УДК 539.3:531.2.001:621.81

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

к. ф.-м. н. [1] **Мартыненко Т.М.,** к. ф.-м. н. [2] **Скляр О.Н.**

[1]*ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь, Минск*
[2] *Белорусский национальный технический университет, Минск*

В теории оболочек различают две основные задачи, из которых первая, прямая, связана с определением безмоментной формы упругих оболочек при заданных на ее границах внешних нагрузках (т.е. определение такой ее срединной поверхности и внешних источников деформирования, которые не вызывают изгибной деформации). Вторая, обратная, заключается в определении геометрической формы гибкой мембраны, деформируемой внешними усилиями так, что они не вызывают в ней растяжений (искажения) срединной поверхности. Прямая задача наиболее часто используется в практической работе конструкторских и проектных организаций, при допущении в расчетах незначительных моментов или при расчете гибких оболочек, поскольку в них могут иметь место незначительные изгибы и растягивающие усилия. При этом, чтобы избежать возможности появления изгибных деформаций или значительных растягивающих усилий, требуется сопровождать их расчет соответствующей проверкой [1].

В настоящее время достигнут определенный прогресс и в решении обратных геометрических задач безмоментной теории упругости. В то же время теория обратных задач чистомоментного напряженно-деформированного состояния явно отстает от аналогичных задач безмоментной теории оболочечных конструкций.

При построении математической модели будем исходить из теории оболочек Кирхгофа–Лява, в силу которой разрешающая система уравнений записывается следующим образом [2].

Уравнения равновесия при больших перемещениях имеют такой вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1 S_2}{\partial \eta} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_1}{R_1^{'}} + \frac{Q_2}{R_{21}^{'}} - \frac{S_1}{\rho_1^{'}} - \frac{T_2}{\rho_2^{'}} + q_1 \right) = 0, \\
\frac{\partial A_2 S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \eta} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_1}{R_{12}^{'}} + \frac{Q_2}{R_2^{'}} + \frac{S_2}{\rho_2^{'}} + \frac{T_1}{\rho_1^{'}} + q_2 \right) = 0, \\
\frac{\partial (A_2 Q_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial (A_1 Q_2)}{\partial \eta} - A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1^{'}} + \frac{T_2}{R_2^{'}} + \frac{S_1}{R_{12}^{'}} + \frac{S_2}{R_{21}^{'}} - q_n \right) = 0, \\
\frac{\partial (A_2 H_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial (A_1 M_2)}{\partial \eta} + A_1 A_2 \left(\frac{M_1}{\rho_1^{'}} + \frac{H_2}{\rho_2^{'}} - Q_2 + m_2 \right) = 0. \\
\frac{\partial (A_2 M_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial (A_1 H_2)}{\partial \eta} - A_1 A_2 \left(\frac{H_1}{\rho_1^{'}} + \frac{M_2}{\rho_2^{'}} + Q_1 - m_1 \right) = 0, \\
S_1 - \frac{H_2}{R_2^{'}} - \frac{M_1}{R_{12}^{'}} = S_2 - \frac{H_1}{R_1^{'}} - \frac{M_2}{R_{21}^{'}}.
\end{gathered} \tag{1}$$

При малых перемещениях $\frac{1}{R_1^{'}} \approx \frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_{21}^{'}} = 0$, $\frac{1}{R_2^{'}} \approx \frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{\rho_1^{'}} \approx \frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2^{'}} \approx \frac{1}{\rho_2}$.

Соотношения упругости (неоднородной ортотропной оболочки):

$$\begin{gathered}
T_1 = B_1 \varepsilon_1 + B_\nu \varepsilon_2,\ T_2 = B_2 \varepsilon_2 + B_\nu \varepsilon_1,\ S = B_G \gamma; \\
M_1 = D_1 \chi_1 + D_\nu \chi_2,\ M_2 = D_2 \chi_2 + D_\nu \chi_1,\ H = 2 D_G \tau;
\end{gathered} \tag{2}$$

или

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = B_1^{'} T_1 - B_\nu^{'} T_2,\ \varepsilon_2 = B_2^{'} T_2 - B_\nu^{'} T_1\, T_2 = B_2 \varepsilon_2 + B_\nu \varepsilon_1,\ \gamma = B_G^{'} S; \\
\chi_1 = D_1^{'} M_1 - D_\nu^{'} M_2,\ \chi_2 = D_2^{'} M_2 - D_\nu^{'} M_1,\ H = 2 D_G^{'} H .
\end{gathered}$$

