539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ НА СПЕКТР И ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПЛАСТИН.

Пронкевич С.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск.

Введение.

Большинство исследований собственных колебаний пластин посвящено исследованию прямоугольных или круглых пластин. В последнее время в связи с распространением пакетов конечно-элементных программ появилась возможность исследовать колебания пластин более сложной формы. В данной работе получен спектр и формы собственных колебаний правильных многоугольных пластин. Полученные значения форм и частот колебаний позволяют варьировать формой пластины и граничными условиями в зависимости от значений частот собственных колебаний.

Учет влияния неоднородности пластины рассмотрен на двух моделях. Первая модель учитывает неоднородность за счет перфорации. Сравниваются значения частот и форм собственных колебаний круглой пластины в зависимости от размера и положения отверстия.

Вторым вариантом неоднородности рассматривается влияние точечной массы на спектр и форму собственных колебаний пластины. Определяется влияние положения вдоль радиуса и величина сосредоточенной массы на значение частот собственных колебаний.

Рассмотрены особенности определения форм колебаний при моделировании с использованием программ, основанных на методе конечных элементов.

1. Определение частот и форм собственных колебаний правильных многоугольных пластин. Известно, что вид собственных форм колебаний определяется геометрией пластины, благодаря чему для круглой и прямоугольной пластин собственные формы легко указываются. Для пластин многоугольной даже правильной формы решение этой задачи неочевидно. Т.к. площадь пластины вписанного и описанного правильных многоугольников в пределе стремятся к площади круга, то согласно теореме, доказанной Вейлем и другими исследователями спектр собственных частот правильного многоугольника должен переходить непрерывно в спектр собственных частот круга и собственные колебания многоугольника в собственные колебания круга. Рассмотрим оценки погрешности приближения пластин в форме многоугольника круглыми пластинами (рисунок 1).

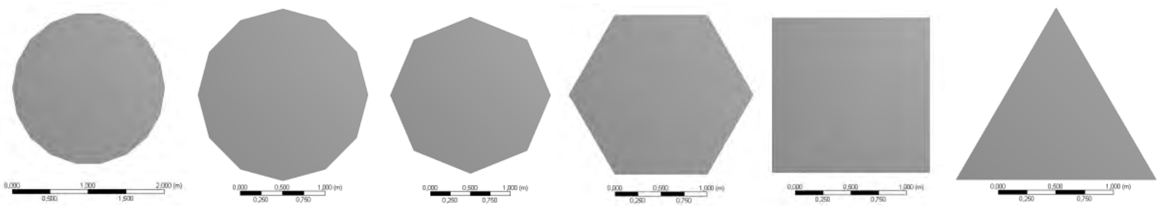


Рисунок 1. - Формы многоугольников, используемые при расчете.

Пусть пластина, выполненная в форме правильного N – угольника *(N=18, 12, 8, 6, 4, 3)*, вписанного в круг единичного радиуса. Толщина составляет th=0,01 м, модуль Юнга $E=2\cdot10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м^3.

Пластина свободно оперта по своему контуру, т.е. на каждой грани должно выполняться граничное условие $\dfrac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 0$.

Аналитическое решение данной задачи можно привести только для случая $N=4$ [1]. Во всех же остальных случаях необходимо использовать численные методы для определения спектра частот и форм собственных колебаний. На рисунке 2 представлены формы колебаний N-угольных пластин, полученные в системе конечно-элементного моделирования ANSYS.

