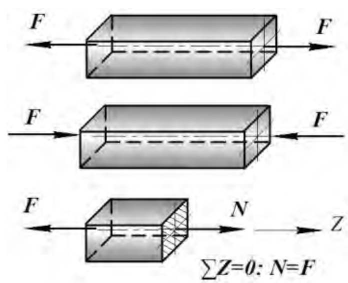


Рис. 2

Иногда на практике встречаются случаи, когда по оси стержня приложено несколько сил. Эти силы делят стержень на участки, границей участка является сечение, где приложена сила. В этом случае на каждом участке будет возникать своя продольная сила – N_1, N_2, N_3 и т. д. Для оценки прочности стержня и установления наиболее нагруженного участка, необходимо знать характер изменения продольных сил вдоль его оси. Для этого методом сечений определяют продольные силы на каждом участке, а затем строят график, показывающий закон распределения продольных сил по длине стержня. Этот график называется ***эпюрой продольных сил***.

Понятие *ЭПЮРА* в данном учебном пособии вводится впервые и требует пояснения, так как при изучении различных видов деформаций будет часто возникать необходимость в построении эпюр для различных параметров.

> *Эпюра – это график, который показывает изменение интересующего нас параметра (внутренние усилия, напряжения, перемещения) по длине стержня или по его сечению. По сути, эпюра – это есть функция данного параметра по координате длины или сечения*

Возвращаясь к деформации растяжения–сжатия, рассмотрим случай нагружения стержня и, используя метод сечений, построим эпюру продольных сил.

<u>Пример 1</u>

Для стержня, закрепленного на опоре *A* и нагруженного на конце силой F (рис. 3), построить эпюру продольных сил.

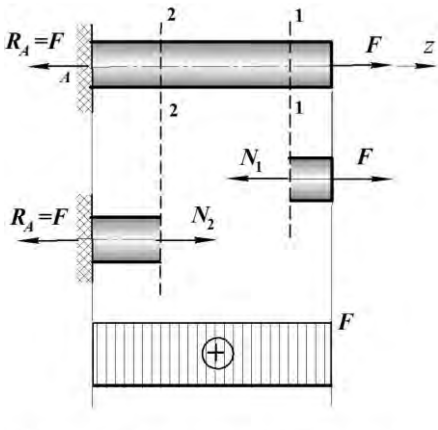


Рис. 3. Эпюра продольных сил *N*

<u>РЕШЕНИЕ</u>

● В результате воздействия силы F на опоре *A* возникает реакция R_A, которая из условия равновесия равна:

$$\sum Z = 0: \quad R_A = F.$$

● Используя метод сечений, рассекаем стержень сечением 1–1, отбрасываем его левую часть, а для отсеченной части составляем уравнение равновесия и определяем N_1:

$$\sum Z = 0: \; F - N_1 = 0 \;\rightarrow\; N_1 = F.$$

● Метод сечений позволяет отбрасывать любую часть стержня, но если рассматривать сечение со стороны заделки, то прежде необходимо определить реакцию R_A. Для нашего случая $R_A = F$, поэтому в сечении 2–2 будет возникать такая же продольная сила $N_2 = R_A = F$.

● Таким образом, при простом растяжении (сжатии) во всех сечениях возникает одинаковая продольная сила N, равная внешней силе F.

● По полученным результатам строим эпюру продольных сил. Эпюра строится на оси стержня. Положительное значение продольной силы (растяжение) откладывается вверх, отрицательное (сжатие) – вниз с указанием на рисунке знака. Штриховку на эпюре следует выполнять перпендикулярно к оси стержня, так как каждая линия в принятом масштабе является ординатой и показывает значение силы N в данном сечении.

<u>Пример 2</u>

Для стержня, закрепленного на опоре A и нагруженного системой сил (рис. 4), построить эпюру продольных сил.

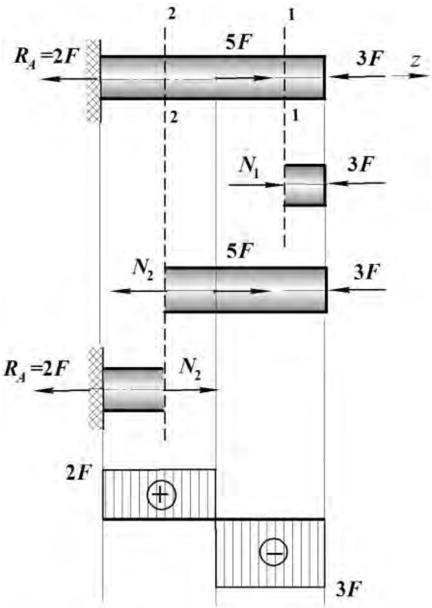


Рис. 4. Эпюра продольных сил N

<u>РЕШЕНИЕ</u>

● Стержень имеет два участка, границей участка является точка (сечение) приложения силы $5F$.

● Определяем реакцию R_A из условия равновесия стержня:

$$\sum Z = 0: \ -3F + 5F - R_A = 0;$$

$$R_A = 2F.$$

<u>Примечание</u>.

Определение реакции опоры необходимо, если сечение предполагается брать от заделки. Это имеет смысл делать в случае, когда стержень состоит из нескольких участков. Тогда часть сечений удобно рассматривать, двигаясь с одной стороны, а часть – с другой.

● Рассмотрим сечение 1–1 от свободного конца и левую часть стержня отбросим. Сечение следует брать в пределах участка между двумя границами. ***Рассекать стержень прямо по границе нельзя!*** Составляем уравнение равновесия для отсеченной части:

$$\sum Z = 0: \quad N_1 - 3F = 0 \;\rightarrow\; N_1 = 3F \quad \text{(сжатие)}\,.$$

● Сечение 2−2 проводим в пределах второго участка, по-прежнему рассматривая стержень от свободного конца. Составляем уравнение равновесия для отсеченной части:

$$\sum Z = 0: \quad -N_2 + 5F - 3F = 0 \;\rightarrow\; N_2 = 2F \;\text{(растяжение)}.$$

● Если сечение 2−2 брать от заделки, то было бы получено такое же значение для силы N_2. Так как реакция R_A нам известна, то из равновесия отсеченной части имеем:

$$\sum Z = 0: \quad N_2 = R_A = 2F \,\text{(растяжение)}.$$

Примечание.
Если отсеченная часть стержня нагружена большим количеством сил и установить сразу правильное направление для силы N представляется сложным, ее следует направлять произвольно – к сечению или от него. Дальнейшее решение уравнения равновесия покажет: если сила N получена с положительным знаком, значит ее направление выбрано верно. Если с отрицательным знаком – ее следует перенаправить, зачеркнув неверное, а рядом показать правильное направление. И только теперь по правильному направлению продольной силы N устанавливать, растяжение или сжатие возникает на данном участке.

● Определив силы N на участках стержня, строим эпюру продольных сил. ***Скачок на эпюре продольных сил равен внешней силе, приложенной в этом сечении!***

1.2. Напряжения. Эпюра напряжений

Продольная сила, возникающая при растяжении (сжатии) и определяемая методом сечений, является величиной результирующей и представляет собой сумму всех сил, действующих в сечении. Однако для оценки прочности элемента недостаточно знать только значение результирующей, необходимо также знать, чему равны силы в каждой точке сечения и каков характер их распределения по сечению. Это позволит установить наиболее нагруженные точки, которые могут представлять опасность для прочности элемента.

Характеристикой интенсивности внутренних сил в сечении является ***напряжение***.

Чтобы установить, какие напряжения возникают в поперечных сечениях стержня при растяжении (сжатии), и определить характер их распределения, выполним простой эксперимент (рис. 5). На поверхность призматического стержня нанесем сетку линий и приложим к нему на конце растягивающую силу F (рис. 5, *а*). Качественный анализ изменения этой сетки позволит ответить на вопрос о возникающих напряжениях и вывести формулу для их расчета.

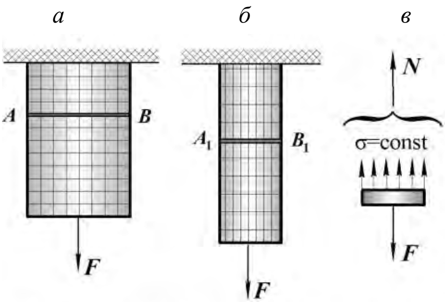


Рис. 5. Растяжение призматического стержня

Сразу отметим, что все рассуждения и выводы относительно напряжений являются справедливыми как для растяжения, так и для сжатия. Поэтому расчет элементов в отношении применяемых формул в обоих случаях будет одинаков, хотя их прочность при растяжении и сжатии бывает весьма отличной.

Итак, по результатам изменения линий, нанесенных на поверхность (рис. 5, *б*), можно сделать следующие наблюдения и выводы:

► Продольные линии остаются прямыми, и это говорит о том, что поперечные сечения стержня при его растяжении не сдвигаются друг относительно друга (в противном случае продольная линия превратилась бы в ломаную линию). А так как деформация сдвига отсутствует, значит, ***в поперечных сечениях напряжения*** $\boldsymbol{\tau} = 0$.

► Поперечные линии, которые, по сути, являются периметрами сечений, также остаются прямыми. А это значит, что при растяжении стержня ***поперечные сечения остаются плоскими***. Следовательно, гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), которая для многих случаев деформирования принимается как допущение, при растяжении (сжатии) является реальным фактом.

► Так как расстояния между поперечными линиями (сечениями) увеличились (сечение AB переместилось в положение A_1B_1), значит, здесь имеет место перемещение частиц вдоль оси, а такое перемещение могут вызвать только силы, перпендикулярные к сечению. Такой силой в каждой точке сечения является нормальное напряжение σ. Следовательно, при растяжении и сжатии *в* поперечных сечениях ***действуют нормальные напряжения*** $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$.

► Так как поперечные линии остаются горизонтальными и перпендикулярными к оси стержня, значит, каждая точка сечения опускается на одинаковое расстояние, т. е. получает одинаковую продольную деформацию. Поскольку при упругом деформировании силы и деформации связаны между собой пропорционально, значит, при одинаковых продольных деформациях напряжения также будут одинаковыми. Следовательно, при растяжении−сжатии ***нормальные напряжения равномерно распределены по сечению и имеют во всех точках одинаковое значение*** $\boldsymbol{\sigma} = \text{const}$ (рис. 5, *в*).

Однако следует знать, что предположение о равномерном распределении напряжений по сечению является справедливым только для участков стержня, удаленных от мест его закрепления и мест приложения нагрузки, а также участков без резкого изменения его геометрической формы (без отверстий, вырезов, выточек и т.д.). Здесь, в указанных местах, распределение напряжений будет иметь иной характер и расчеты на прочность потребуют соответствующей корректировки. Однако на участках с плавно изменяющейся геометрической формой, и частях, удаленных от мест закрепления и приложения нагрузки, где согласно принципу Сен-Венана внутренние силы не зависят от способа приложения сил, выводы, рассмотренные выше, будут справедливы и могут служить основой для дальнейшего вывода формул. Используя интегральную зависимость между продольной силой N и напряжением σ, выведем формулу для напряжений: $N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A$, где A – площадь поперечного сечения. Отсюда получаем →

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}. \qquad (1)$$

В случае *простого растяжения (сжатия)*, когда силы приложены только по концам стержня, продольная сила $N = F$ и тогда формула (1) принимает вид: $\sigma = \dfrac{F}{A}$.

Таким образом:

> *При центральном растяжении или сжатии в поперечных сечениях стержня возникают равномерно распределенные нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.*

А далее, определив по формуле (1) напряжения на каждом участке, можно построить *эпюру напряжений*, которая покажет характер их изменения по длине стержня и позволит установить наиболее опасный участок.

Пример 3

Для стержня из примера 2, имеющего постоянное сечение площадью *A* (рис. 6), построить эпюру напряжений.

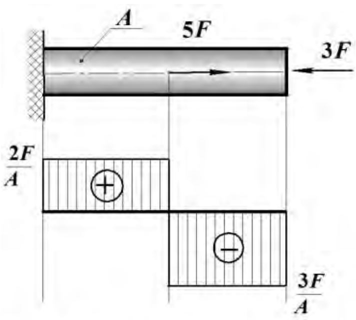


Рис. 6. Эпюра напряжений σ

РЕШЕНИЕ

Участок 1: $N_1 = 3F$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{3F}{A}.$$

Участок 2: $N_2 = 2F$

$$\sigma_1 = \frac{N_2}{A} = \frac{2F}{A}.$$

Примечание 1.
Напряжения σ имеют тот же знак, что и продольная сила N.

Примечание 2.
Размерность напряжений – [МПа] = Н/мм². Об этом следует помнить при решении задач, когда для получения правильного результата необходимо выполнять перевод единиц для всех входящих в формулу величин в соответствии с размерностью напряжения.

1.3. *Расчеты на прочность при растяжении−сжатии*

Основной задачей при проектировании и расчете конструкции является обеспечение ее прочности и надежности на весь планируемый период эксплуатации. Конструкция считается *прочной*, если она способна в течение этого времени выдерживать рабочие напряжения, возникающие в результате ее работы. Напряжения, при которых конструкция теряет свою работоспособность и уже не может использоваться по назначению, называются ***предельными***. При этих напряжениях элементы конструкции либо разрушаются, либо получают необратимые повреждения – трещины, большие остаточные деформации и др. изменения, которые делают ее непригодной для дальнейшего использования.

Таким *предельным* напряжением для хрупких материалов является предел прочности или временное сопротивление $\sigma_в$ – напряжение, при котором происходит разрушение материала. Пластичные же материалы, прежде чем разрушиться (а их можно довести до разрушения только при растяжении, при сжатии их разрушить невозможно), сначала получают заметные пластические деформации, которые также могут быть причиной нарушения работоспособности конструкции, так как приводят к необратимому изменению размеров и формы детали. Поэтому для пластичных материалов *предельным* напряжением является предел текучести $\sigma_т$ – напряжение, при котором в материале начинают интенсивно накапливаться остаточные (пластические) деформации. *Предельные* напряжения для материалов определяют опытным путем в результате испытаний на растяжение, сжатие и др. виды нагружения.

Однако следует помнить, что экспериментальное определение механических характеристик в силу приближенности методик расчета и эксперимента не является точным, а реальные условия работы элемента могут отличаться от условий испытания образца. Кроме того, при работе конструкции всегда возникают факторы, которые могут способствовать снижению ее прочности, но которые в силу случайности характера невозможно предварительно учесть и предусмотреть. Поэтому, чтобы безопасность работы конструкции была обеспечена, она должна быть спроектирована таким образом, чтобы напряжения не только не достигали предельных значений, но даже в некоторое число раз были бы ниже этих величин.

Для этого при проектировании элементов конструкций для *расчетных* напряжений устанавливают некоторый максимально допустимый предел значения, который является безопасным для данного материала и который не приведет к разрушению или появлению больших пластических деформаций. Такой наибольший предел значения называется ***допускаемым напряжением*** и обозначается [σ].

Значение допускаемого напряжения определяют путем деления предельного напряжения ($\sigma_в$ – для хрупких материалов или $\sigma_т$ – для пластичных) на величину n, называемую ***коэффициентом запаса прочности***:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_в}{n}; \qquad [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n}.$$

Выбор коэффициента запаса прочности и допускаемого напряжения является очень важным и ответственным вопросом и его решение зависит от того, насколько точно могут быть определены условия работы конструкции. Чем ниже эта точность, тем больший запас прочности следует давать при установлении допускаемых напряжений. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в дальнейших темах нашего курса.

Возвращаемся к деформации растяжения–сжатия. Определив напряжения в опасном сечении растянутого (сжатого) стержня по формуле (1) и установив допускаемое напряжение на основании вышесказанного, можно произвести оценку прочности элемента, сопоставив фактические напряжения в опасном сечении с допускаемым напряжением:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma]}. \qquad (2)$$

Формулу (2) называют ***условием прочности при растяжении (сжатии)*** и она служит основной формулой для выполнения проверочных и проектировочных расчетов на прочность.

Используя условие прочности (2), можно решать три типа задач:

❶ По известной схеме нагружения элемента, заданным размерам и материалу определяют, обеспечена или не обеспечена прочность при данных условиях работы (*проверочный расчет*):

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \le [\sigma]$$

❷ По известным нагрузкам для выбранного материала рассчитывают размеры поперечного сечения, которые обеспечат прочность элемента (*проектировочный расчет*):

$$A \ge \frac{N}{[\sigma]}$$

❸ По известным размерам детали, материалу и схеме нагружения определяют ее *грузоподъемность*, т.е. какую наибольшую нагрузку она может выдержать без опасности разрушения или появления в ней больших пластических деформаций (*проектировочный расчет*):

$$N_{max} \le A \cdot [\sigma]$$

По полученному значению N_{max} затем определяют допускаемые внешние силы, которые можно безопасно приложить к элементу.

1.4. *Деформации*

Как показывает опыт, при растяжении длина элемента увеличивается, а поперечный размер уменьшается. При сжатии – наоборот. Рассмотрим растяжение стержня (рис. 7) и введем определение деформаций:

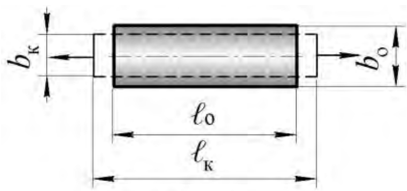


Рис. 7

$\Delta\ell = \ell_к - \ell_о$	Абсолютная продольная деформация
$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_о}$	Относительная продольная деформация
$\Delta b = b_о - b_к$	Абсолютная поперечная деформация
$\varepsilon^* = \frac{\Delta b}{b_о}$	Относительная поперечная деформация

Абсолютные деформации $\Delta\ell$ и Δb имеют размерность длины, относительные деформации ε и ε^* – величины безразмерные. Опыт показывает, что в пределах упругих деформаций между относительной продольной ε и относительной поперечной ε^* деформациями существует пропорциональная зависимость:

$$\boxed{\varepsilon^* = -\mu\varepsilon}\,. \qquad (3)$$

Коэффициент μ называется ***коэффициентом поперечной деформации*** или ***коэффициентом Пуассона***. Он является физической константой материала, характеризует его способность к поперечной деформации, определяется экспериментально. Значение коэффициента Пуассона лежит в пределах $0 \le \mu \le 0{,}5$. Знак минус в формуле (3) означает, что продольная и поперечная деформации всегда противоположны по знаку: при растяжении продольный размер увеличивается, а поперечный уменьшается. При сжатии – наоборот. Значения коэффициента Пуассона для некоторых материалов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Материал	μ	Материал	μ
Сталь	0,25–0,33	Цинк	0,21
Медь	0,31–0,34	Камень	0,16–0,34
Бронза	0,32–0,35	Бетон	0,08–0,18
Чугун	0,23–0,27	Каучук	0,47
Свинец	0,45	Стекло	0,25
Латунь	0,32–0,42	Фанера	0,07
Алюминий	0,32–0,36	Пробка	0,00

1.5. *Объемная деформация*

В некоторых задачах, решаемых при проектировании, требуется определить объемную деформацию элемента.

Рассмотрим элемент на рис. 7 и предположим, что он имеет квадратное сечение:

- Его первоначальный объем равен: $V_0 = b_0^2 \cdot \ell_0$.
- После растяжения элемент принимает размеры, которые через относительные деформации можно привести к виду:

$$\ell_к = \ell_0 + \Delta\ell = \ell_0 + \varepsilon\ell_0 = \ell_0\,(1+\varepsilon);$$

$$b_к = b_0 - \Delta b = b_0 - \varepsilon^* b_0 = b_0\,(1-\varepsilon^*) = b_0\,(1-\mu\varepsilon).$$

- Тогда новый объем элемента равен:

$$V_к = b_к^2 \cdot \ell_к = \left[b_0(1-\mu\varepsilon)\right]^2 \cdot \ell_0(1+\varepsilon) = b_0^2 \cdot \ell_0 (1-\mu\varepsilon)^2(1+\varepsilon) =$$
$$= V_0(1-2\mu\varepsilon+\mu^2\varepsilon^2+\varepsilon-2\mu\varepsilon^2+\mu^2\varepsilon^3) = V_0\left[1-\varepsilon(1+2\mu)\right],$$

где величинами малого порядка можно пренебречь.

● Тогда абсолютная ΔV и относительная ε_V объемные деформации соответственно равны:

$$\Delta V = V_к - V_0 = V_0\left[1-\varepsilon(1+2\mu)\right] - V_0 = V_0\,\varepsilon(1-2\mu)\,;$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon(1-2\mu)\,;$$

$$\boxed{\Delta V = V_0\,\varepsilon(1-2\mu) \qquad \varepsilon_V = \varepsilon(1-2\mu)}\,. \tag{4}$$

Как видно из формул (4), у материалов, коэффициент Пуассона которых близок к 0,5 (резины, каучуки, полиуретаны и др. эластомеры), объемная деформация равна нулю. И хотя эти материалы являются твердыми и часто используются как конструкционные материалы, при деформировании они ведут себя как высоковязкие жидкости. Деформируясь, они не изменяют объем элемента, поэтому их называют *несжимаемыми*.

1.6. *Связь между напряжениями и деформациями. Закон Гука*

Для подавляющего большинства материалов, как показывает опыт, в пределах малых удлинений (укорочений) между относительной продольной деформацией и напряжением существует пропорциональная зависимость, которая выражает основной закон механики материалов и называется ***законом Гука***. При растяжении и сжатии закон Гука формулируется следующим образом:

> *Относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению.*

а математическая запись имеет вид

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}}\,. \tag{5}$$

Эта пропорциональность нарушается, когда напряжения переходят некоторую границу, называемую пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$, которую определяют опытным путем. Однако элементы конструкций проектируются таким образом, что напряжения не выходят за этот предел, а деформации, возникающие под нагрузкой, являются только упругими, а значит, бесконечно малыми. В этом случае закон Гука справедлив и может использоваться при расчетах.

Коэффициент E, входящий в формулу (5), называется ***модулем продольной упругости первого рода*** или ***модулем Юнга***. Он является механической константой материала, характеризует его жесткость, т. е. способность сопротивляться деформированию, определяется опытным путем. Как видно из формулы (5), модуль Юнга имеет размерность напряжения [МПа]. Значения модуля Юнга для некоторых материалов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Материал	E, МПа	Материал	E, МПа
Сталь	$2\cdot10^5 \div 2{,}2\cdot10^5$	Титан	$1{,}1\cdot10^5$
Медь	$1\cdot10^5$	Латунь	$1\cdot10^5$
Чугун	$0{,}75\cdot10^5 \div 1{,}6\cdot10^5$	Текстолит	$1\cdot10^4$
Бронза	$1{,}2\cdot10^5$	Древесина	$1\cdot10^4$
Алюминий	$0{,}675\cdot10^5$	Стеклопластик	$6\cdot10^4$
Дюралюминий	$0{,}7\cdot10^5$	Углепластик	$1{,}9\cdot10^5$

Заменив в формуле (5) значения $\sigma = N/A$ и $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$, можно получить другое выражение закона Гука при растяжении−сжатии:

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA}}, \tag{6}$$

где EA – жесткость сечения, а $C = EA/\ell$ − жесткость всего элемента при растяжении−сжатии. Следует обратить внимание, что жесткость элемента не зависит от величины и способа приложения нагрузки, она зависит только от геометрии элемента и механических свойств материала. Как видно из формулы (6), чем выше жесткость элемента, тем меньшие деформации он получает, а, следовательно, и напряжения также будут меньше. Поэтому увеличение жесткости является одним из способов повышения прочности элемента. Однако это справедливо только в условиях статического нагружения.

Закон Гука, выражаемый формулой (6), позволяет определять изменение длины элемента в случае *простого* растяжения-сжатия, когда $N = F$, или его участков, если к стержню приложено несколько сил. Определив продольную деформацию каждого участка, можно построить эпюру перемещений.

<u>Пример 4</u>

Для стержня, рассмотренного в примере 2, построить эпюру перемещений (рис. 8):

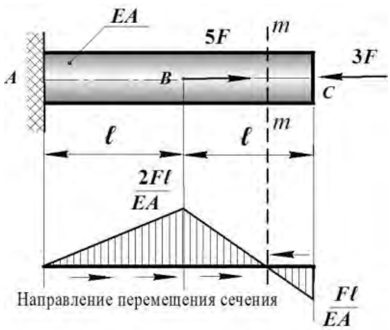


Рис. 8. Эпюра перемещений Δ

<u>РЕШЕНИЕ</u>

● Определим изменение длины каждого участка:

<u>Участок 1</u>: $N_1 = 3F$ (сжатие)

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell}{EA} = -\frac{3F\ell}{EA}.$$

<u>Участок 2</u>: $N_2 = 2F$ (растяжение)

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell}{EA} = +\frac{2F\ell}{EA}.$$

● Обозначим буквами границы участков и определим перемещение этих границы, начиная от заделки:

$$\Delta_A = 0;\ \Delta_B = \Delta\ell_2 = +\frac{2F\ell}{EA};\ \Delta_C = \Delta\ell_2 + \Delta\ell_1 = \frac{2F\ell}{EA} - \frac{3F\ell}{EA} = -\frac{F\ell}{EA}.$$

В определенном масштабе откладываем точки, соответствующие этим перемещениям, и соединяем их прямыми линиями. Каждая линия штриховки на эпюре указывает в выбранном масштабе величину перемещения данного сечения, а стрелки – направление перемещения. Эпюра перемещений наглядно показывает куда и насколько смещаются сечения и какие сечения не получают перемещения вовсе, как сечение $m{-}m$ из рис. 8.

Если при растяжении или сжатии требуется определить полное изменение длины стержня от действия всех сил, то это можно сделать следующими способами:

► По эпюре перемещений – перемещение торцевого сечения соответствует полному изменению длины стержня;

► Как алгебраическую сумму изменений длин каждого участка:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \ldots + \Delta\ell_i = \sum \frac{N_i \ell_i}{E_i A_i} .$$

► На основании принципа независимости действия сил – как алгебраическую сумму изменения длины стержня от каждой силы в отдельности:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_{F_1} + \Delta\ell_{F_2} + \ldots + \Delta\ell_{F_i} .$$

Используя данные из примера 4, определим на основании вышеуказанного принципа полное изменение длины стержня:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_{3F} + \Delta\ell_{5F} = -\frac{3F \cdot 2\ell}{EA} + \frac{5F \cdot \ell}{EA} = -\frac{F\ell}{EA},$$

что соответствует результату на эпюре перемещений (рис. 8).

Полученные формулы (5)–(6) для определения деформаций позволяют решать вопросы жесткости элемента. Так же как материал не способен выдерживать сколь угодно большие напряжения, он также не может выдерживать и бесконечно большие деформации. Кроме того, даже если деформации не являются разрушающими для элемента, превышение их сверх установленных норм является также недопустимым, так как это может нарушить работоспособность конструкции. Поэтому при проектировании элементов помимо вопросов прочности, которые, безусловно, являются главными и первостепенными, часто приходится решать вопросы жесткости, ограничивая деформации некоторым допустимым значением:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{\max} &= \frac{\sigma}{E} \le [\varepsilon] \\ \Delta\ell_{\max} &= \frac{N\ell}{EA} \le [\Delta\ell] \end{aligned}} \qquad (7)$$

Выражения (7) называют ***условием жесткости при растяжении (сжатии)*** и они являются основными формулами для расчетов на жесткость.

1.7. ***Потенциальная энергия деформации при растяжении–сжатии***

При нагружении упругого тела внешними силами эти силы совершают работу (A), которая затрачивается на деформирование элемента и приводит к накоплению в нем ***потенциальной энергии деформации (U)***. Причина этого явления заключается в том, что как только происходит смещение частиц от их первоначального положения, в элементе возникают силы упругого сопротивления, которые стремятся вернуть частицы в исходное состояние. Энергия этих сил и представляет собой *потенциальную энергию деформации*, запасенную упругим телом. При разгрузке элемента эта энергия высвобождается, и она способна совершить работу. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии, и это свойство широко используется на практике, например, в заводных пружинных часовых механизмах, в упругих амортизирующих элементах (пружины, рессоры) и т.д.

Чтобы определить численное значение потенциальной энергии деформации, следует рассмотреть вопрос о работе внешних и внутренних сил. Внешние силы, деформируя тело, совершают работу на смещениях частиц из их исходного состояния. Внутренние силы упругости, возвращая частицы после разгрузки в начальное положение, совершают работу на тех же перемещениях, но в обратном направлении. При статическом нагружении системы суммарная работа внешних и внутренних сил равна нулю: $A_{\text{внеш}} + A_{\text{внут}} = 0$. Это так называемый *принцип начала возможных перемещений*, являющийся базовым принципом механики. На основании закона сохранения энергии, если деформирование системы происходит статически, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних, а значит, и внутренних сил:

$$A_{\text{внеш}} = -A_{\text{внут}} = U .$$

Знак «минус» здесь имеет чисто физический смысл: под действием внешней силы потенциальная энергия тела увеличивается, а внутренние силы, возвращая частицы в исходное положение и совершая работу на тех же перемещениях, но в обратном направлении, уменьшают потенциальную энергию, накопленную элементом.

Если деформирование происходит за предел текучести, полную работу внешних сил можно рассматривать как сумму работ, затраченных на упругую и пластическую деформации: $A_{\text{полн}} = A_{\text{упр}} + A_{\text{ост}}$, так как пластические деформации всегда сопровождаются упругими, которые продолжают расти и накапливаться в материале. Это так называемый закон наличия упругой деформации при пластическом деформировании. Однако накопление энергии, способной после разгрузки совершить работу, происходит только на упругих деформациях, так как они являются обратимыми и энергия после их исчезновения может быть возвращена. Работа внешних сил, затраченная на пластическую деформацию необратима, она идет на увеличение внутренней энергии пластически деформированного тела, что проявляется, например, в повышении его температуры, но эта энергия не накапливается и не способна совершить работу при разгрузке. Поэтому величина накопленной потенциальной энергии даже при наличии пластических деформаций будет определяться только работой сил на упругих деформациях: $A_{\text{упр}} = U$.

Определение потенциальной энергии деформации в механике материалов связано со многими важными расчетами. С помощью потенциальной энергии можно вычислять деформации и перемещения узлов при сложном нагружении элементов, производить расчеты на прочность, решать статически неопределимые задачи и т.д. Все эти вопросы будут рассмотрены далее по мере изучения курса, а в настоящей теме мы определим потенциальную энергию деформации при растяжении и сжатии.

Рассмотрим растяжение стержня силой F (рис. 9). В результате продольной деформации сечение, где приложена сила, перемещается и на этом перемещении сила совершает работу. Для определения этой работы рассмотрим график изменения силы при удлинении стержня на величину $\Delta\ell$.

Так как сила F не остается постоянной, возрастая от нуля до конечного значения, то работа, затраченная на удлинение $\Delta\ell$, может быть определена интегрированием по элементарным участкам данной диаграммы. Если на перемещении $d(\Delta\ell)$ сила совершает работу $dA_F = F^* \cdot d(\Delta\ell)$, а это площадь заштрихованной части диаграммы, то полная работа силы на перемещении $\Delta\ell$ будет определяться суммой элементарных площадок, составляющих площадь треугольника *OBC*, и она численно равна потенциальной энергии деформации:

$$A_{\text{упр}} = U = \frac{F \cdot \Delta\ell}{2} \; .$$

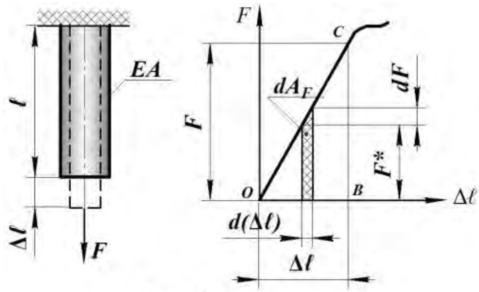


Рис. 9

Так как в пределах упругости между нагрузкой и деформацией существует пропорциональная зависимость, называемая законом Гука, то заменив $F = N$ и подставив сюда значение $\Delta\ell$ (6), получаем *полную потенциальную энергию упругой деформации при растяжении (сжатии)*:

$$\boxed{U = \frac{N^2 \ell}{2EA}} \quad [\text{Дж}] \, . \qquad (8)$$

Разделив эту энергию на объем образца $V_0 = A \cdot \ell$, определим *удельную потенциальную энергию деформации*, т.е. энергию,

приходящуюся на единицу объема: $u = \frac{U}{V_0} = \frac{N^2 \ell}{2EA} \frac{1}{A\ell} = \frac{N^2}{A^2} \frac{1}{2E} \rightarrow$

$$\boxed{u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}} \, . \qquad (9)$$

Анализ формулы (8) показывает:

► Так как продольная сила N здесь в квадрате, потенциальная энергия деформации всегда положительна. И при растяжении, и при сжатии она накапливается в элементе, т.е. под действием внешней силы она увеличивается, о чем было сказано выше.

► Количество потенциальной энергии, накопленной в элементе, не зависит от последовательности приложения сил (это никак не отражено в формуле), а зависит только от конечного значения силы.

► Потенциальная энергия, вызванная группой сил, не равна сумме потенциальных энергий от каждой силы в отдельности, т.е. определение потенциальной энергии не подчиняется принципу независимости действия сил. На примере 5 (рис. 10) показано, какая в этом случае возникает погрешность.

Пример 5

Для заданного стержня, нагруженного системой сил F_1 и F_2, определить количество потенциальной энергии деформации, накопленной на участке *AB*.

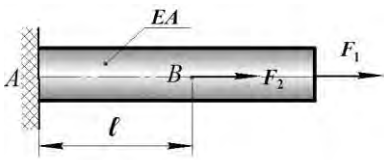


Рис. 10

РЕШЕНИЕ

● Определим потенциальную энергию деформации на участке от каждой продольной силы в отдельности, соответственно равной $N_{F_1} = F_1$ и $N_{F_2} = F_2$, т.е. по принципу независимости действия сил:

$$U = \frac{(N_{F_1})^2 \ell}{2EA} + \frac{(N_{F_2})^2 \ell}{2EA} = \frac{F_1^2 \ell}{2EA} + \frac{F_2^2 \ell}{2EA} .$$

● Определим потенциальную энергию, накопленную на участке *AB*, от суммарной продольной силы $N = N_{F_1} + N_{F_2}$:

$$U = \frac{N^2 \ell}{2EA} = \frac{(N_{F_1} + N_{F_2})^2 \ell}{2EA} = \frac{(F_1 + F_2)^2 \ell}{2EA} = \frac{F_1^2 \ell}{2EA} + \frac{F_2^2 \ell}{2EA} + \frac{F_1 F_2 \ell}{EA} .$$

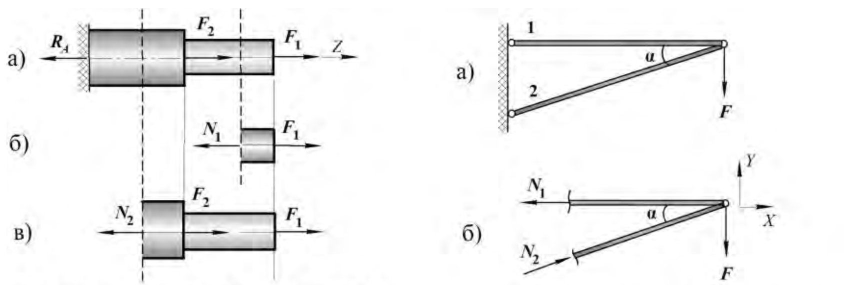
Как показывают расчеты, результаты решения отличаются на величину третьего слагаемого, так как сумма квадратов не равна квадрату суммы. При этом первое решение дает заниженное значение потенциальной энергии, что в дальнейшем повлечет за собой неверные результаты по прочности и жесткости. Следовательно, принцип независимости действия сил здесь неприменим.

2. Статически неопределимые системы при растяжении и сжатии

Среди существующих конструкций в машиностроительной и строительной практике значительное место занимают системы, которые называют *статически неопределимыми*. Эти конструкции для своих расчетов требуют особых методик и подходов и в экономическом отношении являются более дорогостоящими. Однако с технической точки зрения статически неопределимые системы обладают целым рядом достоинств и преимуществ, которые полностью оправдывают их применение и стоимость.

Для того чтобы дать определение, что такое статически неопределимая конструкция и каковы особенности ее расчета, установим понятие статической определимости системы.

2.1. *Статически определимые системы*



$\sum Z=0:\; F_1+F_2-R_A=0 \;\rightarrow R_A=F_1+F_2$

$\sum Z=0:\; F_1-N_1=0 \;\rightarrow N_1=F_1$

$\sum Z=0:\; F_1+F_2-N_2=0 \;\rightarrow N_2=F_1+F_2$

$$\left.\begin{array}{l}\sum X=0:\; N_2\cos\alpha-N_1=0\\ \sum Y=0:\; N_2\sin\alpha-F=0\end{array}\right\}\rightarrow N_1 \text{ и } N_2$$

Рис. 11

> *Система называется статически определимой, если реакции опор и внутренние усилия в элементах могут быть определены с помощью одних только уравнений равновесия*

Примеры статически определимых конструкций представлены на рис. 11. Как видно из рис. 11, все неизвестные силы – реакции опор и внутренние продольные усилия N_1 и N_2 – можно определить только с помощью уравнений равновесия.

2.2. *Статически неопределимые системы и их решение*

> *Система называется статически неопределимой, если реакции опор и внутренние усилия в элементах не могут быть определены с помощью одних только уравнений равновесия*

Примеры таких конструкций представлены на рис. 12. Все статически неопределимые системы наделены дополнительными или

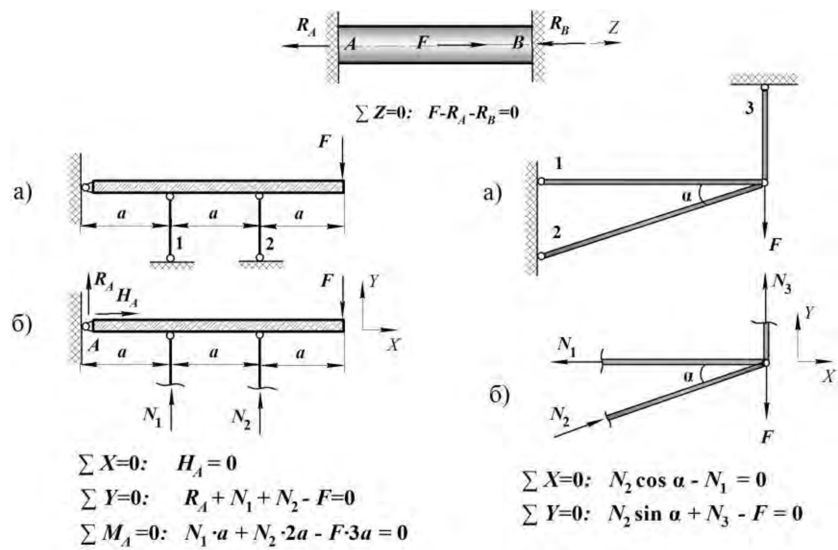


Рис. 12

так называемыми «лишними» связями в виде закреплений, подпорок, стержней и других элементов. Эти связи называют лишними, так как они не являются необходимыми для обеспечения равновесия системы и ее кинематической неподвижности, однако они предусмотрены условиями эксплуатации и служат для повышения прочности и жесткости конструкции, о чем будет рассказано ниже.

