УДК 539.3

РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ТЕЛА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

к.т.н. [1]**Миронов Д.Н.,** [1]**Чигарев В.А.,** к.т.н. [2]**Гончаренко В.П.**

[1]*Белорусский национальный технический университет, Минск*
[2]*УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск*

Рассматривается решение термоупругой задачи для конечного полого кругового цилиндра длины l. В момент времени $t = 0$ температура среды на внутренних и внешних поверхностях цилиндра меняется согласно заданным законам, но температурное поле остается осесимметричным. На торцах также происходит теплообмен со средой, температура которой равна T_0.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T \tag{1}$$

Начальные условия:

$$T = T_0 \text{ в момент времени } t = 0\,, \tag{2}$$

Граничные условия:

$$a_{11}T + a_{12}\frac{\partial T}{\partial z} = \theta_{(l)}(r,\ t) \text{ при } z = l\,, \tag{3}$$

$$b_{11}T + b_{12}\frac{\partial T}{\partial z} = \theta_{(0)}(r,\ t) \text{ при } z = 0\,, \tag{4}$$

$$c_{11}T + c_{12}\frac{\partial T}{\partial z} = \varphi_{(e)}(z,\ t) \text{ при } r = R_{(e)}, \tag{5}$$

$$d_{11}T + d_{12}\frac{\partial T}{\partial z} = \varphi_{(i)}(z,\ t) \text{ при } r = R_{(i)}. \tag{6}$$

Будем считать, что внешняя и внутренняя поверхности цилиндра свободны от напряжений.

Рассмотрим вначале определение температурного поля для чего задачу (2)-(6) разобьем на две. Для упрощения положим $T_0 = 0$ в (2), а решение T представим в виде суммы

$$T = T_1 + T_2. \tag{7}$$

Определение $\boldsymbol{T_1(r,\ z,\ t)}$**.** Преобразуем уравнение (1) по Лапласу, тогда для изображения Лапласа $T_1^*(r,\ z,\ s)$, при начальном условии $T_1 = 0$, получим уравнение [1]

$$\Delta T_1^* - \frac{s}{a}T_1^* = 0\,, \tag{8}$$

где

$$T_1^*(r,\ z,\ s) = \int_0^\infty T_1(r,\ z,\ t)e^{-st}dt\,. \tag{9}$$

Решение уравнения (8) получим методом разделения переменных и запишем в виде

$$T_1^*(r,\ z,\ s) = \int_0^\infty A(s,\ \lambda)J_0(\lambda,\ r)e^{-\gamma z}d\lambda, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + s/a}.. \tag{10}$$

Заменим в (10) γ на $i\gamma$, λ на $i\lambda$, тогда можно $T_1^*(r,\ z,\ s)$ записать в виде

$$T_1^* = [AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r)][c_1\cos\gamma z + c_2\sin\gamma z]. \tag{11}$$

Здесь I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя, c_1, c_2 - произвольные постоянные, $A(s,\lambda)$ – произвольная функция, которая должна быть определена из граничных условий.

Подставляя (11) в условия

$$a_{11}T_1 + a_{12}\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = l\,, \tag{12}$$

$$\grave{e}_{11}T_1 + \grave{e}_{12}\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0\,, \tag{13}$$

получим

$$
\begin{gathered}
\grave{a}_{11}\left[c_1\cos\gamma l + c_2\sin\gamma l\right] + \grave{a}_{12}\left[-c_1\sin\gamma l + c_2\cos\gamma l\right] = 0, \\
b_{11}\left[c_1\right] + b_{12}\left[c_2\gamma\right] = 0.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Система линейных алгебраических уравнений (14) относительно c_1, c_2 имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Вычисляя определить системы (14), получаем

$$
tg\gamma l = \gamma\frac{a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}}{a_{11}b_{11} + \gamma^2 a_{12}b_{12}}. \tag{15}
$$

Счетное множество корней $\gamma_n(n = 1{,}2...)$ трансцендентного уравнения (15) при заданных a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12} определяют собственные значения γ_n задачи Штурма-Лиувилля.