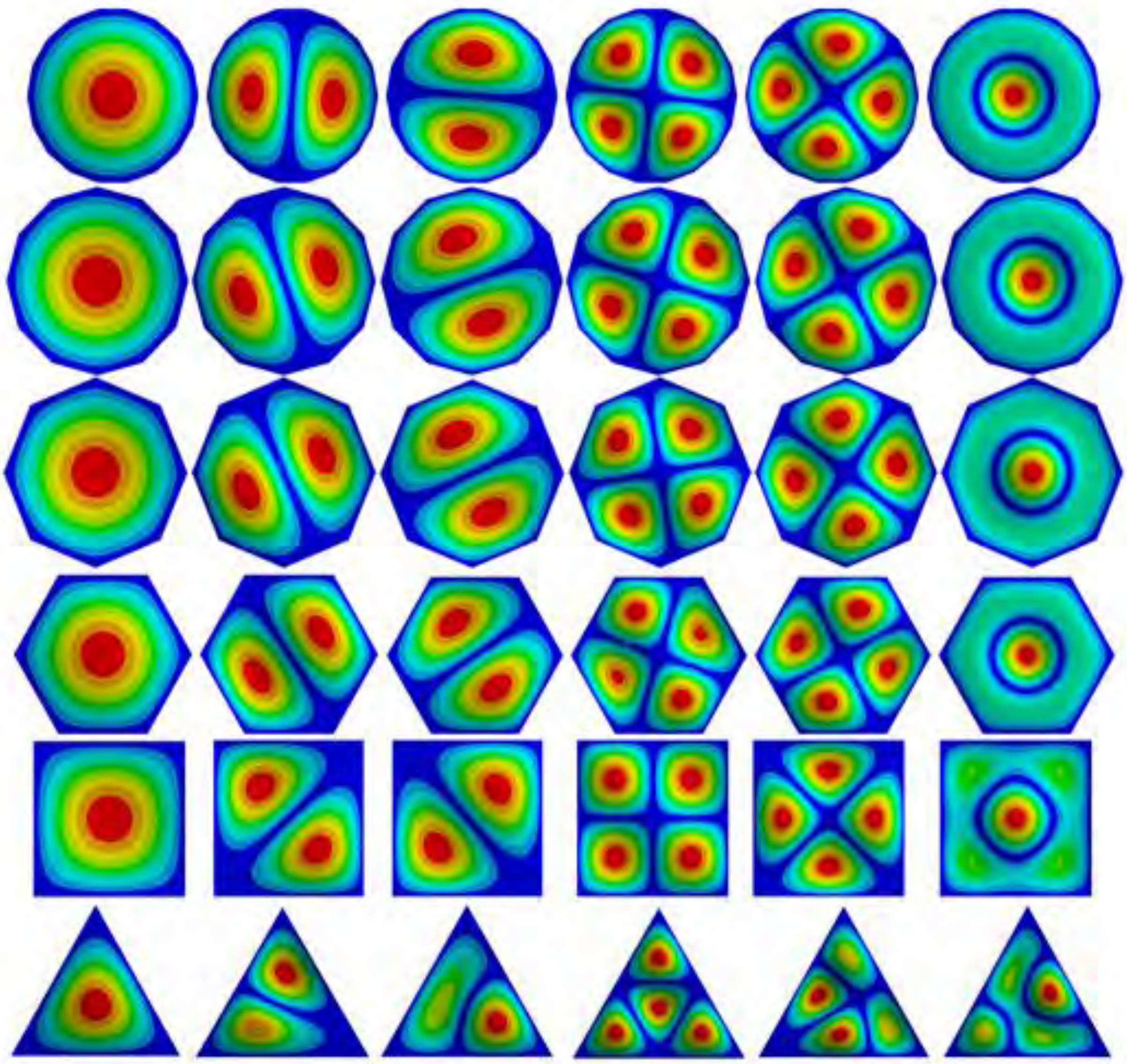
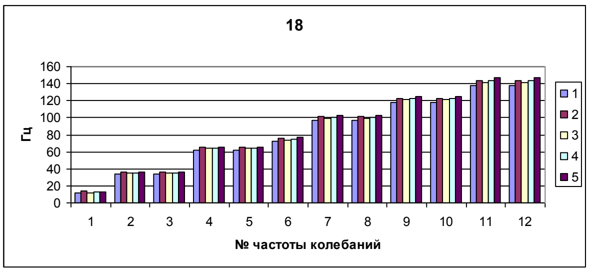