Как видно из рис. 12, в статически неопределимых конструкциях из-за наличия лишних связей число неизвестных сил, подлежащих определению, больше, чем число уравнений равновесия, которые можно составить для системы. Разница между числом уравнений равновесия и числом неизвестных называется ***степенью статической неопределимости***, которая, по сути, и определяется количеством лишних связей. Все системы, представленные на рис. 12, являются один раз статически неопределимыми.

Для решения статически неопределимых задач существует несколько способов, известных в практике расчетов как *метод сил*, *метод деформаций, метод, основанный на принципе наименьшей работы*, и т.д. Выбор метода определяется геометрией и условиями работы конструкции, видом наложенных связей, удобством применения и требуемой точностью расчетов. Рассмотрим некоторые из этих способов.

2.2.1. Метод деформаций

Этот метод является наиболее удобным для систем, элементы которых работают на растяжение и сжатие. Сущность его заключается в следующем.

Так как для определения неизвестных сил уравнений равновесия недостаточно, к решению привлекаются дополнительные уравнения, число которых должно соответствовать степени статической неопределимости задачи. Эти уравнения получают из рассмотрения системы в деформированном состоянии и установления связи между деформациями и перемещениями отдельных ее частей. Для каждой конструкции они имеет свой вид, и называются *уравнениями перемещений* или *уравнениями совместности* (*неразрывности) деформаций.* Связующим звеном между рассмотренными деформациями и усилиями, входящими в уравнения равновесия, выступает закон Гука. Таким образом, решение задачи обеспечивается совместным рассмотрением трех ее сторон − *статической*, *геометрической* и *физической*:

► <u>*Статическая сторона.*</u> Для конструкции составляются уравнения равновесия, и устанавливается степень ее статической неопределимости;

► <u>*Геометрическая сторона.*</u> Конструкция рассматривается в деформированном состоянии и устанавливается связь между деформациями ее элементов, т.е. составляется *уравнение перемещений,* которое отражает характер деформации системы;

► <u>*Физическая сторона.*</u> Это закон Гука, который связывает усилия, входящие в статическую сторону, и деформации, входящие в уравнение перемещений.

Рассмотрим несколько примеров раскрытия статической неопределимости *методом деформаций*.

<u>Пример</u> <u>6</u>

Для ступенчатого стержня (рис. 13), жестко защемленного с двух сторон, определить реакции опор и продольные силы на участках.

<u>*РЕШЕНИЕ:*</u>

● Под действием силы F стержень, деформируясь, воздействует на опоры, возникают две реакции опор. Раскрываем статическую неопределимость и определяем реакции R_A и R_B :

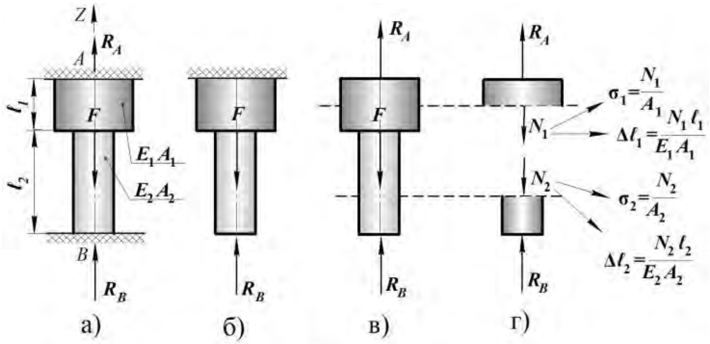


Рис. 13

<u>*Статическая сторона*</u> (рис. 13а) → $\boxed{\sum Z=0:\ R_A+R_B-F=0}$ *(1)*

Примечание.
Следует отметить, что направление реакций R_A и R_B в начале задачи можно выбирать произвольно. Дальнейшее решение укажет правильное их направление: если в результате решения реакции получились положительными, следовательно, их направление было выбрано верно, если отрицательными – их направление следует изменить на противоположное и в дальнейших расчетах принимать со знаком плюс.

Геометрическая сторона (рис. 13, *б*) →

Для геометрической стороны мысленно отбрасываем опору *B* и заменяем ее действие силой R_B. Так как в действительности стержень закреплен между двумя жесткими плитами, то полное изменение его длины должно быть равно нулю. На основании принципа независимости действия сил $\Delta\ell_{\text{полн}}$ может быть определено как алгебраическая сумма изменений длины от каждой силы в отдельности:

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_F + \Delta\ell_{R_B} = 0.} \qquad (2)$$

Физическая сторона →

На основании закона Гука каждое слагаемое в выражении *(2)* можно определить как:

$$\boxed{\Delta\ell_F = \frac{F\cdot\ell_1}{E_1A_1}; \quad \Delta\ell_{R_B} = -\left(\frac{R_B\ell_1}{E_1A_1} + \frac{R_B\ell_2}{E_2A_2}\right).} \qquad (3)$$

Решаем совместно три стороны задачи. Подставляем *(3)* → *(2)*:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \frac{F\cdot\ell_1}{E_1A_1} - R_B\left(\frac{\ell_1}{E_1A_1} + \frac{\ell_2}{E_2A_2}\right) = 0$$ и отсюда получаем –

$$\boxed{R_B = \frac{F}{1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}\cdot\frac{E_1A_1}{E_2A_2}}} \to (1) \to \boxed{R_A = \frac{F}{1 + \frac{\ell_1}{\ell_2}\cdot\frac{E_2A_2}{E_1A_1}}}.$$

Статическая неопределимость задачи раскрыта (рис. 13, *в*).

● Определив реакции опор, далее методом сечений (рис. 13, *г*) находим продольные силы N_1 и N_2 на участках стержня. А зная продольные силы, можно определять напряжения и деформации и решать вопросы прочности и жесткости стержня.

<u>Пример 7</u>

Для ступенчатого стержня (рис. 14, *а*), уложенного между двумя плитами с зазором, определить реакции опор и продольные силы на участках.

<u>РЕШЕНИЕ:</u>

Под действием силы F стержень удлиняется, перекрывает зазор Δ и начинает воздействовать на опоры (рис. 14, *б*). Возникают реакции опор R_A и R_B. Определяем эти реакции.

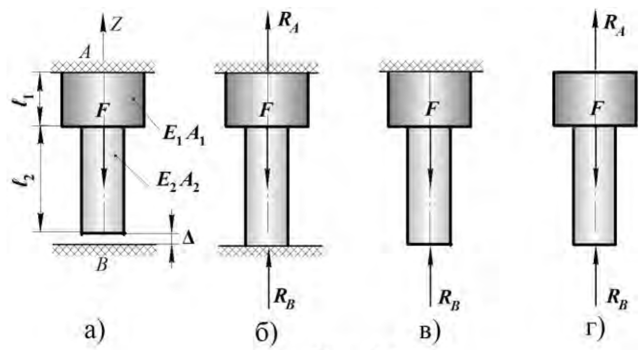


Рис. 14

Задача решается аналогично предыдущему примеру. Отличие заключается только в *геометрической стороне* (рис. 14, *в*). Так как стержень удлиниться больше, чем на величину зазора, не может, то полное изменение его длины равно:

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_F + \Delta\ell_{R_B} = \Delta}\ .$$

А далее, записав на основании закона Гука (*физическая сторона*) деформации от каждой силы в отдельности и подставив в уравнение совместности деформаций, получаем:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \frac{F\cdot\ell_1}{E_1A_1} - R_B\left(\frac{\ell_1}{E_1A_1}+\frac{\ell_2}{E_2A_2}\right) = \Delta \quad \to R_B \to (1) \to R_A .$$

Статическая неопределимость задачи раскрыта.

<u>Пример</u> *8*

Абсолютно жесткий брус *AB* крепится на шарнирной опоре *A* и поддерживается двумя стержнями с заданными геометрическими размерами и материалом (рис. 15, *а*). Определить продольные силы и напряжения в стержнях 1 и 2.

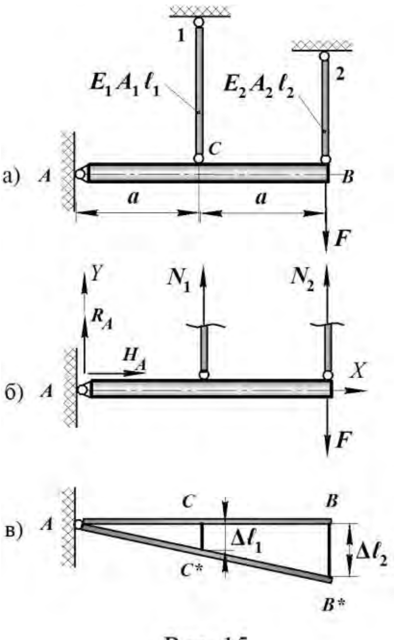


Рис. 15

<u>РЕШЕНИЕ</u>

● Под действием силы F конец бруса *B* опускается, в результате чего стержни растягиваются и в них возникают силы N_1 и N_2.

<u>Статическая сторона</u> →

Используя метод сечений, рассекаем стержни 1 и 2, заменяем действие отброшенной части на оставшуюся силами N_1 и N_2, указываем реакции на опоре *A* и составляем уравнения равновесия для отсеченной части конструкции (рис. 15, *б*):

$$\sum X = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad R_A + N_1 + N_2 - F = 0$$

$$\sum M_A = 0: \; N_1\cdot a + N_2\cdot 2a - F\cdot 2a = 0 \to \quad \boxed{N_1 + 2N_2 = 2F}\,. \qquad (1)$$

Система один раз статически неопределима.

<u>Геометрическая сторона</u> →

Для составления уравнения перемещений представим, какую форму принимает конструкция после нагружения (рис. 15, *в*): брус *AB* повернется на шарнирной опоре *A*, оставаясь прямым, а стержни растянутся на величину $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$ соответственно. Учитывая, что упругие деформации бесконечно малы, будем считать, что точки *C* и *B* получают строго вертикальное перемещение, направление которого при такой форме конструкции будет совпадать с деформацией стержней. Тогда из подобия треугольников имеем:

$$\Delta ACC^* \infty \Delta ABB^* \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta\ell_1}{a}=\frac{\Delta\ell_2}{2a} \rightarrow \quad \boxed{\Delta\ell_2=2\Delta\ell_1}. \qquad (2)$$

Физическая сторона →

$$\boxed{\Delta\ell_1=\frac{N_1\ell_1}{E_1A_1} \quad \Delta\ell_2=\frac{N_2\ell_2}{E_2A_2}}. \qquad (3)$$

Решаем совместно три стороны задачи. Подставляем *(3) → (2):*

$$\frac{N_2\ell_2}{E_2A_2}=2\frac{N_1\ell_1}{E_1A_1} \rightarrow N_2=2N_1\cdot\frac{\ell_1}{\ell_2}\cdot\frac{E_2A_2}{E_1A_1}.$$

Объединяем полученное выражение с уравнением *(1)* и получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными N_1 и N_2:

$$\begin{cases} N_1+2N_2=2F \\ N_2=2N_1\cdot\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\cdot\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1} \end{cases} \rightarrow \boxed{N_1=\frac{2F}{1+4\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\cdot\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}}} \quad \boxed{N_2=\frac{4F}{4+\dfrac{\ell_2}{\ell_1}\cdot\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}}}.$$

● Определив продольные силы в стержнях, можно из уравнений статики найти реакции на опоре *A*, а также решать любые вопросы прочности или жесткости стержней. Завершаем задачу определением напряжений в стержнях: $\sigma_1=\dfrac{N_1}{A_1}$; $\sigma_2=\dfrac{N_2}{A_2}$.

***Пример** 9*

Шарнирно-стержневая система состоит из трех стержней, соединенных в шарнире D (рис. 16, *а*). Стержни 1 и 2 выполнены из одинакового материала, имеют одинаковую длину и площадь поперечного сечения: $E_1 = E_2$, $\ell_1 = \ell_2$, $A_1 = A_2$. Данные для стержня 3: E_3, ℓ_3, A_3. Конструкция в шарнире D нагружена силой F. Определить усилия и напряжения в стержнях.

РЕШЕНИЕ

● Так как все три стержня имеют на концах шарнирные соединения, то реакции опор R_A, R_B и R_C направлены вдоль осей этих стержней, и продольные силы, возникающие в них, равны этим реакциям. Определим усилия N_1, N_2 и N_3.

Статическая сторона →

Методом сечений рассекаем стержни и рассматриваем равновесие узла D (рис. 16, *б*). Для плоской системы сил, пересекающихся в одной точке, можно составить два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0: \ -N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \ N_1 = N_3$$

$$\sum Y = 0: \quad \boxed{2N_1 \cos\alpha + N_3 - F = 0} \qquad (1)$$

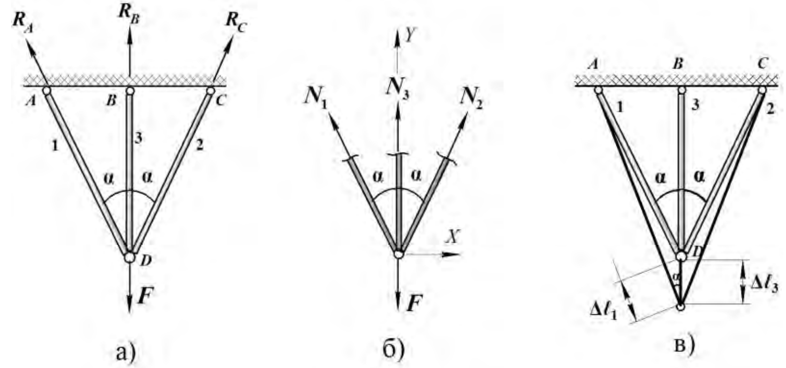


Рис. 16

Геометрическая сторона →

Рассмотрим конструкцию в деформированном состоянии и установим связь между удлинениями стержней 1 и 3 (рис. 16, *в*). Удлинение стержня 3 определяется по опусканию точки D. Чтобы определить, насколько удлинился стержень 1, следует через точку D провести дугу радиусом AD. Однако, учитывая, что деформации бесконечно малы, можно дугу заменить перпендикуляром, а угол α между стержнями считать неизменным. Тогда уравнение совместности деформаций будет иметь вид:

$$\boxed{\Delta \ell_1 = \Delta \ell_3 \cos\alpha} \qquad (2)$$

Физическая сторона →

Учитывая, что $\ell_3 = \ell_1 \cdot \cos\alpha$, на основании закона Гука имеем:

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{E_1A_1}; \quad \Delta\ell_3 = \frac{N_3\ell_3}{E_3A_3} = \frac{N_3\ell_1}{E_3A_3}\cos\alpha} \tag{3}$$

Решаем совместно три стороны задачи. Подставляем *(3) → (2):*

$$\frac{N_1\ell_1}{E_1A_1} = \frac{N_3\ell_1}{E_3A_3}\cos^2\alpha \;\rightarrow\; N_1 = N_3 \cdot \frac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^2\alpha \;.$$

Объединяем полученное выражение с уравнением *(1)* и получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными N_1 и N_3:

$$\begin{cases} N_1 = N_3 \cdot \dfrac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^2\alpha \\ 2N_1\cos\alpha + N_3 = F \end{cases} \quad \rightarrow \text{ отсюда получаем } \rightarrow$$

$$\boxed{N_1 = N_2 = \frac{F\cos^2\alpha}{2\cos^3\alpha + \dfrac{E_3A_3}{E_1A_1}}} \qquad \boxed{N_3 = \frac{F}{2\dfrac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^3\alpha + 1}}$$

● Определив продольные силы, можно определить напряжения в стержнях и их деформации, а также реакции опор, равные этим продольным силам. Определение реакций опор необходимо в том случае, если, например, объектом расчета является конструкция опоры.

Представленный выше *метод деформаций* для раскрытия статической неопределимости является удобным для многих конструкций и простым по методике расчета. Однако в силу приближенности деформационных схем, которые рассматриваются в геометрической стороне, а также часто несоответствия напряженного (силового) состояния деформированному состоянию данный метод не является точным и для более сложных конструкций может приводить к ошибочному результату. В этом случае используют другие методы решения, как например, *метод сил* или *энергетический метод, основанный на принципе наименьшей работы*.

2.2.2. Метод сил

Сущность *метода сил* заключается в следующем. Так как конструкция наделена «лишними» связями в виде опор, закреплений и т.д., эти лишние связи следует отбросить, в результате чего конструкция становится статически определимой. Она называется *основной системой*. При этом, отбрасывая лишние связи и выбирая основную систему, необходимо следить за тем, чтобы конструкция не потеряла свою кинематическую неподвижность и сохраняла равновесие при любом нагружении. А далее, приложив в направлении отброшенной связи силу X (пока неизвестную), следует задать условие по перемещению точки приложения этой силы. Решая полученное уравнение, определяем силу X, которая обеспечивает заданное перемещение и которая, по сути, представляет собой ранее отброшенную лишнюю связь. Так как раскрытие статической неопределимости сводится к нахождению силы, поэтому метод и называется *методом сил*. Рассмотрим его на примере.

***Пример** 10*

Абсолютно жесткий брус AB подвешен на трех стрежнях и нагружается силой F, как показано на рис. 17, *а*. Для крайних стержней $E_1A_1 = E_3A_3$, для среднего − E_2A_2. Определить усилия в стержнях.

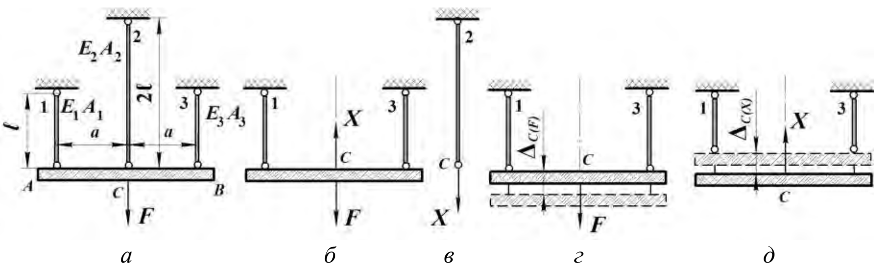


Рис. 17

РЕШЕНИЕ

● Выбираем основную систему, для чего от заданной конструкции следует отбросить одну лишнюю связь. В качестве лишней связи может выступать любой из стержней данной системы. Однако для симметричных конструкций наиболее рациональным будет выбор основной системы также симметричной. Поэтому за лишнюю связь принимаем стержень 2 и отбрасываем его. Чтобы условия работы основной системы полностью соответствовали условиям работы заданной конструкции, загружаем ее силой F, а в направлении отброшенной связи прикладываем силу X – силу взаимодействия между брусом AB и отброшенным стержнем 2 в точке их соединения Получаем эквивалентную систему (рис. 17, *б*).

● А далее, задаем условие перемещений, которое заключается в том, что вертикальное перемещение точки C в эквивалентной системе равно удлинению стержня 2 (рис. 17, *в*):

$$\boxed{\Delta_C = \Delta\ell_2 = \frac{X \cdot 2\ell}{E_2 A_2}} \qquad (1)$$

● Однако с другой стороны, перемещение точки C является результатом совместного действия сил F и X и, согласно принципу независимости действия сил, может быть определено как:

$$\boxed{\Delta_C = \Delta_{C(F)} + \Delta_{C(X)}} \qquad (2)$$

● Для определения перемещений $\Delta_{C(F)}$ и $\Delta_{C(X)}$ прикладываем к конструкции поочередно силы F (рис. 17г) и X (рис. 17д). В силу симметрии конструкции они поровну распределяются между стержнями и вызывают равные продольные силы. Тогда

$$\left.\begin{aligned} N_1 = N_3 = 0{,}5F \quad &\to \quad \Delta_{C(F)} = \Delta\ell_1 = \Delta\ell_3 = \frac{0{,}5F\cdot\ell}{E_1A_1} = \frac{F\cdot\ell}{2E_1A_1} \\ N_1 = N_3 = -0{,}5X \quad &\to \quad \Delta_{C(X)} = \Delta\ell_1 = \Delta\ell_3 = -\frac{0{,}5X\cdot\ell}{E_1A_1} = -\frac{X\cdot\ell}{2E_1A_1} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

● Объединяем выражения *(1)*−*(3)* и получаем:

$$\frac{F\cdot\ell}{2E_1A_1} - \frac{X\cdot\ell}{2E_1A_1} = \frac{X\cdot 2\ell}{E_2A_2} \qquad \to \qquad \boxed{X = N_2 = \frac{F}{1+4\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}}}$$

● Тогда результирующая в точке *C* от совместного действия сил определится как (F – X), а продольные силы в крайних стержнях будут соответственно равны:

$$\boxed{N_1 = N_3 = \frac{(F - X)}{2} = \frac{2F}{4 + \dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}}$$

Статическая неопределимость раскрыта.

<u>Пример 11</u>

Стержень *AB*, нагруженный силой F, защемлен одним концом, а другим опирается на пружину *BC* (рис. 18, *а*) с коэффициентом податливости δ (это осадка пружины под действием силы, равной единице, например, 1 кН). Определить усилия и напряжения на участках стержня.

<u>*РЕШЕНИЕ:*</u>

● Принимаем в качестве лишней связи пружину *BC*, отбрасываем ее и получаем *основную систему*. Чтобы условия работы основной системы соответствовали условиям работы конструкции, загружаем ее силой F, а в направлении отброшенной связи прикладываем силу X – силу взаимодействия между стержнем и пружиной (рис. 18, *б*). Эта же сила X сжимает и пружину (рис. 18, *в*).

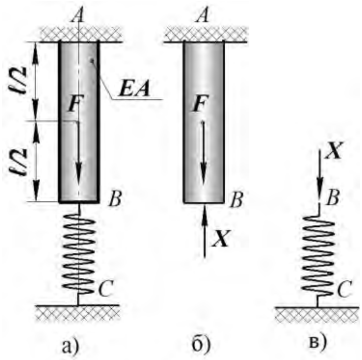


Рис. 18

● Задаем условие по перемещению, которое заключается в том, что сечение *B* переместится вниз настолько, насколько сожмется пружина *BC*:

$$\Delta_B = \Delta_{\text{пруж}} = \delta \cdot X \qquad (1)$$

● С другой стороны, опускание сечения *B* является результатом совместного действия сил F и X на стержень *AB*:

$$\Delta_B = \Delta_{B(F)} + \Delta_{B(X)} = \frac{F \cdot \ell / 2}{EA} - \frac{X \cdot \ell}{EA} = \frac{F \cdot \ell}{2EA} - \frac{X \cdot \ell}{EA}\,. \qquad (2)$$

● Объединяем выражения *(1)* и *(2)* и получаем:

$$\frac{F\cdot\ell}{2EA}-\frac{X\cdot\ell}{EA}=\delta\cdot X \quad\rightarrow\quad \boxed{X=\frac{F}{2\left(1+\dfrac{\delta EA}{\ell}\right)}}$$

Статическая неопределимость раскрыта

● А далее, методом сечений определяем продольные силы на участках стержня $N_{\text{нижн}}=X$ (сжатие) и $N_{\text{верх}}=F-X$ (растяжение) и производим расчеты на прочность.

Итак, рассмотренный выше *метод сил*, основанный на определении отброшенных связей, не требует построения деформационных схем, которые для некоторых конструкций могут представлять сложную геометрическую задачу и в силу приближенности не дают точного результата. В этом отношении метод сил является более точным, однако он также требует рассмотрения условий по перемещениям и в зависимости от формы конструкции и выбранной основной системы может являться задачей весьма трудоемкой. Полностью свободным от этих недостатков, требующих привлечение деформаций к раскрытию статической неопределимости, является метод, основанный *на принципе наименьшей работы*. Этот метод удобен и компактен, хотя и он имеет ограничения и не всегда может быть использован при решении некоторых статически неопределимых задач.

2.2.3. Энергетический метод (принцип наименьшей работы)

Метод определения лишних связей в статически неопределимых системах исходя из минимума потенциальной энергии был предложен Менабреа в 1857 г. и получил название «*принцип наименьшей работы*». В применении к деформированным телам этот метод основан на том, что «из всех возможных состояний равновесию системы, подверженной воздействию внешних сил, соответствует то, при котором полная энергия деформации системы принимает наименьшее значение» (Пуассон, 1833 г.). Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 12

Жесткая конструкция *AB*, закрепленная шарнирно на опоре *A* и поддерживаемая двумя стержнями, нагружена силой F, как показано на рис. 19. Размеры и жесткость стержней указаны на рисунке. Определить усилия в стержнях.

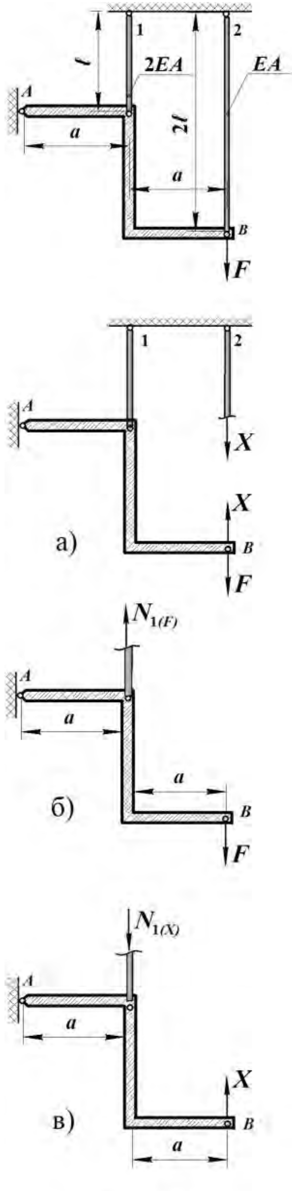


Рис. 19

РЕШЕНИЕ

● Конструкция один раз статически неопределима. Принимаем в качестве лишней связи стержень 2, отсекаем его от системы и заменяем его действие силой X – силой взаимодействия между стержнем и отсеченной частью конструкции в точке *B*. Эта же сила растягивает стержень 2 (рис. 19, *а*).

● В результате отбрасывания лишней связи конструкция стала статически определимой и это дает возможность определить продольную силу в стержне 1 с помощью уравнения равновесия.

Находим это значение, прикладывая поочередно к конструкции силы F и X (рис. 19 б, в):

$$\sum M_A = 0: \quad N_{1(F)} \cdot a + F \cdot 2a = 0 \rightarrow$$

$$N_{1(F)} = 2F \text{ (растяжение)} \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0: \quad -N_{1(X)} \cdot a + X \cdot 2a = 0 \rightarrow$$

$$N_{1(X)} = 2X \text{ (сжатие)} \qquad (2)$$

● Полная величина N_1 определится как алгебраическая сумма продольных сил от действия каждой силы F и X в отдельности. Тогда на основании *(1)* и *(2)* получаем:

$$\boxed{N_1 = N_{1(F)} + N_{1(X)} = (2F - 2X)}. \qquad (3)$$

● Так как стержень 2 растягивается силой X, то $\boxed{N_2 = X}$.

● Используя формулу (8), определяем потенциальную энергию деформации, накопленную в обоих стержнях системы:

$$U = \frac{N_1^2 \ell}{2(2EA)} + \frac{N_2^2 \cdot 2\ell}{2EA} = \frac{\ell}{2EA} \cdot \left[\frac{(2F - 2X)^2}{2} + 2X^2 \right] = \frac{\ell}{2EA} \left(2F^2 - 4FX + 4X^2 \right)$$

● Определяем силу X из условия минимума потенциальной энергии деформации:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0: \qquad 8X - 4F = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} X = N_2 = 0{,}5F \\ N_1 = 2(F - X) = F \end{array}}\,.$$

<u>Пример 13</u>

Конструкция, состоящая из трех стержней указанной длины с одинаковой жесткостью сечения EA, нагружена силой F, как показано на рис. 20. Определить усилия в стержнях.

<u>РЕШЕНИЕ</u>

● Принимаем в качестве лишней связи стержень 3, отсекаем его и заменяем его действие на оставшуюся часть конструкции силой X. Эта же сила X растягивает и сам стержень 3 (рис. 20, *а*).

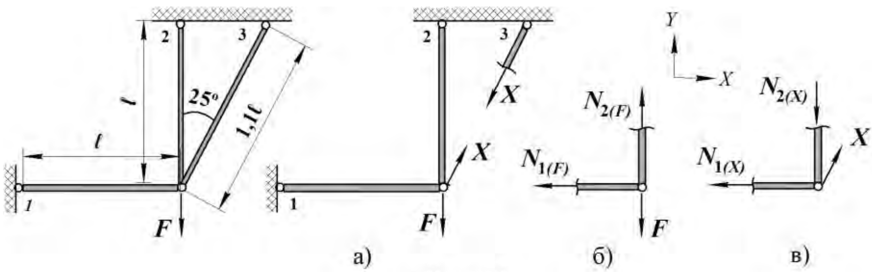


Рис. 20

● При отсутствии стержня 3 система становится статически определимой и это позволяет определить усилия в стержнях 1 и 2 с помощью уравнений равновесия.

● Рассматриваем равновесие узла и определяем продольные усилия в стержнях от каждой силы F и X в отдельности (рис. 20, *б*, *в*):

$\sum X = 0: \quad N_{1(F)} = 0$

$\sum Y = 0: \quad N_{2(F)} = F$ (растяжение)

$\sum X = 0: \quad X \cdot \sin 25^0 - N_{1(X)} = 0 \quad \to \quad N_{1(X)} = 0{,}423X$ (растяжение)

$\sum Y = 0: \quad X \cdot \cos 25^0 - N_{2(X)} = 0 \quad \to \quad N_{2(X)} = 0{,}906X$ (сжатие)

● Полные усилия в стержнях от действия сил F и X с учетом вида деформаций равны:

$$\boxed{\begin{aligned} &N_1 = N_{1(F)} + N_{1(X)} = 0{,}423X; \\ &N_2 = N_{2(F)} + N_{2(X)} = F - 0{,}906X; \\ &N_3 = X. \end{aligned}}$$

● Определяем по формуле (8) потенциальную энергию деформации, накопленную в во всех стержнях системы:

$$U = \frac{N_1^2 \ell}{2EA} + \frac{N_2^2 \cdot \ell}{2EA} + \frac{N_3^2 \cdot 1{,}1\ell}{2EA} = \frac{\ell}{2EA}\left[(0{,}423X)^2 + (F - 0{,}906X)^2 + 1{,}1X^2\right] =$$

$$= \frac{\ell}{2EA}(F^2 - 1{,}812\,F \cdot X + 2{,}1X^2).$$

● Определяем значение силы X из условия минимума потенциальной энергии деформации:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0: \qquad 4{,}2X - 1{,}812F = 0 \;\to\; \boxed{\begin{aligned} &X = N_3 = 0{,}431F \\ &N_2 = 0{,}609F \\ &N_1 = 0{,}182F \end{aligned}}\;.$$

Статическая неопределимость раскрыта.

Таким образом, рассмотрены три способа раскрытия статической неопределимости. Основными критериями при выборе того или иного метода для заданной статически неопределимой системы является простота решения и необходимая точность получаемых результатов.

2.3. Сравнительный анализ статически определимых и статически неопределимых систем

В данном вопросе мы рассмотрим статически определимые и статически неопределимые конструкции с технической точки зрения и проведем сравнительный анализ относительно их преимуществ и недостатков, их экономической стоимости и целесообразности. Рассмотрим вопрос на примере конструкций, представленных на рис. 21 а, б.

<u>*Статически определимые системы*</u> (рис. 21, *а*)

► ***Продольные силы***, возникающие в элементах статически определимых конструкций, не зависят от размеров этих элементов и механических свойств материалов, из которых они изготовлены. Они зависят только от внешней нагрузки и при заданной силе F могут принимать *одно единственное значение*, удовлетворяющее условию равновесия системы. Снижение внутренних сил, если того требует прочность конструкции, возможно только путем уменьшения внешней рабочей нагрузки. В этом отношении статически определимые системы однозначны и не дают вариантов для изменения внутренних сил путем варьирования жесткостями элементов, что ограничивает возможности при конструировании.

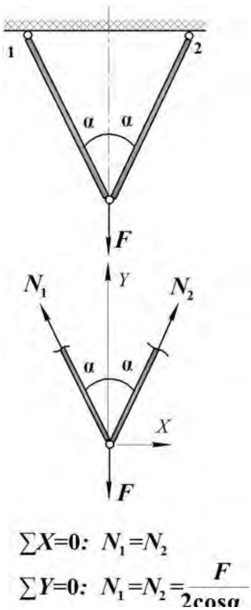


Рис. 21, *а*

Рис. 21а

► ***Напряжения*** в элементах таких систем также являются независимыми и определяются только величиной продольной силы и площадью сечения данного конкретного элемента. А это означает, что для каждого стержня, входящего в систему, можно подобрать такой размер сечения, при котором максимальные напряжения в нем будут достигать наибольшего значения, допускаемого для данного материала:

$$\sigma_{max(1)} = \frac{N_1}{A_1} \le [\sigma]_1 \;\rightarrow\; A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]_1};$$

$$\sigma_{max(2)} = \frac{N_2}{A_2} \le [\sigma]_2 \;\rightarrow\; A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]_2}.$$

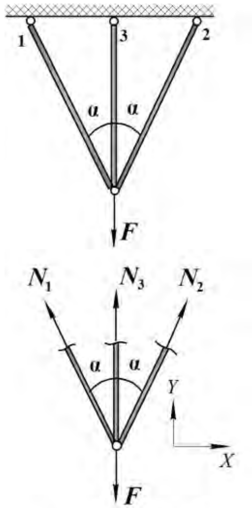
Таким образом, статически определимую конструкцию можно сделать *равнопрочной*, обеспечив, тем самым, максимальное использование материала каждого элемента, т.е. полную его загрузку до максимально допустимых напряжений. В этом отношении статически определимые конструкции являются наиболее рациональными и экономичными.

► ***Деформации*** в элементах данных статически определимой конструкциях могут развиваться свободно, независимо от деформаций других элементов, и их величина определяются только собственной жесткостью и действующими внутренними силами. Изменение размеров стержней происходит без нарушения их связи друг с другом, т. е. условие совместности деформаций здесь выполняется автоматически. Однако в случае возрастания нагрузки, если в одном из элементов возникает предельное состояние и напряжения достигают предела текучести, свободно развивающиеся деформации также увеличиваются, позволяя элементу «течь», что приводит к потере работоспособности всей конструкции. В этом отношении статически определимые системы являются чувствительными и неспособными сохранить прочность в указанных выше обстоятельствах.

Статически неопределимые системы (рис. 21, *б*)

► ***Продольные силы*** в статически неопределимых конструкциях зависят не только от внешней нагрузки, но также от размеров элементов и материала, из которого они изготовлены. Эта зависимость от жесткостей элементов, а точнее от соотношения жесткостей, дает значительное преимущество при конструировании таких систем. Задавая различные соотношения этих величин, можно получить сколько угодно комбинаций усилий N_1, N_2, N_3 и т.д. и все они будут удовлетворять уравнениям равновесия, т.е. любая комбинация продольных сил не приведет к нарушению равновесия системы.

Важным свойством статически неопределимых систем является то, что *элементы бóльшей жесткости всегда берут на себя бóльшую долю нагрузки.* Поэтому задаваясь различными соотношениями жесткостей, можно *для одной и той же нагрузки* осуществлять много вариантов распределения усилий между стержнями, разгружая одни и догружая другие элементы, что в результате позволяет выбрать наиболее рациональную схему работы конструкции.



$$N_1 = N_2 = \frac{F\cos^2\alpha}{2\cos^3\alpha + \dfrac{E_3A_3}{E_1A_1}}$$

$$N_3 = \frac{F}{2\dfrac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^3\alpha + 1}$$

Рис. 21, *б*

► ***Напряжения*** в статически неопределимых системах также зависят от соотношения жесткостей элементов. Но именно по этой причине систему *нельзя сделать равнопрочной*, т.е. обеспечить полную загрузку элементов до максимально допустимых напряжений. Задав соотношение жесткостей и перераспределив уси-усилия в стержнях необходимым образом, подбор сечений осуществляют по наиболее нагруженному элементу. В этом случае только этот стержень будет загружен полностью с максимальным использованием его материала. Остальные элементы в большей или меньшей степени окажутся недогруженными. Но добиться равнопрочности такой конструкции невозможно. Поясним вышесказанное на примере.

Пример 14

Для конструкции, представленной на рис. 21б, считая, что все стержни выполнены из одинакового материала $E_1 = E_2 = E_3 = E$ и имеют [σ], определить продольные силы в стержнях и подобрать размеры их поперечного сечения. Принять $\alpha = 30^0$. Тогда

$$\boxed{N_1 = N_2 = \frac{0{,}75F}{1{,}3 + \dfrac{A_3}{A_1}}; \quad N_3 = \frac{F}{1{,}3\dfrac{A_1}{A_3} + 1}}$$

РЕШЕНИЕ

Соотношение жесткостей	Продольные силы	Напряжения
$\frac{A_3}{A_1} = 1 \rightarrow A_3 = A_1$	$N_1 = 0{,}33F$ $N_3 = 0{,}43F$	$\sigma_1 = \frac{0{,}33F}{A_1}; \ \sigma_3 = \frac{0{,}43F}{A_3}$
$\frac{A_3}{A_1} = 2 \rightarrow A_3 = 2A_1$	$N_1 = 0{,}23F$ $N_3 = 0{,}61F$	$\sigma_1 = \frac{0{,}23F}{A_1}; \ \sigma_3 = \frac{0{,}61F}{A_3}$
$\frac{A_3}{A_1} = 3 \rightarrow A_3 = 3A_1$	$N_1 = 0{,}17F$ $N_3 = 0{,}69F$	$\sigma_1 = \frac{0{,}17F}{A_1}; \ \sigma_3 = \frac{0{,}69F}{A_3}$
$\frac{A_3}{A_1} = 4 \rightarrow A_3 = 4A_1$	$N_1 = 0{,}14F$ $N_3 = 0{,}76F$	$\sigma_1 = \frac{0{,}14F}{A_1}; \ \sigma_3 = \frac{0{,}76F}{A_3}$
<u>Примечание</u>. Для всех комбинаций продольных сил уравнения равновесия удовлетворяются полностью.		

Как видно из решения, представленного в таблице, изменяя соотношение площадей сечений, можно перераспределять усилия в стержнях, разгружая или догружая их в зависимости от поставленной задачи. Подберем сечения стержней для варианта $\frac{A_3}{A_1} = 2$. Подбор проводим по наиболее нагруженному стержню 3:

$$\sigma_3 = \frac{0{,}61F}{A_3} \le [\sigma] \rightarrow \quad A_3 = \frac{0{,}61F}{[\sigma]} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{A_3}{2} = \frac{0{,}305F}{[\sigma]}$$

Проверяем для подобранного сечения напряжения в стержне 1:

$\sigma_1 = \frac{0{,}23F}{A_1} = \frac{0{,}23F}{0{,}305F}[\sigma] = 0{,}75[\sigma] \rightarrow$ Стержень 1 загружен на 75 %.