Определяем соответствующие собственные функции задачи используя равенство нулю системы (14). Это означает, что c_1, c_2 зависимые и позволяет выразить c_2 через c_1, которая остается произвольной. Задавая соответствующим образом эту постоянную, запишем собственную функцию z_n, соответствующую γ_n в виде [2]

$$
\begin{gathered}
Z(\gamma_n z) = c_1\cos\gamma_n z + c_2\sin\gamma_n z, \\
c_1 = \gamma_n a_{12}\cos\gamma_n L + a_{11}\sin\gamma_n L, \quad c_2 = \gamma_n a_{12}\sin\gamma_n L - a_{11}\cos\gamma_n L.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Собственные функции $Z(\gamma_n z)$ образуют полную ортогональную систему, т.к. являются решениями краевой задачи Штурма-Лиувилля. Соответственно получим γ_n, z_n заменим в (11) A, B, λ на A_n, B_n и λ_n. Тогда общее решение T_1^* имеет вид (обозначение сохраним тоже самое).

$$
T_1^* = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)\right]Z(\gamma_n z) \qquad \lambda_n = \sqrt{\gamma_n^2 + s/a}. \tag{17}
$$

Произвольные постоянные A_n, B_n определяются из граничных условий

$$
\tilde{n}_{11}T_1 + \tilde{n}_{12}\grave{O}_1 = \varphi_{(e)}(z,\ t) \text{ при } r = R_{(e)}, \tag{18}
$$

$$
d_{11}T_1 + d_{12}\grave{O}_1 = \varphi_{(i)}(z,\ t) \text{ при } r = R_{(i)}, \tag{19}
$$

Для этого преобразуем (18), (19) по Лапласу, тогда получим изображения Лапласа $\varphi_{(e)}^*(z,\ s)$, $\varphi_{(i)}^*(z,\ s)$, которые представим в виде рядов по собственным функциям $Z(\gamma_n z)$

$$
\varphi_{(e)}^*(z,\ s) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(e)}(s)Z(\gamma_n z), \qquad \varphi_{(i)}^*(z,\ s) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(i)}(s)Z(\gamma_n z). \tag{20}
$$

Преобразуем интегральные условия (18), (19) по Лапласу

$$
c_{11}T_1^* + c_{12}T_1^* = \varphi_{(e)}^*(z,\ s), \qquad d_{11}T_1^* + d_{12}T_1^* = \varphi_{(i)}^*(z,\ s). \tag{21}
$$

Подставим (17), (20) в (21) и приравняем коэффициенты при одинаковых $Z(\gamma_n z)$, тогда получим систему уравнений относительно A_n, B_n

$$
\begin{aligned}
&A_n\left[c_{11}I_0(\lambda_n R_{(e)}) + \lambda_n c_{12}I_0'(\lambda_n R_{(e)})\right] + \\
&+ B_n\left[c_{11}K_0(\lambda_n R_{(e)}) + \lambda_n c_{12}K_0'(\lambda_n R_{(e)})\right] = c_n^{(e)}, \\
&A_n\left[d_{11}I_0(\lambda_n R_{(i)}) + \lambda_n d_{12}I_0'(\lambda_n R_{(i)})\right] + \\
&+ B_n\left[d_{11}K_0(\lambda_n R_{(i)}) + \lambda_n d_{12}K_0'(\lambda_n R_{(i)})\right] = c_n^{(i)}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Здесь $I'_{(x)}$, $K'_{(x)}$ – производные по x.