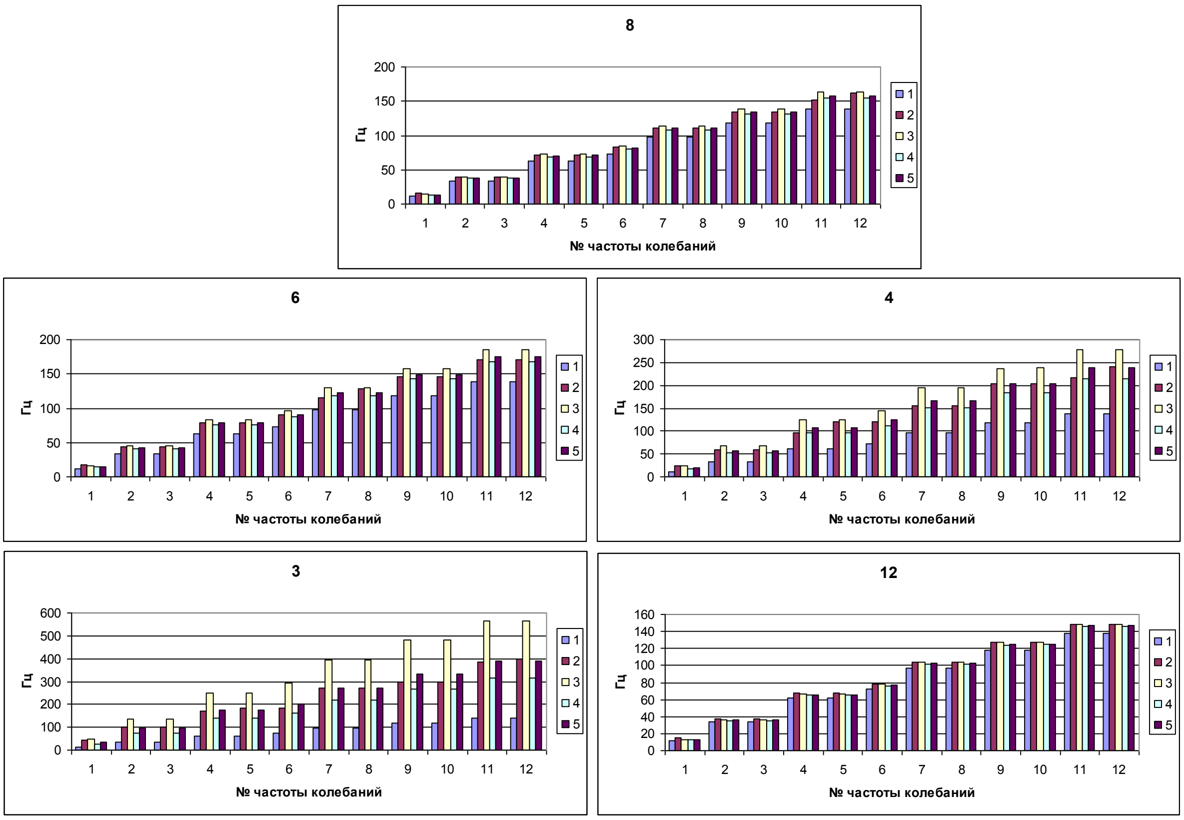
Рисунок 2. - Формы собственных колебаний пластин в форме правильных многоугольников

Как следует из рисунка 2, формы собственных колебаний пластин в форме правильных многоугольников визуально совпадают с формами собственных колебаний пластины в форме круга. Как и в случае форм собственных колебаний круглой пластины при расчете в системе ANSYS появляются дублирующиеся, практически совпадающие по значению, частоты и формы колебаний, повернутые на 90 градусов относительно исходной формы.

