

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И TESPLOT ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

к.т.н. Хвисевич В.М., Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [1], основанный на теории потенциала [2], имеет характерную особенность - возможность решения задач теории упругости с использованием дискретизации лишь границы области (в отличие от методов конечных элементов (МКЭ) и методов конечных разностей (МКР); применение которых требует дискретизации всей области). Естественно, что реализация такой возможности в методе ГИУ предусматривает предварительный переход от исходной краевой задачи для дифференциальных уравнений, описывающих некоторый процесс, к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области (или ее части).

Особенность метода ГИУ состоит в том, что при его реализации дискретизации подлежат лишь границы изучаемых областей; это естественно ведет к существенному уменьшению числа дискретных элементов по сравнению с методами, требующими внутренней дискретизации всего рассматриваемого тела. Это позволяет снизить на единицу порядок решаемой системы алгебраических уравнений.

На основе метода ГИУ разработана компьютерная программа на алгоритмическом языке «FORTRAN». Программа предназначена для расчёта конструктивных элементов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации. Область может быть односвязной или многосвязной. По разработанной программе можно решать как внутренние, так и внешние краевые задачи. Для наглядного графического представления результатов расчета FORTRAN-программой производилась их обработка с помощью графического интерфейса Tescplot 360. С помощью разработанной программы решены ряд задач по исследованию напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов.

1. ФОРТРАН-программа для решения задач теории упругости и термоупругости

На основе алгоритма численного решения интегральных уравнений краевых задач [3] разработана компьютерная программа на алгоритмическом языке «FORTRAN». Программа предназначена для расчёта конструктивных элементов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации. Область, занятая телом, может быть односвязной или многосвязной. По разработанной программе можно решать как внутренние так и внешние краевые задачи. В этом случае на границе тела должна быть задана уравновешенная внешняя нагрузка. Для внешней задачи задаётся напряжение в бесконечно удалённой точке.

При разработке программы учитывается геометрическая и физическая симметрия (рассматриваемая область; нагрузка). Учёт осевой симметрии расширяет возможности программы, облегчает ввод исходной информации. В соответствии с алгоритмом процесс реализации задачи делится на три этапа (рисунок 1).

На первом этапе осуществляется ввод и обработка исходных данных. Результатом обработки являются координаты центров отрезков, их длины, радиусы кривизны и координаты вектора внешней нормали. На этом этапе формируется массив внешней нагрузки.

На втором этапе решается система линейных алгебраических уравнений, результатом которой являются значения плотностей потенциала в точках границы области. Алгебраическая система решается методом последовательных исключений Гаусса. Полностью матрицы в памяти не хранятся. Их обработка осуществляется по строкам. При формировании строк матрицы в зависимости от расстояния между параметрической точкой и отрезком интегрирования автоматически определяется число узлов точек квадратурной формулы Гаусса.

На 3-ем этапе вычисляются напряжения и перемещения на границе области в соответствующих внутренних точках области.

При построении расчётной области следует стремиться получать границу с кусочно-непрерывной, ограниченной кривизной. Если по каким либо причинам трудно привести задачу к гладкой границе, в программе предусматривается возможность реализации области с углами

(выступающие и входящие узлы). В этом случае решается задача для функционального уравнения, в котором контур L в каждой угловой точке расширяется двумя отрезками AB и BC до контура L' (рисунок 2).

