УДК 539.3

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ РЕЗЕРВУАР В ПОСТОЯННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

д. ф.-м. н. **Гурьянов Н.Г.,** к. ф.-м. н. **Тюленева О.Н.**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

В цилиндрической системе координат $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ строится точное решение осесимметричной задачи пространственной теории упругости для полого цилиндра, внешний радиус которого R, внутренний - r, высота H. Резервуар заполнен жидкостью постоянной температуры, внешняя его поверхность теплоизолирована, через внутреннюю боковую поверхность осуществляется теплообмен с жидкостью. Если расстояние вдоль радиуса цилиндра обозначить *x*, вдоль его оси *z*, безразмерные координаты

$$\alpha = \frac{x}{R}\,, \quad \gamma = \frac{z}{H} \tag{1}$$

и область, занимаемая цилиндром, $t \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 2\pi$, $0 \le \gamma \le 1$, где

$$t = \frac{r}{R}\,, \quad \varepsilon = \frac{H}{R}\,, \tag{2}$$

При достаточно хорошей теплопроводности стенок резервуара они практически мгновенно прогреваются до температуры жидкости $T = const.$

Уравнения осесимметричной задачи термоупругости относительно перемещений в силу постоянности температуры не отличаются от уравнений теории упругости и имеют вид [1]:

$$\Delta\theta = 0\,, \qquad \Delta w = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma}\,, \qquad \left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)u = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,, \tag{3}$$

при дополнительном условии

$$\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}u + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right). \tag{4}$$

Различие только в соотношениях, связывающих напряжения с перемещениями [2]:

$$\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{(1+\upsilon)}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left[\theta - \frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\alpha_T T\right]\right\},\\
\sigma_{\beta\beta} = \frac{E}{(1+\upsilon)}\left\{\frac{1}{R\alpha}u + \frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left[\theta - \frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\alpha_T T\right]\right\},\\
\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{E}{(1+\upsilon)}\left\{\frac{1}{R\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma} + \frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left[\theta - \frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\alpha_T T\right]\right\},\\
\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{E}{2(1+\upsilon)R}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right).
\end{gathered} \tag{5}$$

Введены следующие обозначения: u, w – перемещения точек резервуара вдоль его радиуса и оси, $\sigma_{\alpha\alpha}\,, \sigma_{\beta\beta}\,, \sigma_{\gamma\gamma}\,, \sigma_{\alpha\gamma}$ – напряжения в конструкции, $E\,, \upsilon$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона, ρ – плотность заполняющей жидкости, α_T – коэффициент линейного расширения материала обшивки.

Поскольку давление на стенки сосуда зависит от γ, решение системы уравнений (3) ищется в виде

$$\theta(\alpha\,,\gamma) = \theta_0(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty}\theta_m(\alpha)\cos(m\pi\gamma)\,, \qquad w(\alpha\,,\gamma) = \sum_{m=1}^{\infty}w_m(\alpha)\sin(m\pi\gamma)\,,$$

$$u(\alpha\,,\gamma) = u_0(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty}u_m(\alpha)\cos(m\pi\gamma)\,, \tag{6}$$

тогда относительно коэффициентов рядов (6) получаются следующие системы уравнений:
для $m = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\theta_0=0\,,\quad \theta_0=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha}u_0\right), \tag{7}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)u_0+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial\theta_0}{\partial\alpha}=0\,,$$

при $m>0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-g_m^2\right)\theta_m=0\,,\quad \theta_m=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_m}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha}u_m+g_m w_m\right),$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-g_m^2\right)w_m=\frac{g_m R}{(1-2\upsilon)}\theta_m\,, \tag{8}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}-g_m^2\right)u_m=-\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial\theta_m}{\partial\alpha}\,.$$

Очевидно, общее решение первого уравнения системы (7)

$$\theta_0(\alpha)=C_{10}+C_{30}\ln\alpha\,.$$

Второе уравнение системы может быть записано следующим образом

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(\alpha\,u_0)}{\partial\alpha}=R\theta_0\,.$$

В результате его интегрирования получаем

$$u_0=\frac{R}{2}\left[C_{10}\alpha+C_{30}\alpha\left(\ln\alpha-\frac{1}{2}\right)+C_{20}\frac{1}{\alpha}\right].$$