На рисунке 3 приведено сравнение значений частот собственных колебаний N-угольных пластин с частотами описанной и вписанной в них окружностями, а также эквивалентной окружности, радиус которой равен $\rho = (4r + R)/5$, где r – радиус вписанной в многоугольник окружности, R – радиус описанной окружности.

Из графиков видно, что наилучшее приближение многоугольника дает окружность, радиус которой равен $\rho = (4r + R)/5$





1 – описанная окружность, 2 – многоугольник, 3 – вписанная, 4 – радиус равен $\rho = (r + R)/2$,
5 – радиус равен $\rho = (4r + R)/5$

Рисунок 3. - Сравнения значений первых 12 частот собственных колебаний N-угольных пластин, а также вписанной, описанной и эквивалентной окружностей.

В таблице 1 приведено усредненное значение погрешности приближения многоугольной пластины круглой пластиной с радиусом описанной, вписанной и подобранной окружности.

Таблица 1 – Оценки погрешности приближения частот собственных колебаний многоугольных пластин частотами построенных окружностей.

Пластина	Описанная окружность, %	Вписанная окружность, %	Окружность радиуса $\rho = (4r + R)/5$, %
18	5,04	1,97	2,1
12	8,08	1,92	2,99
8	12,82	3,37	2,52
6	19,99	6,4	3,34
4	41,59	17,40	6,13
3	64,5	43,81	6,28

Очевидно, что наилучшее приближение к частотам собственных колебаний многоугольной пластины дает пластина с радиусом $\rho = (4r + R)/5$, погрешность которой не превышает 7%.

2. Влияние отверстия на частоту и форму собственных колебаний круглой пластины.

Рассмотрим круглую пластину единичного радиуса *R=1* с отверстием радиусом *r=0,1..0,5R* (рисунок 4)

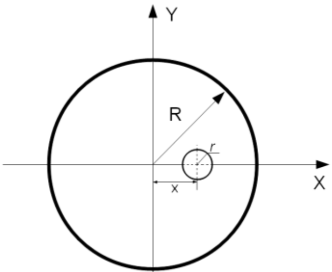


Рисунок 4. - Расчетная схема определения частот и форм собственных колебаний пластины с отверстием

Введем в рассмотрение отношение

$$N^* = \frac{N_x^d}{N_0}$$ - коэффициент колебаний неоднородной пластины,

где N_x^d – критическая нагрузка для пластины, имеющей перфорацию с отношением диаметра к ширине пластины равным d; N_0 – частота колебаний сплошной пластины.

Графики зависимости N* от положения и размера отверстия показаны на рисунок 5

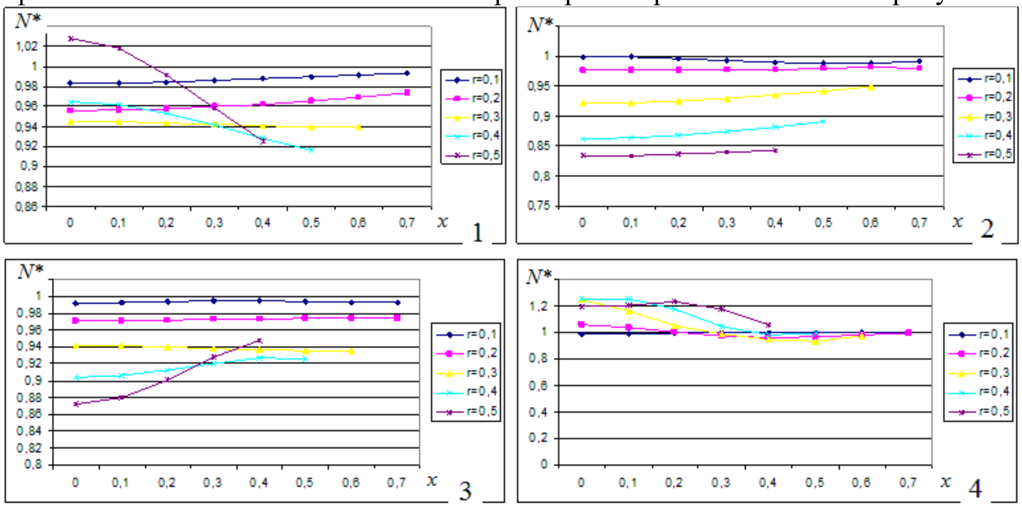


Рисунок 5. - Графики изменения N для первых четырех частот собственных колебаний круглой пластины с отверстием*