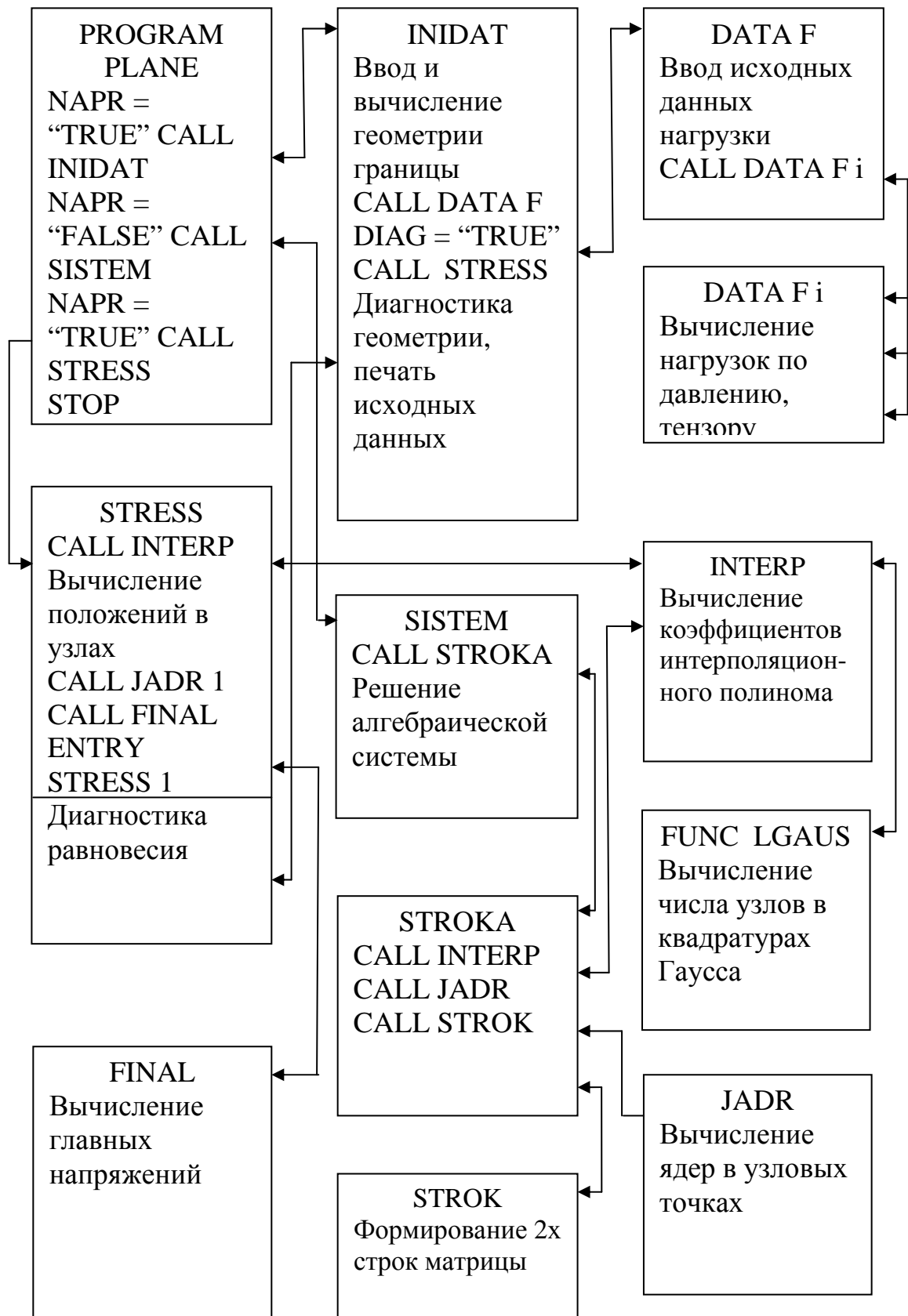


Рисунок 1 - Блок-схема программы

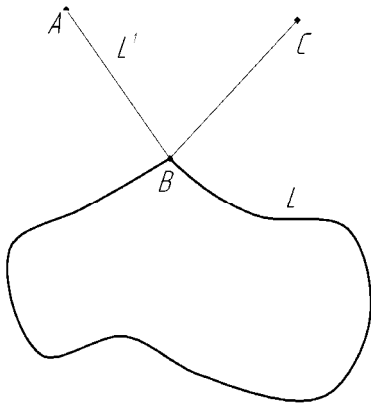


Рисунок 2 - Расширение области с углом

В стандартном режиме программа реализует задачи для областей, ограниченных отрезками прямых и окружностей. Рассматриваемая область может быть произвольной, заданной графически или аналитически. В связи с этим, изменения вносятся в подпрограмму ввода исходных данных и содержат подпрограммы или набор операторов по вычислению координат центров отрезков разбиения границы, радиусов кривизны, длин, векторов внешней нагрузки только для тех участков, которые нельзя заменить окружностью или прямой. В программе предусмотрена диагностика ввода и обработки исходных данных. При подготовке данных следует учитывать, что граничная точка или внутренняя не может быть ближе, чем на 0,5 длины отрезка разбиения границы Δl_K к параметрической точке.