Таким образом, в силу указанных особенностей статически неопределимых систем принцип равнопрочности ее элементов не соблюдается, но это играет важную роль в увеличении несущей способности конструкции. В случае возрастания нагрузки, когда напряжения в наиболее нагруженном элементе достигнут предела текучести, остальные элементы, оставаясь «недогруженными», способны сохранить конструкцию в рабочем состоянии. Чтобы исчерпать ее несущую способность, потребуется увеличить нагрузку. Сохранению работоспособности способствует также то, что ***деформации*** в элементах не могут развиваться свободно, поэтому даже перенапряжение какого-либо элемента не вызовет в нем значительных деформаций, представляющих опасность для ее работы. Кроме того, достижение напряжениями предела текучести в отдельных точках конструкции также не является опасным, даже с возрастанием нагрузки, и это связано со свойствами пластичного материала, способного выравнивать напряжения, приостанавливая рост одних и поднимая другие. Это тоже дает возможность в течение некоторого времени сохранить конструкцию в рабочем состоянии, пока ее несущая способность не будет полностью исчерпана. Таким образом, ***внешняя неоднородность напряженного состояния***, характерная для статически неопределимых систем, и ***внутренняя***, обусловленная свойствами пластичного материала, обеспечивают конструкции *дополнительный запас прочности*, который позволяет ей работать при большем нагружении, чем показывают расчеты по [σ]. Определение реальной грузоподъемности таких конструкций будет рассмотрено далее.

Таким образом, сравнительный анализ показывает, что статически неопределимые системы во многих отношениях имеют преимущества, они полностью оправдывают свою стоимость, несмотря на перерасход материала, и целесообразность применения.

2.4. ***Некоторые свойства статически неопределимых систем***

Кроме рассмотренных выше свойств, статически неопределимые системы обладают еще целым рядом особенностей, которые заключаются в том, что в таких системах напряжения могут возникать не только от действия внешних сил, но также от изменения температуры и при сборке конструкции в случае геометрической неточности изготовления ее элементов. Эти напряжения, суммируясь с рабочими напряжениями, могут создавать опасность для прочности, поэтому умение их определять является крайне важным. Однако в то же время, возможность возникновение таких напряжений позволяет моделировать прочность конструкции на стадии проектирования, создавая в ней начальные напряжения необходимой величины и знака. Это позволяет разгружать конструкцию, повышая ее несущую способность, а также выравнивать напряжения по элементам, добиваясь ее равнопрочности. Рассмотрим эти вопросы.

2.4.1. Температурные напряжения

Как известно из физики, нагрев или охлаждение элемента приводит к изменению его размеров – удлинению или укорочению соответственно. Если возникающие деформации происходят в нестесненных условиях, то это не вызывает появления внутренних сил и напряжений. В случае, когда деформации элемента не могут развиваться свободно, и ограничены, например, опорой или другими элементами, возникают внутренние силы и напряжения, называемые *температурными напряжениями*. Следует понимать правильно, что температурные напряжения являются результатом не самого факта нагрева или охлаждения как такового, а результатом взаимодействия элементов, не имеющих возможности свободно изменять свои размеры, поскольку *внутреннюю силу может вызвать только внешняя сила*.

Рассмотрим, как влияет изменение температуры на состояние статически определимых и статически неопределимых систем.

Статически определимые системы

При нагреве статически определимого стержня (рис. 22) его длина увеличивается, и это удлинение можно определить по известной формуле из физики:

$$\boxed{\Delta\ell_t = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t^{0}},$$

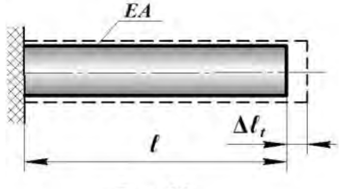


Рис. 22

где α – коэффициент линейного расширения материала, град$^{-1}$.

Значения коэффициента линейного расширения α для некоторых материалов представлены в табл. 3.

Таблица 3

Материал	α, град$^{-1}$	Материал	α, град$^{-1}$
Сталь	$125\cdot10^{-7}$	Алюминий	$225\cdot10^{-7}$
Медь	$165\cdot10^{-7}$	Никель	$130\cdot10^{-7}$
Бронза	$175\cdot10^{-7}$	Цинк	$354\cdot10^{-7}$
Чугун	$104\cdot10^{-7}$	Бетон	$(100–140)\cdot10^{-7}$

Так как ничто не препятствует изменению длины стержня, в нем не будут возникать внутренние продольные силы. Таким образом, в статически определимых системах деформации, вызванные действием температуры, ***не приводят к появлению внутренних сил*** и, следовательно, ***к возникновению температурных напряжений.***

Статически неопределимые системы

В статически неопределимых системах изменение температуры всегда сопровождается появлением внутренних сил, и возникают они не от температуры непосредственно, а как было сказано выше, от взаимодействия элементов, стесняющих деформации друг друга. Рассмотрим определение температурных напряжений на примерах.

Пример 15

В стержне (рис. 23), плотно уложенном между двумя жесткими плитами, определить температурные напряжения.

РЕШЕНИЕ

● При нагревании стержня на $\Delta t°$ в результате его стремления увеличить свою длину, он начинает давить на опоры, распирая их. Со стороны опор возникают реакции R_A и R_B (рис. 23а), сжимающие этот стержень. В результате такого воздействия появляется продольная сила, и возникают температурные напряжения.

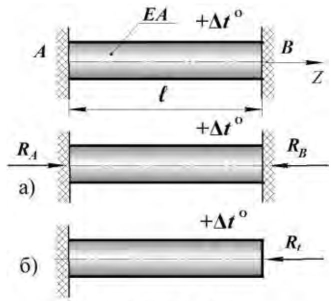


Рис. 23

● Раскрываем статическую неопределимость, используя метод деформаций, и определяем реакции R_A и R_B:

<u>*Статическая сторона*</u> (рис. 23, *а*) →

$$\sum Z=0: \quad R_A-R_B=0 \;\rightarrow\; \boxed{R_A=R_B=R_t} \qquad (1)$$

Вследствие отсутствия других нагрузок на стержне, реакции будут равны между собой и равны силе R_t.

<u>*Геометрическая сторона*</u> (рис. 23, *б*) →

Отбрасываем опору *В* и заменяем ее действие силой R_t. Условием перемещения является:

$$\Delta\ell_{\text{полн}}=0 \;\rightarrow\; \boxed{\Delta\ell_{\text{полн}}=\Delta\ell_t+\Delta\ell_{R_t}=0} \qquad (2)$$

<u>*Физическая сторона*</u> → $$\boxed{\Delta\ell_t=\alpha\cdot\ell\cdot\Delta t^o;\;\; \Delta\ell_{R_t}=-\frac{R_t\ell}{EA}} \qquad (3)$$

Решаем совместно *(3)* и *(2):*

$$\Delta\ell_{\text{полн}}=\alpha\cdot\ell\cdot\Delta t^o-\frac{R_t\ell}{EA}=0 \rightarrow R_t=\alpha EA\cdot\Delta t^o.$$

● Температурные напряжения можно определить как $\sigma_t=R_t/A$:

$$\boxed{\sigma_t=\alpha\cdot E\cdot\Delta t^o} \qquad (10)$$

<u>*Примечание*</u>.

Формула (10) справедлива только при отсутствии другой внешней нагрузки и только для стержня, имеющего постоянное сечение и уложенного между плитами без зазора. В других случаях задачу следует решать с учетом всех действующих факторов (температуры, нагрузки и т.д.) одним из рассмотренных выше методов. При этом решение можно осуществлять двумя способами:

1. Одновременный учет всех факторов, что должно быть отражено в уравнении совместности деформации. Тогда полученные в результате расчета усилия и напряжения являются окончательными.

2. По принципу независимости действия сил, когда усилия и напряжения определяются от каждого фактора в отдельности, а затем для получения окончательного результата алгебраически суммируются.

Пример 16

В ступенчатом стержне, подвергающемся одновременному воздействию нагрева и силы F, определить продольные силы и напряжения на участках (рис. 24).

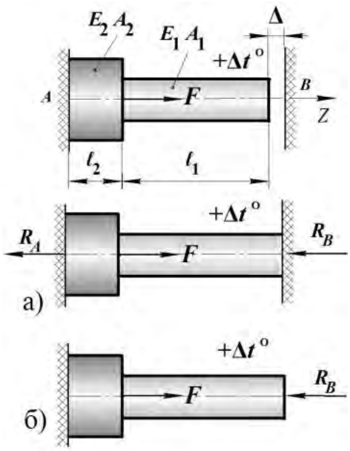


Рис. 24

РЕШЕНИЕ

● В результате одновременного действия силы F и нагрева стержень удлиняется, перекрывает зазор и начинает воздействовать на опоры A и B, вызывая реакции опор (рис. 24, *а*):

Статическая сторона (рис.24, *а*) →

$$\sum Z = 0: \quad \boxed{F - R_A - R_B = 0}\,. \qquad (1)$$

Геометрическая сторона (рис. 24, *б*) →

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta$$

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_t + \Delta\ell_F + \Delta\ell_{R_B} = \Delta}\,. \qquad (2)$$

Физическая сторона →

$$\boxed{\Delta\ell_t = \alpha\cdot(\ell_1+\ell_2)\cdot\Delta t^o;\ \Delta\ell_F = \frac{F\cdot\ell_2}{E_2A_2};\ \Delta\ell_{R_B} = -\left(\frac{R_B\ell_1}{E_1A_1}+\frac{R_B\ell_2}{E_2A_2}\right)}\,. \qquad (3)$$

Решаем совместно *(2)* и *(3)*:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \alpha(\ell_1+\ell_2)\Delta t^o + \frac{F\cdot\ell_2}{E_2A_2} - \left(\frac{R_B\ell_1}{E_1A_1}+\frac{R_B\ell_2}{E_2A_2}\right) = \Delta\,,$$

откуда определяем реакцию R_B, а затем из *(1)* – реакцию R_A.

● Продольные силы и напряжения на участках будут соответственно равны:

$$N_1 = R_B \ \rightarrow\ \sigma_{t(1)} = \frac{N_1}{A_1} \quad \text{и} \quad N_2 = R_A \ \rightarrow\ \sigma_{t(2)} = \frac{N_2}{A_2}\,.$$

Температурные напряжения, возникающие в конструкциях при температурных перепадах, могут быть очень значительными и даже превышать допускаемые напряжения. Это необходимо учитывать при проектировании конструкций и расчет элементов производить таким образом, чтобы либо температурные напряжения не возникали вовсе, либо их значения были невелики и не представляли опасности для прочности элементов. Это достигается особым укреплением концов, оставлением специальных температурных зазоров (швов), как например, при укладке железнодорожных рельсов и т.д.

<u>Пример 17</u>

Жесткий брус BC опирается на опору A и поддерживается двумя стержнями (рис. 25). Данные для стержней:

<u>стержень 1</u> – $\ell_1 = \ell$, $A_1 = A$, $E_1 = 2E$, $\alpha_1 = \alpha$;

<u>стержень 2</u> – $\ell_2 = 0{,}4\ell$, $A_2 = 4A$, $E_2 = E$, $\alpha_2 = 1{,}3\alpha$.

Определить температурные напряжения в стержнях при нагреве конструкции на $\Delta t°$.

<u>РЕШЕНИЕ</u>

● В результате нагрева конструкции оба стержня стремятся увеличить свою длину, однако из-за стесненности деформаций стержни начинают воздействовать друг на друга, вызывая появление усилий и напряжений. Используем для раскрытия статической неопределимости *метод деформаций*.

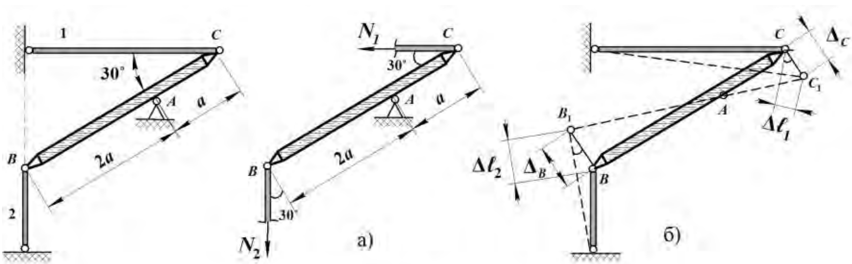


Рис. 25

● Так как в начале решения неизвестно, какие внутренние усилия – растягивающие или сжимающие – элементы вызывают друг в друге, то предположим, что в обоих стержнях возникают *растягивающие* силы N_1 и N_2. Знак продольных сил задается произвольно и выбирается из соображения более простого построения деформационной схемы. Дальнейшее решение позволит установить правильное направление продольных сил и характер их действия.

<u>*Статическая сторона*</u> (рис. 25, *а*) →

$$\sum M_A = 0: \quad N_1 \sin 30^0 \cdot a + N_2 \cos 30^0 \cdot 2a = 0$$

$$\boxed{0{,}5N_1 + 1{,}73N_2 = 0} \qquad (1)$$

<u>*Геометрическая сторона*</u> (рис. 25, *б*) →

$$\Delta ABB_1 \infty \Delta ACC_1 \;\to\; \frac{\Delta_B}{\Delta_C} = \frac{AB}{AC} = \frac{2a}{a} = 2 \;\to\; \Delta_B = 2\Delta_C\,,$$

где $\Delta_{\text{B}} = \dfrac{\Delta\ell_2}{\cos 30^0}$ *и* $\Delta_{\text{C}} = \dfrac{\Delta\ell_1}{\sin 30^0} \to \dfrac{\Delta\ell_2}{\cos 30^0} = 2\dfrac{\Delta\ell_1}{\sin 30^0} \to$

$$\boxed{\Delta\ell_1 = 0{,}29\Delta\ell_2} \qquad (2)$$

<u>*Физическая сторона*</u> →

При рассмотрении деформаций в задачах на температурные напряжения следует помнить, что *изменение длины элементов является результатом совместного действия двух факторов – температуры и продольной силы и определяется как алгебраическая сумма свободного удлинения от нагрева (укорочения от охлаждения) и упругого удлинения (укорочения) от действия внутренней силы N:*

$$\Delta\ell = \pm\alpha\ell\Delta t^0 \pm \frac{N \cdot \ell}{EA}\,.$$

Здесь знак перед первым слагаемым соответствует нагреву (+) или охлаждению (–), а знак перед вторым слагаемым соответствует знаку продольной силы, возникающей в элементе.

Так как в начале задачи было принято предположение о том, что в обоих стержнях возникают *растягивающие* силы ($+N_1$ и $+N_2$), то на основании этого деформации элементов определяются как:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\ell_1 &= \alpha_1\ell_1\Delta t^0 + \frac{N_1\ell_1}{E_1A_1} = \alpha\ell\Delta t^0 + \frac{N_1\ell}{2EA} = \alpha\ell\Delta t^0 + 0{,}5\frac{N_1\ell}{EA}; \\ \Delta\ell_2 &= \alpha_2\ell_2\Delta t^0 + \frac{N_2\ell_2}{E_2A_2} = 1{,}3\alpha \cdot 0{,}4\ell\Delta t^0 + \frac{N_2 \cdot 0{,}4\ell}{E \cdot 4A} = 0{,}52\alpha\ell\Delta t^0 + 0{,}1\frac{N_2\ell}{EA}\,. \end{aligned}} \qquad (3)$$

Подставляем *(3) → (2):*

$$(\alpha\ell\Delta t^{0}+0{,}5\frac{N_1\ell}{EA}) = 0{,}29\,(0{,}52\alpha\ell\Delta t^{0}+0{,}1\,\frac{N_2\ell}{EA}),$$

преобразовываем и совместно со статической стороной *(1)* получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными N_1 и N_2:

$$\begin{cases} N_1-0{,}058N_2=-1{,}7\alpha EA\Delta t^{0} \\ 0{,}5\,N_1+1{,}73\,N_2=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} N_1=-1{,}67\alpha EA\Delta t^{0} \\ N_2=+0{,}48\alpha EA\Delta t^{0} \end{matrix}}.$$

Знак «минус» перед N_1 указывает на то, что в действительности в стержне 1 будет действовать *сжимающая* продольная сила, т.е. деформации в нем будут стеснены, а в стержне 2 – *растягивающая*. Статическая неопределимость раскрыта.

● Температурные напряжения в стержнях соответственно равны:

$$\sigma_{t(1)}=\frac{N_1}{A}=1{,}67\alpha E\Delta t^{0}\ (\text{сж.});\quad \sigma_{t(2)}=\frac{N_2}{4A}=0{,}12\,\alpha E\Delta t^{0}\ (\text{раст.}).$$

<u>Примечание</u>.
В случае изменения температуры только одного из стержней, в физической стороне задачи (3) следует указывать только второе слагаемое, т.е. изменение длины стержня от возникающей продольной силы.

● Свойство статически неопределимых систем, связанное с появлением внутренних усилий в элементах при изменении температуры, позволяет путем создания различных температурных условий для конструкции управлять этими усилиями (а значит, и напряжениями), изменяя их необходимым образом. Так, для конструкции, рассмотренной в примере 17, нагрев только одного из стержней изменяет внутренние усилия следующим образом:

а) <u>Нагревается только стержень 1</u>:

$$\left(\alpha\ell\Delta t^{0}+0{,}5\frac{N_1\ell}{EA}\right)=0{,}29\cdot\left(0{,}1\,\frac{N_2\ell}{EA}\right)$$

$$\begin{cases} N_1-0{,}058N_2=-\,\alpha EA\Delta t^{0} \\ 0{,}5N_1+1{,}73N_2=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} N_1=-0{,}98\alpha EA\Delta t^{0}\ (\text{сжат.}) \\ N_2=+0{,}28\alpha EA\Delta t^{0}\ (\text{раст.}) \end{matrix}}.$$

б) <u>Нагревается только стержень 2</u>:

$$0{,}5\frac{N_1\ell}{EA} = 0{,}29\,(0{,}52\alpha\ell\Delta t^{0} + 0{,}1\,\frac{N_2\ell}{EA})$$

$$\begin{cases} N_1 - 0{,}058N_2 = +0{,}3\,\alpha EA\Delta t^{0} \\ 0{,}5N_1 + 1{,}73N_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} N_1 = +0{,}29\alpha EA\Delta t^{0}\ (\text{раст.}) \\ N_2 = -0{,}09\alpha EA\Delta t^{0}\ (\text{сжат.}) \end{array}}.$$

Таким образом, изменение температурных условий позволяет перераспределять продольные силы и даже изменять их действие на противоположное, вызывая появление температурных напряжений соответствующего знака. Для конструкций, работающих под нагрузкой, надлежащим изменением температурного режима для элементов можно выровнять напряжения по конструкции, добившись ее равнопрочности.

2.4.2. Монтажные напряжения

При изготовлении деталей машин и механизмов часто встречается ситуация, когда элементы конструкций оказываются изготовленными неточно, т.е. с отклонением от проектного размера. В результате сборки такой конструкции происходит следующее.

► Если конструкция *статически определима*, неточность изготовления деталей не потребует при сборке приложения дополнительных сил и, следовательно, ***не вызовет в элементах появление внутренних усилий и напряжений.*** Отклонение размеров элементов от расчетных значений приведет лишь к незначительному нарушению формы конструкции (рис. 26), однако никак не повлияет на ее работу. При отсутствии рабочей силы усилия в стержнях будут равны нулю, независимо от того, с какой точностью они изготовлены. Напряжения здесь будут возникать

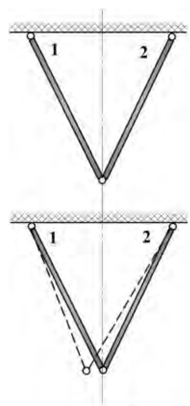


Рис. 26

только от действия рабочей нагрузки, определяться ее величиной и размерами сечений элементов.

► В статически *неопределимой конструкции* свободная сборка возможна только при очень точном изготовлении элементов. Если элементы выполнены с отклонением от проектных размеров, это потребует при сборке приложения сил, и как результат, ***приведет к появлению внутренних усилий и начальных напряжений***, даже при отсутствии внешних воздействий на конструкцию.

> *Начальные напряжения, возникающие при сборке статически неопределимой конструкции в случае неточного изготовления ее элементов, называются монтажными напряжениями.*

Рассмотрим пример определения монтажных напряжений.

Пример 18

Жесткий брус AB должен быть подвешен на трех стержнях с жесткостями сечений $E_1A_1 = E_3A_3$ и E_2A_2. Однако средний стержень 2 оказался короче проектного размера на величину Δ (рис. 27, *а*). Определить монтажные напряжения в стержнях, возникающие при сборке конструкции.

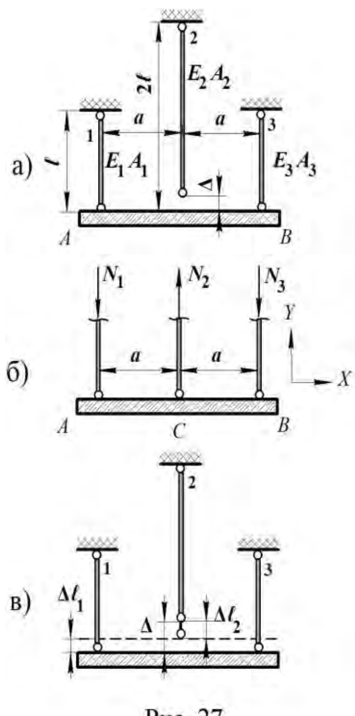


Рис. 27

РЕШЕНИЕ:

● Для закрепления стержня 2 на брусе AB его следует растянуть или предварительно нагреть, чтобы обеспечить необходимое удлинение. После сборки конструкции в стержне 2 возникает растягивающая сила N_2, а в крайних стержнях – сжимающие силы N_1 и N_3. Определим эти силы *методом деформаций*:

Статическая сторона (рис. 27, *б*) $\rightarrow$

$$\sum M_C=0:\ N_1a-N_3a=0\ \rightarrow\ N_1=N_3$$

$$\sum Z=0:\quad \boxed{N_2-2N_1=0} \qquad (1)$$

Геометрическая сторона (рис. 27в) $\rightarrow$ $\boxed{\Delta\ell_1+\Delta\ell_2=\Delta}$ *(2)*

Физическая сторона $\rightarrow$

$$\boxed{\Delta\ell_1=\frac{N_1\ell_1}{E_1A_1}=\frac{N_1\ell}{E_1A_1};\ \Delta\ell_2=\frac{N_2\ell_2}{E_2A_2}\approx\frac{N_2 2\ell}{E_2A_2}}, \qquad (3)$$

где, учитывая, что неточность изготовления стержня 2 очень мала, принимаем его длину $\ell_2=(2\ell-\Delta)\approx 2\ell$.

Подставляем *(3)* в *(2)* и совместно со статической стороной *(1)* получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, решением которой являются искомые N_1 и N_2:

$$\begin{cases}\dfrac{N_1\ell}{E_1A_1}+\dfrac{N_2 2\ell}{E_2A_2}=\Delta\\ N_2-2N_1=0\end{cases}\rightarrow \boxed{N_1=N_3=\frac{\Delta\cdot E_2A_2}{\ell\left(4+\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}\right)};\quad N_2=\frac{2\Delta\cdot E_1A_1}{\ell\left(1+4\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}\right)}}.$$

● Монтажные напряжения будут соответственно равны:

$$\sigma_1=\sigma_3=\frac{N_1}{A_1}\ \text{(сжатие) и}\ \ \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}\ \text{(растяжение)}.$$

● Если к данной конструкции в точке *C* приложить рабочую нагрузку, то усилия от этой нагрузки во всех стержнях будут растягивающими и равными значениям, которые были ранее рассчитаны в ***примере 10***. Суммируя эти усилия с монтажными с учетом их знака и принимая $E_1A_1=E_2A_2=E_3A_3=EA$, получаем:

$$N_1=\frac{2F}{4+\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}}-\frac{\Delta\cdot E_2A_2}{\ell\left(4+\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}\right)}=\frac{2F\cdot\ell-\Delta\cdot EA}{5\ell};$$

$$N_2 = \frac{F}{1+4\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}} + \frac{2\Delta \cdot E_1A_1}{\ell\left(1+4\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}\right)} = \frac{F\cdot\ell + 2\Delta\cdot EA}{5\ell}.$$

Суммарные напряжения в стержнях будут соответственно равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{2F\cdot\ell - \Delta\cdot EA}{5\ell A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{F\cdot\ell + 2\Delta\cdot EA}{5\ell A}.$$

Как видно из вышеприведенных расчетов, для конструкций, работающих под нагрузкой, неточность изготовления элементов может быть успешно использована для перераспределения усилий между стержнями и выравнивания напряжений по конструкции в целом. Задавая для элемента необходимую величину зазора Δ, т.е. подбирая «ошибку» необходимым образом, можно искусственно регулировать усилия и напряжения в стержнях, создавая в них напряженное состояние, обратное тому, которое будет вызвано нагрузкой. На этом принципе основано широкое применение в технике предварительно напряженных конструкций (например, тугие прессовые и горячие посадки, натяжение арматуры до затвердения бетона в железобетонном элементе и т.д.). Правильным выбором зазора за счет создания начальных напряжений можно даже добиться равнопрочности элементов под нагрузкой. Приравняем в рассмотренном примере напряжения σ_1 и σ_2 и определим величину зазора Δ, обеспечивающую равенство напряжений в элементах конструкции:

$$\Delta = 0{,}33\frac{F\ell}{EA}.$$

2.5. Расчет статически неопределимых систем по предельному состоянию

Основным способом расчета конструкций в механике материалов является расчет по ***допускаемым напряжениям***. В основе этого расчета лежит предположение о том, что потеря работоспособности конструкции происходит в тот момент, когда напряжения в каком-либо элементе выходят за предел упругости и достигают опасных значений, соответствующих предельному состоянию материала.

Для пластичных материалов, которые чаще всего используются в машиностроении, предельным состоянием является текучесть, и достижение напряжениями предела текучести хотя бы в одной какой-то точке считается опасным и недопустимым, так как предполагается, что работоспособность конструкции тотчас нарушается. Работа элемента рассматривается возможной только в упругой области и появление текучести не допускается ни в каком его микрообъеме. Поэтому расчеты на прочность и, в частности, определение грузоподъемности конструкции, производят по допускаемому напряжению $[\sigma]$, определяемому путем уменьшения опасного напряжения в некоторое число раз $[\sigma] = \sigma_т / n$, что обеспечивает возникновение в элементах исключительно упругих деформаций. Ограничив расчетные напряжения величиной $[\sigma]$, несущая способность конструкции согласно данному способу определяется как:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \le [\sigma] \rightarrow [F] \le A \cdot [\sigma],$$

где $[F]$ – ***допускаемая нагрузка***, при которой напряжения ни в одной точке элемента не достигают предела текучести. Текучесть опасна и недопустима, так как ее появление считают эквивалентом разрушения конструкции.

Однако, как показывает практика, опасность потери работоспособности конструкции в связи с возникновением в отдельных ее частях пластических деформаций не соответствует действительности. Многие конструкции способны работать не только, когда текучесть возникает в отдельных точках элемента, но даже тогда, когда пластической деформацией охвачена значительная часть его объема. Несущая способность таких конструкций оказывается больше, чем это показывает расчет по допускаемым напряжениям. Рассчитанные по допускаемым напряжениям, они работают с излишне большим запасом прочности, а это приводит к неоправданному перерасходу материала.

В чем заключается дополнительный запас прочности, который обеспечивает работоспособность конструкции даже в условиях появления текучести?

Прежде всего, этот *запас обусловлен свойствами самого пластичного материала*, способного выравнивать напряжения по сечению, не допуская резкого их возрастания в отдельных точках до разрушающих значений. Механизм пластической деформации таков, что с увеличением нагрузки напряжения, достигшие в отдельных точках предела текучести, приостанавливают свой рост, ожидая, пока напряжения в остальных точках сечения «подрастут» до этой величины. Этот процесс не происходит мгновенно и обеспечивает конструкции дополнительное рабочее время. Разрушение элемента или эквивалентная ему излишне большая деформация произойдет только тогда, когда почти все точки опасного сечения окажутся в предельном состоянии. Именно эта ***внутренняя неоднородность напряженного состояния*** и обуславливает *дополнительный запас прочности*, которым обладают пластичные материалы. Поэтому для выявления истинной несущей способности конструкции расчет необходимо проводить с учетом не только упругих, но и пластических деформаций, которые позволяют реализовать действительный запас прочности конструкции.

Второй причиной *дополнительного запаса прочности* является *статическая неопределимость конструкции*, которую, как было рассмотрено выше, нельзя сделать равнопрочной, т.е. загрузить все элементы до максимально допустимых напряжений. А это значит, что при увеличении нагрузки первым предельного состояния достигнет самый нагруженный элемент, другие останутся «недогруженными». Однако именно это и позволит сохранить конструкцию в рабочем состоянии, так как исчерпание несущей способности одного элемента не повлечет за собой исчерпание несущей способности конструкции в целом. Таким образом, ***внешняя неоднородность напряженного состояния***, характерная для статически неопределимых конструкций, также обуславливает для них дополнительный запас прочности.

Наличие дополнительного запаса прочности обеспечивает бóльшую грузоподъемность конструкции, поэтому наиболее рациональным для нее с точки зрения расхода материала будет расчет не по допускаемым напряжениям, а ***по предельному состоянию***, который по сравнению с упругим расчетом дает возможность выявить истинный запас ее прочности. Рассмотрим это на примере и проведем сравнительный анализ результатов расчетов.

Пример 19

Для конструкций, представленных на рис. 28 и 29, определить их несущую способность $[F]$. Расчет произвести по допускаемым напряжениям и предельному состоянию. Сравнить результаты.

Статически определимые системы

❶ **Расчет по допускаемым напряжениям**

Так как элементы системы имеют одинаковое поперечное сечение, значит, при равных N напряжения в стержнях будут также одинаковы. Приравниваем их к $[\sigma]$ и определяем *допускаемую нагрузку* $[F]$, обеспечивающую работу элементов в пределах упругих деформаций:

$$\sigma_{1(2)} = \frac{N_{1(2)}}{A} = \frac{F}{2\cos\alpha \cdot A} = [\sigma] \rightarrow$$

$$\boxed{[F] = 2A[\sigma]\cos\alpha}. \qquad (1)$$

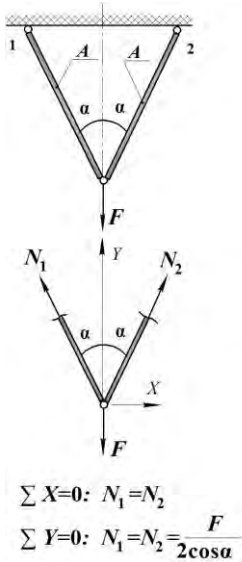


Рис. 28

Примечание.

Если напряжения в элементах неодинаковы, то при расчете грузоподъемности конструкции к допускаемому напряжению следует приравнивать бо́льшее из напряжений, т.е. $\sigma_{max} = [\sigma]$.

❷ **Расчет по предельному состоянию**

Как было рассмотрено ранее, внутренние усилия в статически определимых системах не зависят от размеров элементов и механических свойств материала, а зависят только от силы F, приложенной к конструкции. Следовательно, и напряжения здесь, являясь независимыми для каждого элемента, будут также определяться этой силой и при определенном ее значении могут достигать предела текучести. При центральном растяжении и сжатии возникновение напряжений, равных $\sigma_т$, происходит одновременно во всех точках поперечного сечения наиболее нагруженного стержня и, если система статически определима, то исчерпание несущей способности хотя бы одного поперечного сечения какого-либо стержня равносильно потере несущей способности всей конструкции в целом. Нагрузка, приводящая конструкцию к такому состоянию, называется ***предельной нагрузкой*** $F_{пред}$. Определим величину предельной нагрузки для конструкции, представленной на рис. 28:

$$\sigma_{1(2)} = \frac{N_{1(2)}}{A} = \frac{F_{пред}}{2\cos\alpha\cdot A} = \sigma_т \quad\to\quad F_{пред} = 2A\cos\alpha\cdot\sigma_т .$$

Однако для безопасной работы конструкции рабочая нагрузка должна быть рассчитана таким образом, чтобы она не только не достигала предельного значения, приводящего систему к аварийному состоянию, но и была меньше его с некоторым запасом. Поэтому для расчета грузоподъемности используют ***предельно допускаемую нагрузку*** $[F]_{пред}$, при которой элементы работают только в упругой стадии деформирования, не достигая состояния текучести. Определяют предельно допускаемую нагрузку $[F]_{пред}$ делением предельной нагрузки $F_{пред}$ на нормативный коэффициент запаса прочности «n», который устанавливается таким образом, чтобы напряжения во всех точках конструкции при действии $[F]_{пред}$ были меньше предела текучести. И поскольку в пределах упругих деформаций в силу пропорциональности между усилиями и напряжениями коэффициент запаса прочности является одинаковым и по напряжениям, и по нагрузке, получаем:

$$[F]_{пред} = \frac{F_{пред}}{n} = \frac{2A\cos\alpha\cdot\sigma_т}{n} = 2A\frac{\sigma_т}{n}\cos\alpha \to \boxed{[F]_{пред} = 2A[\sigma]\cos\alpha} . \qquad (2)$$

Таким образом, как показывают результаты (1) и (2), расчет статически определимых систем на несущую способность конструкции по допускаемым напряжениям и предельному состоянию совпадает $\to$ $[F] = [F]_{пред}$.

<u>Статически неопределимые системы</u>

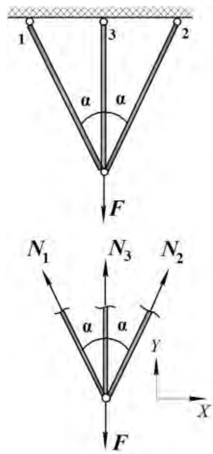
Решение данной конструкции рассмотрено выше в ***<u>примере 9</u>*** и на рис. 29 представлен случай, когда все стержни выполнены из одинакового материала и имеют одинаковое поперечное сечение:

$$E_1A_1 = E_2A_2 = E_3A_3 = EA.$$

❶ **Расчет по допускаемым напряжениям**

Наибольшая допускаемая нагрузка подбирается по наиболее нагруженному элементу, которым в данной конструкции является стержень 3 ($N_3 > N_1 = N_2$):

$$\sigma_3 = \sigma_{max} = \frac{N_3}{A} = \frac{F}{(2\cos^3\alpha + 1)\cdot A} = [\sigma] \rightarrow \boxed{[F] = A\cdot[\sigma]\cdot(2\cos^3\alpha+1)\cdot} \quad (1)$$



$$N_1 = N_2 = \frac{F\cos^2\alpha}{2\cos^3\alpha+1}$$

$$N_3 = \frac{F}{2\cos^3\alpha+1}$$

Рис. 29

В результате этого под действием силы $[F]$ только в среднем стержне напряжения будут равны допускаемым, а стержни 1 и 2 окажутся «недогруженными»:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1}{A} = \frac{[F]\cos^2\alpha}{(2\cos^3\alpha+1)\cdot A} = [\sigma]\cos^2\alpha .$$

❷ **Расчет по предельному состоянию**

Так как средний стержень нагружен больше, чем крайние, то по мере увеличения нагрузки в нем раньше, чем в других, напряжения достигнут предела текучести, что будет соответствовать продольной силе $N_3 = N_т = \sigma_т A$, остальные стержни будут продолжать *упруго* сопротивляться дальнейшей деформации. При этом усилие в среднем стержне с момента достижения $N_3 = N_т$ будет оставаться постоянным, в результате чего система становится статически определимой и усилия в крайних стержнях можно определить из условия равновесия: $N_1 = N_2 = \dfrac{F - \sigma_т A}{2\cos\alpha}$. По мере возрастания нагрузки, в то время как рост напряжений в среднем стержне, достигших $\sigma_т$, приостанавливается, напряжения в крайних стержнях продолжают расти. Как только эти напряжения становятся равными пределу текучести, а продольные силы $N_1 = N_2 = N_m = \sigma_т A$, несущая способность конструкции исчерпана полностью. Нагрузка, соответствующая достижению состояния текучести для всей конструкции в целом, является ***предельной нагрузкой*** $F_{пред}$ и ее можно определить, рассматривая конструкцию в состоянии *предельного равновесия*, т.е. в момент, непосредственно предшествующий ее разрушению, когда еще выполняются условия равновесия для внешних и внутренних сил, достигших предельных значений (рис. 29):

$$\sum Y = 0: \quad 2N_1 \cos\alpha + N_3 - F = 0 \;\rightarrow\; 2\sigma_т A \cos\alpha + \sigma_т A = F_{пред} \;\rightarrow$$

$$F_{пред} = (2\cos\alpha + 1)\sigma_т A\,.$$

Тогда ***предельно допускаемая нагрузка*** $[F]_{пред}$, при которой элементы будут работать упруго и напряжения в них не будут достигать предел текучести, будет определена как:

$$[F]_{пред} = \frac{F_{пред}}{n} = (2\cos\alpha + 1)\frac{\sigma_т}{n} A \;\rightarrow$$

$$\boxed{[F]_{пред} = A \cdot [\sigma] \cdot (2\cos\alpha + 1)} \qquad (2)$$

Сравнивая результаты решения, полученные по допускаемым напряжениям (1) и предельному состоянию (2), нетрудно заметить, что последний расчет показывает бо́льшую несущую способность конструкции → $[F]_{пред} > [F]$. Так, для α = 30° расчет по предельному состоянию позволяет повысить несущую способность конструкции почти на 20 % ; для α = 45°– на 40 % ; для α = 60°– на 60 % .

Сравнивая также эти расчеты для статически определимых и статически неопределимых конструкций, можно заметить, что *расчет по предельному состоянию* может дать эффект по сравнению с *расчетом по допускаемым напряжениям* только при наличии одного из следующих условий: либо напряжения должны быть неравномерно распределены по опасному сечению (как например, при изгибе или кручении), либо конструкция должна быть наделена дополнительными лишними связями, делающими ее статически неопределимой. Учет пластических деформаций здесь и механизм их распространения позволяет реализовать скрытый запас прочности, заключенный в этих системах, и повысить тем самым расчетную грузоподъемность конструкции, добиваясь при этом равнопрочности всех ее частей.

Следует иметь ввиду, что расчет по предельному состоянию может быть выполнен только для конструкций, элементы которых изготовлены из пластичных материалов, допускающих пластические деформации без появления в них трещин. Недопустимо появление пластических деформаций в деталях машин, длительно работающих при переменных напряжениях, так как при этом резко снижается число циклов до разрушения, т.е. долговечность детали. Метод расчета по предельному состоянию также неприменим для конструкций из хрупких материалов.

3. Учет собственного веса при растяжении (сжатии)

В машиностроении влиянием собственного веса деталей, как правило, пренебрегают, так как детали машин имеют сравнительно небольшие размеры и их вес по сравнению с нагрузками, которые они несут, является весьма незначительным. Однако в ряде инженерных конструкций собственный вес может быть соизмерим с действующими силами и даже превышает их, являясь основной нагрузкой, способной привести элемент к разрушению (канаты шахтных подъемников, штанги бурильных установок и т.д.). В этом случае пренебрегать собственным весом нельзя и он должен вводится в расчет как добавочная сила, действующая на элемент и влияющая на его прочность. При этом следует напомнить, что согласно классификации внешних сил вес является объемно-распределенной нагрузкой, т.е. нагрузкой, действующей на каждую единицу объема. В элементах стержневого типа, расположенных вертикально, собственный вес вызывает центральное растяжение или сжатие в зависимости от того, какой конец стержня – верхний или нижний – закреплен. Поэтому собственный вес вертикального стержня можно рассматривать как продольную внешнюю нагрузку, распределенную вдоль его оси.