На рисунке 6 показано изменение первых четырех форм колебаний при смещении отверстия *r=0,1R(а, б, в)* и *r=0,4R (г,д,е)* вдоль радиуса.

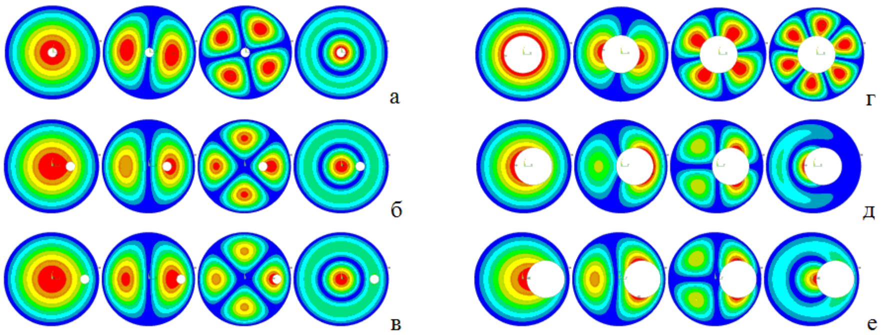


Рисунок 6. - Изменение первых четырех форм колебаний круглой пластины при изменении положения отверстия r=0,1R(а, б, в) и r=0,4R (г,д,е) вдоль радиуса при x= 0(а,г); x=0,4R(б,д); x=0,7R(в); x=0,5R(е)

Как видно из графиков и рисунка 6 отверстия малого радиуса *(r=0,1R - 0,3R)* мало влияют на частоту собственных колебаний сплошной круглой пластины и не оказывают какого-либо значительного влияния на форму колебаний. Данное численное решение подтверждает полученные К.Г. Чижевским результаты [2]. Отличия наблюдаются для пластин с отверстием большого радиуса *(r≥0,4R)*, при смещении его к краю пластины. Но и при этом формы колебаний в общих чертах повторяют форму колебаний пластины без отверстия.

3. Влияние сосредоточенной массы на частоту и форму собственных колебаний круглой пластины. Рассмотрим влияние сосредоточенной массы форму колебаний круглой пластины. Расположение сосредоточенной массы варьируется вдоль радиуса от *0R* (центр пластины) до *0,8R* (рисунок 7). Масса варьируется от *25%* до *300%* массы пластины.

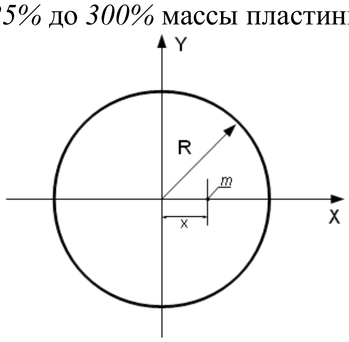


Рисунок 7. - Расчетная схема модели с сосредоточенной массой

Введем в рассмотрение отношение

$$N^{**} = \frac{N_x^m}{N_0}$$ - коэффициент колебаний неоднородной пластины,

где N_x^m – критическая нагрузка для пластины, имеющей сосредоточенную массу m; лежащую на расстоянии x от центра пластины; N_0 – частота колебаний сплошной пластины.

На рисунке 8 показаны графики зависимости N** от величины массы и ее расположения.