После подстановки полученных соотношений в третье уравнение с учетом

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha=0\,,\ \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{1}{\alpha}=0\,,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)(\alpha\ln\alpha)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}(\ln\alpha+1)-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha=\frac{2}{\alpha}\,,\ \ \frac{\partial\theta_0}{\partial\alpha}=\frac{C_{30}}{\alpha}\,,$$

убеждаемся, что оно выполняется при $C_{30}=0$. Тогда

$$\theta_0(\alpha)=C_{10}\,,\qquad u_0=\frac{R}{2}\left[C_{10}\alpha+C_{20}\frac{1}{\alpha}\right]. \tag{9}$$

Рассматривая первое уравнение системы (8), убеждаемся, что оно является одним из уравнений Бесселя, общее решение которого выражается через модифицированную функцию Бесселя $I_0(g_m\alpha)$ и функцию Бассе (Макдональда) $K_0(g_m\alpha)$ [3]:

$$\theta_m=C_{1m}I_0(g_m\alpha)+C_{2m}K_0(g_m\alpha)\,.$$

Покажем, что общим решением третьего уравнения системы (8) является

$$w_m=\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[\frac{C_{3m}}{g_m}I_0(g_m\alpha)+\frac{C_{4m}}{g_m}K_0(g_m\alpha)+C_{1m}\alpha\,I_1(g_m\alpha)-C_{2m}\alpha\,K_1(g_m\alpha)\right].$$

Для этого достаточно установить, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-g_m^2\right)\left\{\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[C_{1m}\alpha\,I_1(g_m\alpha)-C_{2m}\alpha\,K_1(g_m\alpha)\right]\right\}\equiv\frac{g_m R}{(1-2\upsilon)}\theta_m$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-g_m^2\right)\left[C_{1m}\alpha\,I_1(g_m\alpha)-C_{2m}\alpha\,K_1(g_m\alpha)\right]\equiv 2g_m\theta_m\,.$$

С учетом формул

$$\frac{\partial I_0(g_m\alpha)}{\partial\alpha}=g_m I_1(g_m\alpha)\,,\quad \frac{\partial K_0(g_m\alpha)}{\partial\alpha}=-g_m K_1(g_m\alpha)\,, \tag{10}$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha\,I_1(g_m\alpha)\right]=g_m\alpha\,I_0(g_m\alpha)\,,\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha\,K_1(g_m\alpha)\right]=-g_m\alpha\,K_0(g_m\alpha)\,,$$

следующих из [3], вычислим

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left[\alpha\, I_1(g_m\alpha)\right] = g_m \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\alpha\, I_0(g_m\alpha)\right] = g_m\alpha\, \frac{\partial I_0(g_m\alpha)}{\partial \alpha} + g_m I_0(g_m\alpha) =$$

$$= g_m^2 \alpha\, I_1(g_m\alpha) + g_m I_0(g_m\alpha)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left[\alpha\, K_1(g_m\alpha)\right] = -g_m \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\alpha\, K_0(g_m\alpha)\right] = -g_m\alpha\, \frac{\partial K_0(g_m\alpha)}{\partial \alpha} - g_m K_0(g_m\alpha) =$$

$$= g_m^2 \alpha\, K_1(g_m\alpha) - g_m K_0(g_m\alpha),$$

а затем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} - g_m^2\right)\left[C_{1m}\alpha\, I_1(g_m\alpha) - C_{2m}\alpha\, K_1(g_m\alpha)\right] =$$

$$= C_{1m}\left[g_m^2\alpha\, I_1(g_m\alpha) + g_m I_0(g_m\alpha) + g_m I_0(g_m\alpha) - g_m^2\alpha\, I_1(g_m\alpha)\right] -$$

$$- C_{2m}\left[g_m^2\alpha\, K_1(g_m\alpha) - g_m K_0(g_m\alpha) - g_m K_0(g_m\alpha) - g_m^2\alpha\, K_1(g_m\alpha)\right] =$$

$$= 2g_m\left[C_{1m} I_0(g_m\alpha) + C_{2m} K_0(g_m\alpha)\right] = 2g_m\theta_m\ ,$$

что и требовалось доказать.