Рассмотрим вертикальные стержни различной конфигурации и определим для них продольные силы, напряжения и деформации, возникающие с учетом собственного веса.

3.1. Призматический стержень постоянного сечения

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения (рис. 30, *а*), закрепленный верхним концом, находящийся под действием силы F и собственного веса. Определим для него закон изменения продольных сил, напряжений и перемещений вдоль его оси от вышеуказанных нагрузок.

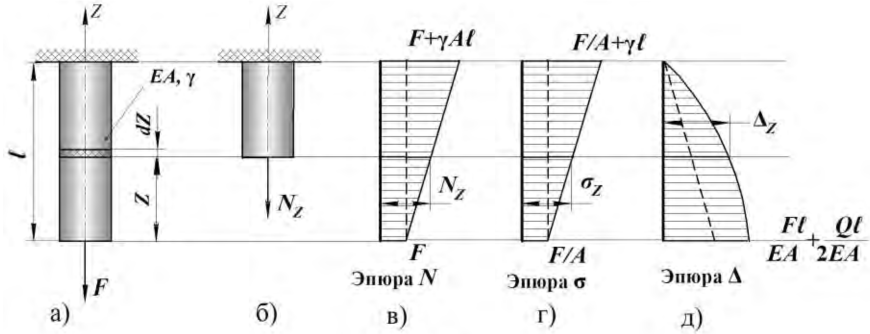


Рис. 30

На расстоянии Z от свободного конца отсечем часть стержня и «откроем» сечение (рис. 30б):

❶ ***Продольная сила*** N_Z в этом сечении, т.е. сила, растягивающая оставшуюся часть стержня, будет определяться силой F и весом отсеченной части → $\boxed{N_Z = F + \gamma A Z}$,

где γ – удельный вес материала. Задавая значения Z по концам стержня, получаем:

– при $Z = 0$ (на торце) $N_Z = F$;

– при $Z = \ell$ (в заделке) $N_Z = F + \gamma A \ell$.

По полученным данным строим эпюру продольных сил (рис. 30в). Прямоугольная часть эпюры, отсеченная пунктирной линией, представляет собой эпюру N от действия только силы F, оставшаяся треугольная часть – от действия собственного веса.

❷ ***Напряжения*** в сечении определяются как $\boxed{\sigma_Z = \frac{N_Z}{A} = \frac{F}{A} + \gamma Z}$ и для концевых сечений соответственно равны → $\sigma_Z = \frac{F}{A}$ и $\sigma_Z = \frac{F}{A} + \gamma \ell$.

Эпюра напряжений представлена на рис. 30, *г*, в которой также прямоугольная часть соответствует напряжениям только от действия силы F, треугольная – от веса стержня. Как видно из эпюры, наиболее нагруженным местом на стержне с учетом его веса является сечение в заделке. Чтобы прочность стержня была обеспечена, напряжения, действующие в этом сечении не должны превышать $[\sigma]$. Записав для него условие прочности, можно подобрать необходимую площадь поперечного сечения, которая для данного стержня является постоянной по длине:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma \ell \le [\sigma] \quad \rightarrow \quad A \ge \frac{F}{[\sigma] - \gamma \ell} .$$

Рассмотрим случай, когда на стержень действует только собственный вес ($F = 0$). Тогда максимальные напряжения, возникающие в заделке от собственного веса, будут равны:

$$\sigma_{max} = \gamma \ell .$$

а) Приравняем эти наибольшие напряжения к допускаемым $\rightarrow$

$$\sigma_{max} = \gamma \ell = [\sigma] \rightarrow \quad \ell_{пр} = \frac{[\sigma]}{\gamma} ,$$

где $\ell_{пр}$ – ***предельная длина*** *стержня, при которой он уже не способен нести никакой полезной нагрузки.*

б) Приравниваем наибольшие напряжения к пределу прочности материала $\sigma_в$ $\rightarrow$ $\quad \sigma_{max} = \gamma \ell = \sigma_в \quad \rightarrow \quad \ell_{кр} = \dfrac{\sigma_в}{\gamma}$,

где $\ell_{кр}$ – ***критическая длина*** *стержня, при которой он разрушает сам себя от собственного веса.*

❸ Определим ***<u>деформацию</u>*** стержня, вызванную силой F и его собственным весом. Так как продольная сила не является величиной постоянной и изменяется по длине стержня, то для определения его удлинения и перемещения сечений следует сначала определить удлинение бесконечно малой части стержня длиной dZ (рис. 30, *а*):

$$\Delta(dZ) = \frac{N_z dZ}{EA} = \frac{(F + \gamma A \cdot Z) dZ}{EA} = \frac{F \cdot dZ}{EA} + \frac{\gamma}{E} Z dZ \quad \rightarrow$$

$$\Delta_Z = \Delta\ell_Z = \int_Z^{\ell}\left(\frac{F}{EA}dZ + \frac{\gamma}{E}ZdZ\right) = \frac{FZ}{EA}\Bigg|_Z^{\ell} + \frac{\gamma Z^2}{2E}\Bigg|_Z^{\ell} = \frac{F(\ell - Z)}{EA} + \frac{\gamma}{2E}\left(\ell^2 - Z^2\right),$$

где Δ_Z – это перемещение сечения Z, определяемое удлинением верхней части стержня $\Delta\ell_Z$.

Как видно из последнего выражения, перемещение сечений стержня от собственного веса является квадратичной функцией от Z. Задавая значения $Z = \ell$ и $Z = 0$ и учитывая, что перемещение свободного конца определяет полное удлинения стержня, получаем значения перемещений и строим эпюру Δ (рис. 30, *д*):

$Z = \ell \;\rightarrow\; \Delta_Z = 0$

$$Z = 0 \;\rightarrow\; \Delta_Z = \Delta\ell_{\text{полн}} = \frac{F\ell}{EA} + \frac{\gamma \cdot \ell^2}{2E} \cdot \frac{A}{A} = \frac{F\ell}{EA} + \frac{\gamma\ell A \cdot \ell}{2E} = \frac{F\ell}{EA} + \frac{Q\ell}{2EA},$$

где $Q = \gamma\ell A$ – полный вес стержня.

Для случая, когда сила $F = 0$, *полное удлинение стержня постоянного сечения от собственного веса* равно:

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{полн}} = \frac{Q\ell}{2EA}}. \qquad (11)$$

Таким образом, удлинение стержня от собственного веса в два раза меньше, чем удлинение от силы, равной весу Q и приложенной на его свободном конце.

3.2. Стержень равного сопротивления

Из предыдущего примера видно, что опасным сечением, где возникают наибольшие напряжения, вызванные собственным весом, является сечение в заделке. По этому сечению подбирается его площадь *A*, которая по всей длине стержня остается постоянной. Однако, как видно из эпюр (рис. 30, *в*, *г*), по мере опускания вниз продольные силы и напряжения уменьшаются, а площадь сечения, подобранная по наиболее нагруженному месту, остается прежней.

В результате, все сечения, кроме сечения в заделке, оказываются недогруженными, материал стержня используется не полностью, а значит *такая конструкция стержня является нерациональной и неэкономичной*.

Поскольку продольная сила изменяется по длине стержня, возникает вопрос о целесообразности создания такой его формы, чтобы по мере уменьшения продольной силы уменьшалась бы и площадь поперечного сечения, но не произвольно, а таким образом, чтобы во всех сечениях возникали бы одинаковые напряжения, равные [σ]. Создание такого стержня является возможным и называется он ***стержнем равного сопротивления***.

> *Стержень, у которого во всех сечениях действуют одинаковые напряжения, равные [σ], называется стержнем равного сопротивления*

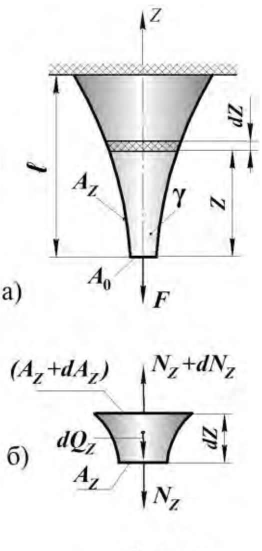


Рис. 31

Стержень равного сопротивления представлен на рис. 31, *а*. Спроектируем его форму и установим закон изменения площади сечения по длине.

● Отсечем бесконечно малую часть стержня длиной dZ (рис. 31, *б*) и рассмотрим равновесие этой части:

$$\sum Z=0: \quad (N_z+dN_z)-N_z-dQ_z=0\ , \qquad (1)$$

где $dQ_z=\gamma A_z dZ$ – вес отсеченной части.

● Так как во всех сечениях стержня напряжения одинаковы и равны [σ], получаем для нижнего и верхнего сечений отсеченной части:

$$\sigma=\frac{N_z}{A_z}=[\sigma] \ \rightarrow \ N_z=A_z[\sigma] \qquad (2)$$

$$\sigma=\frac{(N_z+dN_z)}{(A_z+dA_z)}=[\sigma]\rightarrow (N_z+dN_z)=(A_z+dA_z)[\sigma] \qquad (3)$$

● Подставляем значения продольных сил *(2)* и *(3)* в уравнение равновесия *(1)*:

$$(A_z+dA_z)[\sigma]-A_z[\sigma]=\gamma A_z dZ \ \rightarrow \ dA_z[\sigma]=\gamma A_z dZ \ \rightarrow$$

$$\frac{dA_z}{A_z}=\frac{\gamma}{[\sigma]}dZ \quad\to\quad \int\frac{dA_z}{A_z}=\int\frac{\gamma}{[\sigma]}dZ \quad\to\quad \ln A_z + C=\frac{\gamma}{[\sigma]}Z,$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из граничного условия: при $Z=0$ $A_z=A_0$ $\to$ $C=-\ln A_0$ $\to$

$$(\ln A_z-\ln A_0)=\frac{\gamma}{[\sigma]}Z \quad\to\quad \ln\frac{A_z}{A_0}=\frac{\gamma}{[\sigma]}Z \quad\to\quad \frac{A_z}{A_0}=e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}Z},$$

откуда окончательно получаем *закон изменения площади поперечного сечения*, описывающий форму боковой поверхности стержня равного сопротивления:

$$\boxed{A_z=A_0\,e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}Z}}\,. \qquad (12)$$

● Так как в торцевом сечении напряжения, исходя из определения стержня равного сопротивления, также равны [σ], то $A_0=F/[\sigma]$. Тогда формула (12) принимает вид

$$\boxed{A_z=\frac{F}{[\sigma]}e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}Z}}\,. \qquad (13)$$

Соответственно, площадь сечения в заделке, т.е. при $Z=\ell$, будет равна:

$$\boxed{A_{max}=\frac{F}{[\sigma]}e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}\ell}}\,.$$

● Определим удлинение стержня равного сопротивления от собственного веса, для чего найдем сначала удлинение его части длиной dZ (рис.31, *а*, *б*):

$$\Delta(dZ)=\frac{N_z dZ}{EA_z}=\frac{N_z}{A_z}\cdot\frac{dZ}{E}=\frac{[\sigma]}{E}dZ \quad\to\quad \Delta\ell_{\text{полн}}=\int_0^{\ell}\frac{[\sigma]}{E}dZ=\frac{[\sigma]\cdot\ell}{E}.$$

● Сравним удлинение от собственного веса стержня постоянного сечения и стержня равного сопротивления:

а) <u>для призматического стержня постоянного сечения</u> полное удлинение определяется формулой (11), и учитывая, что площадь его поперечного сечения рассчитана по наиболее опасному сечению, где $\sigma_{max} = [\sigma]$, $\Delta\ell_{\text{полн}}$ получаем в виде:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \frac{Q\ell}{2EA} = \frac{Q}{A}\cdot\frac{\ell}{2E} = \frac{[\sigma]}{2E}\cdot\ell\,.$$

б) <u>для стержня равного сопротивления</u> имеем: $\Delta\ell_{\text{полн}} = \dfrac{[\sigma]\cdot\ell}{E}$.

Сравнивая полное удлинение этих стержней, нетрудно заметить, что стержень равного сопротивления удлиняется от собственного веса в *два раза больше*, чем стержень, имеющий постоянное сечение. Следовательно, стержень равного сопротивления, как и все элементы этого типа, обладает большей деформируемостью, податливостью. Это качество является очень важным для элементов, работающих в условиях динамических нагрузок – при ударах, колебаниях и проч., и значительно повышает их прочность за счет способности поглощать бóльшее количество энергии без опасности разрушения. Именно по этой причине листовые рессоры большегрузного транспорта проектируют как *балку равного сопротивления.*

3.3. Расчет ступенчатого стержня

Для создания стержня равного сопротивления необходимо придать его боковой поверхности криволинейное очертание, описываемое формулами (11)–(12). Однако изготовление такой конфигурации, изменяющейся по заданному закону, является технологически сложной задачей. Поэтому на практике изготавливают *приближенную* форму стержня равного сопротивления либо в виде усеченной пирамиды, либо чаще в виде *ступенчатого стержня*, разделяя стержень по длине на ряд участков с постоянным сечением. В результате получают альтернативу стержня равного сопротивления, однако

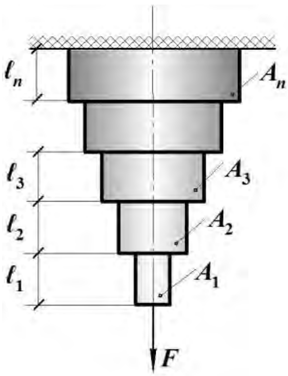


Рис. 32

значительно более простую в изготовлении, что обеспечивает ступенчатым стержням широкое распространение. Так, например, в виде ступенчатых стержней изготавливают опоры мостов, а также длинные канаты или растянутые штанги.

Спроектируем ступенчатый стержень (рис. 32) и при заданной длине каждой ступеньки подберем площадь ее сечения, так, чтобы в опасном сечении, находящемся в конце каждого участка, напряжения были равны допускаемым, аналогично расчету для стержня постоянного сечения (см. выше).

<u>Участок 1</u> – растягивается силой F и собственным весом:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} + \gamma \ell_1 = [\sigma] \rightarrow A_1 = \frac{F}{[\sigma] - \gamma \ell_1}.$$

<u>Участок 2</u> – растягивается силой F, весом участка 1 и собственным весом:

$$\sigma_2 = \frac{F + \gamma A_1 \ell_1}{A_2} + \gamma \ell_2 = [\sigma] \rightarrow A_2 = \frac{F + \gamma A_1 \ell_1}{[\sigma] - \gamma \ell_2}.$$

<u>Участок 3</u> – растягивается силой F, весом участков 1 и 2 и собственным весом:

$$\sigma_3 = \frac{F + \gamma A_1 \ell_1 + \gamma A_2 \ell_2}{A_3} + \gamma \ell_3 = [\sigma] \rightarrow A_3 = \frac{F + \gamma A_1 \ell_1 + \gamma A_2 \ell_2}{[\sigma] - \gamma \ell_3}.$$

Аналогичным образом выполняется расчет остальных ступенек. Разбив элемент на большое количество участков малой длины, можно получить ступенчатый стержень, форма боковой поверхности которого по своей конфигурации будет максимально приближена к форме стержня равного сопротивления. Деформацию ступенчатого стержня вычисляют по частям, определяя удлинение каждого призматического участка. Полная деформация определяется суммированием удлинений отдельных участков.

<u>Вопросы для самоконтроля</u>

1. Что называется центральным растяжением (сжатием) и какие внутренние усилия возникают в сечении?

2. Как определяются продольные силы? Что такое эпюра продольных сил? Что такое «скачок» на эпюре продольных сил?

3. Какие возникают напряжения в поперечных сечениях и как они распределены по сечению? Формула для определения напряжений. Как строится эпюра напряжений?

4. Что означает расчет на прочность и какие основные задачи он решает? Записать условие прочности при растяжении (сжатии).

5. Как устанавливается допускаемое напряжение для материала?

6. Продольная и поперечная деформации при растяжении-сжатии, абсолютные и относительные значения. Размерность.

7. Что такое коэффициент поперечной деформации, что он характеризует, как определяется и в каких пределах изменяется?

8. Абсолютная и относительная объемная деформация. Какие материалы называются несжимаемыми?

9. Связь между напряжениями и деформациями. Закон Гука при растяжении-сжатии.

10. Что такое модуль продольной упругости первого рода, что он характеризует и как определяется?

11. Что такое жесткость сечения и элемента при растяжении-сжатии?

12. Потенциальная энергия деформации при растяжении-сжатии. Полная и удельная потенциальная энергия. Подчиняется ли потенциальная энергия принципу независимости действия сил?

13. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии и их особенности. Основные способы их решения.

14. Раскрытие статической неопределимости методом деформаций. Как строится деформационная схема? Что такое уравнение совместности (неразрывности) деформаций?

15. Раскрытие статической неопределимости методом сил. Что такое лишняя связь? Что такое основная система? Какая основная система является наиболее рациональной для симметричных конструкций?

16. Раскрытие статической неопределимости методом, основанным на принципе наименьшей работы.

17. Особенности статически неопределимых систем. Как влияет жесткость элементов на распределение усилий в статически неопределимых системах?

18. Что такое принцип равнопрочности элементов и можно ли его осуществить в статически неопределимых конструкциях?

19. Свойства статически неопределимых систем. Температурные и монтажные напряжения. Могут ли такие напряжения возникать в статически определимых системах?

20. Как можно с помощью температурных изменений и начальных напряжений от сборки перераспределять усилия и напряжения в статически неопределимых системах?

21. В чем заключается дополнительный запас прочности статически неопределимых систем? Как это связано с пластическими деформациями и статической неопределимостью конструкций?

22. Как производится расчет статически неопределимых систем по предельному состоянию? В чем его экономическая целесообразность?

23. Как учитывается собственный вес при растяжении (сжатии)? Что такое предельная и критическая длина стержня?

24. Что такое стержень равного сопротивления и как проектируется его форма? Чему равно удлинение стержня равного сопротивления от собственного веса?

25. Что такое ступенчатый стержень? В чем его преимущество по сравнению с призматическим стержнем постоянного сечения и как он проектируется?

$\sigma=\dfrac{N}{A};\quad \sigma=\dfrac{F}{A}$	Напряжения при растяжении–сжатии Размерность – МПа [Н/мм^2]
$\sigma_{max}=\dfrac{N}{A}\le[\sigma]$	Условие прочности при растяжении и сжатии
$\Delta\ell=\ell_k-\ell_0;\quad \varepsilon=\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$	Абсолютная и относительная продольная деформация
$\Delta b=b_k-b_0;\quad \varepsilon^*=\dfrac{\Delta b}{b_0}$	Абсолютная и относительная поперечная деформация
$\varepsilon^*=-\mu\varepsilon$ $0\le\mu\le0{,}5$	Связь между относительной продольной и относительной поперечной деформациями μ – коэффициент Пуассона
$\Delta V=V_0\varepsilon(1-2\mu)$ $\varepsilon_V=\varepsilon(1-2\mu)$	Абсолютная и относительная объемная деформация
$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E};\quad \Delta\ell=\dfrac{N\cdot\ell}{EA}$	Закон Гука при растяжении-сжатии *E* – модуль Юнга [МПа]
$\varepsilon_{max}=\dfrac{\sigma}{E}\le[\varepsilon]$ $\Delta\ell_{max}=\dfrac{N\cdot\ell}{EA}\le[\Delta\ell]$	Условие жесткости при растяжении и сжатии
$U=\dfrac{N^2\ell}{2EA};\quad u=\dfrac{\sigma^2}{2E}=\dfrac{\sigma\cdot\varepsilon}{E}$	Полная и удельная потенциальная энергия при растяжении и сжатии
$A_Z=A_0e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}Z};\quad A_Z=\dfrac{F}{[\sigma]}e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}Z}$	Закон изменения площади сечения стержня равного сопротивления
$\Delta\ell_{\text{полн}}=\dfrac{Q\ell}{2EA}=\dfrac{[\sigma]}{E}\cdot\ell$	Удлинение стержня равного сопротивления от собственного веса

1. Статически определимые задачи

1.1. Определение напряжений и деформаций. Расчеты на прочность и жесткость

Задача 1

Определить полное удлинение стального стержня длиной $\ell = 60$ см, если растягивающее напряжение равно $\sigma = 100$ МПа. Принять $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

$$\Delta\ell_{полн} = \frac{F \cdot \ell}{E_{ст} A} = \frac{\sigma \cdot \ell}{E_{ст}} = \frac{100 \cdot 600}{2 \cdot 10^5} = 0{,}3 \text{ мм}.$$

Задача 2

Определить силу, растягивающую стальной цилиндрический стержень диаметром $d = 1$ см, если относительное удлинение стержня равно $\varepsilon = 0{,}0007$. Принять $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

$$F = \sigma A = \varepsilon E_{ст} A = \varepsilon E_{ст} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0007}{4} = 10990\ H \cong 11 \text{ кН}.$$

Задача 3

Полая чугунная колонна круглого поперечного сечения высотой $\ell = 5$ м с наружным диаметром $D = 30$ см и толщиной стенки $t = 30$ мм сжимается силой F, вызывающей напряжения $\sigma = 60$ МПа. Определить величину силы, сжимающей колонну, и ее укорочение. Принять $E_{чуг} = 1{,}2 \cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

$$A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \left| d = D - 2t = 24 \text{см} \right| = \frac{3{,}14\,(30^2 - 24^2)}{4} = 254{,}34 \text{ см}^2;$$

$$F = \sigma A = 60 \cdot 254{,}34 \cdot 10^2 = 1526 \text{ кН}; \quad \Delta\ell = \frac{\sigma \cdot \ell}{E_{чуг}} = \frac{60 \cdot 5 \cdot 10^3}{1{,}2 \cdot 10^5} = 2{,}5 \text{ мм}.$$

Задача 4

Работающий на растяжение элемент представляет собой стальную трубу с внешним диаметром D = 9 см и площадью поперечного сечения A = 15 см^2. Определить растягивающую силу F, которая вызывает уменьшение диаметра ΔD = 0,012 мм.
Принять $E_{ст}$ = 2,1·10^5 МПа, μ = 0,3.

РЕШЕНИЕ

$$\begin{cases} \varepsilon^* = -\mu\varepsilon \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{F}{A}\cdot\dfrac{1}{E} \end{cases} \rightarrow \ \varepsilon^* = -\mu\varepsilon \ \rightarrow \ \frac{\Delta D}{D} = -\mu\frac{F}{EA} \ \rightarrow$$

$$F = \frac{\Delta D\cdot EA}{\mu D} = \frac{0{,}012\cdot 2{,}1\cdot 10^5\cdot 15\cdot 10^2}{0{,}3\cdot 90} = 140\ \text{кН}.$$

Задача 5

Стальной стержень ($E_{ст}$ = 2,1·10^5 МПа) круглого поперечного сечения растягивается усилием F = 100 кН. Подобрать диаметр стержня таким образом, чтобы напряжения в нем не превышали $[\sigma]$ = 120 МПа, а относительное удлинение было не более $[\varepsilon]$ = 0,0005.

РЕШЕНИЕ

❶ Определяем диаметр стержня из условия прочности:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\dfrac{\pi d^2}{4}} \le [\sigma] \rightarrow d = \sqrt{\frac{4F}{\pi\cdot[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4\cdot 100\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 120}} = 32{,}6\ \text{мм}.$$

❷ Определяем диаметр из условия жесткости:

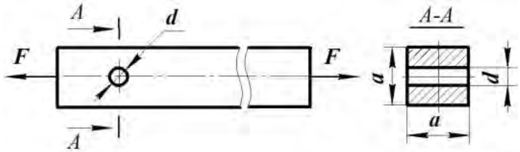
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{EA} = \frac{F}{E\dfrac{\pi d^2}{4}} \le [\varepsilon] \rightarrow d = \sqrt{\frac{4F}{\pi E\cdot[\varepsilon]}} = \sqrt{\frac{4\cdot 100\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 2\cdot 10^2\cdot 0{,}0005}} = 35{,}7\ \text{мм}.$$

Окончательно принимаем бóльший диаметр − d = 35,7 мм ≈ 36 мм.

Примечание.
Если размер сечения подбирается из двух условий, то окончательно всегда принимается бóльшее значение.

Задача 6

Стержень квадратного поперечного сечения, ослабленный сквозным отверстием диаметром d = 2 мм, растягивается силой F = 1,5кН. Подобрать размер сечения «*а*», если для материала [σ] = 100 МПа.



РЕШЕНИЕ

❶ Определяем размер сечения из условия прочности стержня:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A_{ослаб}} \le [\sigma], \text{ где } A_{ослаб} = a^2 - ad \;\rightarrow\; \sigma_{max} = \frac{F}{a^2 - ad} \le [\sigma]$$

откуда получаем квадратное уравнение вида $a^2 - ad - \frac{F}{[\sigma]} = 0$,

решением которого являются два корня: a_1 = 5 мм и a_2 = – 3 мм. Принимаем размер *а* = 5 мм.

❷ Если бы стержень не был ослаблен сквозным отверстием, размер его сечения был бы равен:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{a^2} \le [\sigma] \rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{F}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{1{,}5 \cdot 10^3}{100}} \cong 3{,}9 \text{ мм}.$$

Примечание.

Подбор сечения в данной задаче производится без учета концентрации напряжений, которая всегда имеет место при наличие в элементах разного рода вырезов, выточек, отверстий и т.д. Однако для пластичных материалов, способных к выравниванию напряжений по сечению, такое решение справедливо.

Задача 7

Стальной канат свит из 96 проволок диаметром каждой d = 2 мм. Какую наибольшую нагрузку можно безопасно приложить к канату и какая нагрузка разорвет канат, если для материала проволок [σ] = 60 МПа, а разрушающее напряжение $\sigma_в$ = 560 МПа?

РЕШЕНИЕ

Так как проволоки имеют одинаковое сечение и выполнены из одинакового материала, т. е. имеют одинаковую жесткость, то при растяжении каната на одну проволоку приходится сила $F_1 = \dfrac{F}{96}$.

❶ Условие прочности для проволоки:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_{\text{безоп}}}{96 \cdot \dfrac{\pi d^2}{4}} = \frac{F_{\text{безоп}}}{24 \cdot \pi d^2} = [\sigma] \rightarrow$$

$$F_{\text{безоп}} = 24 \cdot \pi d^2 [\sigma] = 24 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 60 = 18 \text{ кН}.$$

❷ Условие разрушения для проволоки:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_{\text{разр}}}{96 \cdot \dfrac{\pi d^2}{4}} = \frac{F_{\text{разр}}}{24 \cdot \pi d^2} = \sigma_{\text{в}} \quad \rightarrow$$

$$F_{\text{разр}} = 24 \cdot \pi d^2 \sigma_{\text{в}} = 24 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 560 = 169 \text{ кН}.$$

Задача 8

Трос, состоящий из проволок диаметром d = 2 мм, растянут усилием F = 75 кН. Определить число проволок в тросе, если допускаемое напряжение для троса с учетом наклона проволок равно $[\sigma]$ = 300 МПа.

РЕШЕНИЕ

❶ Из условия прочности троса определяем площадь его поперечного сечения:

$$\sigma_{\text{тр}} = \frac{F}{A_{\text{тр}}} \le [\sigma]_{\text{тр}} \quad \rightarrow \quad A_{\text{тр}} = \frac{F}{[\sigma]_{\text{тр}}} = \frac{75 \cdot 10^3}{300} = 250 \text{ мм}^2.$$

❷ Площадь поперечного сечения одной проволоки равна:

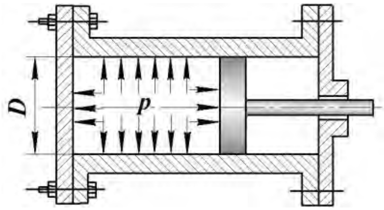
$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 2^2}{4} = 3{,}14 \text{ мм}^2.$$

❸ Считая, что проволоки в тросе плотно прилегают друг к другу и их поперечные сечения полностью заполняют сечение троса, определяем их количество:

$$k = \frac{A}{A_{c}} = \frac{250}{3{,}14} = 79{,}6 \cong 80 \text{ шт}.$$

Задача 9

Рабочее давление в цилиндре двигателя внутреннего сгорания с внутренним диаметром D = 350 мм составляет $p = 10 \text{ атм} = 1\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$.



Какое количество болтов диаметром d = 18 мм необходимо для того, чтобы прикрепить крышку к стенке цилиндра, если для материала болтов $[\sigma]$ = 40 МПа?

РЕШЕНИЕ

❶ Полное усилие на крышку равно:

$$F = p \cdot A = p\frac{\pi D^2}{4} = 1 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 350^2}{4} = 96{,}2 \text{ кН}.$$

❷ Усилие, которое безопасно может выдержать один болт:

$$\sigma_{б} = \frac{F_{б}}{A_{б}} = \frac{F_{б}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F_{б}}{\pi d^2} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$F_{б} = \frac{\pi d^2 [\sigma]}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 18^2 \cdot 40}{4} \cong 10{,}2 \text{ кН}.$$

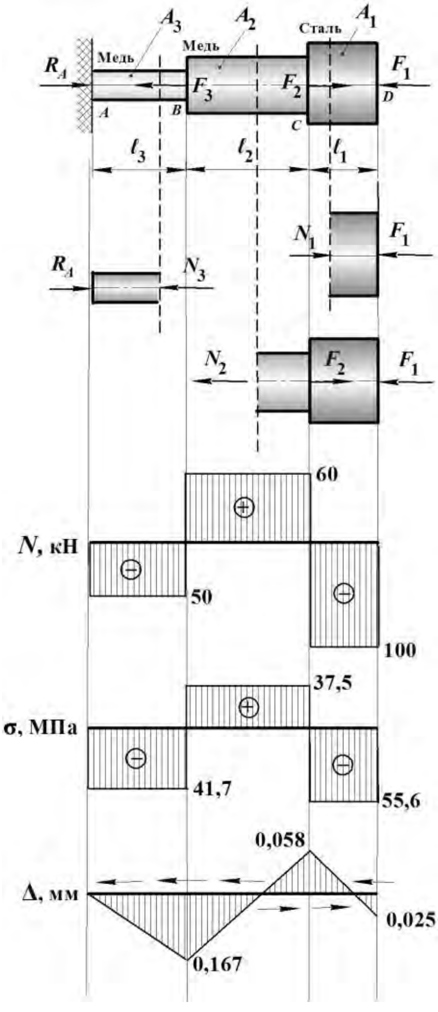
❸ Необходимо установить болтов:

$$k = \frac{F}{F_{б}} = \frac{96{,}2}{10{,}2} = 9{,}43 \cong 10 \text{ шт}.$$

1.2. *Стержни. Построение эпюр. Проектировочные расчеты*

Задача 10

Для ступенчатого стержня, выполненного из разных материалов – стали и меди, построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений. Дано:



$F_1 = 100$ кН, $F_2 = 160$ кН,
$F_3 = 110$ кН, $A_1 = 18$ см^2,
$A_2 = 16$ см^2, $A_3 = 12$ см^2,
$\ell_1 = 0{,}3$ м, $\ell_2 = 0{,}6$ м, $\ell_3 = 0{,}4$ м.
Принять $E_{ст} = 2\cdot10^5$ МПа,
$E_м = 1\cdot10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

❶ Определяем реакцию в заделке:

$$\sum Z = 0: \quad R_A - F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$R_A = 100 - 160 + 110 = 50$ кН

❷ *Продольные силы*

Методом сечений, двигаясь от свободного конца, рассекаем стержень на каждом участке и определяем продольные силы:

Участок 1

$$\sum Z = 0: \quad N_1 - F_1 = 0 \quad \rightarrow$$

$N_1 = F_1 = 100$ кН (сжатие)

Участок 2

$$\sum Z = 0: \; -F_1 + F_2 - N_2 = 0 \; \rightarrow$$

$N_2 = F_2 - F_1 = 160 - 100 = 60$ кН (растяжение)

Участок 3

$$\sum Z = 0: \quad R_A - N_3 = 0 \quad \rightarrow$$

$N_3 = R_A = 50$ кН (сжатие)

По полученным данным строим эпюру продольных сил (N, кН).

Проверяем правильность построения эпюры: «скачок» на эпюре продольных сил всегда равен силе, приложенной в этом сечении.

❸ *Напряжения*

Определяем напряжения на каждом участке по формуле (1). Напряжения имеют тот же знак, что и продольная сила.

Участок 1 $\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{100 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^2} = 55{,}6$ МПа (сжатие).

Участок 2 $\sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = \dfrac{60 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2} = 37{,}5$ МПа (растяжение).

Участок 3 $\sigma_3 = \dfrac{N_3}{A_3} = \dfrac{50 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2} = 41{,}7$ МПа (сжатие).

По полученным данным строим эпюру напряжений (σ, МПа).

❹ *Деформации*

Деформацию каждого участка определяем по закону Гука по формуле (6):

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{E_{\text{ст}}A_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0{,}3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^2} = -\,0{,}083 \text{ мм};$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell_2}{E_{\text{м}}A_2} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 10^2} = +\,0{,}225 \text{ мм};$$

$$\Delta\ell_3 = \frac{N_3\ell_3}{E_{\text{м}}A_3} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^2} = -\,0{,}167 \text{ мм}.$$

Полное изменение длины стержня можно определить как алгебраическую сумму изменения длин каждого участка:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 = -0{,}083 + 0{,}225 - 0{,}167 = -0{,}025 \text{ мм},$$

т.е. стержень от действия внешних сил укорачивается на 0,025 мм.

❺ *Перемещения*

$\Delta_A = 0$ (сечение в заделке).

$\Delta_B = \Delta\ell_3 = -\,0{,}167$ мм.

$\Delta_C = \Delta\ell_3 + \Delta\ell_2 = -\,0{,}167 + 0{,}225 = 0{,}058$ мм.

$\Delta_D = \Delta\ell_3 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_1 = -\,0{,}167 + 0{,}225 - 0{,}083 = -\,0{,}025$ мм.

По полученным данным строим эпюру перемещений (Δ, мм). Точки пересечения эпюры с осью стержня обозначают сечения, которые не получают перемещений.

❻ Полное изменение длины стержня можно также определить на основании принципа независимости действия сил:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_{F_1} + \Delta\ell_{F_2} + \Delta\ell_{F_3}$$

$$\Delta\ell_{F_1} = -\left(\frac{F_1\ell_1}{E_{\text{ст}}A_1} - \frac{F_1\ell_2}{E_{\text{м}}A_2} - \frac{F_1\ell_3}{E_{\text{м}}A_3}\right) =$$

$$= -\left(\frac{100\cdot10^3\cdot0{,}3\cdot10^3}{2\cdot10^5\cdot18\cdot10^2} + \frac{100\cdot10^3\cdot0{,}6\cdot10^3}{1\cdot10^5\cdot16\cdot10^2} + \frac{100\cdot10^3\cdot0{,}4\cdot10^3}{1\cdot10^5\cdot12\cdot10^2}\right) = -0{,}792\ \text{мм}$$

$$\Delta\ell_{F_2} = \frac{F_2\ell_2}{E_{\text{м}}A_2} + \frac{F_2\ell_3}{E_{\text{м}}A_3} = \frac{160\cdot10^3\cdot0{,}6\cdot10^3}{1\cdot10^5\cdot16\cdot10^2} + \frac{160\cdot10^3\cdot0{,}4\cdot10^3}{1\cdot10^5\cdot12\cdot10^2} = +1{,}133\ \text{мм}$$

$$\Delta\ell_{F_3} = -\frac{F_3\ell_3}{E_{\text{м}}A_3} = -\frac{110\cdot10^3\cdot0{,}4\cdot10^3}{1\cdot10^5\cdot12\cdot10^2} = -0{,}366\ \text{мм}$$

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = -0{,}792 + 1{,}133 - 0{,}366 = -0{,}025\ \text{мм},$$

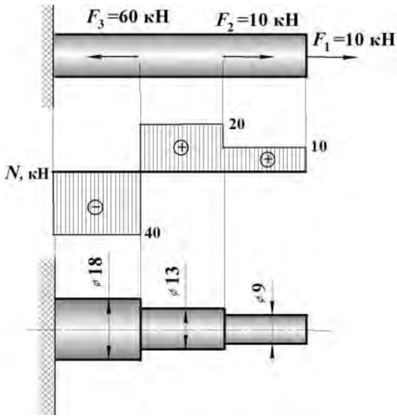
что полностью совпадает с предыдущими расчетами.

Задача 11

Спроектировать равнопрочный ступенчатый стержень круглого поперечного сечения, если для материала [σ] = 160 МПа.

РЕШЕНИЕ

❶ Методом сечений определяем продольные силы на участках стержня и строим эпюру продольных сил (N, кН):



$$\sum Z = 0:\ N_1 = F_1 = 10\ \text{кН}$$

$$\sum Z = 0:\ N_2 = F_1 + F_2 = 20\ \text{кН}$$

$$\sum Z = 0:\ N_3 = F_1 + F_2 - F_3 = -40\ \text{кН}$$

❷ Подбираем диаметр для каждого участка стержня, исходя из условия их равнопрочности, т.е. чтобы напряжения во всех сечениях были одинаковы и равны допускаемым [σ] :

$$\sigma=\frac{N}{A}=\frac{N}{\pi d^2/4}=\frac{4N}{\pi d^2}=[\sigma]\rightarrow\ d=\sqrt{\frac{4N}{\pi\cdot[\sigma]}}$$

<u>*Участок 1*</u> $$d_1=\sqrt{\frac{4N_1}{\pi\cdot[\sigma]}}=\sqrt{\frac{4\cdot 10\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 160}}=8{,}9\ \text{мм}\cong 9\ \text{мм}\ .$$

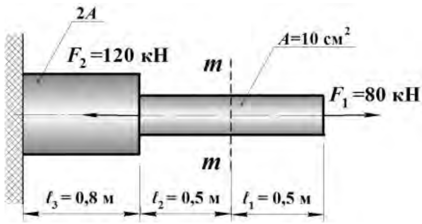
<u>*Участок 2*</u> $$d_2=\sqrt{\frac{4N_2}{\pi\cdot[\sigma]}}=\sqrt{\frac{4\cdot 20\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 160}}=12{,}6\ \text{мм}\cong 13\ \text{мм}\ .$$

<u>*Участок 3*</u> $$d_3=\sqrt{\frac{4N_3}{\pi\cdot[\sigma]}}=\sqrt{\frac{4\cdot 40\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 160}}=17{,}8\ \text{мм}\cong 18\ \text{мм}\ .$$

По полученным результатам вычерчиваем ступенчатый стержень.

<u>***Задача 12***</u>

В заданном медном стержне определить перемещение сечения m–m.
Принять $E = 1\cdot 10^5$ МПа.