Система линейных алгебраических уравнений (22) позволяет найти A_n и B_n. Т.к. $Z(\gamma_n z)$ образуют ортогональную систему, то коэффициенты $c_{(e)}^n$, $c_{(i)}^n$ вычисляются для заданных $\varphi_{(e)}^*(z,\ s)$, $\varphi_{(i)}^*(z,\ s)$ по формулам

$$
c_n^{(e)}(s) = \frac{1}{N_n}\int_0^L \varphi_{(e)}^*(z,\ s)Z(\gamma_n z)dz, \quad c_n^{(i)}(s) = \frac{1}{N_n}\int_0^L \varphi_{(i)}^*(z,\ s)Z(\gamma_n z)dz, \qquad N_n = \int_0^L Z^2(\gamma_n z)dz. \tag{23}
$$

Вычисление N_n с учетом (16) дает выражение

$$N_n = L\left\{\frac{a_{11}^2 + \gamma_n^2 a_{12}^2}{2} + \left[\left(\gamma_n^2 a_{12}^2 - a_{11}^2\right)\cos\gamma_n l + 2\gamma_n a_{11} a_{12}\sin\gamma_n l\right]\frac{\sin\gamma_n l}{2\gamma_n l}\right\}. \quad (24)$$

Таким образом, выражение для образа Лапласа T_1^* дается выражениями (16), (17), (22), (23).

Определение T_2. Решение T_2 позволяет оценить влияние условий на торцах. Рассмотрим цилиндр, длина которого значительно больше его диаметра $D << L$, тогда в силу принципа Сен-Венана влияние температуры на торце существенно на расстоянии D от торца, и поэтому для простоты рассмотрим полубесконечный цилиндр $0 \le z \le \infty$, причем вместо условия [3]

$$a_{11}T_2 + a_{12}\frac{\partial T_2}{\partial z} = \theta_{(e)}(r,t) \text{ при } z = l \quad , \quad (25)$$

считаем, что температура на бесконечности должна быть конечной величиной. Представим образ Лапласа $T_1^*(r,\ z,\ s)$ в виде

$$T_1^*(r,\ z,\ s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n z} U(\lambda_n r). \quad (26)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 + s/a}, \qquad U(\lambda_n r) = AJ_0(\lambda_n r) + BN_0(\lambda_n r), \quad (27)$$

где J_0, N_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Подставим (26), (27) в

$$c_{11}T_2 + b_{12}\frac{\partial T_2}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_{(e)}, \quad (28)$$

$$b_{11}T_2 + b_{12}\frac{\partial T_2}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_{(i)}. \quad (29)$$

тогда получим систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{aligned} &A\left[c_{11}J_0\left(\lambda R_{(e)}\right) - \lambda c_{12}J_1\left(\lambda R_{(e)}\right)\right] + \\ &+ B\left[c_{11}N_0\left(\lambda R_{(e)}\right) - \lambda c_{12}N_1\left(\lambda R_{(e)}\right)\right] = 0, \\ &A\left[d_{11}J_0\left(\lambda R_{(i)}\right) - \lambda d_{12}J_1\left(\lambda R_{(i)}\right)\right] + \\ &+ B\left[d_{11}N_0\left(\lambda R_{(i)}\right) - \lambda d_{12}N_1\left(\lambda R_{(i)}\right)\right] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для существование ненулевых решений системы (30) определитель ее должен быть равен нулю, что дает трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений $\lambda_n(n = 1,2...)$, которым соответствуют собственные функции $U(\lambda_n r)$. Из условия равенства нулю определителя следует, что коэффициенты A и B не являются независимыми и пусть например B выражается через A из какого-либо из уравнения (30).

Установлено, что собственные функции $U(\lambda_n r)$ в интервале $\left[R_{(i)},\ R_{(e)}\right]$ образуют полную ортогональную систему функций с весовой функцией r, т.е. выполняется условие ортогональности [4]

$$\int_{R_{(i)}}^{R_{(e)}} rU(\lambda_n r)U(\lambda_m r)dr = 0 \qquad (m \ne n) \quad (31)$$

Таким образом, задавая A подходящим образом удовлетворяем условиям (28), (29). Рассмотрим удовлетворение найденного решения граничному условию

$$b_{11}T_2 + b_{12}\frac{\partial T_2}{\partial z} = \theta_{(i)}(r,t) \text{ при } z = 0, \quad (32)$$