Второе уравнение системы (8) запишем в виде

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d(\alpha\, u_m)}{d\alpha} = R\theta_m - g_m w_m\,.$$

После его интегрирования получаем

$$u_m = \frac{1}{\alpha}\int \alpha\left[R\theta_m - g_m w_m\right] d\alpha + \frac{RC_{5m}}{\alpha}\,.$$

С учетом формул для θ_m и w_m получаем

$$\frac{u_m}{R} = \left[C_{1m} - \frac{C_{3m}}{2(1-2\upsilon)}\right]\frac{1}{\alpha}\int \alpha\, I_0(g_m\alpha)d\alpha + \left[C_{2m} - \frac{C_{4m}}{2(1-2\upsilon)}\right]\frac{1}{\alpha}\int \alpha\, K_0(g_m\alpha)d\alpha -$$

$$- \frac{1}{2(1-2\upsilon)}\left[L_{1m}\frac{g_m}{\alpha}\int \alpha^2 I_1(g_m\alpha)d\alpha - L_{2m}\frac{g_m}{\alpha}\int \alpha^2 K_1(g_m\alpha)d\alpha\right] + \frac{C_{5m}}{\alpha}.$$

Вычислим полученные интегралы, используя формулы

$$\int \alpha\, I_0(g_m\alpha)d\alpha = \frac{1}{g_m}\alpha\, I_1(g_m\alpha), \qquad \int \alpha\, K_0(g_m\alpha)d\alpha = -\frac{1}{g_m}\alpha\, K_1(g_m\alpha),$$

$$\int \alpha^2 I_1(g_m\alpha)d\alpha = \frac{1}{g_m}\alpha^2 I_2(g_m\alpha) = \frac{1}{g_m}\alpha^2\left[I_0(g_m\alpha) - \frac{2}{g_m\alpha}I_1(g_m\alpha)\right], \tag{11}$$

$$\int \alpha^2 K_1(g_m\alpha)d\alpha = -\frac{1}{g_m}\alpha^2 K_2(g_m\alpha) = -\frac{1}{g_m}\alpha^2\left[K_0(g_m\alpha) + \frac{2}{g_m\alpha}I_1(g_m\alpha)\right].$$

В результате

$$\frac{u_m}{R} = \left[C_{1m} - \frac{C_{3m}}{2(1-2\upsilon)}\right]\frac{1}{g_m}I_1(g_m\alpha) - \left[C_{2m} - \frac{C_{4m}}{2(1-2\upsilon)}\right]\frac{1}{g_m}K_1(g_m\alpha) -$$

$$- \frac{1}{2(1-2\upsilon)}\left\{C_{1m}\left[\alpha\, I_0(g_m\alpha) - \frac{2}{g_m}I_1(g_m\alpha)\right] + \right.$$

$$\left. + C_{2m}\left[\alpha\, K_0(g_m\alpha) + \frac{2}{g_m}K_1(g_m\alpha)\right]\right\} + \frac{C_{5m}}{\alpha}$$

или

$$u_m = \frac{R}{2(1-2\upsilon)g_m}\left\{\frac{4(1-2\upsilon)g_m}{\alpha}C_{5m} + [4(1-\upsilon)C_{1m} - C_{3m}]I_1(g_m\alpha) - \right.$$

$$\left. -[4(1-\upsilon)C_{2m} - C_{4m}]K_1(g_m\alpha) - g_m\alpha[C_{1m}I_0(g_m\alpha) + C_{2m}K_0(g_m\alpha)]\right\}.$$

Нетрудно показать, что последнее уравнение системы (8) выполняется при условии $C_{5m} = 0$. Итак

$$\theta_m = C_{1m}I_0(g_m\alpha) + C_{2m}K_0(g_m\alpha). \tag{12}$$

$$w_m = \frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[\frac{C_{3m}}{g_m}I_0(g_m\alpha) + \frac{C_{4m}}{g_m}K_0(g_m\alpha) + C_{1m}\alpha\, I_1(g_m\alpha) - C_{2m}\alpha\, K_1(g_m\alpha)\right],$$

$$u_m = \frac{R}{2(1-2\upsilon)g_m}\{g_m\alpha[4(1-\upsilon)C_{1m} - C_{3m}]I_1(g_m\alpha) -$$

$$-[4(1-\upsilon)C_{2m} - C_{4m}]K_1(g_m\alpha) - g_m\alpha[C_{1m}I_0(g_m\alpha) + C_{2m}K_0(g_m\alpha)]\}.$$