<u>*РЕШЕНИЕ*</u>

Перемещение любого сечения определяется суммарным изменением длины участков, расположенных между заделкой и заданным сечением. Следовательно, сечение m–m переместится туда и настолько, насколько в сумме изменится длина 2-го и 3-го участков.
Определяем продольные силы на участках:

$\sum Z=0:\ N_2=F_1=80$ кН (растяжение);

$\sum Z=0:\ N_3=-F_1+F_2=-80+120=40$ кН (сжатие).

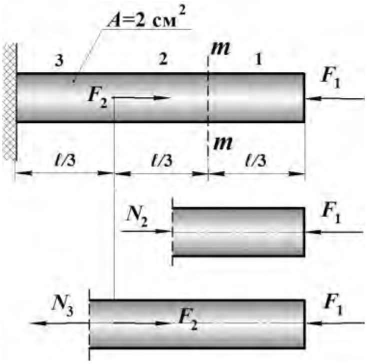
Тогда перемещение сечения m–m будет определено как:

$$\Delta_{m-m}=\frac{N_2\ell_2}{EA}+\frac{N_3\ell_3}{E\cdot 2A}=\frac{80\cdot 10^3\cdot 0{,}5\cdot 10^3}{1\cdot 10^5\cdot 10\cdot 10^2}-\frac{40\cdot 10^3\cdot 0{,}8\cdot 10^3}{1\cdot 10^5\cdot 20\cdot 10^2}=+0{,}24\ \text{мм}.$$

Сечение m–m переместится вправо на 0,24 мм.

Задача 13

Для заданного стального стержня длиной $\ell = 3$ м определить, при каком соотношении сил F_1 и F_2 перемещение сечения $m–m$ равно нулю, а также чему должны быть равны эти силы, если полное изменение длины стержня $\Delta\ell_{\text{полн}} = 1$ мм. Принять $E = 2\cdot 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ

Перемещение сечения $m–m$ определяется алгебраической суммой изменения длин участков, расположенных между заданным сечением и заделкой, т.е. участков 2 и 3. Так как по условию задачи $\Delta_{m-m} = 0$, значит один из этих участков должен удлиниться, а другой укоротиться на эту же величину. Как видно их схемы нагружения, на 2-м участке возникает *сжимающая* продольная сила N_2 , значит, продольная сила N_3 должна быть *растягивающей*, и из условия равновесия отсеченной части эти силы соответственно равны:

$$\sum Z = 0: \quad N_2 = F_1 \text{ (сжатие)}; \quad N_3 = F_2 - F_1 \text{ (растяжение)}$$

$$\Delta_{m-m} = -\Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 = -\frac{N_2 \cdot \ell/3}{EA} + \frac{N_3 \cdot \ell/3}{EA} = -\frac{F_1 \cdot \ell/3}{EA} + \frac{(F_2 - F_1)\ell/3}{EA} = 0$$

$$\boxed{F_2 = 2F_1}\,.$$

Так как сечение $m–m$ не получает перемещение, то полное изменение длины стержня $\Delta\ell_{\text{полн}}$ будет определяться изменением длины только 1-го участка, на котором $N_1 = F_1$:

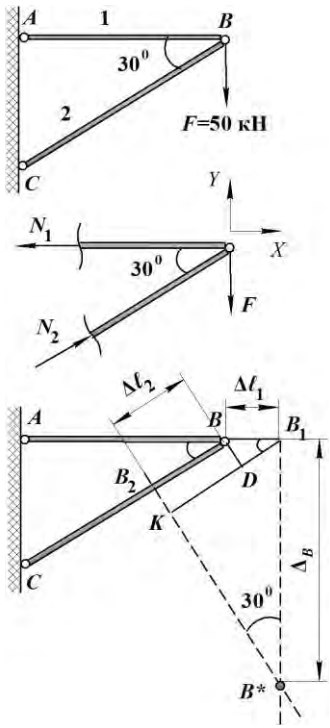
$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell/3}{EA} = \frac{F_1 \cdot \ell/3}{EA} = 1 \text{ мм} \rightarrow$$

$$F_1 = \frac{\Delta\ell_{\text{полн}} EA}{\ell/3} = \frac{1\cdot 2\cdot 10^5 \cdot 2\cdot 10^2}{1\cdot 10^3} = 40 \text{ кН} \quad \rightarrow \quad F_2 = 2F_1 = 80 \text{ кН}.$$

1.3. ***Шарнирно-стержневые системы. Расчеты на прочность. Перемещение узлов***

<u>Задача 14</u>

К чугунному кронштейну подвешен груз F = 50 кН. Подобрать диаметры стержней d_1 и d_2, если допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для чугуна равны $[\sigma]_р$ = 30 МПа и $[\sigma]_{сж}$ = 50 МПа. Определить вертикальное перемещение узла *B*.



<u>Дано</u>:
$E = 1{,}5\cdot 10^5$ МПа, $\ell_1 = 1$ м, $\ell_2 = 1{,}15$ м.

<u>*РЕШЕНИЕ*</u>

❶ Методом сечений отсекаем узел *B* и составляем уравнения его равновесия:

$$\begin{aligned} &\sum X = 0:\ N_2\cos 30^0 - N_1 = 0 \\ &\sum Y = 0:\ N_2 \sin 30^0 - F = 0 \end{aligned} \rightarrow$$

N_1 = 86,6 кН (растяжение)

N_2 = 100 кН (сжатие)

❷ Подбираем диаметр стержня 1 из условия прочности на растяжение:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{\pi d_1^2/4} = \frac{4N_1}{\pi d_1^2} \le [\sigma]_р \rightarrow$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4N_1}{\pi\cdot[\sigma]_р}} = \sqrt{\frac{86{,}6\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 30}} \cong 60 \text{ мм.}$$

❸ Подбираем диаметр стержня 2 из условия прочности на сжатие:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{\pi d_2^2/4} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} \le [\sigma]_{сж} \rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{4N_2}{\pi\cdot[\sigma]_{сж}}} = \sqrt{\frac{100\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 50}} \cong 50 \text{ мм.}$$

❹ Чтобы определить новое положение узла B от действия силы F, необходимо определить деформации стержней и построить деформационную схему:

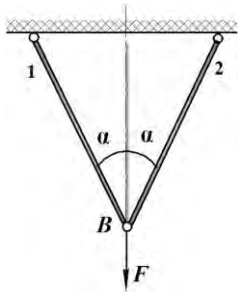
$$\Delta\ell_1=\frac{N_1\ell_1}{EA_1}=\frac{N_1\ell_1}{E\cdot\pi d_1^2/4}=\frac{4\cdot 86{,}6\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^3}{1{,}5\cdot 10^5\cdot 3{,}14\cdot 60^2}=0{,}2\ \text{мм};$$

$$\Delta\ell_2=\frac{N_2\ell_2}{EA_2}=\frac{N_2\ell_2}{E\cdot\pi d_2^2/4}=\frac{4\cdot 100\cdot 10^3\cdot 1{,}15\cdot 10^3}{1{,}5\cdot 10^5\cdot 3{,}14\cdot 50^2}=0{,}39\ \text{мм}.$$

❺ Так как изменение длины стержня происходит вдоль его оси, откладываем найденные значения $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$ (для наглядности они показаны крупнее) и получаем длину стержней после деформации – AB_1 и CB_2. Новое положение узла B будет находиться на пересечении дуг, проведенных к новой длине стержней. Однако в силу малости деформаций дуги можно заменить перпендикулярами, проведенными в точках B_1 и B_2, и тогда узел B окажется в положении B^*. В результате дальнейших геометрических построений и расчетов определяем вертикальное перемещение узла – Δ_B:

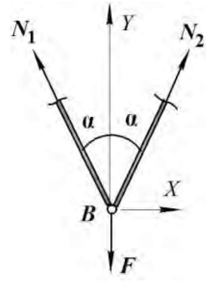
$$\Delta_B=\frac{KB^*}{\sin 30^0}=\frac{KD+DB^*}{\sin 30^0}=\frac{\Delta\ell_2+\Delta\ell_1\cos 30^0}{\sin 30^0}=\frac{0{,}39+0{,}2\cos 30^0}{\sin 30^0}=1{,}13\ \text{мм}.$$

<u>Задача 15</u>



К двум стальным стержням одинаковой длины ℓ = 1 м, но различного сечения – d_1 = 30 мм и d_2 = 40 мм подвешен груз F. Определить, какую наибольшую нагрузку способна выдержать конструкция, если для материала стержней $[\sigma]_1$ = 160 МПа и $[\sigma]_2$ = 60 МПа. Определить вертикальное перемещение узла B под действием этой нагрузки. Принять $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 30^o$.

<u>РЕШЕНИЕ</u>



❶ Определяем продольные силы в стержнях, выраженные через F, для чего отсекаем узел B и рассматриваем его равновесие:

$$\sum X = 0: \; -N_1 \sin 30^0 + N_2 \sin 30^0 = 0 \;\to\; N_1 = N_2$$

$$\sum Y = 0: \; 2N_1 \cos 30^0 - F = 0 \;\to$$

$$\boxed{N_1 = N_2 = \frac{F}{2\cos 30^0}}$$

❷ Подбираем силу F из условия прочности стержня 1:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{2\cos 30^0 \cdot \pi d_1^2 / 4} \le [\sigma]_1 \to$$

$$F_1 = \frac{2\cos 30^0 \cdot \pi d_1^2 \cdot [\sigma]_1}{4} = \frac{2\cos 30^0 \cdot 3{,}14 \cdot 30^2 \cdot 160}{4} \cong 195{,}8 \text{ кН} .$$

❸ Подбираем силу F из условия прочности стержня 2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F}{2\cos 30^0 \cdot \pi d_2^2 / 4} \le [\sigma]_2 \to$$

$$F_2 = \frac{2\cos 30^0 \cdot \pi d_2^2 \cdot [\sigma]_2}{4} = \frac{2\cos 30^0 \cdot 3{,}14 \cdot 40^2 \cdot 60}{4} \cong 130{,}5 \text{ кН} .$$

Для безопасной работы конструкции принимаем меньшее значение силы – F = 130,5 кН. Тогда продольные силы равны:

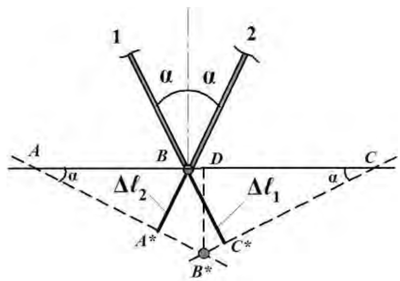
$$N_1 = N_2 = \frac{130{,}5}{2\cos 30^{\,0}} = 75{,}3 \text{ кН} .$$

❹ Для определения вертикального перемещения узла *B* определяем деформации стержней и строим схему деформаций:

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \ell}{EA_1} = \frac{N_1 \ell}{E \cdot \dfrac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{75{,}3 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 30^2} = 0{,}53 \text{ мм};$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2 \ell}{EA_2} = \frac{N_2 \ell}{E \cdot \dfrac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{75{,}3 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 40^2} = 0{,}3 \text{ мм}.$$

❺ Выполняем геометрические построения: показываем удлинения стержней, проводим перпендикуляры к их новой длине до пересечения, указывающего положение узла



B, и в результате расчетов получаем:

$$\Delta ABA^* \rightarrow \; AB = \frac{\Delta\ell_2}{\sin 30^0} = 0{,}6 \text{ мм};$$

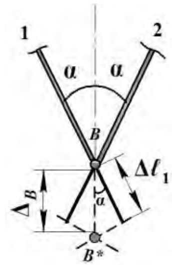
$$\Delta CBC^* \rightarrow \; BC = \frac{\Delta\ell_1}{\sin 30^0} = 1{,}06 \text{ мм}.$$

$\Delta\, ACB^*$ – равнобедренный треугольник, так как углы у основания равны. Следовательно:

$$AD = \frac{AC}{2} = \frac{AB + BC}{2} = \frac{0{,}6 + 1{,}06}{2} = 0{,}83 \text{ мм}.$$

Вертикальное перемещение узла B равно высоте DB^*:

$$\Delta_B = DB^* = AD \cdot tg 30^0 = 0{,}83 \cdot tg 30^0 = 0{,}48 \text{ мм}.$$



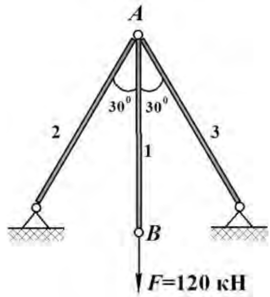
Примечание.
В случае, когда жесткости элементов одинаковы, их удлинения будут равны $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$ и перемещение узла B можно определить как:

$$\Delta_B = \frac{\Delta\ell_{1(2)}}{\cos 30^0}.$$

Задача 16

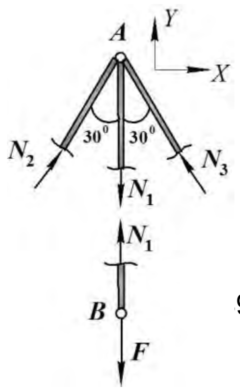
В заданной конструкции определить напряжения в стержнях и перемещение точки приложения силы F.

Дано: $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 4$ м, $A_1 = A_2 = A_3 = 5$ см^2,
$E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = E_3 = 1 \cdot 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ

❶ Продольные силы в стержнях:



$N_1 = F = 120$ кН;

$\sum X = 0$: $N_2 \sin 30^0 - N_3 \sin 30^0 = 0 \to N_2 = N_3$;

$\sum Y = 0$: $2N_2 \cos 30^0 - N_1 = 0 \to$

$$N_2 = N_3 = \frac{N_1}{2\cos 30^0} = \frac{120}{2\cos 30^0} = 69{,}3 \text{ кН}.$$

❷Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{120 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 240 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{69{,}3 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 138{,}6 \text{ МПа}.$$

❸ Деформации стержней:

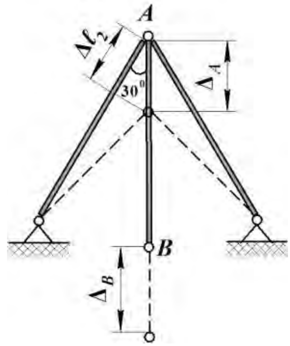
$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = 4{,}8 \text{ мм};$$

$$\Delta\ell_2 = \Delta\ell_3 = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2} = \frac{69{,}3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = 5{,}544 \text{ мм}.$$

❹ Перемещение точки приложения силы:

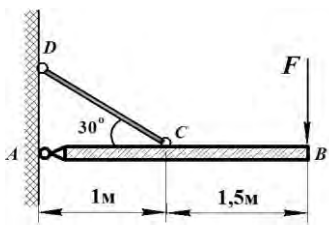
$$\Delta_B = \Delta_A + \Delta\ell_1 = \frac{\Delta\ell_2}{\cos 30^0} + \Delta\ell_1 =$$

$$= \frac{5{,}544}{\cos 30^0} + 4{,}8 = 11{,}2 \text{ мм}.$$



Задача 17

Абсолютно жесткий брус AB нагружен силой F и поддерживается стальным стержнем CD круглого по-



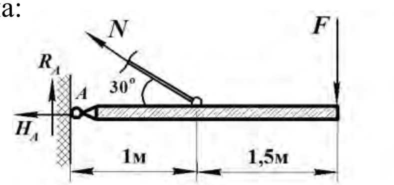
перечного сечения диаметром d = 20 мм и длиной ℓ = 1,15 м. Определить, какую наибольшую нагрузку F может выдержать конструкция, если для материала стержня $[\sigma]$ = 160 МПа. Определить опускание узла B. Принять $E = 2\cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

❶ Продольная сила в стержне CD равна:

$$\sum M_A = 0: \quad N\sin 30^0 \cdot 1 - F\cdot 2{,}5 = 0$$

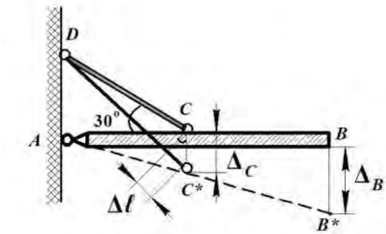
$$N = \frac{2{,}5F}{\sin 30^0 \cdot 1} = 5F.$$



❷ Из условия прочности стержня CD определяем силу F:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{5F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{20F}{\pi d^2} \le [\sigma] \rightarrow$$

$$F = \frac{\pi d^2 \cdot [\sigma]}{20} = \frac{3{,}14\cdot 20^2 \cdot 160}{20} \cong 10 \text{ кН}.$$



❸ Удлинение стержня равно:

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} = \frac{5F\ell}{E\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4\cdot 5\cdot 10\cdot 10^3 \cdot 1{,}15\cdot 10^3}{2\cdot 10^5 \cdot 3{,}14\cdot 20^2} = 0{,}92 \text{ мм}.$$

❹ Опускание узла B равно:

$$\Delta ABB^* \infty \Delta ACC^* \rightarrow \frac{\Delta_C}{1} = \frac{\Delta_B}{2{,}5} \rightarrow \frac{\Delta\ell}{1\cdot\sin 30^0} = \frac{\Delta_B}{2{,}5} \rightarrow$$

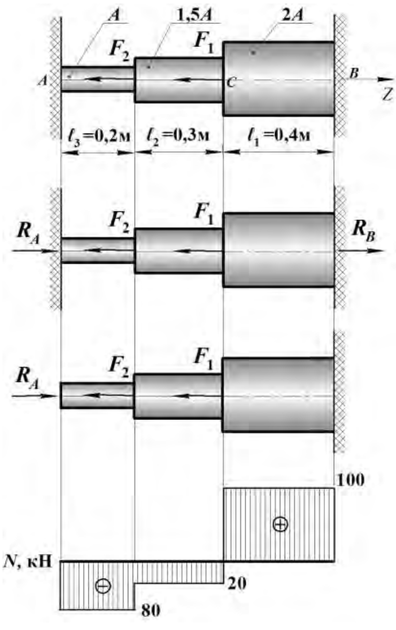
$$\Delta_B = \frac{2{,}5\cdot\Delta\ell}{1\cdot\sin 30^0} = \frac{2{,}5\cdot 0{,}92}{1\cdot 0{,}5} = 4{,}6 \text{ мм}.$$

2. Статически неопределимые задачи

2.1. Жестко защемленные стержни и уложенные с зазором. Подбор сечений и нагрузки

<u>Задача 18</u>

Стальной ступенчатый стержень ($E = 2\cdot10^5$ МПа) жестко закреплен концевыми сечениями и нагружен силами $F_1 = 120$ кН и $F_2 = 60$ кН, как показано на рисунке. Подобрать площадь сечения стержня A, если для материала $[\sigma] = 160$ МПа. Определить перемещение сечения C.



<u>РЕШЕНИЕ</u>

❶ Раскрываем статическую неопределимость *методом деформаций*:

<u>Статическая сторона</u> →

$$\sum Z = 0:\ R_A + R_B - F_1 - F_2 = 0. \qquad (1)$$

<u>Геометрическая сторона</u> →

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = 0\ ;$$

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_{F_1} + \Delta\ell_{F_2} + \Delta\ell_{R_A} = 0\ . \qquad (2)$$

<u>Физическая сторона</u> (3) →

$$\Delta\ell_{F_1} = \frac{F_1\ell_1}{E\cdot 2A} = \frac{120\cdot10^3\cdot0,4\cdot10^3}{E\cdot 2A} = \frac{24\cdot10^6}{EA}\ (\text{мм})\ ;$$

$$\Delta\ell_{F_2} = \frac{F_2\ell_1}{E\cdot 2A} + \frac{F_2\ell_2}{E\cdot1,5A} = \frac{60\cdot10^3\cdot0,4\cdot10^3}{E\cdot 2A} + \frac{60\cdot10^3\cdot0,3\cdot10^3}{E\cdot1,5A} = \frac{24\cdot10^6}{EA}\ (\text{мм})\ ;$$

$$\Delta\ell_{R_A} = -\left(\frac{R_A\ell_1}{E\cdot 2A} + \frac{R_A\ell_2}{E\cdot1,5A} + \frac{R_A\ell_3}{EA}\right) = -\left(\frac{R_A\cdot10^3\cdot0,4\cdot10^3}{E\cdot 2A} + \right.$$

$$+\frac{R_A\cdot 10^3\cdot 0,3\cdot 10^3}{E\cdot 1,5A}+\frac{R_A\cdot 10^3\cdot 0,2\cdot 10^3}{EA}\Bigg)=-\frac{0,6\cdot 10^6}{EA}R_A \ \text{(мм)}.$$

Объединяем три стороны задача и определяем реакции опор:

$$\frac{24\cdot 10^6}{EA}+\frac{24\cdot 10^6}{EA}-\frac{0,6\cdot 10^6}{EA}R_A=0 \quad\rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l}R_A=80\ \text{кН}\\ R_B=100\ \text{кН}\end{array}}.$$

❷ Методом сечений определяем продольные силы на участках стержня, строим эпюру продольных сил и устанавливаем, на каком из участков возникают максимальные напряжения:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{2A}=\frac{100\cdot 10^3}{2A}=\frac{50\cdot 10^3}{A}\ \text{(МПа)};$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{1,5A}=\frac{20\cdot 10^3}{1,5A}=\frac{13,3\cdot 10^3}{A}\ \text{(МПа)};$$

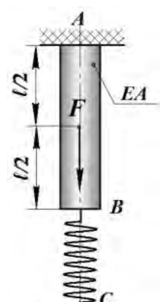
$$\sigma_3=\frac{N_3}{A}=\frac{80\cdot 10^3}{A}\ \text{(МПа)}.$$

❸ По наиболее нагруженному участку подбираем площадь сечения:

$$\sigma_3=\sigma_{max}\le[\sigma]\rightarrow\ \frac{80\cdot 10^3}{A}\le[\sigma]\rightarrow\ A=\frac{80\cdot 10^3}{160}=500\ \text{мм}^2.$$

❹ Перемещение сечения C определяется изменением длины первого участка:

$$\Delta_C=\frac{N_1\ell_1}{E\cdot 2A}=\frac{100\cdot 10^3\cdot 0,4\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 2\cdot 500}=0,2\ \text{мм (влево)}.$$

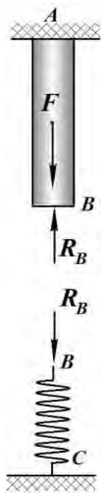


Задача 19

Стальной стержень AB ($E = 2\cdot 10^5$ МПа) длиной $\ell = 4$ м и площадью поперечного сечения $A = 20$ см^2, нагруженный силой F, закреплен одним концом, а другим опирается на пружину BC с коэффициентом податливости $\delta = 0,015$ мм/кН (δ – осадка пружины под действием силы в 1 кН). Определить, при каком значении силы F пружина сожмется на $\Delta_{\text{пруж}} = 1{,}5$ мм, а также напряжения на участках стержня *AB*.

<u>РЕШЕНИЕ</u>

❶ Раскрываем статическую неопределимость *методом сил*. Для этого мысленно разрываем связь между стержнем *AB* и пружиной и определяем силу взаимодействия между ними:



★ Задаем условие по перемещению, которое заключается в том, что сечение *B* стержня *AB* опустится настолько, насколько сожмется пружина:

$$\Delta_B = \Delta_{\text{пруж}} . \qquad (1)$$

★ С другой стороны, перемещение сечения *B* стержня на основании принципа независимости действия сил определяется суммарным воздействием двух сил – F и R_B:

$$\Delta_B = \Delta_{B(F)} + \Delta_{B(R_B)} . \qquad (2)$$

★ Так как пружина сжимается силой R_B и ее осадка известна, определяем эту силу:

$$\Delta_{\text{пруж}} = \delta \cdot R_B \ \rightarrow \ R_B = \frac{\Delta_{\text{пруж}}}{\delta} = \frac{1{,}5}{0{,}015} = 100\ \text{кН} .$$

★ Определяем слагаемые в выражении *(2)*:

$$\Delta_{B(F)} = \frac{F \cdot \ell / 2}{EA} = \frac{F \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2} = 0{,}005F \ (\text{мм}) ;$$

$$\Delta_{B(R_B)} = -\frac{R_B \cdot \ell}{EA} = -\frac{100 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2} = -1 \ \text{мм} . \qquad (3)$$

★ Приравниваем выражения *(1)* и *(2)* с учетом *(3)* и находим силу F:

$$0{,}005F - 1 = 1{,}5 \ \rightarrow \ \boxed{F = 500\ \text{кН}} .$$

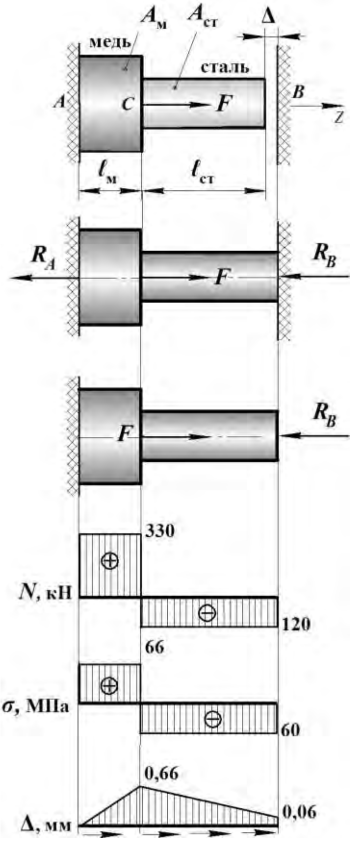
❷ Продольные силы и напряжения на участках стержня *AB* соответственно равны:

$$N_{нижн} = R_B = 100\,кН \;\rightarrow\; \sigma_{нижн} = \frac{N_{нижн}}{A} = \frac{100 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 50\ МПа\ (сжатие)\ ;$$

$$N_{верх} = F - R_B = 400\,кН \;\rightarrow\; \sigma_{верх} = \frac{N_{верх}}{A} = \frac{400 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 200\ МПа\ (раст.).$$

Задача 20

Составной ступенчатый стержень, состоящий из двух материалов, уложен с зазором между двумя плитами и нагружается силой F, как показано на рисунке. Определить усилия, напряжения и деформации на участках стержня, построить эпюры.



Дано: F = 450 кН, $\ell_м$ = 1 м, $\ell_{ст}$ = 2 м,
$A_м$ = 50 см^2, $A_{ст}$ = 20 см^2, Δ = 0,06 мм
$E_м = 1 \cdot 10^5$ МПа, $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

❶ Определяем реакции опор, используя *методом деформаций*:

Статическая сторона →

$$\boxed{\sum Z = 0:\; F - R_A - R_B = 0} \qquad (1)$$

Геометрическая сторона →

$$\Delta\ell_{полн} = \Delta$$

$$\boxed{\Delta\ell_{полн} = \Delta\ell_F + \Delta\ell_{R_B} = \Delta} \qquad (2)$$

Физическая сторона (3) →

$$\Delta\ell_F = \frac{F \cdot \ell_м}{E_м A_м} = \frac{450 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^2} = 0{,}9\ мм\ ;$$

$$\Delta\ell_{R_B} = -\left(\frac{R_B\ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}}A_{\text{м}}} + \frac{R_B\ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}}A_{\text{ст}}}\right) =$$

$$= -\left(\frac{R_B\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^3}{1\cdot 10^5\cdot 50\cdot 10^2} + \frac{R_B\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 20\cdot 10^2}\right) = -\,0{,}007R_B \text{ (мм)}\,.$$

Решаем совместно три стороны задачи:

$$0{,}9 - 0{,}007R_B = 0{,}06 \quad\rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l} R_B = 120\text{ кН} \\ R_A = 330\text{ кН} \end{array}}\,.$$

❷ Определяем продольные силы и напряжения на участках стержня и строим эпюры:

$$N_{\text{ст}} = R_B = 120\text{ кН (сжатие)} \;\rightarrow\; \sigma_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{120\cdot 10^3}{20\cdot 10^2} = 60\text{ МПа}\,;$$

$$N_{\text{м}} = R_A = 330\text{ кН (раст.)} \;\rightarrow\; \sigma_{\text{м}} = \frac{N_{\text{м}}}{A_{\text{м}}} = \frac{330\cdot 10^3}{50\cdot 10^2} = 66\text{ МПа}\,.$$

❸ Определяем деформации участков стержня:

$$\Delta\ell_{\text{ст}} = -\frac{N_{\text{ст}}\ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}}A_{\text{ст}}} = -\frac{120\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 20\cdot 10^2} = -0{,}6\text{ мм (укорочение)}\,;$$

$$\Delta\ell_{\text{м}} = +\frac{N_{\text{м}}\ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}}A_{\text{м}}} = +\frac{330\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^3}{1\cdot 10^5\cdot 50\cdot 10^2} = +0{,}66\text{ мм (удлинение)}\,;$$

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \Delta\ell_{\text{м}} + \Delta\ell_{\text{ст}} = 0{,}66 - 0{,}6 = 0{,}06\text{ мм} = \Delta\,.$$

❹ Определяем перемещения сечений, начиная от жесткой заделки , и строим эпюру перемещений:

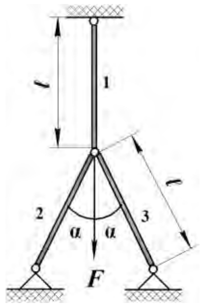
$$\Delta_A = 0\,;\quad \Delta_C = \Delta\ell_{\text{м}} = 0{,}66\text{ мм}\,;$$

$$\Delta_B = \Delta\ell_{\text{м}} + \Delta\ell_{\text{ст}} = 0{,}66 - 0{,}6 = 0{,}06\text{ мм} = \Delta\,.$$

2.2. *Статически неопределимые шарнирно-стержневые системы*

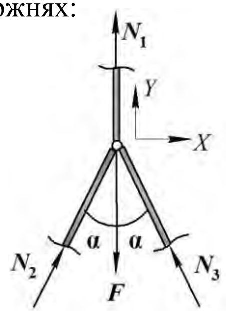
Задача 21

Три стальных стержня одинаковой длины ℓ и одинакового поперечного сечения A шарнирно скреплены в одной точке и нагружены силой F = 120 кН, как показано на рисунке. Определить диаметры стержней, если для материала [σ] = 160 МПа. Принять α = 30°.



РЕШЕНИЕ

❶ Раскрываем статическую неопределимость системы *методом деформаций* и определяем продольные силы в стержнях:



Статическая сторона →

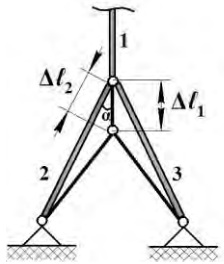
$$\sum X = 0: \quad N_2 \sin\alpha - N_3 \sin\alpha = 0 \;\rightarrow\; N_2 = N_3$$

$$\sum Y = 0: \quad \boxed{2N_2 \cos\alpha + N_1 - F = 0} \qquad (1)$$

Геометрическая сторона →

Строим деформационную схему и устанавливаем связь между деформациями стержней. Получаем уравнение неразрывности деформаций:

$$\boxed{\Delta\ell_2 = \Delta\ell_1 \cos\alpha} \qquad (2)$$



Физическая сторона →

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell}{EA}; \quad \Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell}{EA}} \qquad (3)$$

Объединяем *(2)* и *(3)* и вместе с уравнением *(1)* получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными N_1 и N_2:

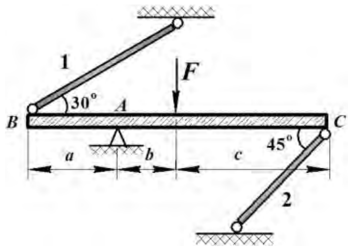
$$\frac{N_2\ell}{EA}=\frac{N_1\ell}{EA}\cos\alpha \;\rightarrow\; \begin{cases} 2N_2\cos\alpha+N_1=F \\ N_2=N_1\cos\alpha \end{cases} \;\rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} N_1=48\ \text{кН} \\ N_2=N_3=41{,}6\ \text{кН} \end{array}}$$

❷ Так как $N_1 > N_2 = N_3$, то при одинаковых размерах сечения наиболее нагруженным является стержень 1 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$). Поэтому из условия прочности именно этого стержня подбирается диаметр для всех трех стержней:

$$\sigma_1=\sigma_{max}=\frac{N_1}{A}=\frac{N_1}{\frac{\pi d^2}{4}}\le[\sigma] \rightarrow d=\sqrt{\frac{4N_1}{\pi\cdot[\sigma]}}=\sqrt{\frac{4\cdot 48\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 160}}\cong 20\ \text{мм}\ .$$

<u>Задача 22</u>

Абсолютно жесткий брус, опирающийся на шарнирную опору, поддерживается двумя стальными стержнями и нагружен силой F = 250 кН, как показано на рисунке. Проверить прочность стержней, если $[\sigma]_1$ = 60 МПа и $[\sigma]_2$ = 160 МПа.



<u>Дано</u>: a = 2,4 м, b = 1,8 м, c = 3 м, ℓ_1 = 2 м, ℓ_2 = 1,5 м, A_1 = 6 см^2, A_2 = 8 см^2, $E_1 = E_2 = E$

<u>РЕШЕНИЕ</u>

❶ Раскрываем статическую неопределимость системы *методом деформаций* и определяем продольные силы в стержнях:

<u>Статическая сторона</u> $\rightarrow$

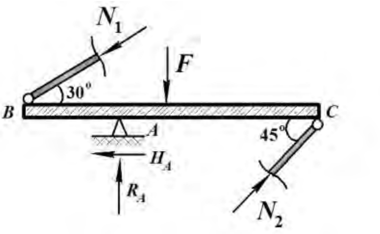
$$\sum M_A=0:\; N_1\sin 30^0\cdot a+N_2\sin 45^0(b+c)-F\cdot b=0\ ;$$

$$\boxed{1{,}2N_1+3{,}4N_2=1{,}8F}\ . \qquad (1)$$

<u>Геометрическая сторона</u> $\rightarrow$ Из схемы деформаций получаем:

$$\Delta ABB^*\infty\Delta ACC^*\rightarrow\frac{\Delta_B}{a}=\frac{\Delta_C}{b+c},\qquad \text{где}\quad \Delta_B=\frac{\Delta\ell_1}{\sin 30^0};\ \Delta_C=\frac{\Delta\ell_2}{\sin 45^0}\ .$$

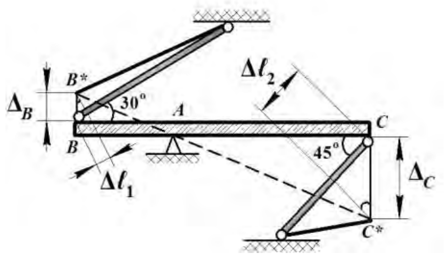
$$\frac{\Delta\ell_1}{a\cdot\sin 30^0}=\frac{\Delta\ell_2}{(b+c)\sin 45^0} \rightarrow$$



$$\boxed{\Delta\ell_1=0,35\Delta\ell_2} \qquad (2)$$

<u>*Физическая сторона*</u> $\rightarrow$

$$\begin{cases}\Delta\ell_1=\dfrac{N_1\ell_1}{EA_1}\\ \Delta\ell_2=\dfrac{N_2\ell_2}{EA_2}\end{cases} \qquad (3)$$



Подставляем *(3)* $\rightarrow$ *(2)*:

$$\frac{N_1\ell_1}{EA_1}=0,35\frac{N_2\ell_2}{EA_2} \quad \rightarrow \quad N_1=0,35\frac{\ell_2}{\ell_1}\cdot\frac{A_1}{A_2}N_2=0,2\,N_2 \rightarrow$$

$$\begin{cases}1,2\,N_1+3,4N_2=1,8F\\ N_1=0,2\,N_2\end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{aligned}N_1&=0,099F=0,099\cdot 250=24,7\text{ кН}\\ N_2&=0,494F=0,496\cdot 250=123,6\text{ кН}\end{aligned}}$$

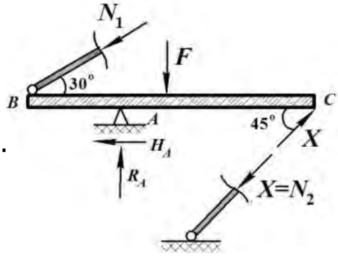
❷ Для сравнения результатов решения раскроем статическую неопределимость системы *энергетическим методом*, т.е. по *принципу наименьшей работы*:

★ Отбрасываем в качестве лишней связи стержень 2 и заменяем его действие на систему силой X. Определяем продольную силу N_1:

<u>*От действия силы F*</u> $\rightarrow$

$$\sum M_A=0:\; N_{1(F)}\sin 30^0\cdot a-F\cdot b=0$$

$$N_{1(F)}=\frac{F\cdot b}{a\cdot\sin 30^0}=\frac{250\cdot 1,8}{2,4\cdot\sin 30^0}=375\,\text{кН}\,.$$



<u>От действие силы X</u> $\rightarrow$

$$\sum M_A = 0:\ N_{1(X)} \sin 30^0 \cdot a + X \sin 45^0 (b+c) = 0$$

$$N_{1(X)} = -\frac{X \cdot (b+c)}{a \cdot \sin 30^0} = -\frac{X \sin 45^0 \cdot (1{,}8+3)}{2{,}4 \cdot \sin 30^0} = -2{,}83\,X \ \text{(кН)}\ .$$

★ Окончательно продольные силы в стержнях равны:

$$\boxed{N_1 = N_{1(F)} + N_{1(X)} = 375 - 2{,}83X \ \text{(кН)};\quad N_2 = X\ (кН)\ .}$$

★ Потенциальная энергия деформации, накопленная в системе:

$$U = \frac{N_1^2 \ell_1}{2EA_1} + \frac{N_2^2 \ell_2}{2EA_2} = \frac{\ell_1}{2EA_1}\left(N_1^2 + \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot \frac{A_1}{A_2} N_2^2\right) = \frac{\ell_1}{2EA_1}\Big[(375 - 2{,}83X)^2 +$$

$$+\frac{1{,}5 \cdot 6}{2 \cdot 8} X^2\Big] = \frac{\ell_1}{2EA_1}\left(140625 - 2122{,}5\,X + 8{,}57X^2\right)$$

★ Определяем значение силы X из условия минимума потенциальной энергии системы:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0:\ -2122{,}5 + 17{,}14X = 0 \ \rightarrow\ \boxed{\begin{array}{l} X = N_2 = 123{,}8 \text{ кН} \\ N_1 = 375 - 2{,}83X = 24{,}7 \text{ кН} \end{array}}\ .$$

Таким образом, оба способа решения задачи дают одинаковый результат. Однако вопрос применения того или иного метода необходимо решать отдельно в каждом конкретном случае в зависимости от вида конструкции.

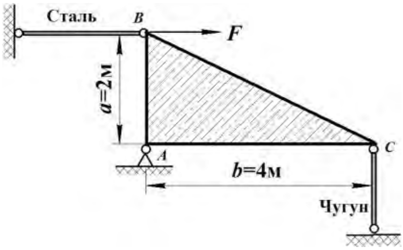
❸ Завершаем задачу. Определяем напряжения в стержнях и проверяем их прочность:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{24{,}7 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} \cong 41{,}2 \text{ МПа};\ \ \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{123{,}6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} \cong 154{,}5 \text{ МПа}\ .$$

Так как $\sigma_1 < [\sigma]_1$ и $\sigma_2 < [\sigma]_2$, прочность обоих стержней обеспечена.