Кроме использования естественных плоскостей симметрии часто вводится искусственная плоскость, не теряя при этом особенности решаемой задачи. Введение искусственных плоскостей в большинстве случаев может значительно облегчить действия по подготовке исходных данных.

2. Напряжённо-деформированное состояние длинного толстостенного цилиндра.

Область является двухсвязной, нагруженной внутренним давлением p_i , материал – сталь 3.

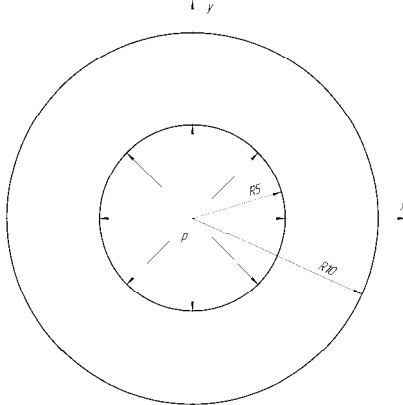


Рисунок 3 - Сжатие длинного толстостенного цилиндра.

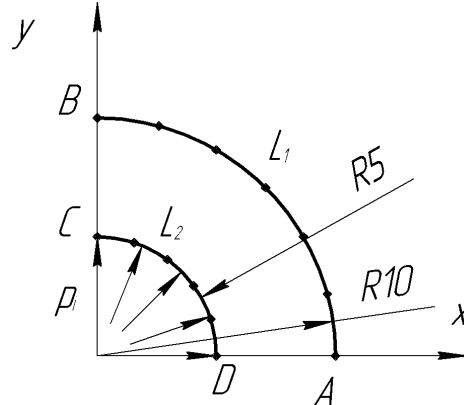


Рисунок 4 - Расчётная схема цилиндра

Область имеет две плоскости симметрии, проходящие через оси x и y . Учитывая свойства симметрии, построим расчётную схему в виде четверти кольца.

Расчётная область имеет 2 непрерывных участка, являющихся дугами окружностей. Для каждого участка назначается определённое число отрезков. При этом необходимо вводить ограничения на их длину. Центр P_K отрезка длиной Δl_K не должен находиться к противоположному участку границы ближе чем половина длины ближайшего отрезка разбиения. Каждый участок в порядке нумерации разбивался соответственно на 6; 5 участков.