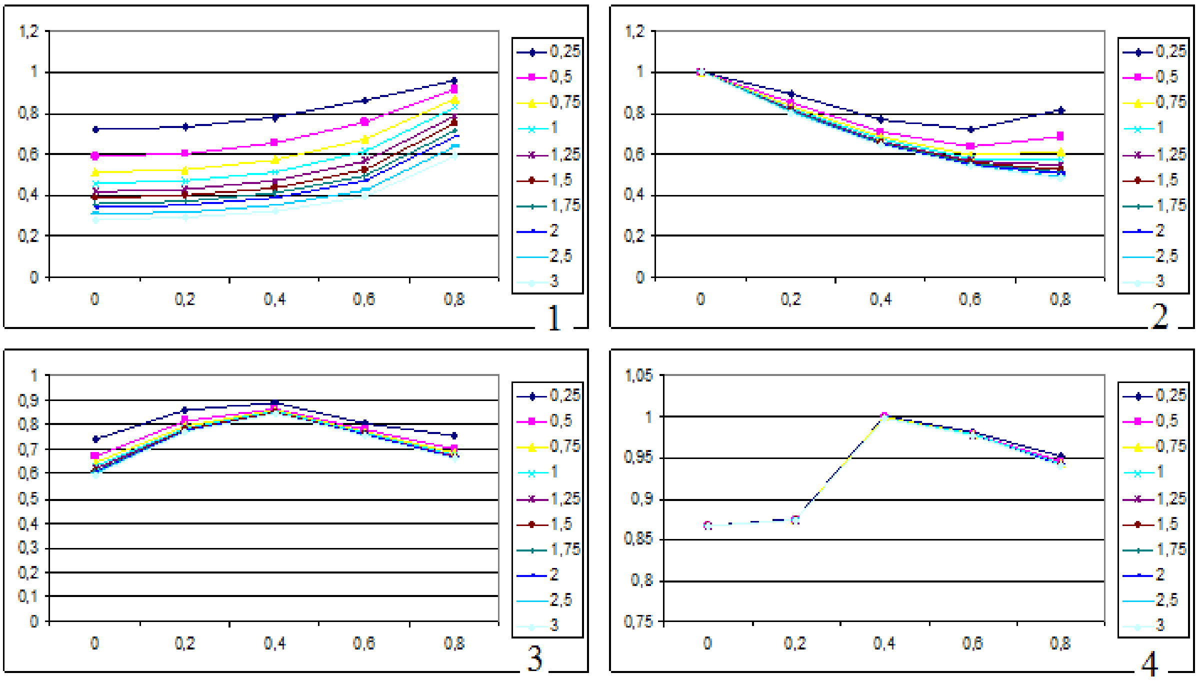


Рисунок 8. - Графики изменения первых четырех частот собственных колебаний круглой пластины с отверстием

На рисунке 9 показано изменение первых четырех форм собственных колебаний при смещении сосредоточенной массы вдоль радиуса. На рисунках 9а), 9б) и 9в) величина сосредоточенной массы составляет 25% от массы пластины, на рисунках 9г), 9д) и 9е) масса составляет 200% от массы пластины.

Как видно из рисунка 9, в случае сосредоточенной массы, расположенной в центре (9а и 9г), формы колебаний практически не отличаются от форм собственных колебаний круглой пластины при отсутствии сосредоточенной массы. Незначительное отличие наблюдается лишь в осесимметричном случае формы собственных колебаний, когда уменьшается амплитуда колебаний. Во всех же остальных случаях сосредоточенная масса, расположенная в центре пластины, находится на узловых линиях и не влияет на форму собственных колебаний, а лишь приводит к уменьшению частоты.

При сдвиге сосредоточенной массы вдоль радиуса наблюдается образование узловых линий в области приложения сосредоточенной массы (рисунок 9б, в, д, е).