Задача 23

Жесткая конструкция *ABC* крепится к фундаменту с помощью шарнира *A* и двух стержней – *стального* и *чугунного* и нагружается силой F, как показано на рисунке. Определить, какую нагрузку F может выдержать конструкция, если для стали $[\sigma]_{ст} = 160$ МПа, а для чугуна $[\sigma]_{чуг} = 100$ МПа.



Дано: $E_{ст} = 2\cdot10^5$ МПа, $A_{ст} = 30$ см^2, $\ell_{ст} = 2$ м, $E_{чуг} = 1{,}2\cdot10^5$ МПа, $A_{чуг} = 50$ см^2, $\ell_{чуг} = 1$ м.

РЕШЕНИЕ

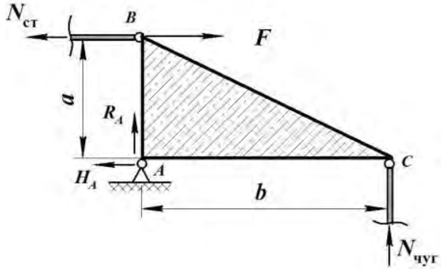
❶ Раскрываем статическую неопределимость *методом деформаций* и определяем значения продольных сил в стержнях, выраженные через силу F:

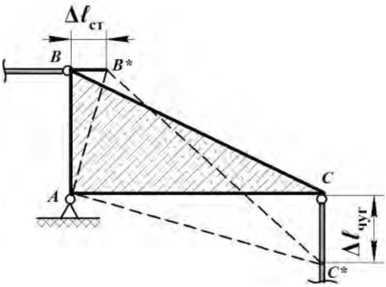
Статическая сторона →

$$\sum M_A = 0:$$

$$N_{ст}\cdot a + N_{чуг}\cdot b - F\cdot a = 0 \;\rightarrow$$

$$\boxed{N_{ст} + 2N_{чуг} = F}\,. \qquad (1)$$





Геометрическая сторона →

$$\Delta ABB^* \propto \Delta ACC^*$$

$$\frac{\Delta\ell_{ст}}{\Delta\ell_{чуг}} = \frac{a}{b} \rightarrow \boxed{\Delta\ell_{чуг} = 2\Delta\ell_{ст}}\,. \qquad (2)$$

Физическая сторона →

$$\boxed{\Delta\ell_{ст} = \frac{N_{ст}\ell_{ст}}{E_{ст}A_{ст}} \quad \Delta\ell_{чуг} = \frac{N_{чуг}\ell_{чуг}}{E_{чуг}A_{чуг}}}\,. \qquad (3)$$

Подставляем *(3)* → *(2)* и вместе со статическим уравнением *(1)* получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными $N_{ст}$ и $N_{чуг}$:

$$\frac{N_{чуг}\ell_{чуг}}{E_{чуг}A_{чуг}} = 2\frac{N_{ст}\ell_{ст}}{E_{ст}A_{ст}} \;\rightarrow\; N_{чуг} = 2N_{ст}\frac{E_{чуг}}{E_{ст}}\cdot\frac{A_{чуг}}{A_{ст}}\cdot\frac{\ell_{ст}}{\ell_{чуг}} = 4N_{ст} \;\rightarrow$$

$$\begin{cases} N_{ст} + 2N_{чуг} = F \\ N_{чуг} = 4N_{ст} \end{cases} \;\rightarrow\; \boxed{N_{ст} = \frac{1}{9}F; \quad N_{чуг} = \frac{4}{9}F}\,.$$

❷ Из условия прочности каждого стержня определяем силу F, которую можно безопасно приложить к конструкции:

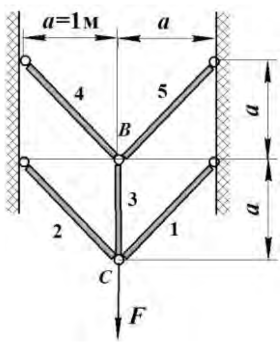
$$\sigma_{ст} = \frac{N_{ст}}{A_{ст}} = \frac{F}{9A_{ст}} \le [\sigma]_{ст} \rightarrow F_{ст} = 9[\sigma]_{ст}A_{ст} = 9\cdot 160\cdot 30\cdot 10^2 = 4320 \text{ кН};$$

$$\sigma_{чуг} = \frac{N_{чуг}}{A_{чуг}} = \frac{4F}{9A_{чуг}} \le [\sigma]_{чуг} \rightarrow F_{чуг} = \frac{9[\sigma]_{чуг}A_{чуг}}{4} = \frac{9\cdot 100\cdot 50\cdot 10^2}{4} = 1125 \text{ кН}.$$

Окончательно принимаем меньшее значение – $[F]$ = 1125 кН.

Задача 24

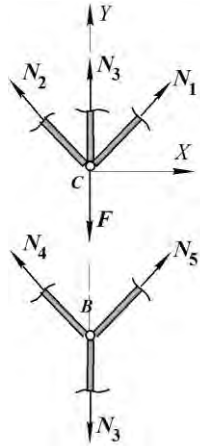
В заданной конструкции, состоящей из пяти стальных стержней одинакового поперечного сечения площадью A = 5 см^2 и нагруженной силой F =100 кН, определить опускание узла *C*. Принять $E = 2\cdot 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ

❶ Раскрываем статическую неопределимость системы *методом деформаций* и определяем продольные силы в стержнях:

Статическая сторона $\rightarrow$



Равновесие узла *C*

$$\sum X = 0:\ N_1 \sin 45^0 - N_2 \sin 45^0 = 0 \ \rightarrow N_1 = N_2$$

$$\sum Y = 0:\ 2N_1 \cos 45^0 + N_3 - F = 0 \ \rightarrow$$

$$\boxed{1.41N_1 + N_3 = F} \qquad (1)$$

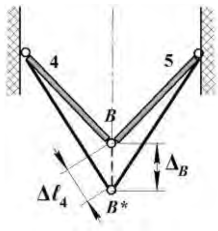
Равновесие узла *B*

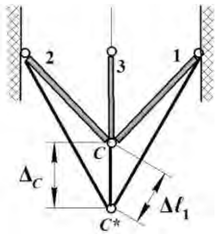
$$\sum X = 0:\ N_5 \sin 45^0 - N_4 \sin 45^0 = 0 \ \rightarrow N_4 = N_5$$

$$\sum Y = 0:\ 2N_4 \cos 45^0 - N_3 = 0 \ \rightarrow$$

$$\boxed{1.41N_4 - N_3 = 0} \qquad (2)$$

Геометрическая сторона $\rightarrow$





Опускание узла *B*:

$$\Delta_B = \frac{\Delta\ell_4}{\cos 45^0}\ . \qquad (3)$$

Опускание узла *C*:

Опускание узла *C* определяется, с одной стороны, опусканием узла *B* *(3)* и плюс удлинение стержня 3, но с другой стороны, его можно выразить через деформацию стержня 1:

$$\begin{cases} \Delta_C = \Delta_B + \Delta\ell_3 = \dfrac{\Delta\ell_4}{\cos 45^0} + \Delta\ell_3 \\ \Delta_C = \dfrac{\Delta\ell_1}{\cos 45^0} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{\Delta\ell_4}{\cos 45^0} + \Delta\ell_3 = \frac{\Delta\ell_1}{\cos 45^0} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{1{,}41\Delta\ell_1 - \Delta\ell_3 - 1{,}41\Delta\ell_4 = 0} \qquad (4)$$

Физическая сторона *(5)* $\rightarrow$

Учитывая длину стержней $\ell_1 = \ell_4 = 1{,}41a$, $\ell_3 = a$, их деформации будут соответственно равны:

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{EA} = 1{,}41\frac{N_1 a}{EA};\ \Delta\ell_3 = \frac{N_3\ell_3}{EA} = \frac{N_3 a}{EA};\ \Delta\ell_4 = \frac{N_4\ell_4}{EA} = 1{,}41\frac{N_4 a}{EA}}\ .$$

Подставляем *(5)* → *(4)*:

$$1,41^2\frac{N_1a}{EA}-\frac{N_3a}{EA}-1,41^2\frac{N_4a}{EA}=0\;\rightarrow\;2N_1-N_3-2N_4=0\,.$$

Объединяем последнее выражение с уравнениями статики *(1)* и *(2)* и, учитывая заданное значение силы F, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными N_1, N_3 и N_4:

$$\begin{cases}1,41N_1+N_3=F\\ 1,41N_4-N_3=0\\ 2N_1-N_3-2N_4=0\end{cases}\rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l}N_1=N_2=44,8\text{ кН}\\ \mathrm{N}_3=36,9\text{ кН}\\ \mathrm{N}_4=N_5=26,2\text{ кН}\end{array}}\,.$$

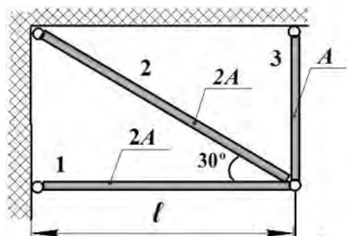
❷ Определяем опускание узла C:

$$\Delta\ell_1=\frac{N_1\ell_1}{EA}=\frac{N_1\cdot 1,41a}{EA}=\frac{44,8\cdot 10^3\cdot 1,41\cdot 1\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 5\cdot 10^2}=0,63\text{ мм};$$

$$\Delta_C=\frac{\Delta\ell_1}{\cos 45^0}=\frac{0,63}{\cos 45^0}=0,89\text{ мм}.$$

<u>Задача 25</u>

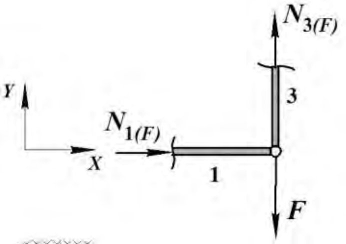
Конструкция, состоящая из трех стержней, выполненных из разных материалов, нагружена силой F = 160 кН, как показано на рисунке. Подобрать сечения стержней, если $[\sigma]_1$ = 80 МПа, $[\sigma]_2$ = 60 МПа, $[\sigma]_3$ = 120 МПа и $E_1 = 0,6E$, $E_2 = 0,5E$, $E_3 = E$.



<u>РЕШЕНИЕ</u>

❶ Определяем продольные силы в стержнях *энергетическим способом*, т.е. *по принципу наименьшей работы*. Для данной конструкции этот метод раскрытия статической неопределимости является наиболее рациональным, поскольку построение деформационной схемы и нахождение уравнения неразрывности деформаций геометрически затруднено и потребует громоздких расчетов:

★ Отбрасываем в качестве лишней связи стержень 2 и заменяем его действие на систему силой X. Определяем продольные силы N_1 и N_3 от действия каждой из приложенных нагрузок:

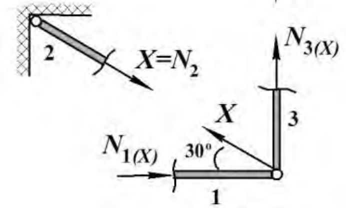


<u>*От действия силы F*</u> →

$$\sum X = 0: \; N_{1(F)} = 0$$

$$\sum Y = 0: \; N_{3(F)} - F = 0 \; \rightarrow$$

$$\boxed{N_{3(F)} = F}$$



<u>*От действия силы X*</u> →

$$\sum X = 0: \; N_{1(X)} - X\cos 30^0 = 0$$

$$\sum Y = 0: \; N_{3(X)} + X\sin 30^0 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N_{1(X)} = 0{,}866X \; (\text{кН}) \\ N_{3(X)} = -0{,}5X \; (\text{кН}) \end{array}}$$

★ Полные значения продольных сил соответственно равны:

$$\boxed{\begin{array}{l} N_1 = N_{1(F)} + N_{1(X)} = 0{,}866X \; (\text{кН}) \\ \mathrm{N}_2 = X \; (\text{кН}) \\ N_3 = N_{3(F)} + N_{3(X)} = F - 0{,}5X \; (\text{кН}) \end{array}}$$

★ Потенциальная энергия деформации с учетом длин стержней – $\ell_1 = \ell; \; \ell_2 = \ell_1 / \cos 30^0 = 1{,}155\ell; \; \ell_3 = \ell_1 tg 30^0 = 0{,}577\ell$, равна:

$$U = \frac{N_1^2 \ell_1}{2E_1 A_1} + \frac{N_2^2 \ell_2}{2E_2 A_2} + \frac{N_3^2 \ell_3}{2E_3 A_3} = \left(\frac{N_1^2 \ell}{2 \cdot 0{,}6E \cdot 2A} + \frac{N_2^2 \cdot 1{,}155\,\ell}{2 \cdot 0{,}5E \cdot 2A} + \frac{N_3^2 \cdot 0{,}577\,\ell}{2EA} \right) =$$

$$= \frac{\ell}{2EA} \left[0{,}833 \cdot (0{,}866X)^2 + 1{,}155\,X^2 + 0{,}577\,(F - 0{,}5X)^2 \right] =$$

$$= \frac{\ell}{2EA} \left(1{,}924X^2 + 0{,}577F^2 - 0{,}577\,F \cdot X \right)$$

★ Определяем значение силы X из условия минимума потенциальной энергии системы:

$$\frac{\partial U}{\partial X}=0:\quad 3{,}848X-0{,}577F=0\ \rightarrow\ \boxed{\begin{array}{l} X=N_2=0{,}15F=24\ \text{кН}\\ N_1=0{,}866X=20{,}8\ \text{кН}\\ N_3=F-0{,}5X=148\ \text{кН}\end{array}}$$

❷ Статическая неопределимость раскрыта. Определяем, какой из стержней является наиболее нагруженным:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{2A}=\frac{20{,}8\cdot 10^3}{2A}=\frac{10{,}4\cdot 10^3}{A}\ (\text{МПа});$$

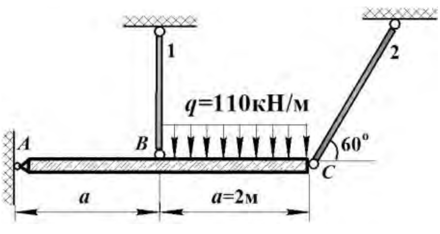
$$\sigma_2=\frac{N_2}{2A}=\frac{24\cdot 10^3}{2A}=\frac{12\cdot 10^3}{A}\ (\text{МПа});\quad \sigma_3=\frac{N_3}{A}=\frac{148\cdot 10^3}{A}\ (\text{МПа}).$$

❸ Наибольшие напряжения возникают в стержне 3, поэтому из условия прочности именно этого стержня подбираем сечение A:

$$\sigma_3=\sigma_{max}=\frac{N_3}{A}\le[\sigma_3]\ \rightarrow\ A=\frac{N_3}{[\sigma_3]}=\frac{148\cdot 10^3}{120}\cong 12{,}3\ \text{см}^2\ .$$

<u>Задача 26</u>

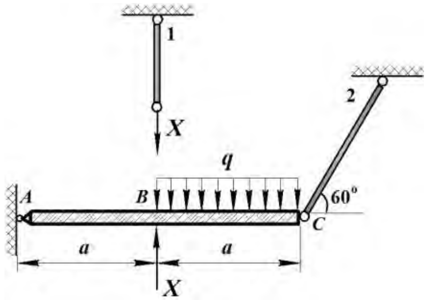
Жесткий брус AC, шарнирно укрепленный в стене и поддерживаемый двумя стальными стержнями одинакового поперечного сечения A = 6 см^2 и длиной ℓ_1 = 1 м и ℓ_2 = 1,2 м, нагружен, как показано на рисунке. Проверить прочность стержней и определить, с каким запасом прочности они работают, если для материала $\sigma_т$ = 240 МПа.
Принять $E = 2\cdot 10^5$ МПа.



<u>РЕШЕНИЕ</u>

❶ Раскрываем статическую неопределимость *методом сил,* для чего от заданной конструкции отбрасываем в качестве лишней связи стержень 1 и заменяем его действие силой X. Задаем условие по перемещению точки B, которое заключается в том, что в полученной системе перемещение точки B является, с одной стороны, результатом совместного действия нагрузки q и силы X, а с другой стороны, оно равно удлинению стержня 1, который растягивается той же силой X:

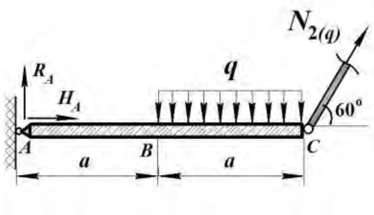
$$\begin{cases} \Delta_B = \Delta_{B(q)} + \Delta_{B(X)} \\ \Delta_B = \Delta\ell_1 = \dfrac{X \cdot \ell_1}{EA} \end{cases} \rightarrow$$

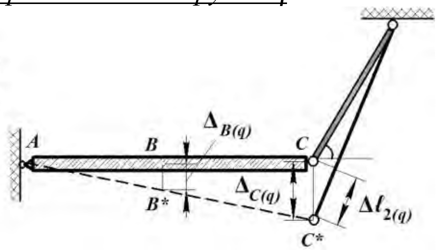


$$\Delta_{B(q)} + \Delta_{B(X)} = \frac{X \cdot \ell_1}{EA}. \qquad (1)$$

Прикладываем к системе поочередно нагрузки q и X и от каждой силы в отдельности определяем продольную силу в стержне 2 и его деформацию, а затем по полученному изменению длины находим перемещения точек C и B – Δ_C и Δ_B :

<u>От действия распределенной нагрузки q</u>





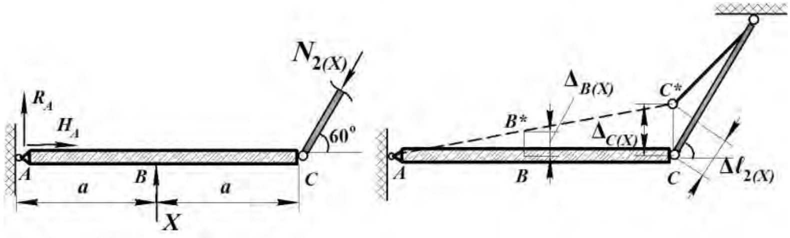
$$\sum M_A = 0: \; N_{2(q)} \sin 60^0 \cdot 2a - q \cdot a \cdot 1{,}5a = 0$$

$$N_{2(q)} = \frac{1{,}5qa}{2\sin 60^0} = \frac{1{,}5 \cdot 110 \cdot 2}{2\sin 60^0} = 190{,}5 \text{ кН}$$

$$\Delta\ell_{2(q)} = \frac{N_{2(q)}\ell_2}{EA} = \frac{190{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^2} = 1{,}9 \text{ мм} \rightarrow \Delta_{C(q)} = \frac{\Delta\ell_{2(q)}}{\sin 60^0} = 2{,}2 \text{ мм}$$

$$\Delta ABB^* \infty \Delta ACC^* \rightarrow \frac{\Delta_{C(q)}}{\Delta_{B(q)}} = \frac{2a}{a} \rightarrow \boxed{\Delta_{B(q)} = \frac{\Delta_{C(q)}}{2} = 1{,}1 \text{ мм}}.$$

<u>От действия силы X</u>



$$\sum M_A = 0: \ -N_{2(X)} \sin 60^0 \cdot 2a + X \cdot a = 0$$

$$N_{2(X)} = \frac{X}{2\sin 60^0} = 0{,}577X \ (\text{кН})$$

$$\Delta\ell_{2(X)} = \frac{N_{2(X)}\ell_2}{EA} = \frac{0{,}577X \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^2} = 0{,}0058\,X \ (\text{мм}) \ \rightarrow$$

$$\Delta_{C(X)} = -\frac{\Delta\ell_{2(X)}}{\sin 60^0} = -\frac{0{,}0058\,X}{\sin 60^0} = -0{,}0068\,X \ (\text{мм})$$

$$\Delta ABB^* \infty \Delta ACC^* \rightarrow \frac{\Delta_{C(X)}}{\Delta_{B(X)}} = \frac{2a}{a} \rightarrow \boxed{\Delta_{B(X)} = -0{,}0034X \ (\text{мм})}\,.$$

<u>*Удлинение стержня 1 от силы X*</u>

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \frac{X \cdot \ell_1}{EA} = \frac{X \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^2} = 0{,}01\,X \ (\text{мм})}\,.$$

Подставляем найденные значения $\Delta_{B(q)}$, $\Delta_{B(X)}$ и $\Delta\ell_1$ в выражение *(1)* и определяем силу X – силу взаимодействия между брусом и стержнем 1:

$$1{,}1 - 0{,}0034\,X = 0{,}01\,X \ \rightarrow \ \boxed{\begin{aligned} &X = N_1 = 82 \text{ кН} \\ &N_2 = 0{,}577\,X = 47{,}4 \text{ кН} \end{aligned}}\,.$$

❷ Статическая неопределимость раскрыта. Определяем напряжения в стержнях:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A}=\frac{82\cdot10^3}{6\cdot10^2}=137\ \text{МПа};\quad \sigma_2=\frac{N_2}{A}=\frac{47{,}4\cdot10^3}{6\cdot10^2}=79\ \text{МПа}.$$

Прочность стержней обеспечена. Коэффициент запаса прочности для каждого стержня равен:

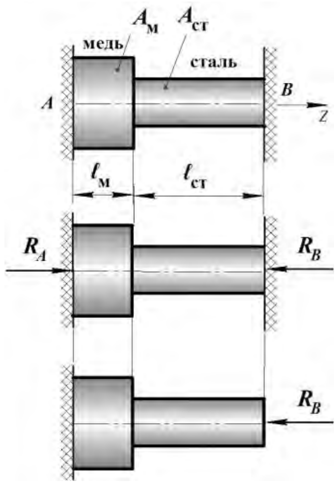
$$n_1=\frac{\sigma_т}{\sigma_1}=\frac{240}{137}=1{,}75;\quad n_2=\frac{\sigma_т}{\sigma_2}=\frac{240}{79}=3.$$

*2.3. **Температурные напряжения***

Задача 27

Ступенчатый стержень, выполненный из разных материалов, уложен без зазора при температуре $t_1^0=10^0\text{C}$, после чего нагрет до $t_2^0=40^0\text{C}$. Определить температурные напряжения на участках стержня.

Дано:
$A_м$ = 16 см^2, $A_{ст}$ = 12 см^2, $\ell_м$ = 0,5 м,
$\ell_{ст}$ = 0,8м, $E_м = 1\cdot10^5$ МПа, $E_{ст} = 2\cdot10^5$ МПа
$\alpha_м = 165\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$, $\alpha_{ст} = 125\cdot10^{-7}$ град$^{-1}$



РЕШЕНИЕ

❶ Стержень нагревается на температуру:

$$\Delta t=t_2^0-t_1^0=40^0-10^0=30^0\text{C}$$

В результате нагрева, стремясь удлиниться, он начинает воздействовать на опоры и возникают реакции опор. Именно эти реактивные силы сжимают стержень и вызывают появление в нем температурных напряжений. Определяем реакции опор методом деформаций:

Статическая сторона → $\sum Z=0:\ R_A-R_B=0\quad \boxed{R_A=R_B}$. *(1)*

Геометрическая сторона → $\boxed{\Delta\ell_{полн}=\Delta\ell_{t^0}+\Delta\ell_{R_B}=0}$. *(2)*

Физическая сторона *(3)* →

$$\Delta\ell_t = \alpha_м \ell_м \Delta t^0 + \alpha_{ст}\ell_{ст}\Delta t^0 =$$
$$= 165\cdot 10^{-7}\cdot 0,5\cdot 10^3\cdot 30^0 + 125\cdot 10^{-7}\cdot 0,8\cdot 10^3\cdot 30^0 = 0,547 \text{ мм}$$
$$\Delta\ell_{R_B} = -\left(\frac{R_B\ell_м}{E_м A_м} + \frac{R_B\ell_{ст}}{E_{ст}A_{ст}}\right) = -\left(\frac{R_B\cdot 10^3\cdot 0,5\cdot 10^3}{1\cdot 10^5 16\cdot 10^2} + \frac{R_B\cdot 10^3\cdot 0,8\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 12\cdot 10^2}\right) =$$
$$= -\,0,00646\,R_B \text{ (мм)}.$$

Подставляем *(3)* $\rightarrow$ *(2)*:

$$0,547 - 0,00646 R_B = 0 \;\rightarrow\; \boxed{R_B = R_A = 84,7 \text{ кН}}\,.$$

❷ Статическая неопределимость раскрыта. Продольные силы и температурные напряжения на участках стержня равны:

$$N_м = N_{ст} = R_A = R_B = 84,7 \text{ кН} \quad\rightarrow$$
$$\sigma_{t(м)} = \frac{N_м}{A_м} = \frac{84,7\cdot 10^3}{16\cdot 10^2} = 53 \text{ МПа}; \quad \sigma_{t(ст)} = \frac{N_{ст}}{A_{ст}} = \frac{84,7\cdot 10^3}{12\cdot 10^2} = 71 \text{ МПа}.$$

<u>Задача 28</u>

На некоторых железных дорогах сваривают рельсы в одну нитку. В каком интервале температур должна быть произведена сварка, чтобы при перепадах температуры от -40°С до $+40$°С наибольшие растягивающие напряжения не превышали 150 МПа, а наибольшие сжимающие -75 МПа? При какой температуре следует сваривать рельсы, чтобы наибольшие напряжения растяжения и сжатия при колебаниях температуры были одинаковыми по абсолютной величине? Принять $\alpha = 125\cdot 10^{-7}$ град$^{-1}$ и $E = 2\cdot 10^5$ МПа.

<u>РЕШЕНИЕ</u>

Каждый отдельный рельс, сваренный с соседними, можно рассматривать как стержень постоянного сечения, уложенный без зазора между двумя плитами и подвергающийся воздействия температуры. В этом случае при нагреве в нем будут возникать сжимающие температурные напряжения, а при охлаждении – растягивающие, которые определяют по формуле $\sigma_t = \alpha\cdot E\cdot\Delta t^0$ (10):

★ <u>при повышении температуры</u> $\boxed{\Delta t_1^0 = t_2^0 - t_1^0 = +40^0 - t_1^0}$:

$$\sigma_{t(\text{сж})} = \alpha \cdot E \cdot \Delta t_1^0 \le 75\text{МПа} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t_1^0 = \frac{75}{125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5} = 30^0\text{C} \quad \rightarrow \quad t_1^0 = +40^0 - 30^0 = +10^0\text{C}$$

★ <u>при понижении температуры</u> $\boxed{\Delta t_2^0 = t_1^0 - t_2^0 = t_1^0 - (-40^0)}$:

$$\sigma_{t(\text{раст})} = \alpha \cdot E \cdot \Delta t_2^0 \le 150\text{МПа} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t_2^0 = \frac{150}{125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5} = 60^0\text{C} \quad \rightarrow \quad t_1^0 = 60^0 - 40^0 = +20^0\text{C}$$

Таким образом, для выполнения указанных условий сварка должна производиться в диапазоне температур от +10 ºС до +20 ºС.

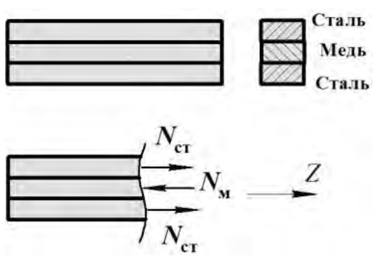
Чтобы наибольшие напряжения растяжения и сжатия при колебаниях температуры были одинаковыми по абсолютной величине, должно выполняться равенство $\Delta t_1^0 = \Delta t_2^0$:

$$+40^0 - t_1^0 = t_1^0 - (-40^0) \quad \rightarrow \quad t_1^0 = 0^0\text{C} \; ,$$

т.е. сварка должна производиться при tº = 0 ºС. Однако сваривание при 0 ºС может вызвать появление трещин в среднеуглеродистых сталях. Поэтому в реальных условиях сварку следует производить при температуре не ниже +10 ºС, для чего рельсы при сваривании необходимо подогревать.

<u>Задача 29</u>

Три пластинки – медная и две стальные – одинаковой длины ℓ и одинакового поперечного сечения площадью A плотно соединены между собой и подвергаются нагреву на Δt° = 100 ºС. Определить температурные напряжения в пластинках.



Принять:
$E_м = 1 \cdot 10^5$ МПа, $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа,
$\alpha_м = 165 \cdot 10^{-7}$ град$^{-1}$,
$\alpha_{ст} = 125 \cdot 10^{-7}$ град$^{-1}$.

<u>РЕШЕНИЕ</u>

Так как $\alpha_м > \alpha_{ст}$, то увеличение температуры вызовет в медной пластинке сжатие, поскольку ее стремление к большему удлинению будет сдерживаться стальными пластинками. Последние же, наоборот, будут растягиваться удлиняющейся медной пластинкой.

❶ Определяем продольные силы в элементах:

<u>*Статическая сторона*</u> → $\sum Z = 0:$ $\boxed{2N_{ст} - N_м = 0}$ *(1)*

<u>*Геометрическая сторона*</u> → $\boxed{\Delta\ell_{ст} = \Delta\ell_м}$ *(2)*

<u>*Физическая сторона*</u> →

$$\boxed{\Delta\ell_{ст} = \alpha_{ст}\cdot\ell\cdot\Delta t^0 + \frac{N_{ст}\ell}{E_{ст}A};\quad \Delta\ell_м = \alpha_м\cdot\ell\cdot\Delta t^0 - \frac{N_м\ell}{E_мA}} \qquad (3)$$

Подставляем *(3)* → *(2)*, объединяем со статическим уравнением *(1)* и получаем систему двух уравнений относительно $N_{ст}$ и $N_м$:

$$\alpha_{ст}\cdot\ell\cdot\Delta t^0 + \frac{N_{ст}\ell}{E_{ст}A} = \alpha_м\cdot\ell\cdot\Delta t^0 - \frac{N_м\ell}{E_мA} \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{E_{ст}A}\left(\mathrm{N}_{ст} + \frac{E_{ст}}{E_м}N_м\right) = (\alpha_м - \alpha_{ст})\Delta t^0 \quad \rightarrow$$

$$N_{ст} + 2N_м = E_{ст}A\cdot(\alpha_м - \alpha_{ст})\Delta t^0 = 2\cdot 10^5 A\cdot(65-125)10^{-7}\cdot 100^0 = 80A$$

$$\begin{cases} 2N_{ст} - N_м = 0 \\ N_{ст} + 2N_м = 80A \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} N_{ст} = 16A \\ N_м = 32A \end{matrix}} \;.$$

❷ Температурные напряжения в пластинках соответственно равны:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{t(ст)} &= \frac{N_{ст}}{A} = 16 \text{ МПа (растяжение)} \\ \sigma_{t(м)} &= \frac{N_м}{A} = 32 \text{ МПа (сжатие)} \end{aligned}}$$

<u>***Задача 30***</u>

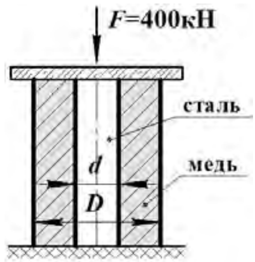
Конструкция, состоящая из стального стержня, установленного внутри медной втулки, подвергается действию силы F. Определить напряжения в стержне и втулке. Как изменятся внутренние силы, если конструкцию нагреть на 20 ºС? При каком увеличении температуры нагрузка полностью будет передаваться только на медную втулку? На какую температуру следует нагреть конструкцию, чтобы сделать элементы равнопрочными?

<u>*Дано*</u>: $D = 20$ см, $d = 10$ см, $E_м = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha_{ст} = 125 \cdot 10^{-7}$ град$^{-1}$.

<u>*РЕШЕНИЕ*</u>

Площади сечений равны:

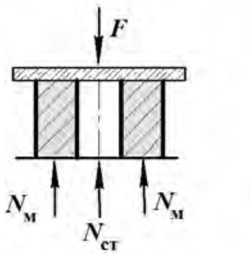
$$A_{ст} = \frac{\pi d^2}{4} = 78{,}5 см^2; \quad A_м = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = 235{,}5 см^2.$$



❶ Внутренние усилия и напряжения от заданной силы F:

<u>*Статическая сторона*</u> →

$$\sum Z = 0: \quad \boxed{N_{ст} + N_м - F = 0} \qquad (1)$$



<u>*Геометрическая сторона*</u> →

$$\boxed{\Delta\ell_{ст} = \Delta\ell_м} \qquad (2)$$

<u>*Физическая сторона*</u> →

$$\boxed{\Delta\ell_{ст} = \frac{N_{ст}\ell}{E_{ст}A_{ст}}; \quad \Delta\ell_м = \frac{N_м\ell}{E_м A_м}} \qquad (3)$$

Решаем совместно *(3)*, *(2)* и *(1)* и получаем:

$$\frac{N_{ст}\ell}{E_{ст}A_{ст}} = \frac{N_м\ell}{E_м A_м} \quad \to \quad N_м = \frac{E_м}{E_{ст}} \cdot \frac{A_м}{A_{ст}} N_{ст} = 1{,}5\, N_{ст} \quad \to (1) \to$$

$$\boxed{\begin{aligned} N_{ст} &= 0{,}4\, F = 160 \text{ кН} \\ N_м &= 0{,}6\, F = 240 \text{ кН} \end{aligned}} \quad \to \quad \boxed{\begin{aligned} \sigma_{ст} &= \frac{N_{ст}}{A_{ст}} = 20{,}4 \text{ МПа} \\ \sigma_м &= \frac{N_м}{A_м} = 10{,}2 \text{ МПа} \end{aligned}}.$$

Как было указано ранее, для конструкций, работающих под нагрузкой, изменение температурных условий позволяет изменять продольные силы, перераспределяя их необходимым образом между элементами, и даже добиваться равнопрочности последних. Поэтому рассмотрим заданную конструкцию, работающую под нагрузкой, в условиях дополнительного нагрева. В этом случае, возникающие продольные силы $N_{ст}$ и $N_{м}$, показанные на рисунке, будут являться результатом совместного действия силы F и температуры. При этом равновесие системы *(1)* и условие совместности деформаций *(2)* сохраняются, а изменяется только физическая сторона *(3)*, поскольку деформация элементов теперь определяется суммарным действием силы и нагрева:

$$\Delta\ell_{ст} = \alpha_{ст}\ell \cdot \Delta t^0 - \frac{N_{ст}\ell}{E_{ст}A_{ст}}; \quad \Delta\ell_{м} = \alpha_{м}\ell \cdot \Delta t^0 - \frac{N_{м}\ell}{E_{м}A_{м}} \ . \qquad (4)$$

❷ Определяем продольные силы при дополнительном нагреве конструкции на $20°C$. На основании выражений *(4)* и *(2)* получаем:

$$\alpha_{ст}\ell \cdot \Delta t^0 - \frac{N_{ст}\ell}{E_{ст}A_{ст}} = \alpha_{м}\ell \cdot \Delta t^0 - \frac{N_{м}\ell}{E_{м}A_{м}} \ . \qquad (5)$$

Преобразовываем к виду: $N_{м} - \frac{E_{м}A_{м}}{E_{ст}A_{ст}} N_{ст} = E_{м}A_{м}(\alpha_{м} - \alpha_{ст})\Delta t^0$,

подставляем сюда цифровые значения параметров и получаем дополнительное уравнение к статической стороне *(1)*:

$$\begin{cases} N_{ст} + N_{м} = F = 400 \ (\text{кН}) \\ N_{м} - 1{,}5 N_{ст} = 188{,}4 \ (\text{кН}) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} N_{ст} = 85 \ \text{кН} \\ N_{м} = 315 \ \text{кН} \end{matrix}} .$$

❸ Определяем, при каком увеличении температуры Δt^o нагрузка полностью будет передаваться только на медную втулку. В этом случае $N_{ст} = 0$, а $N_{м} = F = 400$ кН. Тогда выражение *(5)* принимает вид:

$$\alpha_{ст}\ell \cdot \Delta t^0 = \alpha_{м}\ell \cdot \Delta t^0 - \frac{F \cdot \ell}{E_{м}A_{м}} \quad \rightarrow$$

$$\Delta t^0 = \frac{F}{E_{м}A_{м}(\alpha_{м} - \alpha_{ст})} = \frac{400 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^5 \cdot 235{,}5 \cdot 10^2 (165 - 125) \cdot 10^{-7}} = 42{,}5 \ ^0\text{C} .$$

❹ Определяем, на какую температуру следует нагреть конструкцию, чтобы сделать элементы равнопрочными. Условием равнопрочности является равенство напряжений:

$$\sigma_{\text{ст}} = \sigma_{\text{м}} \quad \rightarrow \quad \frac{N_{\text{ст}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{N_{\text{м}}}{A_{\text{м}}} \quad \rightarrow \quad N_{\text{м}} = \frac{A_{\text{м}}}{A_{\text{ст}}} N_{\text{ст}} = 3N_{\text{ст}}.$$

Тогда из статического уравнения *(1)* получаем значения продольных сил, обеспечивающих равнопрочность конструкции:

$$N_{\text{ст}} = 100 \text{ кН}; \quad N_{\text{м}} = 300 \text{ кН}.$$

Необходимый для этого нагрев определяем из выражения *(5)*:

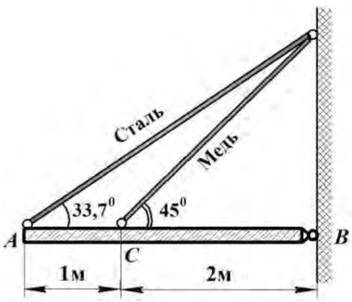
$$\Delta t^{o} = \frac{\dfrac{N_{\text{м}}}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} - \dfrac{N_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}} A_{\text{ст}}}}{(\alpha_{\text{м}} - \alpha_{\text{ст}})} = \frac{\dfrac{300 \cdot 10^{3}}{1 \cdot 10^{5} \cdot 235{,}5 \cdot 10^{2}} - \dfrac{100 \cdot 10^{3}}{2 \cdot 10^{5} \cdot 78{,}5 \cdot 10^{2}}}{(165 - 125) \cdot 10^{-7}} = 16\,^{o}\text{C}.$$

Задача 31

Жесткий брус *AB* шарнирно укреплен в стене и поддерживается стальным и медным стержнями одинакового поперечного сечения *A*. Определить температурные напряжения в стержнях, если конструкция нагревается на Δt^{o} = 30 °С. Как изменятся температурные напряжения, если нагреть только стальной стержень? Принять:

$E_{\text{м}} = 1 \cdot 10^{5}$ МПа, $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^{5}$ МПа,

$\alpha_{\text{м}} = 165 \cdot 10^{-7}$ град$^{-1}$, $\alpha_{\text{ст}} = 125 \cdot 10^{-7}$ град$^{-1}$.