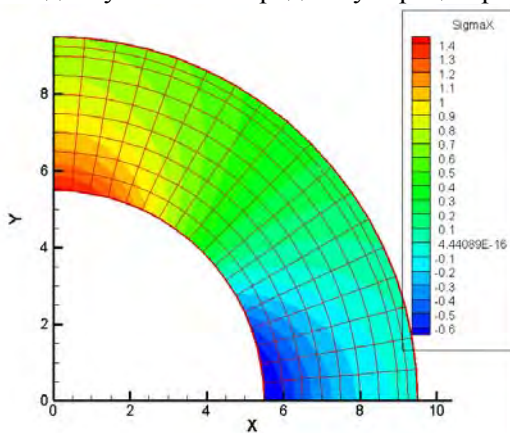


Рисунок 5 – Диаграмма распределения нормальных напряжений σ_x

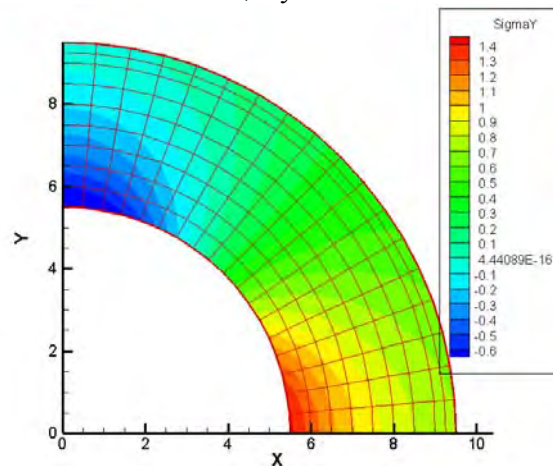


Рисунок 6 – Диаграмма распределения нормальных напряжений σ_y

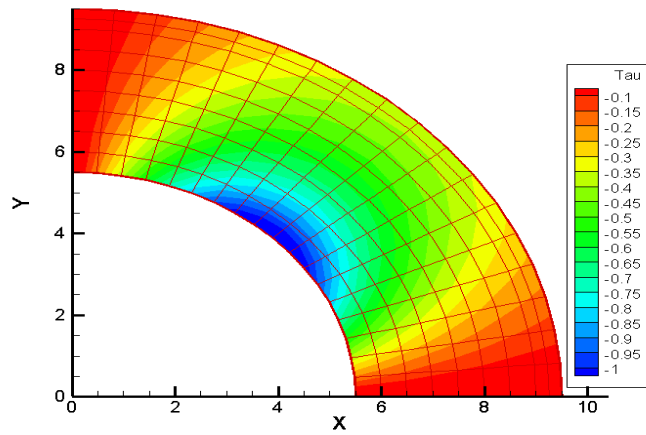


Рисунок 7 – Диаграмма распределения касательных напряжений τ_{xy} .

3. Расчет цилиндрического пуансона

Данная деталь используется для пробивки отверстий. Материал пуансона – сталь X12M. Область нагружена на пробивном конце равномерно распределённой контурной нагрузкой $100 \cdot 10^6$ Н/м, и имеет только внешний контур. Пуансон имеет плоскость симметрии. Напряжения на закрепляемом конце можно представить как равномерную контурную нагрузку. Учитывая свойства симметрии, расчётная схема для реализации этой задачи принимает вид, приведенный на рисунке 8.

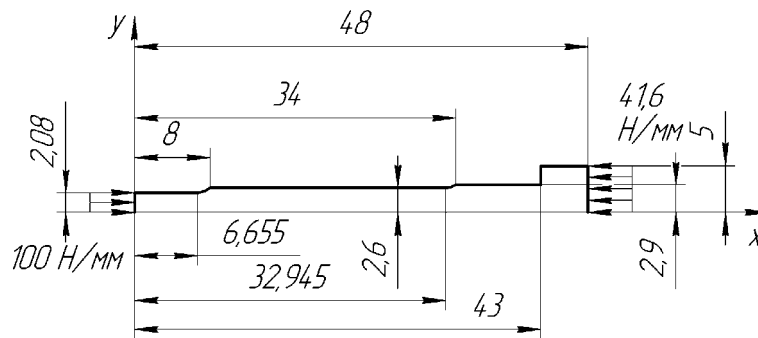


Рисунок 8 - Расчётная схема пуансона

Расчётная кусочно-гладкая область имеет 9 непрерывных участков, являющихся отрезками прямых и дугами окружностей. Для каждого участка назначается определённое число отрезков. При этом необходимо вводить ограничения на их длину. Центр P_K отрезка длиной Δl_K не должен находиться к противоположному участку границы ближе чем половина длины ближайшего отрезка разбиения. Каждый участок в порядке нумерации разбит соответственно на 15; 16; 15; 32; 10; 55; 10; 32; 15 участков.

В результате реализации задачи получено напряженное состояние в соответствующих точках области (рисунок 9).

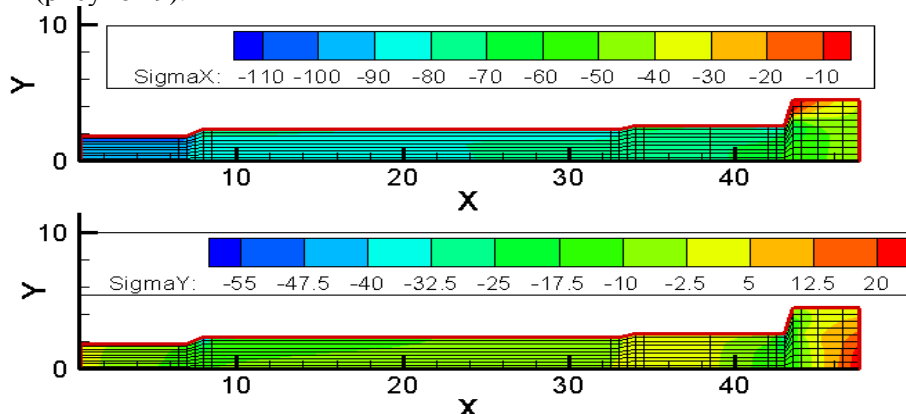


Рисунок 9 – Диаграммы распределения нормальных напряжений σ_x, σ_y

4. Напряжённо-деформированное состояние длинной полосы с отверстиями.