Для этого представим $\theta_{(i)}^*(r,\ s)$ в виде ряда по собственным функциям

$$\theta_{(i)}^*(r,\ s) = \sum_n h_n^0(s)U(\lambda_n r). \quad (33)$$

Коэффициенты разложения (33) вычисляются по формулам

$$h_n^0 = \frac{1}{N_n}\int_{R_{(i)}}^{R_{(e)}} r\theta_{(i)}^*(r,\ s)U(\lambda_n r)dr, \qquad N_n = \int_{R_{(i)}}^{R_{(e)}} rU^2(\lambda_n r)dr. \quad (34)$$

Для вычисления N_n используются формулы

$$\int rJ_0^2(\lambda r)\,dr = \frac{r^2}{2}\left[J_0^2(\lambda r) + J_1^2(\lambda r)\right], \qquad \int rN_0^2(\lambda r)\,dr = \frac{r^2}{2}\left[N_0^2(\lambda r) + N_1^2(\lambda r)\right],$$
$$\int rJ_0(\lambda r)N_0(\lambda r)\,dr = \frac{r^2}{2}\left[J_0(\lambda r)N_0(\lambda r) + J_1(\lambda r)N_1(\lambda r)\right]. \quad (35)$$

Для нахождения коэффициентов A_n подставим (26) в условие (32), записанное для образов Лапласа и разложения (30), тогда получим

$$b_{11}\sum_{n=1}^{\infty} A_n U(\lambda_n r) = b_{12}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n U(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^0(s)U(\lambda_n r). \quad (36)$$

Приравнивая коэффициенты при $U(\lambda_n r)$, находим $A_n = \dfrac{h_n^0}{b_{11} - \gamma_n b_{12}}$. (37)

Таким образом, $T^* = T_1^* + T_2^*$ найдена.

Для нахождения напряжений используем потенциал перемещений Φ, который удовлетворяет для квазистатического случая уравнению [5, 6] $\Delta\Phi = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}\alpha T$. (38)

Дифференцируя (38) по t и заменяя $\partial T / \partial t$ из уравнения теплопроводности, получим

$$\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1+\mu}{1-\mu} a\alpha\Delta T. \quad (39)$$

Интегрируем (39) по t, тогда получаем $\Phi = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}\alpha a\int_0^t T\,dt + \Phi_0 + t\Phi_1,.$ (40)

где Φ_1 – произвольная гармоническая функция; $(\Delta\Phi_1 = 0)$, $\Phi_0 = \Phi(t=0)$ – потенциал перемещений, соответствующий начальной температуре $T_0(x,\ y,\ z)$, т.е. $\Delta\Phi_0 = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}\alpha T_0$. Если $T_0 = 0$, то $\Phi_0 = 0$.

При квазистатическом рассмотрении неустановившихся температурных напряжений время t является параметром, что позволяет непосредственно использовать решения соответствующих стационарных задач при условии, что при получении этих решений уравнение теплопроводности не используется.

Напряжения σ_{ij}, обусловленные полем $T = T_1 + T_2$, представим в виде $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$, соответственно функцию напряжений Ламе L представим в виде $L = L_1 + L_2$, где L_1 соответствует температурному полю T_1, а L_a температуре T_2.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела цилиндрической формы

ЛИТЕРАТУРА

1. Сан К.Т. Прикладная механика, №4 1970
2. Бабичева Л.А., Вервейко Н.Д., Труды НИИМ ВГУ, вып. 4, 1971
3. Трофимов Н.И., Труды НИИМ ВГУ, вып. 2, 1971
4. Горшков А. Г., Медведский А. Л. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 39 с.
5. Тихонов А.П., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. - М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. - 798 с.
6. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган - М.: Наука, 1979. - 830 с.

SUMMARY

In work the decision of the stationary problem of thermoelasticity and thermoplasticity in approach of effective model for the body of the cylindrical form.

Поступила в редакцию 11.10.2013