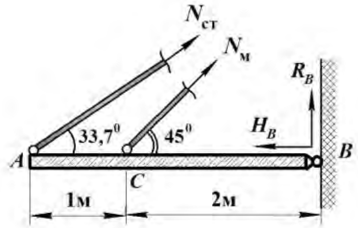


РЕШЕНИЕ:

Из представленной схемы конструкции длины стержней равны:

$$\ell_{\text{ст}} = \frac{3}{\cos 33{,}7^{o}} = 3{,}6 \text{ м}; \quad \ell_{\text{м}} = \frac{2}{\cos 45^{o}} = 2{,}83 \text{ м}.$$

❶ Поскольку на начало решения задачи неизвестно, в каких условиях будут проходить деформации элементов при нагревании системы, предположим, что в обоих стержнях возникают растягивающие продольные силы. Определяем эти силы *методом деформаций*:

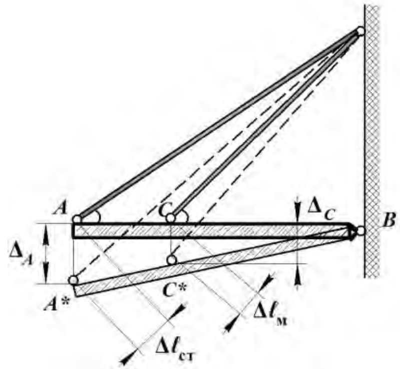


Статическая сторона $\rightarrow$

$\sum M_B = 0:$

$$N_{ст}\sin 33{,}7^0 \cdot 3 + N_{м}\sin 45^0 \cdot 2 = 0$$

$$\boxed{1{,}66N_{ст} + 1{,}41N_{м} = 0} \qquad (1)$$



Геометрическая сторона $\rightarrow$

$$\Delta ABA^* \propto \Delta CDC^* \rightarrow \frac{\Delta_A}{3} = \frac{\Delta_C}{2}$$

$$\Delta_A = \frac{\Delta\ell_{ст}}{\sin 33{,}7^0};\ \Delta_C = \frac{\Delta\ell_{м}}{\sin 45^0} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta\ell_{ст}}{3\cdot\sin 33{,}7^0} = \frac{\Delta\ell_{м}}{2\cdot\sin 45^0} \rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\ell_{ст} = 1{,}18\Delta\ell_{м}} \qquad (2)$$

Физическая сторона (3) $\rightarrow$

$$\Delta\ell_{ст} = \alpha_{ст}\ell_{ст}\Delta t^0 + \frac{N_{ст}\ell_{ст}}{E_{ст}A} =$$

$$= 125\cdot 10^{-7}\cdot 3{,}6\cdot 10^3\cdot 30^0 + \frac{N_{ст}\cdot 10^3\cdot 3{,}6\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot A} = 1{,}35 + 18\frac{N_{ст}}{A}\ (\text{мм});$$

$$\Delta\ell_{м} = \alpha_{м}\ell_{м}\Delta t^0 + \frac{N_{м}\ell_{м}}{E_{м}A} =$$

$$= 165\cdot 10^{-7}\cdot 2{,}83\cdot 10^3\cdot 30^0 + \frac{N_{м}\cdot 10^3\cdot 2{,}83\cdot 10^3}{1\cdot 10^5\cdot A} = 1{,}4 + 28{,}3\frac{N_{м}}{A}\ (\text{мм}).$$

Подставляем *(3)*$\rightarrow$ *(2)*: $1{,}35 + 18\frac{N_{ст}}{A} = 1{,}18\left(1{,}4 + 28{,}3\frac{N_{м}}{A}\right)$ –

и после вычислений получаем дополнительное уравнение к статической стороне *(1)*:

$$\begin{cases} N_{ст} - 1{,}86N_{м} = 0{,}017A\ (\text{кН}) \\ 1{,}66N_{ст} + 1{,}41N_{м} = 0\ (\text{кН}) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} N_{м} = -0{,}0063A\ (\text{кН}) \\ N_{ст} = 0{,}0053A\ (\text{кН}) \end{array}}.$$

Таким образом, расчеты показывают, что деформация медного стержня происходит в стесненных условиях, поэтому в нем возникают сжимающие продольные силы. В стальном стержне, наоборот, продольная сила растягивающая, и это означает, что помимо удлинения от нагрева он дополнительно растягивается удлиняющимся медным стержнем.

Температурные напряжения в стержнях равны:

$$\sigma_{t(\text{м})} = \frac{N_{\text{м}}}{A} = \frac{0,0063 \cdot 10^3 A}{A} = 6,3 \text{ МПа (сжатие)};$$

$$\sigma_{t(\text{ст})} = \frac{N_{\text{ст}}}{A} = \frac{0,0053 \cdot 10^3 A}{A} = 5,3 \text{ МПа (растяжение)}.$$

❷ Определяем температурные напряжения, если нагревается только стальной стержень. В этом случае, предполагая, что в обоих стержнях возникают растягивающие силы, статическая *(1)* и геометрическая *(2)* стороны задачи не изменятся, а физическая *(3)* принимает вид:

$$\Delta\ell_{ст} = \alpha_{\text{ст}}\ell_{\text{ст}}\Delta t^0 + \frac{N_{\text{ст}}\ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}}A} =$$

$$= 125 \cdot 10^{-7} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \cdot 30^0 + \frac{N_{\text{ст}} \cdot 10^3 \cdot 3,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot A} = 1,35 + 18\frac{N_{\text{ст}}}{A} \text{ (мм)};$$

$$\Delta\ell_{\text{м}} = \frac{N_{\text{м}}\ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}}A} = \frac{N_{\text{м}} \cdot 10^3 \cdot 2,83 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^5 \cdot A} = 28,3\frac{N_{\text{м}}}{A} \text{ (мм)}.$$

Подставляем выражения в *(2)*: $1,35 + 18\frac{N_{\text{ст}}}{A} = 1,18 \cdot 28,3\frac{N_{\text{м}}}{A}$ и после вычислений получаем дополнение к статической стороне *(1)*:

$$\begin{cases} N_{\text{ст}} - 1,86 N_{\text{м}} = -0,075A \text{ (кН)} \\ 1,66 N_{\text{ст}} + 1,41 N_{\text{м}} = 0 \text{ (кН)} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} N_{\text{м}} &= +0,0277A \text{ (кН)} \\ N_{\text{ст}} &= -0,0235A \text{ (кН)} \end{aligned}}.$$

Температурные напряжения соответственно равны:

$$\sigma_{t(\text{м})} = \frac{N_{\text{м}}}{A} = \frac{0,0277 \cdot 10^3 A}{A} = 27,7 \text{ МПа (растяжение)};$$

$$\sigma_{t(\text{ст})} = \frac{N_{\text{ст}}}{A} = \frac{0,0235 \cdot 10^3 A}{A} = 23,5 \text{ МПа (сжатие)}.$$

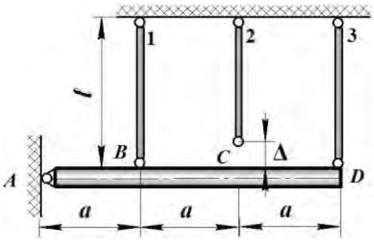
Таким образом, теперь стальной стержень будет деформироваться в стесненных условиях, а медный – растягиваться.

2.4. *Монтажные напряжения*

Задача 32

Шарнирно закрепленный жесткий брус *AD* предполагается подвесить на трех стальных стержнях одинаковой длины ℓ = 1 м и одинакового поперечного сечения площадью A = 20 см^2. Однако в процессе сборочных работ обнаружилось, что средний стержень выполнен короче проектного размера на Δ = 0,5 мм. Определить монтажные напряжения в стержнях, возникающие после сборки конструкции.

Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

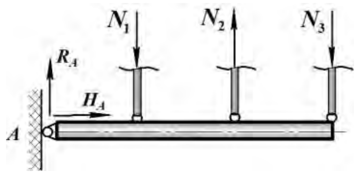
❶ Для закрепления среднего стержня на брусе *AD* его следует растянуть или предварительно нагреть, чтобы обеспечить необходимое удлинение. В результате сборки конструкции в стержнях возникают начальные продольные силы – в стержне 2 растягивающая сила N_2, а в крайних стержнях – сжимающие N_1 и N_3:

Статическая сторона →

$$\sum M_A = 0:$$

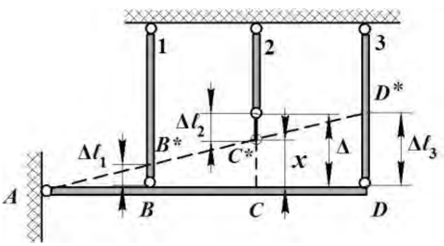
$$N_1 \cdot a - N_2 \cdot 2a + N_3 \cdot 3a = 0$$

$$\boxed{N_1 - 2N_2 + 3N_3 = 0} \qquad (1)$$



Система дважды статически неопределима.

Геометрическая сторона →



При построении схемы деформаций брус *AD* после закрепления на трех стержнях следует располагать таким образом, чтобы его новое положение AD^* ***проходило в промежутке*** зазора Δ, не доставая до нижнего конца среднего стержня, как показано на рисунке. В противном случае на деформационной схеме будет потеряно удлинение стержня 2, а это противоречит смыслу задачи: если в элементе есть продольная сила, значит, должна быть и деформация.

Поскольку конструкция два раза статически неопределима, в геометрической части необходимо найти два дополнительных уравнения:

$$\Delta ABB^* \propto \Delta ADD^* \rightarrow \frac{\Delta\ell_1}{a} = \frac{\Delta\ell_3}{3a} \rightarrow \boxed{\Delta\ell_3 = 3\Delta\ell_1} \qquad (2a)$$

$$\Delta ABB^* \propto \Delta ACC^* \rightarrow \frac{\Delta\ell_1}{a} = \frac{X}{2a} \rightarrow X = 2\Delta\ell_1, \text{ но } X + \Delta\ell_2 = \Delta \rightarrow$$

$$\boxed{2\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \Delta} \qquad (2б)$$

<u>*Физическая сторона*</u> →

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell}{EA}; \quad \Delta\ell_2 = \frac{N_2(\ell-\Delta)}{EA} \approx \frac{N_2\ell}{EA}; \quad \Delta\ell_3 = \frac{N_3\ell}{EA}} \qquad (3)$$

Подставляем *(3)* → *(2а)*: $\frac{N_3\ell}{EA} = 3\frac{N_1\ell}{EA} \rightarrow N_3 = 3N_1$ *(4)*

Подставляем *(3)* → *(2б)*: $2\frac{N_1\ell}{EA} + \frac{N_2\ell}{EA} = \Delta \rightarrow$

$$2N_1 + N_2 = \frac{EA\cdot\Delta}{\ell} = \frac{2\cdot10^5\cdot20\cdot10^2\cdot0{,}5}{1\cdot10^3} = 200 \text{ (кН)} \qquad (5)$$

Объединяем уравнения *(1)*, *(4)* и *(5)* и получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными силами N_1, N_2 и N_3:

$$\begin{cases} N_1 - 2N_2 + 3N_3 = 0 \\ N_3 = 3N_1 \\ 2N_1 + N_2 = 200 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} N_1 = 28{,}6 \text{ кН} \\ N_2 = 142{,}9 \text{ кН} \\ N_3 = 85{,}8 \text{ кН} \end{matrix}}.$$

❷ Монтажные напряжения соответственно равны:

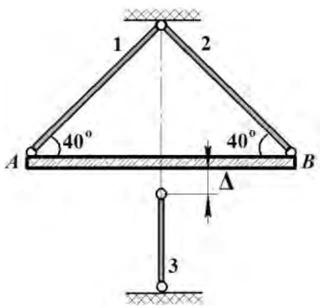
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{28{,}6 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 14{,}3 \text{ МПа (сжатие)};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{142{,}9 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 71{,}5 \text{ МПа (растяжение)};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{85{,}8 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 42{,}9 \text{ МПа (сжатие)}.$$

Задача 33

Жесткий брус *AB* предполагается укрепить на трех стальных стержнях одинакового поперечного сечения площадью $A = 10$ см^2 и длиной $\ell_1 = \ell_2 = 2$ м и $\ell_3 = 0{,}8$ м. Однако один из стержней выполнен короче проектного размера на $\Delta = 2{,}5$ мм. Определить монтажные напряжения в стержнях после сборки конструкции. Определить, какой величины следует выполнить зазор Δ, чтобы при нагружении конструкции силой $F = 28$ кН посередине бруса стержни стали равнопрочными. Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.



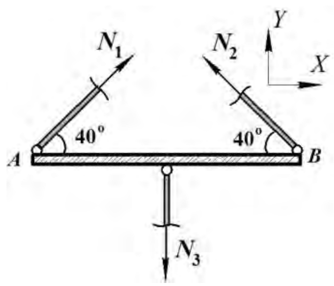
РЕШЕНИЕ

❶ Для закрепления среднего стержня на брусе *AB* его необходимо растянуть, в результате чего после сборки конструкции в стержнях возникают начальные продольные силы N_1, N_2 и N_3:

Статическая сторона →

$\sum X = 0: \quad N_1 = N_2$

$\sum Y = 0: \; 2N_1 \sin 40^0 - N_3 = 0$



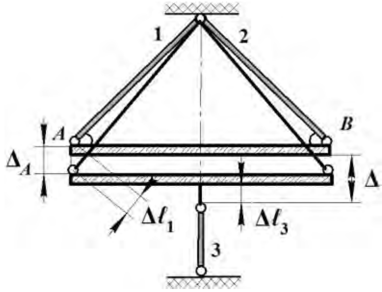
$$\boxed{1{,}28N_1 - N_3 = 0} \qquad (1)$$

<u>*Геометрическая сторона*</u> $\rightarrow$

$\Delta_A + \Delta\ell_3 = \Delta$

$\Delta_A = \dfrac{\Delta\ell_1}{\sin 40^0} = 1{,}56\Delta\ell_1 \quad \rightarrow$

$$\boxed{1{,}56\Delta\ell_1 + \Delta\ell_3 = \Delta} \qquad (2)$$



<u>*Физическая сторона*</u> $\rightarrow$

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{EA}; \quad \Delta\ell_3 = \frac{N_3(\ell_3 - \Delta)}{EA} \approx \frac{N_3\ell_3}{EA}} \qquad (3)$$

Подставляем *(3)* → *(2)* и вместе со статической стороной *(1)* получаем систему двух уравнений:

$$1{,}56\frac{N_1\ell_1}{EA} + \frac{N_3\ell_3}{EA} = \Delta \quad \rightarrow \quad 1{,}56N_1 + \frac{\ell_3}{\ell_1}N_3 = \frac{EA\cdot\Delta}{\ell_1} \quad \rightarrow$$

$$1{,}56N_1 + \frac{0{,}8}{2}N_3 = \frac{2\cdot 10^5\cdot 10\cdot 10^2\cdot 2{,}5}{2\cdot 10^3} = 250\ (\text{кН})$$

$$\begin{cases} 1{,}56N_1 + 0{,}4N_3 = 250\ (\text{кН}) \\ 1{,}28\text{N}_1 - N_3 = 0\ (\text{кН}) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} N_1 = N_2 = 120{,}6\ \text{кН} \\ N_3 = 154{,}4\ \text{кН} \end{array}}\ .$$

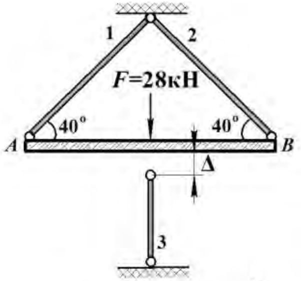
❷ Монтажные напряжения соответственно равны:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1}{A} = \frac{120{,}6\cdot 10^3}{10\cdot 10^2} = 120{,}6\,\text{МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{154{,}4\cdot 10^3}{10\cdot 10^2} = 154{,}4\ \text{МПа}\ .$$

❸ Рассмотрим конструкцию в нагруженном состоянии и определим необходимую величину зазора, обеспечивающую равнопрочность стержней:

★ При действии рабочей нагрузки и в случае, когда конструкция была собрана в условиях неточного изготовления одного из элементов, продольные силы, возникающие в стержнях, будут являться ***результатом совместного действия*** этих двух факторов и статическое уравнение *(1)* принимает вид:

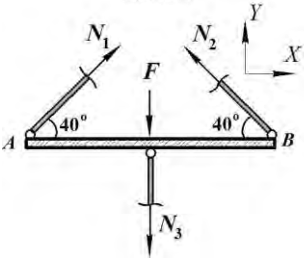


$$\sum X=0: \quad N_1=N_2$$

$$\sum Y=0: \; 2N_1\sin 40^0-N_3-F=0$$

$$\boxed{1,28N_1-N_3-F=0} \qquad (1^*)$$

★ Из условия равнопрочности $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ при одинаковой площади сечений имеем $\rightarrow \quad N_1=N_2=N_3=N$;



★ Тогда из уравнения *(1*)*:

$$N=\frac{F}{0,28}=\frac{28}{0,28}=100\,\text{кН} .$$

★ Схема деформаций и физическая сторона задачи сохраняются, и тогда, подставляя *(3)* → *(2)*, получаем:

$$1,56\frac{N_1\ell_1}{EA}+\frac{N_3\ell_3}{EA}=\Delta \quad \rightarrow \quad 1,56N_1+\frac{\ell_3}{\ell_1}N_3=\frac{EA\cdot\Delta}{\ell_1} \quad \rightarrow$$

$$1,56\cdot100\cdot10^3+\frac{0,8}{2}\cdot100\cdot10^3=\frac{2\cdot10^5\cdot10\cdot10^2\cdot\Delta}{2\cdot10^3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta=1,96\text{ мм}} .$$

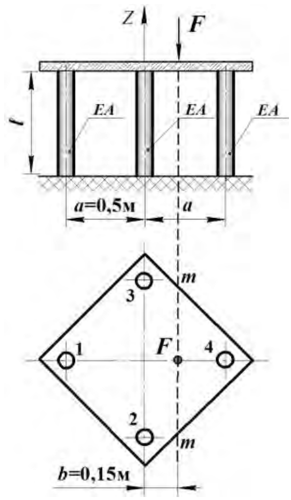
2.5. ***Другие случаи статически неопределимых задач***

<u>Задача 34</u>

Квадратная плита, укрепленная на четырех одинаковых симметрично расположенных стойках, нагружается силой F = 200 кН, как показано на рисунке. Стойки жестко соединены с фундаментом, что позволяет им воспринимать как растягивающие, так и сжимающие усилия. Определить продольные силы в стойках.

РЕШЕНИЕ

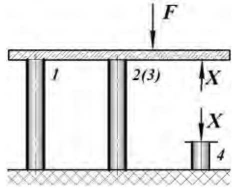
Особенность данной задачи состоит в том, что, начиная ее решение, трудно с уверенностью установить характер деформации конструкции и вид деформационной схемы. Приложение силы F, как показано на рисунке, может вызвать в стойках 1-2-3 как укорочение, так и удлинение, и это, очевидно, зависит от смещения этой силы от цента плиты. Вид конструкции в деформированном состоянии можно задать произвольно, но при этом силовая схема должна обязательно соответствовать схеме деформаций.



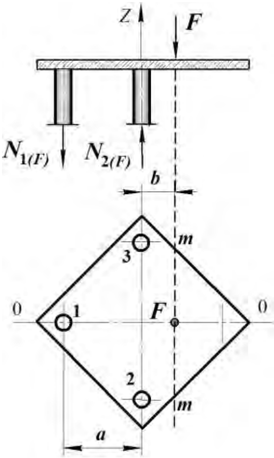
Можно, например, предположить, что все четыре стойки укоротятся и продольные силы в них будут сжимающими. Но также вероятна и ситуация, что стойка 4 укоротится, а стойки 1-2-3 — удлинятся, что потребует принятия соответствующей силовой схемы.

Из-за неопределенности характера деформации для систем данного типа предпочтительнее применять методы раскрытия статической неопределимости, исключающие построение деформационных схем. Произвольно заданная схема деформаций может внести ошибку в самом начале решения и приведет к неверному результату, а также к возможному противоречию между силовым и деформированным состоянием конструкции.

Для решения данной задачи используем *энергетический метод,* основанный *на принципе наименьшей работы*:



★ Отбрасываем в качестве лишней связи стойку 4 и заменяем ее действие на систему силой *X*. Определяем продольные силы N_1, N_2 и N_3 от действия каждой из приложенных нагрузок. Так как без стойки 4 система стала статически определимой, указанные силы можно определить из уравнений равновесия. Направление сил N задаем произвольно, но решение уравнений равновесия покажет: если сила N получилась положительной – ее направление выбрано верно, если отрицательной – ее следует перенаправить. Правильное направление укажет вид деформации, возникающей в стойке от заданной нагрузки:



<u>От действия силы F</u> →

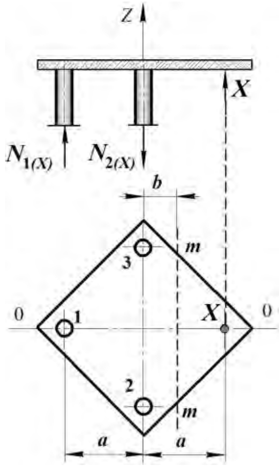
$$\sum M_{0-0}=0: \quad N_{2(F)}=N_{3(F)}$$

$$\sum Z=0: \quad 2N_{2(F)}-N_{1(F)}-F=0$$

$$\sum M_{m-m}=0: \quad N_{1(F)}(a+b)-2N_{2(F)}b=0$$

$$N_{1(F)}=\frac{b}{a}F=0{,}3F \text{ (растяжение)}$$

$$\mathrm{N}_{2(\mathrm{F})}=\frac{a+b}{2a}F=0{,}65F \text{ (сжатие)}$$



<u>От действия силы X</u> →

$$\sum M_{0-0}=0: \quad N_{2(X)}=N_{3(X)}$$

$$\sum Z=0: \quad N_{1(X)}-2N_{2(X)}+X=0$$

$$\sum M_{m-m}=0:$$

$$N_{1(X)}(a+b)-2N_{2(X)}b-X(a-b)=0$$

$$N_{1(X)}=X \text{ (сжатие)}$$

$$N_{2(X)}=X \text{ (растяжение)}$$

★ Полные силы в стойках с учетом вида деформаций равны:

$$N_1=N_{1(F)}+N_{1(X)}=0{,}3F-X$$

$$N_2=N_3=N_{2(X)}+N_{2(F)}=X-0{,}65F$$

$$N_4=X \text{ (сжатие)}$$

Здесь первое слагаемое в N_1, N_2 и N_3 соответствует растяжению, а второе – сжатию, поэтому результирующая сила и возникающая от нее деформация будут зависеть от того, какое из слагаемых окажется бóльшим.

★ Полная потенциальная энергия, накопленная в стойках, равна:

$$U = \frac{N_1^2 \ell}{2EA} + 2\frac{N_2^2 \ell}{2EA} + \frac{N_4^2 \ell}{2EA} = \frac{\ell}{2EA}\left[(0{,}3F - X)^2 + 2(X - 0{,}65F)^2 + X^2\right] =$$

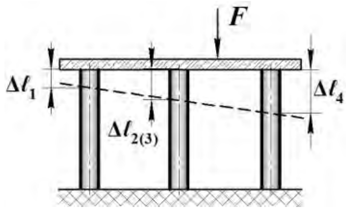
$$= \frac{\ell}{2EA}\left(0{,}935F^2 - 3{,}2F \cdot X + 4X^2\right)$$

★ Из условия минимума потенциальной энергии определяем значение силы X и продольные силы в стойках:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0:\ 8X - 3{,}2F = 0 \ \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} & X = N_4 = 0{,}4F = |80\ кН|\ \text{(сжатие)} \\ & N_1 = 0{,}3F - X = -0{,}1F = |20\ кН|\ \text{(сжатие)} \\ & N_2 = N_3 = X - 0{,}65F = -0{,}25F = |50\ кН|\ \text{(сжатие)} \end{aligned}}\ .$$

Таким образом, во всех стойках возникает сжимающая продольная сила, они укорачиваются и конструкция принимает вид:



★ Как видно из рисунка, деформации связаны между собой соотношением: $\Delta\ell_{2(3)} = (\Delta\ell_1 + \Delta\ell_4)/2$.

★ Тогда на основании закона Гука продольные силы будут также связаны между собой соотношением $N_{2(3)} = (N_1 + N_4)/2$, что соответствует полученным результатам расчетов.

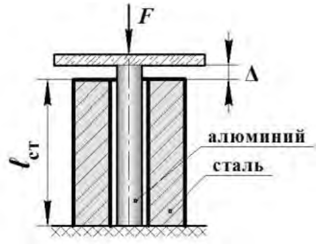
Задача 35

Внутри стальной втулки площадью поперечного сечения A = 20 см^2 и длиной $\ell_{ст}$ = 250 мм установлен алюминиевый стержень такой же площади сечения, но длиннее втулки на Δ = 0,04 мм. Определить силу F, которая вызовет в стержне и втулке одинаковые напряжения. Принять $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_{ал} = 0{,}75 \cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

❶ Из условия равенства напряжений $\sigma_{ст} = \sigma_{ал}$ и при одинаковой площади сечений элементов имеем $\rightarrow$ $N_{ст} = N_{ал} = N$.

❷ Определяем продольные силы в элементах *методом деформаций*:



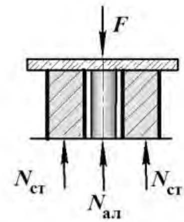
Статическая сторона $\rightarrow$

$$\sum Z = 0:\ N_{ст} + N_{ал} - F = 0 \ \rightarrow\ 2N = F \ \rightarrow$$

$$\boxed{N = F/2} \qquad (1)$$

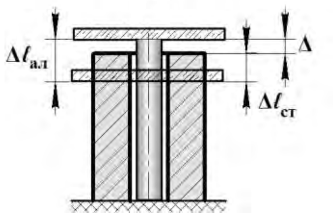
Геометрическая сторона $\rightarrow$

$$\boxed{\Delta\ell_{ал} - \Delta\ell_{ст} = \Delta} \qquad (2)$$



Физическая сторона $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\ell_{ал} &= \frac{N_{ал}\ell_{ал}}{E_{ал}A} = \frac{F\ell_{ал}}{2E_{ал}A} \\ \Delta\ell_{ст} &= \frac{N_{ст}\ell_{ст}}{E_{ст}A} = \frac{F\ell_{ст}}{2E_{ст}A} \end{aligned}} \qquad (3)$$



Подставляем *(3)* $\rightarrow$ *(2)*:

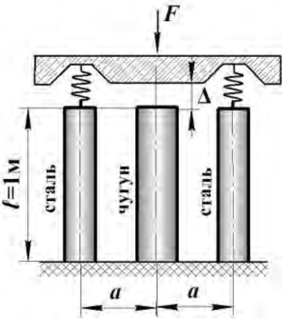
$$\frac{F\ell_{ал}}{2E_{ал}A} - \frac{F\ell_{ст}}{2E_{ст}A} = \Delta \ \rightarrow$$

$$\frac{F\ell_{ал}}{2E_{ал}A}\left(1 - \frac{E_{ал}}{E_{ст}}\frac{\ell_{ст}}{\ell_{ал}}\right) = \Delta \ \rightarrow$$

$$F = \frac{2\Delta \cdot E_{ал}A}{\ell_{ал} \cdot \left(1 - \dfrac{E_{ал}}{E_{ст}} \cdot \dfrac{\ell_{ст}}{\ell_{ал}}\right)} = \frac{2 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}75 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2}{250{,}04 \cdot \left(1 - \dfrac{0{,}75 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5} \cdot \dfrac{250}{250{,}04}\right)} = 76{,}8 \text{ кН}.$$

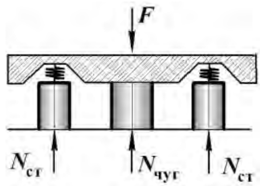
Задача 36

Конструкция состоит из трех стоек одинаковой длины, из которых две крайние – *стальные* площадью поперечного сечения $A_{ст}$ = 20 см^2, а средняя – *чугунная* площадью сечения $A_{чуг}$ = 50 см^2. На стальных стойках установлены две одинаковые пружины с коэффициентом податливости δ = 0,005 мм/кН (δ – осадка пружины под действием силы в 1 кН), на которых крепится плита, как показано на рисунке. Между плитой с средней стойкой имеется зазор Δ = 0,5 мм. Определить напряжения в стойках при нагружении плиты силой F = 350 кН. Принять $E_{ст} = 2\cdot 10^5$ МПа, $E_{чуг} = 1{,}2\cdot 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ

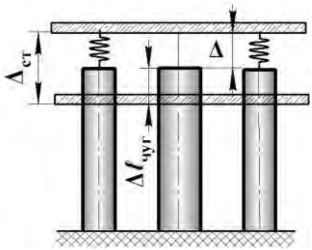
❶ Определяем продольные силы в стойках *методом деформаций*:



Статическая сторона →

Так как в силу симметрии продольные силы в крайних стойках одинаковы, имеем:

$$\boxed{\sum Z = 0:\ 2N_{ст} + N_{чуг} - F = 0} \qquad (1)$$



Геометрическая сторона →

$\Delta_{ст} - \Delta\ell_{чуг} = \Delta$, где $\Delta_{ст} = \Delta\ell_{ст} + \Delta_{пруж}$

$$\boxed{\Delta\ell_{ст} + \Delta_{пруж} - \Delta\ell_{чуг} = \Delta} \qquad (2)$$

Физическая сторона →

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\ell_{ст} = \frac{N_{ст}\ell}{E_{ст}A_{ст}} = \frac{N_{ст}\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 20\cdot 10^2} = 0{,}0025\,N_{ст}\ (\text{мм}) \\ &\Delta_{пруж} = \delta\cdot N_{ст} = 0{,}005\,N_{ст}\ (\text{мм}) \\ &\Delta\ell_{чуг} = \frac{N_{чуг}\ell}{E_{чуг}A_{чуг}} = \frac{N_{чуг}\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^3}{1{,}2\cdot 10^5\cdot 50\cdot 10^2} = 0{,}0017\,N_{чуг}\ (\text{мм}) \end{aligned}} \qquad (3)$$

Подставляем *(3)* → *(2)*:

$$0{,}0025\,N_{ст} + 0{,}005\,N_{ст} - 0{,}0017\,N_{чуг} = 0{,}5 \ \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2N_{\text{ст}} + N_{\text{чуг}} = F \\ 0{,}0075N_{\text{ст}} - 0{,}0017N_{\text{чуг}} = 0{,}5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} N_{ст} = 100{,}5 \text{ кН} \\ N_{\text{чуг}} = 149 \text{ кН} \end{matrix}}\,.$$

❷ Напряжения в стойках равны:

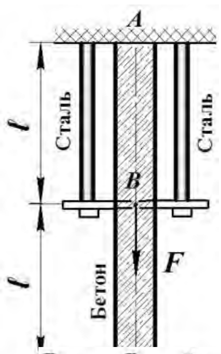
$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{A_{ст}} = \frac{100{,}5 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 50{,}3 \text{ МПа} \,;\; \sigma_{\text{чуг}} = \frac{N_{\text{чуг}}}{A_{\text{чуг}}} = \frac{149 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^2} = 30 \text{ МПа}\,.$$

Если в данной конструкции пружину установить на средней стойке, это позволит разгрузить средний (чугунный) стержень и снизить напряжения в нем на 20%. Расчет для этого случая предлагается провести самостоятельно.

<u>Задача 37</u>

Бетонная стойка *AC* площадью сечения $40 \times 40 \text{см}^2$ с установленными двумя стальными тягами закреплена между жесткими плитами и в среднем сечении нагружена силой F = 320 кН, как показано на рисунке. Какую площадь сечения должны иметь тяги, чтобы растягивающие напряжения в верхней части стойки не превышали 0,5 МПа? Чему в этом случае будут равны напряжения в тягах?

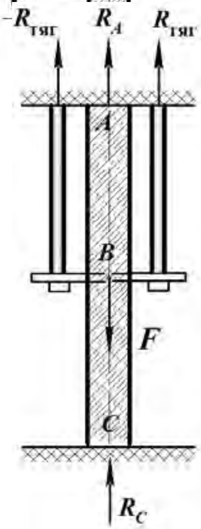
Принять: $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_{\text{бет}} = 1{,}5 \cdot 10^4$ МПа.



<u>РЕШЕНИЕ</u>

❶ Под действием силы F стойка и тяги деформируются и, воздействуя на опоры, вызывают реакции опор:

$$\sum Z = 0: \; \boxed{2R_{\text{тяг}} + R_A + R_C - F = 0} \qquad (1)$$



Продольные силы, возникающие в тягах и на участках бетонной стойки, соответственно равны этим реакциям:

$$N_{\text{тяг}} = R_{\text{тяг}};\; N_{AB} = R_A;\; N_{BC} = R_C\,.$$

❷ Определяем R_A из условия задачи, что напряжение в стойке на участке *AB* не должно превышать $\sigma_{AB} = 0{,}5$ МПа:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{\text{бет}}} = \frac{R_A}{A_{\text{бет}}} \to R_A = \sigma_{AB} \cdot A_{\text{бет}} = 0{,}5 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 10^2 = 80 \text{ кН}.$$

❸ Так как стойка *AC* жестко закреплена между плитами, условие деформации для нее имеет вид:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = 0 \to \boxed{\Delta\ell_{\textit{полн}} = \Delta\ell_{AB} + \Delta\ell_{BC} = 0}, \qquad (2)$$

где деформации участков *AB* и *BC* определяются по закону Гука:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\ell_{AB} &= \frac{N_{AB}\ell}{E_{\text{бет}}A_{\text{бет}}} = \frac{R_A\ell}{E_{\text{бет}}A_{\text{бет}}} \\ \Delta\ell_{BC} &= -\frac{N_{BC}\ell}{E_{\text{бет}}A_{\text{бет}}} = -\frac{R_C\ell}{E_{\text{бет}}A_{\text{бет}}} \end{aligned}} \qquad (3)$$

Подставляем *(3)* → *(2)* и получаем → $R_A = R_C = 80$ кН , а из статического уравнения *(1)* определяем продольную силу в стальных тягах → $N_{\text{тяг}} = R_{\text{тяг}} = 80$ кН. Таким образом, все реакции опор в данной конструкции одинаковы и равны 80 кН.

❹ Подбираем площадь сечения тяг из условия равенства их удлинения и деформации участка стойки *AB*. Учитывая, что $\ell_{\text{тяг}} = \ell_{AB} = \ell$ и $N_{\text{тяг}} = N_{AB} = R_{\text{тяг}} = R_A$, получаем:

$$\Delta\ell_{\text{тяг}} = \Delta\ell_{AB} \to \frac{N_{\text{тяг}}\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{тяг}}} = \frac{N_{AB}\ell}{E_{\text{бет}}A_{\text{бет}}} \to \frac{R_{\text{тяг}}\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{тяг}}} = \frac{R_A\ell}{E_{\text{бет}}A_{\text{бет}}} \to$$

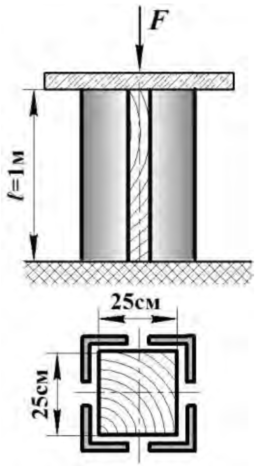
$$A_{\text{тяг}} = \frac{E_{\text{бет}}}{E_{\text{ст}}} A_{\text{бет}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5} 40 \cdot 40 = 120 \text{ см}^2.$$

❺ Напряжения в тягах соответственно равны:

$$\sigma_{\text{тяг}} = \frac{N_{\text{тяг}}}{A_{\text{тяг}}} = \frac{R_{\text{тяг}}}{A_{\text{тяг}}} = \frac{80 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^2} = 6{,}7 \text{ МПа}.$$

Задача 38

Короткая деревянная колонна квадратного сечения 25×25см^2, усиленная четырьмя стальными уголками $40\times40\times4$ ($A_{уг}$ = 3,08 см^2), сжимается силой F, как показано на рисунке. Какую наибольшую безопасную нагрузку может выдержать конструкция, если $[\sigma]_{ст}$ = 160 МПа и $[\sigma]_{дер}$ = 12 МПа? Вычислить, насколько следует укоротить уголки, чтобы напряжения в деревянной колонне были равны $[\sigma]_{дер}$. Насколько при этом увеличится грузоподъемность конструкции? Принять: $E_{ст} = 2\cdot10^5$ МПа, $E_{дер} = 1\cdot10^4$ МПа.



РЕШЕНИЕ

❶ Под действием силы F уголки и колонна сжимаются и в них возникают продольные силы $N_{уг}$ и $N_{дер}$. Определяем эти силы:

Статическая сторона $\rightarrow$

$$\sum Z = 0: \quad \boxed{4N_{уг} + N_{дер} - F = 0} \qquad (1)$$

Геометрическая сторона $\rightarrow$

$$\boxed{\Delta\ell_{уг} = \Delta\ell_{дер}} \qquad (2)$$

Физическая сторона $\rightarrow$ $$\boxed{\Delta\ell_{уг} = \frac{N_{уг}\ell}{E_{ст}A_{уг}}; \quad \Delta\ell_{дер} = \frac{N_{дер}\ell}{E_{дер}A_{дер}}} \qquad (3)$$

Подставляем *(3)* $\rightarrow$ *(2)*, а затем результат $\rightarrow$ *(1)* :

$$\frac{N_{уг}\ell}{E_{ст}A_{уг}} = \frac{N_{дер}\ell}{E_{дер}A_{дер}} \rightarrow N_{дер} = \frac{E_{дер}A_{дер}}{E_{ст}A_{уг}} N_{уг} = 10N_{уг} \rightarrow (1) \rightarrow$$

$$\boxed{N_{уг} = \frac{1}{14}F; \quad N_{дер} = \frac{10}{14}F}.$$

❷ Подбираем допускаемую нагрузку F из условия прочности уголка и деревянной стойки:

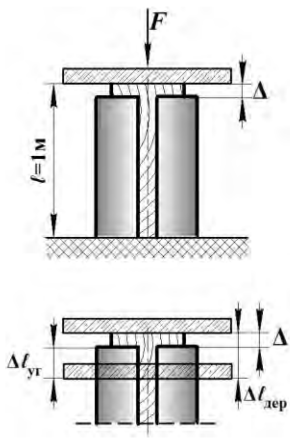
$$\sigma_{уг} = \frac{N_{уг}}{A_{уг}} = \frac{F}{14A_{уг}} \le [\sigma]_{ст} \quad \rightarrow$$

$$[F] = 14A_{уг} \cdot [\sigma]_{ст} = 14 \cdot 3{,}08 \cdot 10^2 \cdot 160 = 690\ кН;$$

$$\sigma_{дер} = \frac{N_{дер}}{A_{дер}} = \frac{10F}{14A_{дер}} \le [\sigma]_{дер} \quad \rightarrow$$

$$[F] = \frac{14}{10} A_{дер} \cdot [\sigma]_{дер} = \frac{14}{10} \cdot 25x25 \cdot 10^2 \cdot 12 = 1050\ кН.$$

Окончательно принимаем допускаемую силу $[F]$ = 690 кН – меньшее значение, обеспечивающее прочность уголка. Однако деревянная стойка в этом случае будет недогружена на 34 %.