Эта многосвязная область нагружена распределённой по концам равномерной контурной нагрузкой 1 Н/м . Область имеет внешний и внутренний контуры. Здесь ставится 2-я внутренняя краевая задача теории упругости (рисунок 10).

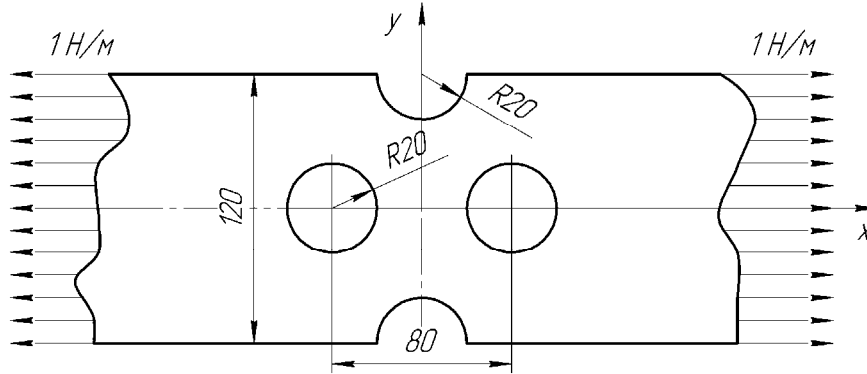


Рисунок 10 - Растяжение полосы с концентраторами напряжений

Область имеет две плоскости симметрии, проходящие через оси x и y . Вырежем элемент полосы длиной 210 мм в зоне ослабления. Учитывая свойства симметрии, построим расчётную схему для реализации этой задачи (рисунок 11).

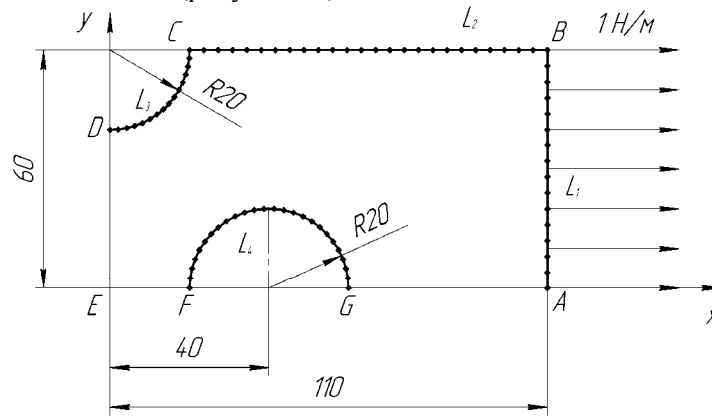


Рисунок 11 - Расчётная схема полосы.

Расчётная область имеет 4 непрерывных участка, являющихся отрезками прямых и дугами окружностей. Каждый участок в порядке нумерации разбит соответственно на 15; 25; 15; 25 участков. В результате реализации задачи получено напряженное состояние в соответствующих точках области (рисунок 12, 13).