При ассиметричной деформации оболочек вращения систему уравнений (2) можно записать в виде:

$$\frac{1}{b}(T_2R)^\bullet + T_1\frac{\varphi^*}{\varphi}\sin\alpha^* + Q_2R\frac{\overset{\bullet}{\alpha}{}^*}{b} + q_2R = 0,$$
$$\frac{1}{b}(Q_2R)^\bullet - T_1\frac{\varphi^*}{\varphi}\cos\alpha^* - T_2R\frac{\overset{\bullet}{\alpha}{}^*}{b} + q_nR = 0. \tag{3}$$

$$\frac{1}{b}(M_2R)^\bullet + M_1\frac{\varphi^*}{\varphi}\sin\alpha^* - Q_2R + m_2R = 0. \tag{4}$$

Уравнения (3) можно проинтегрировать введя: $T_z = T_2\cos\alpha^* + Q_2\sin\alpha^*$, $q_z = q_2\cos\alpha^* + q_n\sin\alpha^*$, $q_2 = -q_2\sin\alpha^* + q_n\cos\alpha^*$.

Из уравнения (3) следует:

$$\left(R\left(T_2\cos\alpha^* + Q_2\sin\alpha^*\right)\right)^\bullet = -Rb\left(q_2\cos\alpha^* + q_n\sin\alpha^*\right),$$
$$\left(R\left(T_2\sin\alpha^* - Q_2\cos\alpha^*\right)\right)^\bullet = Rb\left(-q_2\sin\alpha^* + q_n\cos\alpha^* - b\frac{\varphi^*}{\varphi}T_1\right). \tag{5}$$

Из первого уравнения (5) можно определить $T_2\cos\alpha^* + Q_2\sin\alpha^*$, а из второго уравнения T_1. Заметим, что в случае безмоментной теории $m_2 = 0$, $M_2 = M_1 = 0$, а из (4) следует, что $Q_2 = 0$. При $\varphi^* \neq \varphi$, $\cos\alpha^*$ и $\sin\alpha^*$ представляются в таком виде:

$$\sin\alpha^* = \sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha + \theta\cos\alpha - \frac{1}{2}\theta^2\sin\alpha + ...$$
$$\cos\alpha^* = \cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha + \theta\sin\alpha - \frac{1}{2}\theta^2\cos\alpha + ...,$$

где $\theta = \alpha^* - \alpha$, α – угол касательный к меридиану с осью вращения.

Для замкнутой системы уравнений геометрически нелинейной теории оболочек рассмотрим упругие оболочки, для которых справедливы гипотезы Кирхгофа о неизменности нормального сечения (точки на нормали к срединной поверхности образуют нормаль и к деформированной срединной поверхности, причем находятся на тех же расстояниях, что и до деформации). Напряжения, направленные по касательной к срединной поверхности, пренебрежимо малы [3].

Деформация срединной поверхности характеризуется следующими величинами:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{A_1\partial\xi} + \frac{v}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\eta} + \frac{w}{R_1}, \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{A_2\partial\eta} + \frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\xi} + \frac{w}{R_2},$$
$$\gamma = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{u}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{v}{A_1}. \tag{6}$$

$$\theta_1 = -\frac{\partial w}{A_1\partial\xi} + \frac{u}{R_1},\ \theta_2 = -\frac{\partial w}{A_2\partial\eta} + \frac{v}{R_2},\ 2\omega = \frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2u}{\partial\xi} - \frac{\partial A_1v}{\partial\eta}\right). \tag{7}$$

$$\chi_1 = \frac{\partial\theta_1}{A_1\partial\xi} + \frac{\theta_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\eta}, \chi_2 = \frac{\partial\theta_2}{A_2\partial\eta} + \frac{\theta_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\xi},$$
$$2\tau = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{Q_2}{A_2}\right) + \frac{\gamma-2\omega}{2R_1} + \frac{\gamma+2\omega}{2R_2}. \tag{8}$$