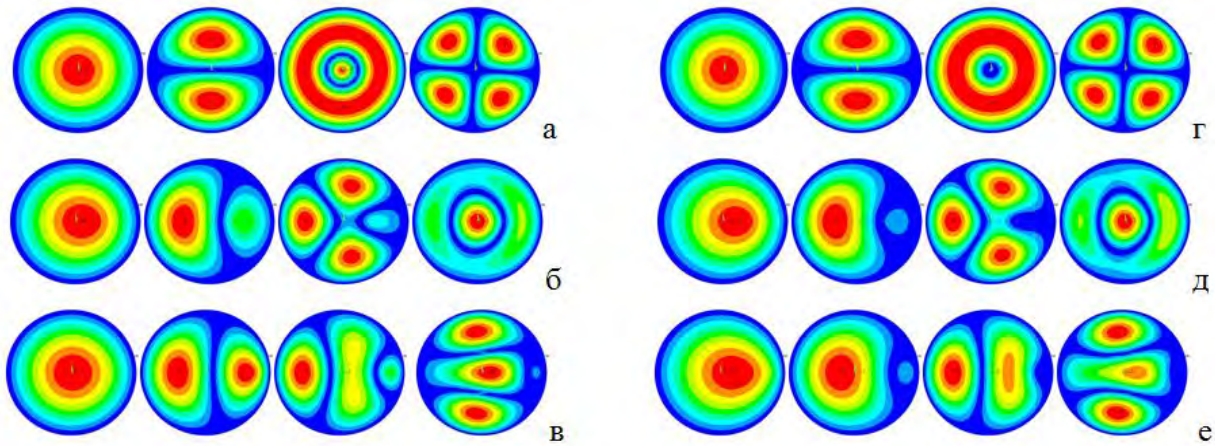


Рисунок 9. - Изменение первых четырех форм колебаний круглой пластины при изменении положения сосредоточенной массы в 25% (а, б, в) и 200% (г, д, е) от массы пластины вдоль радиуса при x= 0 (а, г); x=0,4R(б, д); x=0,8R(в, е)

Выводы.

1. Формы собственных колебаний пластин в форме правильных многоугольников визуально совпадают с формами собственных колебаний пластины в форме круга. При численном определении частот собственных колебаний многоугольных пластин правильную многоугольную пластину можно принять за окружность с радиусом, равным $\rho = (4r + R)/5$.
2. Отверстия малого радиуса (*r=0,1R ÷ 0,3R*) мало влияют на частоту собственных колебаний сплошной круглой пластины и не оказывают какого-либо значительного влияния на форму колебаний. При этом частота собственных колебаний снижается по сравнению с соответствующими частотами сплошной пластины. Внесение отверстий большего радиуса *(r≥0,4R)* при смещении вдоль радиуса приводит к изменению форм колебаний и увеличению, начиная с четвертой, значений частот собственных колебаний.
3. При смещении сосредоточенной массы вдоль радиуса возникают несимметричные формы колебаний; в местах расположения сосредоточенной массы наблюдается возникновение узловых линий, не свойственных колебаниям пластины без сосредоточенной массы.
4. Расположение сосредоточенной массы в центре пластины приводит к изменению частот колебаний только для осесимметричной формы колебаний (в частности, первая и четвертая). Во всех остальных случаях сосредоточенная масса располагается на узловой линии и не приводит к изменению форм.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается динамика круглых пластин при наличии неоднородности в виде отверстия или сосредоточенной массы. Определяется влияния величины и положения неоднородности на частоты и формы собственных колебаний круглой пластины. Также рассматривается приближение частот и форм колебаний правильных многоугольных пластин круглыми пластинам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки / Биргер И.А. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, Москва: Наука, 1992. - 390 с.
2. Чижевский К. Г. Расчѐт круглых и кольцевых пластин / К. Г. Чижевский Л: «Машиностроение» Ленинградское отделение, 1977. - 184 с.

SUMMARY

In this paper we consider the dynamics of circular plates in the presence of heterogeneity in the form of holes or concentrated mass. Determined by the influence of the size and position of heterogeneity in the frequency and form of natural oscillations of a circular plate. We also consider the approximation of frequencies and mode shapes of regular polygonal plates platters.

Поступила в редакцию 12.09.2013