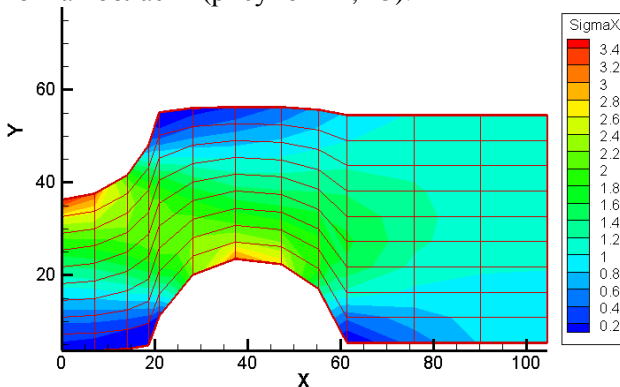


Рисунок 12 – Распределение нормальных напряжений σ_x

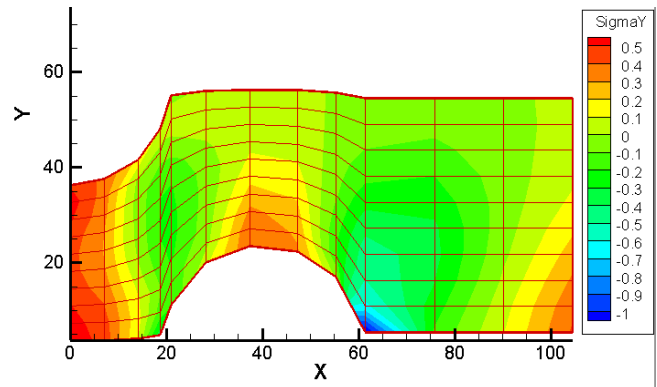


Рисунок 13 – Распределение нормальных напряжений σ_y

Ввиду отсутствия аналитических расчетов сравнение проводилось с результатами, полученными конечно-элементным вычислительным комплексом «ANSYS». На рисунке 14 приведено типичное распределение напряжений σ_x , полученное с помощью ANSYS.

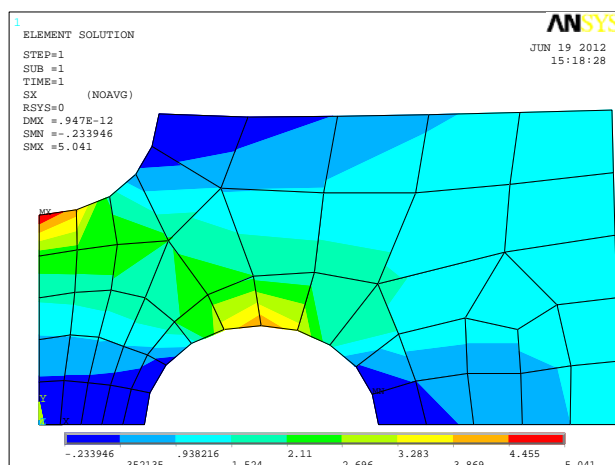


Рисунок 14 – Диаграмма распределения нормальных напряжений σ_x .

Заключение

В результате проведённых численных экспериментов по оценке напряжённо-деформированного состояния можно сделать вывод, что качественно поля напряжений в телах найденные с помощью пакета «ANSYS» по методу конечных элементов и по методу теории потенциала не отличаются. В местах изменения геометрической формы тела (разрывы функции плотности потенциала) наблюдается концентрация напряжений (рисунки 9, 12, 13). Количественная оценка напряжений показала, что результаты решений задач этими способами отличаются в допустимых пределах при проведении инженерных расчётов. В результате сравнения возможности этих методов следует заметить, что применение «FORTRAN» - программы существенно упрощает подготовку исходной информации.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается совместное решение задач теории упругости по исследованию напряженно-деформированного состояния упругих тел при механическом нагружении. Расчет производится с помощью разработанной FORTRAN-программы, построенной на базе метода граничных интегральных уравнений, обработка результатов – с применением графического интерфейса Tecplot 360. Решены некоторые тестовые задачи, проведено сравнение с решением конечно-элементного комплекса ANSYS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vanerjee P.K., Butterfield R. / Бенерджи П., Баттерфилд Р. Boundary Element Methods in Engineering Science / Методы граничных элементов в прикладных науках. — 1984. — 494 с.
2. Н. М. Гюнтер. Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. — М., 1953. — 415 с.
3. А.И. Веремейчик, В.М. Хвисевич Метод граничных интегральных уравнений в нестационарных термоупругих задачах механики твердого тела // Вестник БрГТУ. – 2008. – № 4: Машиностроение. – С. 37–41.

SUMMARY

In article the joint solution of tasks of the theory of elasticity on research intense the deformed condition of elastic bodies is considered at mechanical loading. Calculation is made by means of the developed FORTRAN program constructed on the basis of a method of the boundary integrated equations, processing of results – with use of the graphic Tecplot 360 interface. Some test tasks are solved, comparison with the solution of the final and element ANSYS complex is carried out.

Поступила в редакцию 27.12.2012