❸ Изменим конструкцию, *выполнив уголки короче*, что позволит перераспределить продольные силы в ее элементах и догрузить деревянную стойку. Определим, на какую величину Δ следует укоротить уголки, чтобы напряжения в стойке достигли значения $[\sigma]_{дер}$:

★Из заданного условия по напряжениям для деревянной стойки определяем в ней продольную силу $N_{дер}$:

$$\sigma_{дер} = \frac{N_{дер}}{A_{дер}} = [\sigma]_{дер} \quad \rightarrow$$

$$N_{дер} = A_{дер}[\sigma]_{дер} = 25 \cdot 25 \cdot 10^2 \cdot 12 = 750\ кН.$$

★ Из уравнения *(1)* продольная сила в уголке $N_{уг}$ равна:

$$N_{уг} = \frac{F - N_{дер}}{4}. \qquad (4)$$

★ Записываем условие прочности для стального уголка и определяем допускаемую силу F:

$$\sigma_{уг} = \frac{N_{уг}}{A_{уг}} = \frac{F - N_{дер}}{4A_{уг}} \le [\sigma]_{ст} \quad \rightarrow$$

$$[F] = N_{дер} + 4A_{уг} \cdot [\sigma]_{ст} = 750 \cdot 10^3 + 4 \cdot 3{,}08 \cdot 10^2 \cdot 160 = 947\ кН.$$

★ Тогда из выражения *(4)* $\rightarrow$ $N_{\text{уг}} = 49{,}3$ кН .

Таким образом, укорочение уголков, т.е. выполнение монтажного зазора, позволит повысить нагрузку на конструкцию на 37 %.

❹ Определяем величину этого зазора. Из уравнения совместности деформаций (см. рис.) имеем: $\Delta\ell_{\text{дер}} - \Delta\ell_{\text{уг}} = \Delta$, *(5)*

где на основании закона Гука:

$$\Delta\ell_{\text{дер}} = \frac{N_{\text{дер}}\ell_{\text{дер}}}{E_{\text{дер}}A_{\text{дер}}} = \frac{750\cdot10^3\cdot1\cdot10^3}{1\cdot10^4\cdot25x25\cdot10^2} = 1{,}2 \text{ мм};$$

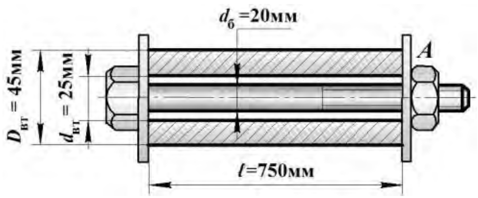
$$\Delta\ell_{\text{уг}} = \frac{N_{\text{уг}}\left(\ell_{\text{дер}} - \Delta\right)}{E_{\text{ст}}A_{\text{уг}}} = \frac{49{,}3\cdot10^3\left(1\cdot10^3 - \Delta\right)}{2\cdot10^5\cdot3{,}08\cdot10^2} = 0{,}8 - 0{,}0008\Delta \ \text{(мм)}.$$

Подставляем последние выражения в *(5)* и получаем:

$$1{,}2 - 0{,}8 + 0{,}0008\Delta = \Delta \ \rightarrow \ \boxed{\Delta = 0{,}4 \text{ мм}}.$$

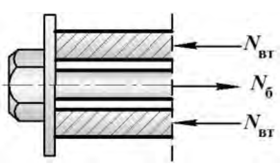
Задача 39

Стальной болт пропущен сквозь медную втулку, как показано на рисунке. Шаг нарезки болта h = 3 мм. Определить напряжения в болте и втулке при завинчивании гайки *A* на ¼ оборота.
Принять $E_{\text{ст}} = 2\cdot10^5$ МПа,
$E_{\text{м}} = 1\cdot10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ

❶ При завинчивании гайки *A* медная втулка сжимается, а болт − растягивается. Определяем продольные силы в элементах *методом деформаций*:



Статическая сторона $\rightarrow$

$$\sum Z = 0: \ N_{\text{б}} - N_{\text{вт}} = 0$$

$$\boxed{N_{\text{б}} = N_{\text{вт}} = F_0} \qquad (1)$$

где F_0 – сила затяжки болта (сила, сжимающая втулку и растягивающая болт).

Геометрическая сторона $\rightarrow$

Уравнением перемещений является равенство между полным перемещением гайки *A* влево и укорочением медной втулки:

$$\Delta_A^{\text{влево}} = \Delta\ell_{\text{вт}} .$$

Суммарное перемещение гайки *A* влево ($\Delta_A^{\text{влево}}$) определяется как результат двух ее перемещений:

← ***влево*** – при повороте гайки на ¼ оборота и оно равно $\Delta_A = \frac{1}{4} h$;

→ ***вправо*** – вследствие растяжения болта на $\Delta\ell_{\text{б}}$ при затягивании гайки. Тогда уравнение перемещений принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{4} h - \Delta\ell_{\text{б}} = \Delta\ell_{\text{вт}}} \qquad (2)$$

<u>*Физическая сторона*</u> →

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{б}} = \frac{N_{\text{б}}\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{б}}} = \frac{F_0\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{б}}}; \quad \Delta\ell_{\text{вт}} = \frac{N_{\text{вт}}\ell}{E_{\text{м}}A_{\text{вт}}} = \frac{F_0\ell}{E_{\text{м}}A_{\text{вт}}}}, \qquad (3)$$

где площади сечений болта и втулки соответственно равны:

$$A_{\text{б}} = \frac{\pi d_{\text{б}}^2}{4} = 314 \text{ мм}^2; \quad A_{\text{вт}} = \frac{\pi \left(D_{\text{вт}}^2 - d_{\text{вт}}^2\right)}{4} = 1100 \text{ мм}^2 .$$

Подставляем *(3)* → *(2)* и получаем:

$$\frac{1}{4} h - \frac{F_0\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{б}}} = \frac{F_0\ell}{E_{\text{м}}A_{\text{вт}}} \quad \rightarrow$$

$$F_0 = \frac{h \cdot E_{\text{ст}}A_{\text{б}}}{4\ell \cdot \left(1 + \frac{E_{\text{ст}}A_{\text{б}}}{E_{\text{м}}A_{\text{вт}}}\right)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 314}{4 \cdot 750 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 314}{1 \cdot 10^5 \cdot 1100}\right)} \cong 40 \text{ кН} .$$

❷ Напряжения в болте и втулке соответственно равны:

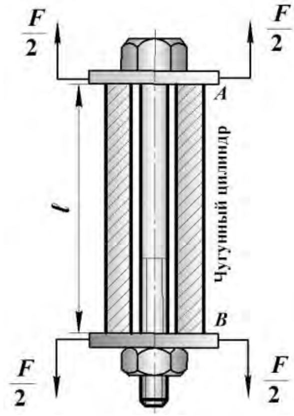
$$\sigma_{\text{б}} = \frac{N_{\text{б}}}{A_{\text{б}}} = \frac{F_0}{A_{\text{б}}} = \frac{40 \cdot 10^3}{314} = 127,4 \text{ МПа (растяжение)};$$

$$\sigma_{\text{вт}} = \frac{N_{\text{вт}}}{A_{\text{вт}}} = \frac{F_0}{A_{\text{вт}}} = \frac{40 \cdot 10^3}{1100} = 36,4 \text{ МПа (сжатие)}.$$

Решая задачу в обратном направлении, можно определить, при какой затяжке болта нарушается его прочность и напряжения достигают предела текучести. Предлагается провести решение самостоятельно.

Задача 40

Чугунный цилиндр длиной ℓ имеет размеры сечения – $D_{\text{нар}} = 30$ см и $d_{\text{вн}} = 25$ см. Торцы цилиндра закрыты жесткими крышками, через центральные отверстия в которых пропущен стальной болт, стянутый гайками. Сила затяжки болта $F_{\text{о}} = 200$ кН. Размеры болта – длина ℓ и площадь поперечного сечения $A_{\text{б}} = 35$ см^2. Вся конструкция работает под действием силы $F = 180$ кН, как показано на рисунке. Определить напряжения в болте и чугунном цилиндре. Принять $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_{\text{чуг}} = 1{,}2 \cdot 10^5$ МПа.



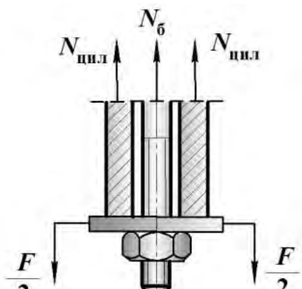
РЕШЕНИЕ:

При решении данной задачи рассмотрим ***два случая***.

Случай 1 — *Под действием силы F стыки A и B не раскрываются.*

❶ Определим продольные силы в цилиндре и болте, вызванные действием силы F:

Статическая сторона →



$$\sum Z = 0: \quad \boxed{N_{\text{б}} + N_{\text{цил}} = F} \qquad (1)$$

Геометрическая сторона →

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{б}} = \Delta\ell_{\text{цил}}} \qquad (2)$$

Физическая сторона →

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{б}} = \frac{N_{\text{б}}\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{б}}}; \quad \Delta\ell_{\text{цил}} = \frac{N_{\text{цил}}\ell}{E_{\text{чуг}}A_{\text{цил}}}}, \qquad (3)$$

где $A_{\text{цил}} = \dfrac{\pi\left(D_{\text{нар}}^2 - d_{\text{вн}}^2\right)}{4} = 215{,}9\ \text{см}^2$.

Подставляем *(3)* → *(2)* и совместно с *(1)* получаем:

$$\frac{N_{\text{б}}\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{б}}} = \frac{N_{\text{цил}}\ell}{E_{\text{чуг}}A_{\text{цил}}} \;\rightarrow\; N_{\text{цил}} = k\,N_{\text{б}}, \quad \text{где } k = \frac{E_{\text{чуг}}A_{\text{цил}}}{E_{\text{ст}}A_{\text{б}}} = 3{,}7 \;\rightarrow$$

$$N_{\text{б}} = \frac{F}{1+k}; \quad N_{\text{цил}} = \frac{kF}{1+k}.$$

❷ Полные продольные усилия в цилиндре и болте с учетом силы затяжки болта $F_{\text{о}}$, вызывающей его растяжение и сжатие цилиндра, равны:

$$N_{\text{б(полн)}} = N_{\text{б}} + F_{\text{о}} = \frac{F}{1+k} + F_{\text{о}} = \frac{180}{1+3{,}7} + 200 = 238{,}3\ \text{кН};$$

$$\text{N}_{\text{цил (полн)}} = \text{N}_{\text{цил}} - F_{\text{о}} = \frac{kF}{1+k} - F_{\text{о}} = \frac{3{,}7\cdot 180}{1+3{,}7} - 200 = -58{,}3\ \text{кН}. \qquad (4)$$

❸ Напряжения в элементах соответственно равны:

$$\sigma_{\text{б}} = \frac{N_{\text{б(полн)}}}{A_{\text{б}}} = \frac{238{,}3\cdot 10^3}{35\cdot 10^2} = 68{,}1\ \text{МПа (растяжение)};$$

$$\sigma_{\text{цил}} = \frac{N_{\text{цил (полн)}}}{A_{\text{цил}}} = \frac{58{,}3\cdot 10^3}{215{,}9\cdot 10^2} = 2{,}7\ \text{МПа (сжатие)}.$$

***<u>Случай 2</u>* — *Стыки А и В раскрываются*.** Определим силу F^*, которая приводит к раскрытию стыков.

❶ Условием раскрытия стыка является $\boxed{N_{\text{цил (полн)}} = 0}$, так как в этом случае нагрузка с чугунного цилиндра сбрасывается – он не испытывает больше сжатия, создаваемого силой затяжки болта при закрытых стыках. Тогда на основании выражений *(4)* имеем:

$$\text{N}_{\text{цил (полн)}} = \text{N}_{\text{цил}} - F_{\text{о}} = \frac{kF^*}{1+k} - F_{\text{о}} = 0 \;\rightarrow$$

$$F^* = \frac{F_{\text{о}}\,(1+k)}{k} = \frac{200\,(1+3{,}7)}{3{,}7} = 254\ \text{кН}. \qquad (5)$$

❷ С момента раскрытия стыков внешняя нагрузка полностью передается на болт и продольная сила в нем на основании *(4)* и *(5)* будет определена как:

$$N_{б(полн)} = N_б + F_0 = \frac{F^*}{1+k} + F_0 = \frac{F_0\,(1+k)}{k\,(1+k)} + F_0 = F^* = 254\ \text{кН}\ ,$$

т.е. она становится равной внешней растягивающей силе.

❸ Напряжения в болте при раскрытии стыков равны:

$$\sigma_б = \frac{N_{б(полн)}}{A_б} = \frac{F^*}{A_б} = \frac{254 \cdot 10^3}{35 \cdot 10^2} = 72{,}6\ \text{МПа}\ .$$

<u>*Проанализируем полученные результаты*</u>.

Пусть болтовое соединение работает на растяжение и подвергается действию основной внешней силы F:

★ Пока стыки соединения не раскрываются, болт испытывает внутреннее растягивающее усилие $N_{б(полн)}$, равное:

$$N_{б(полн)} = F_0 + N_б = F_0 + \frac{F}{1+k} = F_0 + mF\ ,$$

где $m = \dfrac{1}{1+k}$ – коэффициент основной нагрузки, зависящий от соотношения жесткостей промежуточных втулок и стержня болта;

★ Так как $m < 1$, следовательно, предварительная затяжка в болтовых соединениях позволяет снизить воздействие дополнительной внешней нагрузки на болт, поскольку болт в этом случае воспринимает только часть этой силы – mF, а не всю силу целиком. При этом, чем более высокой жесткостью обладает втулка, тем меньше будет коэффициент m и тем меньшая доля внешней нагрузки придется на болт. Поэтому, чтобы усилие на болт при приложении внешней (основной) нагрузки возрастало незначительно, т.е. для уменьшения коэффициента m, надо делать ***«жесткие фланцы – податливые болты»***. Это – правило конструирования болтовых соединений. Для случая абсолютно жесткой втулки ($E_{вт}A_{вт} = \infty$) коэффициент $m = 0$ и усилие в болте всегда будет равно силе затяжки болта $F_о$ (до раскрытия стыков) при любой внешней растягивающей силе F;

★ Как только стыки раскрываются, продольная сила во втулке становится равной нулю → $N_{\text{вт}} = 0$, откуда можно определить силу F*, приводящую к раскрытию стыков. С этого момента вся нагрузка полностью ложится на болт → $N_{\text{б}} = F \geq F^*$.

Таким образом, пока внешняя сила F не достигала F*, она воспринимается болтом не полной своей величиной, а частично – $N_{\text{б(полн)}} = F_0 + mF$. После раскрытия стыка внешняя сила $F \geq F^*$ полностью передается на болт. Это очень важно знать для болтовых соединений, особенно, работающих в условиях переменных нагрузок. Поэтому здесь принимаются специальные меры для предотвращения отворота гаек (контргайки, шайбы и т.п.). А в условиях статического нагружения все параметры болтового соединения можно рассчитать, как это было сделано в ***задаче 39***.

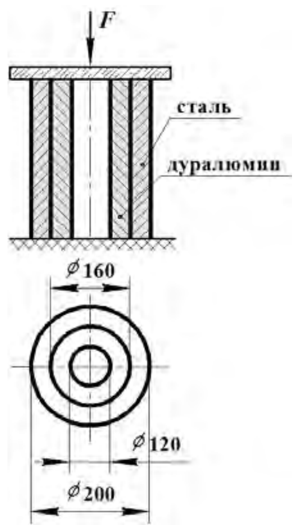
2.6. *Расчет по предельному состоянию*

Задача 41

Составной короткий цилиндр выполнен из внутреннего (из *дуралюмина)* и наружного *стального* цилиндров и нагружается через жесткую плиту силой F, как показано на рисунке. Определить допускаемую нагрузку на цилиндр по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию при одинаковом коэффициенте запаса $n = 2$, считая, что каждый материал, достигнув предела текучести, не оказывает дополнительного сопротивления дальнейшей деформации. Результаты сравнить. Принять $E_{\text{ст}} = 2\cdot10^5$ МПа, $E_{\text{дур}} = 0{,}7\cdot10^5$ МПа $\sigma_{\text{т(ст)}} = 240$ МПа, $\sigma_{\text{т(дур)}} = 190$ МПа.

РЕШЕНИЕ

❶ Определяем продольные силы в цилиндрах (раскрытие статической неопределимости возможно любым методом):



Статическая сторона →

$$\boxed{N_{\text{дур}} + N_{\text{ст}} = F} \qquad (1)$$

Геометрическая сторона →

$$\boxed{\Delta\ell_{\text{дур}} = \Delta\ell_{\text{ст}}} \qquad (2)$$

Физическая сторона $\rightarrow$ $$\boxed{\Delta\ell_{\text{дур}} = \frac{N_{\text{дур}}\ell}{E_{\text{дур}}A_{\text{дур}}}; \quad \Delta\ell_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{ст}}}},$$

(3)

где
$$A_{\text{дур}} = \frac{\pi\left(16^2 - 12^2\right)}{4} = 87{,}92\ \text{см}^2;$$
$$A_{\text{ст}} = \frac{\pi\left(20^2 - 16^2\right)}{4} = 113{,}04\ \text{см}^2.$$

Решаем совместно три стороны задачи и получаем:

$$\frac{N_{\text{дур}}\ell}{E_{\text{дур}}A_{\text{дур}}} = \frac{N_{\text{ст}}\ell}{E_{\text{ст}}A_{\text{ст}}} \rightarrow N_{\text{дур}} = \frac{E_{\text{дур}}A_{\text{дур}}}{E_{\text{ст}}A_{\text{ст}}}N_{\text{ст}} = 0{,}27N_{\text{ст}} \rightarrow (1) \rightarrow$$

$$\boxed{N_{\text{ст}} = 0{,}79F; \quad N_{\text{дур}} = 0{,}21F}.$$

❷ **Расчет по допускаемым напряжениям**

Определяем нагрузку F из условия прочности цилиндров, принимая для них допускаемые напряжения соответственно равные:

$$[\sigma]_{\text{ст}} = \frac{\sigma_{\text{т(ст)}}}{n} = \frac{240}{2} = 120\ \text{МПа}; \quad [\sigma]_{\text{дур}} = \frac{\sigma_{\text{т(дур)}}}{n} = \frac{190}{2} = 95\ \text{МПа};$$

$$\sigma_{\max(\text{ст})} = \frac{N_{\text{ст}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{0{,}79F}{A_{\text{ст}}} \le [\sigma]_{\text{ст}} \rightarrow$$

$$[F]_{\text{ст}} = \frac{A_{\text{ст}}[\sigma]_{\text{ст}}}{0{,}79} = \frac{113{,}04\cdot 10^2\cdot 120}{0{,}79} = 1717\ \text{кН};$$

$$\sigma_{\max(\text{дур})} = \frac{N_{\text{дур}}}{A_{\text{дур}}} = \frac{0{,}21F}{A_{\text{дур}}} \le [\sigma]_{\text{дур}} \rightarrow$$

$$[F]_{\text{дур}} = \frac{A_{\text{дур}}[\sigma]_{\text{дур}}}{0{,}21} = \frac{87{,}92\cdot 10^2\cdot 95}{0{,}21} = 3977\ \text{кН}.$$

Принимаем окончательно допускаемую силу $[F]$ = 1717 кН, при этом цилиндр из дуралюмина будет недогружен на 43 %.

❸ **<u>Расчет по предельному состоянию</u>**

Так как напряжения в стальном цилиндре больше, чем в цилиндре из дуралюмина $\rightarrow$

$\dfrac{\sigma_{ст}}{\sigma_{дур}} = \dfrac{N_{ст}}{N_{дур}} \cdot \dfrac{A_{дур}}{A_{ст}} = \dfrac{0{,}79F}{0{,}21F} \cdot \dfrac{87{,}92}{113{,}04} \approx 3$, то при возрастании нагрузки первым предельного состояния достигнет стальной цилиндр. Как только напряжения в нем станут равны пределу текучести, их рост останавливается и продольная сила в стальном цилиндре будет равна: $N_{т(ст)} = \sigma_{т(ст)} A_{ст}$. При этом цилиндр из дуралюмина остается недогруженным, поэтому работоспособность конструкции сохраняется, однако напряжения здесь продолжают расти по мере увеличения нагрузки. Как только они достигают предела текучести и продольная сила в дюралюминиевом цилиндре становится равной $N_{т(дур)} = \sigma_{т(дур)} A_{дур}$, несущая способность конструкции исчерпана полностью. Рассматривая составной цилиндр в состоянии предельного равновесия, т.е. в момент, непосредственно предшествующий его разрушению, на основании статического уравнения *(1)* определяем предельную нагрузку $F_{пред}$, соответствующую достижению состояния текучести в обоих цилиндрах:

$$N_{т(ст)} + N_{т(дур)} = F_{пред} \quad \rightarrow \quad \sigma_{т(ст)} A_{ст} + \sigma_{т(дур)} A_{дур} = F_{пред} \quad \rightarrow$$

$$F_{пред} = 240 \cdot 113{,}04 \cdot 10^2 + 190 \cdot 87{,}92 \cdot 10^2 = 4383 \text{ кН}.$$

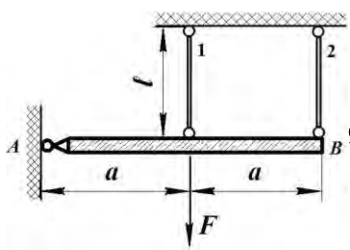
❹ Тогда предельно допускаемая нагрузка $[F]_{пред}$, принимая тот же коэффициент запаса прочности, будет равна:

$$[F]_{пред} = \frac{F_{пред}}{n} = \frac{4383}{2} = 2191{,}7 \text{ кН}.$$

Сравнивая результаты расчета, видно, что $[F]_{пред}$ больше $[F]$ примерно на 28 %, т.е. расчет по предельному состоянию показывает бóльшую несущую способность конструкции по сравнению с расчетом по допускаемому напряжению. Использование этих резервных возможностей делает конструкцию более экономичной и рациональной.

<u>Задача 42</u>

Абсолютно жесткий брус *AB* шарнирно закреплен на опоре и под-



держивается двумя стальными стержнями с одинаковой площадью поперечного сечения A = 10 см^2. Конструкция нагружается силой F, как показано на рисунке. Определить допускаемую нагрузку. Расчет выполнить по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию. Результат сравнить. Принять: $\sigma_т$ = 240 МПа, коэффициент запаса прочности n = 1,5.

РЕШЕНИЕ

❶ Определяем продольные силы в стержнях, раскрывая статическую неопределимость одним из рассмотренных выше способ (предлагается сделать самостоятельно) и получаем:

$$\boxed{N_1 = 0,2F\;;\quad N_2 = 0,4F}\;.$$

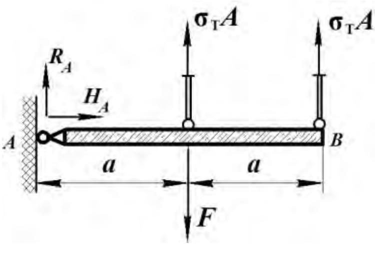
❷ **Расчет по допускаемым напряжениям**

Определяем допускаемую силу [F] по упругому расчету, т.е. по допускаемым напряжениям, равным $\rightarrow\;[\sigma] = \sigma_т / n = 160$ МПа. Так как при равной площади сечения наиболее нагруженным является стержень 2 ($N_2 > N_1$), определяем силу [F] из условия его прочности:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{0,4F}{A} \le [\sigma] \rightarrow \quad [F] = \frac{A\cdot[\sigma]}{0,4} = \frac{10\cdot 10^2\cdot 160}{0,4} = 400\text{ кН}\;.$$

❸ **Расчет по предельному состоянию**

Так как стержень 2 наиболее нагружен, то при увеличении нагрузки он первым достигнет предельного состояния и напряжения в нем станут равны пределу текучести. При этом стержень 1, являясь «недогруженным», будет поддерживать конструкцию в рабочем состоянии. Однако при дальнейшем повышении нагрузки напряжения в нем также достигают предела текучести, что приводит конструкцию к полному исчерпанию несущей способности. В этот момент продольные силы в стержнях равны $N_{т(1)} = N_{т(2)} = \sigma_т A$, и рассматривая предельное состояние системы, получаем:



$$\sum M_A = 0:$$

$$N_{т(1)}\cdot a + N_{т(2)}\cdot 2a - F\cdot a = 0\;;$$

$$\sigma_т A + 2\sigma_т A = F \quad \rightarrow$$

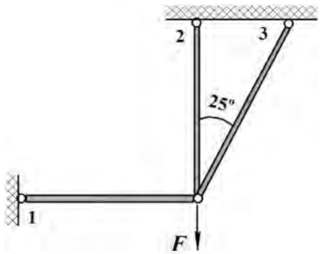
$$F_{пред} = 3\sigma_т A = 3\cdot 240\cdot 10\cdot 10^2 = 720\text{ кН}\;;$$

$$[F]_{\text{пред}} = \frac{F_{\text{пред}}}{n} = \frac{720}{1,5} = 480\ \text{кН}\ .$$

Таким образом, расчет по предельному состоянию показывает, что реальная несущая способность конструкции на 20 % больше, чем дает результат расчета по допускаемым напряжениям.

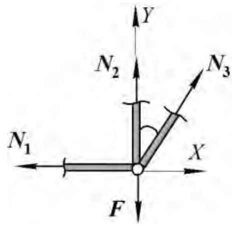
<u>Задача 43</u>

Для стержневой конструкции, представленной на рис. 20 (***Пример 13***), определить допускаемую силе F, рассчитав ее по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию. Стержни имеют одинаковое сечение и выполнены из одинакового материала. Принять: A = 10 см^2, $E = 2\cdot10^5$ МПа, $\sigma_т$ = 240 МПа, коэффициент запаса прочности n = 1,5.



<u>РЕШЕНИЕ</u>

❶ Продольные силы в стержнях по результатам решения ***примера 13***, равны:



$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= 0,182F \\ N_2 &= 0,609F \\ N_3 &= 0,431F \end{aligned}}$$

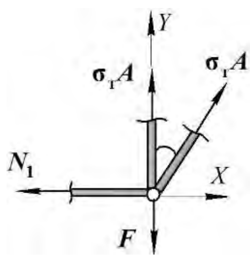
❷ **<u>Расчет по допускаемым напряжениям</u>**

При одинаковой площади сечения наиболее нагруженным является стержень 2, поэтому подбираем силу $[F]$ из условия прочности этого стержня: $\sigma_2 = \dfrac{N_2}{A} = \dfrac{0,609F}{A} \le [\sigma] \to$

$$[F] = \frac{A\cdot[\sigma]}{0,609} = \frac{A\cdot\sigma_т}{0,609\cdot n} = \frac{10\cdot10^2\cdot240}{0,609\cdot1,5} = 263\ \text{кН}\ .$$

❸ **<u>Расчет по предельному состоянию</u>**

Так как стержень 2 наиболее нагружен, напряжения в нем первыми достигнут предела



текучести. Затем по мере возрастанию нагрузки предела текучести достигнут напряжения в стержне 3. Однако *достижение напряжениями предела текучести в всех трех стержнях* в этой конструкции *невозможно*, так как равновесие системы в этом случае будет нарушено. Если предположить, что при возрастании нагрузки продольные силы во всех элементах достигнут значений, равных $N_{т(1)} = N_{т(2)} = N_{т(3)} = \sigma_т A$, то из уравнение равновесия видно, что оно не выполняется:

$$\sum X = 0: \sigma_т A \sin 25^0 - \sigma_т A = \sigma_т A \left(\sin 25^0 - 1\right) \neq 0 .$$

Это означает, что несущая способность конструкции будет исчерпана полностью, когда предела текучести достигнут напряжения в стержнях 2 и 3, а стержень 1 еще будет работать в упругой стадии. Продольная сила в нем, определяемая из уравнения равновесия, будет равна:

$$\sum X = 0: \sigma_т A \sin 25^0 - N_1 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 0,42 \sigma_т \cdot A ,$$

т.е. рабочие напряжения будут составлять только 42 % от $\sigma_т$.

Исходя из этого, определяем $F_{пред}$ и $[F]_{пред}$ по наступлению текучести в стержнях 2 и 3:

$$\sum Y = 0: \ N_{т(2)} + N_{т(3)} \cos 25^0 - F = 0 \ \rightarrow \ \sigma_т A + \sigma_т A \cos 25^0 - F = 0 \ \rightarrow$$

$$F_{пред} = \sigma_т A \left(1 + \cos 25^0\right) = 240 \cdot 10 \cdot 10^2 \left(1 + \cos 25^0\right) = 458 \text{ кН} ;$$

$$[F]_{пред} = \frac{F_{пред}}{n} = \frac{458}{1,5} = 305 \text{ кН} ,$$

что превышает результат расчета по допускаемым напряжениям и показывает, что действительная несущая способность конструкции на 16 % больше.

Таким образом, из рассмотренной задачи видно, что существуют системы, у которых несущая способность исчерпывается в то время, когда еще не все стержни достигли состояния текучести. Поэтому при определении предельной нагрузки, задавая условия достижения предела текучести в отдельных ее элементах, следует для каждого варианта наступления текучести рассматривать систему в состоянии предельного равновесия и устанавливать, при какой комбинации продольных сил не обеспечивается ее равновесие. Это позволит определить, текучесть каких элементов приведет конструкцию к полному исчерпанию ее несущей способности и рассчитать правильную предельную нагрузку.

3. **Учет собственного веса при растяжении (сжатии)**

Задача 44

Круглая штанга шахтного насоса длиной ℓ = 30 м растягивается приложенной на конце силой F = 8 кН. Какого диаметра d следует сделать штангу с учетом ее собственного веса, если $[\sigma]$ = 70 МПа? Принять $\gamma_{ст} = 7{,}8\cdot 10^{-5}$ Н/мм^3 ($7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3).

РЕШЕНИЕ

Из условия прочности штанги с учетом ее собственного веса → $\sigma_{max} = \dfrac{F}{A} + \gamma\ell \le [\sigma]$, где $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$, определяем ее диаметр:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi([\sigma] - \gamma\ell)}} = \sqrt{\frac{4\cdot 8\cdot 10^3}{3{,}14\cdot(70 - 7{,}8\cdot 10^{-5}\cdot 30\cdot 10^3)}} = 12{,}3 \text{ мм}.$$

Задача 45

Найти удлинение квадратной вертикально подвешенной шахтной штанги длиной ℓ = 200 м, нагруженной собственным весом и силой F = 60 кН, приложенной на конце, если известно, что для материала σ_{max} = 60 МПа. Принять: $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\gamma = 7{,}8\cdot 10^{-5}$ Н/мм^3.

РЕШЕНИЕ

❶ Определяем площадь сечения штанги:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma\ell = \sigma_{max} \quad \rightarrow$$

$$A = \frac{F}{\sigma_{max} - \gamma\ell} = \frac{60\cdot 10^3}{60 - 7{,}8\cdot 10^{-5}\cdot 200\cdot 10^3} = 1351{,}4 \text{ мм}^2.$$

❷ Вес штанги равен:

$$Q = \gamma A\ell = 7{,}8\cdot 10^{-5}\cdot 1351{,}4\cdot 200\cdot 10^3 = 21{,}1 \text{ кН}.$$

❸ Определяем удлинение штанги с учетом ее веса:

$$\Delta\ell_{\text{полн}} = \frac{F\ell}{EA} + \frac{Q\ell}{2EA} = \frac{60\cdot10^3\cdot200\cdot10^3}{2\cdot10^5\cdot1351{,}4} + \frac{21{,}1\cdot10^3\cdot200\cdot10^3}{2\cdot2\cdot10^3\cdot1351{,}4} = 52{,}2 \text{ мм}.$$

Задача 46

Вертикальный стальной стержень с площадью поперечного сечения A и длиной ℓ = 300 м работал под продольной нагрузкой F при напряжении σ_{max} = 60 МПа. Насколько можно удлинить стержень, не меняя ни сечения, ни нагрузки на него, если повышение напряжения допустимо до $[\sigma]$ = 65 МПа ? Принять $\gamma = 7{,}8\cdot10^{-5}$ Н/мм^3.

РЕШЕНИЕ

❶ Для первоначальной длины стержня максимальные напряжения, возникающие в нем, заданы и определяются как:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma\ell \quad \rightarrow \quad \text{откуда} \quad \frac{F}{A} = (\sigma_{max} - \gamma\ell)$$

❷ Для новой длины ℓ_1 допускаемые напряжения также заданы и определяются по аналогичной формуле. Подставляя сюда значение F/A из выражения выше, получаем:

$$[\sigma] = \frac{F}{A} + \gamma\ell_1 = (\sigma_{max} - \gamma\ell) + \gamma\ell_1 \quad \rightarrow$$

$$\ell_1 = \frac{[\sigma] - (\sigma_{max} - \gamma\ell)}{\gamma} = \frac{65 - (60 - 7{,}8\cdot10^{-5}\cdot300\cdot10^3)}{7{,}8\cdot10^{-5}} = 364 \text{ м}.$$

Удлинение стержня возможно на $\Delta\ell = (\ell_1 - \ell) = 64$ м .

Задача 47

Ступенчатая штанга шахтного насоса состоит из четырех частей разного диаметра, но равной длины ℓ = 7,5 м. К нижнему концу штанги приложен груз F = 8 кН. Подобрать диаметры участков штанги так, чтобы максимальные напряжения на каждом участке не превышали допускаемое напряжение $[\sigma]$ = 70 МПа. Определить выигрыш в весе, который дает использование ступенчатой штанги по сравнению с равной по прочности штангой постоянного сечения. Принять $\gamma = 7{,}7\cdot10^{-5}$ Н/мм^3.

РЕШЕНИЕ

❶ Определяем диаметр штанги постоянного сечения из условия ее прочности с учетом собственного веса:

$$\sigma_{max}=\frac{F}{A}+\gamma\cdot 4\ell \ \le \ [\sigma] \rightarrow \text{ где } A=\pi d^2/4, \text{ откуда } \rightarrow$$

$$d=\sqrt{\frac{4F}{\pi([\sigma]-\gamma\cdot 4\ell)}}=\sqrt{\frac{4\cdot 8\cdot 10^3}{3{,}14(70-7{,}7\cdot 10^{-5}\cdot 4\cdot 7{,}5\cdot 10^3)}}=12{,}3 \text{ мм} .$$

Вес штанги полученного диаметра равен:

$$Q=\gamma A\cdot 4\ell=\gamma\left(\pi d^2/4\right)4\ell=7{,}7\cdot 10^{-5}\cdot\frac{3{,}14\cdot 12{,}3^2}{4}\cdot 4\cdot 7{,}5\cdot 10^3=278{,}8 \text{ Н} .$$

❷ Определяем из условия прочности диаметр каждого участка штанги:

<u>*Участок 1*</u> $\rightarrow \quad \sigma_{max}=\dfrac{F}{A_1}+\gamma\ell_1=\dfrac{F}{\pi d_1^2/4}+\gamma\ell_1 \ \le \ [\sigma] \rightarrow$

$$d_1=\sqrt{\frac{4F}{\pi([\sigma]-\gamma\cdot\ell_1)}}=\sqrt{\frac{4\cdot 8\cdot 10^3}{3{,}14(70-7{,}7\cdot 10^{-5}\cdot 7{,}5\cdot 10^3)}}=12{,}1 \text{ мм} .$$

Вес участка равен:

$$Q_1=\gamma\ell_1 A_1=\gamma\ell_1\left(\pi d_1^2/4\right)=7{,}7\cdot 10^{-5}\cdot 7{,}5\cdot 10^3\,\frac{3{,}14\cdot 12{,}1^2}{4}=66{,}3 \text{ Н} .$$

<u>*Участок 2*</u> $\rightarrow \quad \sigma_{max}=\dfrac{F+Q_1}{A_2}+\gamma\ell_2=\dfrac{F+Q_1}{\pi d_2^2/4}+\gamma\ell_2 \ \le \ [\sigma] \rightarrow$

$$d_2=\sqrt{\frac{4(F+Q_1)}{\pi([\sigma]-\gamma\cdot\ell_2)}}=\sqrt{\frac{4\cdot(8\cdot 10^3+66{,}3)}{3{,}14(70-7{,}7\cdot 10^{-5}\cdot 7{,}5\cdot 10^3)}}=12{,}15 \text{ мм} .$$

Вес участка равен:

$$Q_2=\gamma\ell_2 A_2=\gamma\ell_2\left(\pi d_2^2/4\right)=7{,}7\cdot 10^{-5}\cdot 7{,}5\cdot 10^3\cdot\frac{3{,}14\cdot 12{,}15^2}{4}=66{,}7 \text{ Н} .$$

<u>*Участок 3*</u> $\rightarrow \sigma_{max}=\dfrac{F+Q_1+Q_2}{A_3}+\gamma\ell_3=\dfrac{F+Q_1+Q_2}{\pi d_3^2/4}+\gamma\ell_3 \ \le \ [\sigma] \rightarrow$

$$d_3=\sqrt{\frac{4(F+Q_1+Q_2)}{\pi([\sigma]-\gamma\cdot\ell_3)}}=\sqrt{\frac{4\cdot(8\cdot10^3+66,3+66,7)}{3,14(70-7,7\cdot10^{-5}\cdot7,5\cdot10^3)}}=12,22\text{ мм}.$$

Вес участка равен:

$$Q_3=\gamma\ell_3A_3=\gamma\ell_3\left(\pi d_3^2/4\right)=7,7\cdot10^{-5}\cdot7,5\cdot10^3\cdot\frac{3,14\cdot12,22^2}{4}=67,7\text{ Н}.$$

<u>*Участок 4*</u> $\rightarrow$

$$\sigma_{max}=\frac{F+Q_1+Q_2+Q_3}{A_4}+\gamma\ell_4=\frac{F+Q_1+Q_2+Q_3}{\pi d_4^2/4}+\gamma\ell_4\ \leq\ [\sigma]\rightarrow$$

$$d_4=\sqrt{\frac{4(F+Q_1+Q_2+Q_3)}{\pi([\sigma]-\gamma\cdot\ell_4)}}=\sqrt{\frac{4\cdot(8\cdot10^3+66,3+66,7+67,7)}{3,14(70-7,7\cdot10^{-5}\cdot7,5\cdot10^3)}}=12,27\text{ мм}.$$

Вес участка равен:

$$Q_4=\gamma\ell_4A_4=\gamma\ell_4\left(\pi d_4^2/4\right)=7,7\cdot10^{-5}\cdot7,5\cdot10^3\cdot\frac{3,14\cdot12,27^2}{4}=68,3\text{ Н}.$$

Полный вес ступенчатой штанги равен:

$$Q_{\text{полн}}=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4=268,9\text{ Н},$$

что меньше веса штанги постоянного сечения примерно на 10Н $\approx$ 1кг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Федосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
3. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
4. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов / Г.К. Татур. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.
5. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко [и др.]. – Киев: Вища школа, 1979. – 693 с.
7. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М.: Высшая школа, 1968. – 424 с.
8. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов / М.Д. Подскребко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
10. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.С. Вольмира. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
11. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.А. Уманского. – М.: Наука, 1973. – 495 с.
12. Иванов, Н.И. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н.И. Иванов.– М., 1956. – 276 с.

Учебное издание

РЕУТ Лариса Ефимовна

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ»

РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Подписано в печать 09.08.2011.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 8,60. Уч.-изд. л. 6,73. Тираж 100. Заказ 632.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.