Для поверхности вращения они принимают такой вид:

$$\xi = \varphi = \frac{S_1}{R},\ A_1 = R(\eta),\ \eta = \frac{S_2}{A_2},\ A_2 = b = const. \tag{9}$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d\alpha}{dS_2} = \frac{1}{b}\frac{d\alpha}{d\eta},\ \sin\alpha = -\frac{1}{b}\frac{dR}{d\eta},\ \cos\alpha = \frac{1}{b}\frac{dz}{d\eta},\ \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\cos\alpha,\ \frac{1}{\rho_1} = \frac{\sin\alpha}{R}. \tag{10}$$

Уравнения чистомоментной теории оболочек Кирхгофа – Лява получим из выше приведенных разрешающих систем при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma = 0$, $T_1 = T_2 = S = 0$ [4]. Они имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{Q_1}{R_1^{'}}+\frac{Q_2}{R_{21}^{'}}+q_1=0, \frac{Q_1}{R_{12}^{'}}+\frac{Q_2}{R_2^{'}}+q_2=0, \\
\frac{\partial\left(A_2Q_1\right)}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(A_1Q_2\right)}{\partial\eta}+q_nA_1A_2=0.
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\left(A_2H_1\right)}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(A_1M_2\right)}{\partial\eta}+A_1A_2\left(\frac{M_1}{\rho_1^{'}}+\frac{H_2}{\rho_2^{'}}-Q_2+m_2\right)=0, \\
\frac{\partial\left(A_2M_1\right)}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(A_1H_2\right)}{\partial\eta}-A_1A_2\left(\frac{H_1}{\rho_1^{'}}+\frac{M_2}{\rho_2^{'}}+Q_1-m_1\right)=0, \\
S_1-\frac{H_2}{R_2^{'}}-\frac{M_1}{R_{12}^{'}}=S_2-\frac{H_1}{R_1^{'}}-\frac{M_2}{R_{21}^{'}}.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Из систем уравнений (11) и (12) следует, что оболочки с конечной жесткостью на изгиб, в отличии от абсолютно гибких оболочек, могут находиться в чистомоментном состоянии при наличии в них как растягивающих, так и сжимающих усилий. Они будут терять устойчивость лишь после того, когда сжимающие усилия превзойдут в них некоторое критическое значение. Для абсолютно гибких оболочек безмоментное напряженно - деформированное состояние является единственно возможным, поскольку они не обладают сопротивлением изгибу, в отличие от оболочек с конечной жесткостью, для которых такое напряженное состояние является только одним из возможных. При этом существование состояния конечной жесткости достигается при выполнении ряда условий, касающихся формы оболочки, характера действующей на нее нагрузки и закрепления краев. Если напряжения от моментов превосходят напряжения от усилий, то в оболочке могут появиться области безмоментного НДС, и его расчет потребует дополнительного рассмотрения. Характер упругого НДС определяется необходимостью удовлетворения граничным условиям. В случае безмоментного НДС граничные условия должны определяться на основании решения задачи теории оболочек в напряжениях. Если задать перемещения на границах оболочки, ее НДС определяется на основании задания вектора перемещений. При нормальной деформации происходит изменение формы поверхности. Получаемые при этом математические модели описываются системами дифференциальных уравнений разных порядков. К примеру, деформацию второго рода, определим одними только нормальными перемещениями $\omega=\omega\left(\alpha,\beta\right)$ прогибами оболочки в направлении нормалей к средней поверхности.

РЕЗЮМЕ

Проведено аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния тонких упругих оболочек. На основании которого можно сделать вывод, что оболочки с конечной жесткостью на изгиб, в отличии от абсолютно гибкой оболочки, может находиться в чистомоментном состоянии при наличии в них как растягивающих, так и сжимающих усилий. Она будет терять устойчивость лишь после того, когда сжимающие усилия превзойдут в них некоторое критические значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Белов. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов // Томск: STT, 2004.- 465с.
2. Bangash M. Y. H. Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies. // Bangash M. Y. H., Bangash T. Springer, Berlin, 2006. - 450 p.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.-Л.: Физматгиз, 1949. – 784 с.
4. Белкин А.Е., Гаврюшин С. С. Расчет пластин методом конечных элементов. – М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 232с.

SUMMARY

It is carried out analytical research of the is intense-deformed condition of thin elastic envelopes. On the basis of which it is possible to come to the conclusion, that envelopes with final rigidity on a bend, in difference from absolutely flexible envelope, can be in чистомоментном a condition at availability in them both stretching, and compressing efforts. It will lose stability only after when compressing efforts will surpass in them the some critical values.

Поступила в редакцию 12.09.2013