Сформулируем краевые условия задачи. Пусть

$$w(\alpha\,, 0) = w(\alpha\,, 1) = 0\,, \quad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha\,, 0) = \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha\,, 1) = 0\,, \tag{13}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(1\,, \gamma) = \sigma_{\alpha\gamma}(1\,, \gamma) = \sigma_{\alpha\gamma}(t\,, \gamma) = 0\,, \sigma_{\alpha\alpha}(t\,, \gamma) = \rho\, H(1-\gamma).$$

Из соотношений (5) с учетом (6) имеем, что необходимые для их выполнения напряжения имеют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{\alpha\alpha m}(\alpha)\cos(m\pi\gamma), \qquad \sigma_{\alpha\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{\alpha\gamma m}(\alpha)\sin(m\pi\gamma). \tag{14}$$

Тогда автоматически выполняются первые 4 граничные условия. Оставшиеся позволяют определить значения всех постоянных интегрирования. Но для этого необходимо представить в виде ряда по косинусам функцию $\rho H(1-\gamma)$.

На интервале $\gamma \in (0\,, 1)$ имеем

$$1-\gamma = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos(m\pi\gamma), \tag{15}$$

$$A_0 = 2\int_0^1(1-\gamma)d\gamma = 2\left(\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 1\,,$$

$$A_m = 2\int_0^1(1-\gamma)\cos(m\pi\gamma)d\gamma = -\frac{2}{(m\pi)^2}\cos(m\pi\gamma)\Big|_0^1 = \frac{2}{(m\pi)^2}[1-\cos(m\pi)].$$

Проверено, что сумма первых 50 членов ряда, из которых половина равны нулю, приводит к погрешности задания функции менее 1%.

Выполняя оставшиеся граничные условия, устанавливаем, что

$$C_{10} = (1+\upsilon)\left[2\alpha_T T - \frac{\rho H(1-2\upsilon)t^2}{E(1-t^2)}\right], \qquad C_{30} = -\frac{\rho H(1+\upsilon)t^2}{E(1-t^2)}\,,$$

Остальные постоянные удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$C_{1m}[g_mI_0(g_m) - 2(1-\upsilon)I_1(g_m)] + C_{2m}[g_mK_0(g_m) + 2(1-\upsilon)K_1(g_m)] +$$

$$+ C_{3m}I_1(g_m) - C_{4m}K_1(g_m) = 0,$$

$$C_{1m}[g_mt\, I_0(g_mt) - 2(1-\upsilon)I_1(g_mt)] + C_{2m}[g_mt\, K_0(g_mt) + 2(1-\upsilon)K_1(g_mt)] +$$

$$+ C_{3m}I_1(g_mt) - C_{4m}K_1(g_mt) = 0\,,$$

$$C_{1m}\left[(3-2\upsilon)I_0(g_m t)-\left(\frac{2}{g_m t}+g_m t\right)I_1(g_m t)\right]+$$

$$+C_{2m}\left[(3-2\upsilon)K_0(g_m t)+\left(\frac{2}{g_m t}+g_m t\right)K_1(g_m t)\right]-$$

$$-C_{3m}\left[I_0(g_m t)-\frac{1}{g_m t}I_1(g_m t)\right]-C_{4m}\left[K_0(g_m t)+\frac{1}{g_m t}K_1(g_m t)\right]=$$

$$=\frac{4(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\rho H}{E(m\pi)^2}\left[1-\cos(m\pi)\right].$$

РЕЗЮМЕ

Построено точное решение трехмерной задачи теории упругости для цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью и находящегося в температурном поле. Решение представлено в виде рядов из комбинаций тригонометрических функций и функций Бесселя. Для одного варианта краевых условий решение сведено к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурьянов Н.Г. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра / Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева – Казань: Издательство Казанского университета, 2008. – 207 с.
2. Коваленко А.Д. Избранные труды – Киев: Наукова думка, 1976. – 762 с.
1. 3. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи – Москва: Наука,1974 – 296 с.

SUMMARY

There was precise solution worked out for three-dimensional problem of elasticity theory for cylindrical tank filled with fluid and located in temperature pattern. The solution is presented in the form of series from combinations of trigonometric functions and Bessel functions. For one variant of boundary conditions the solution was reduced to the system of four linear algebraic equations in relation to the constants of integration.

Поступила в редакцию 12.09.2013