УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ПРОНИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА РЕЛАКСАЦИЮ ПРИ СЖАТИИ

н.с. **Гавриленко С.Л.,** к. т. н. **Шилько С.В.**

ГНУ «Институт механики металлополимерных систем НАН Беларуси им. В.А. Белого», Гомель

Введение. Полимерные материалы и композиты на их основе обладают выраженными реономными свойствами, что в процессе эксплуатации проявляется в постепенном накоплении деформаций ползучести и необратимом изменении геометрической формы элементов конструкций и деталей машин. Существующие аналитические решения, полученные в рамках теории вязкоупругости, пригодны для анализа деформирования элементов конструкций относительно простой конфигурации. С другой стороны, прикладные прочностные расчеты реальных конструкций методом конечных элементов, некритичным к геометрии деформируемой области, как правило, сводятся к упругому решению и не позволяют прогнозировать кинетику ползучести и релаксации.

Для получения корректного конечноэлементного решения вязкоупругих задач необходимо выполнить этап идентификации используемой реологической модели материала по имеющимся экспериментальным данным, полученным из испытаний стандартных образцов. В частности, в настоящей работе описана методика определения параметров вязкоупругой модели Прони на примере распространенного в технике полимерного материала Фторопласт-4.

Методика определения вязкоупругих констант материала. К настоящему времени для описания процессов ползучести и релаксации полимерных материалов отечественными и зарубежными исследователями предложен ряд вязкоупругих моделей [1-4]. Поскольку в распространенных программных продуктах конечноэлементного анализа, например, ANSYS, используется модель Прони, в целях определения реологических констант материала по результатам стандартных испытаний запишем определяющие соотношения указанной модели [5]:

$$\sigma_{ij}(t)=\int_0^t 2G(t-\tau)\frac{e_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau+\delta_{ij}\int_0^t K(t-\tau)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}d\tau, \qquad (1)$$

здесь $G(\xi)=G_\infty+\sum_{i=1}^{n_G}G_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^G}}$, $K(\xi)=K_\infty+\sum_{i=1}^{n_K}K_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^K}}$,

$$G(0)=G_\infty+\sum_{i=1}^{n_G}G_i=\mu,\;\; K(0)=K_\infty+\sum_{i=1}^{n_K}K_i=K\,.$$

Согласно [2] имеем зависимости для упругих констант:

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu};\; K=\frac{E}{3(1-2\nu)};\; \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)};\; \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Далее вводим упрощающее предположение о постоянстве коэффициента Пуассона материала ν = const. В этом случае имеют место следующие зависимости:

$$ER_E(t-\tau)=2(1+\nu)G_\tau^{'}(t-\tau);$$

$$K_\tau^{'}(t-\tau)=\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}G_\tau^{'}(t-\tau).$$

Тогда соотношение (1) запишется в виде:

$$\sigma_{ij}(t)=\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon(t)\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}(t)\right]-\frac{E}{1+\nu}\int_0^t R_E(t-\tau)\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon(\tau)\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}(\tau)\right]d\tau\,.$$

После математических преобразований получим аналитическую зависимость силы от времени в опыте на релаксацию при сжатии цилиндрического образца:

$$P(t)=E\varepsilon_0 S_0\left(1-\frac{2(1+\nu)}{E}\left(\sum_{i=1}^{n_G}G_i\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}}\right)\right)\right).$$

Апробация методики. Для определения по вышеизложенной методике вязкоупругих параметров полимерного материала Фторопласт–4 на машине Instron 5567 были проведены механические испытания стандартных цилиндрических образцов на кратковременную релаксацию при сжатии. Полученные зависимости приведенного усилия от времени для различных уровней деформации при модуле Юнга E = 600 МПа представлены на рисунке 1.

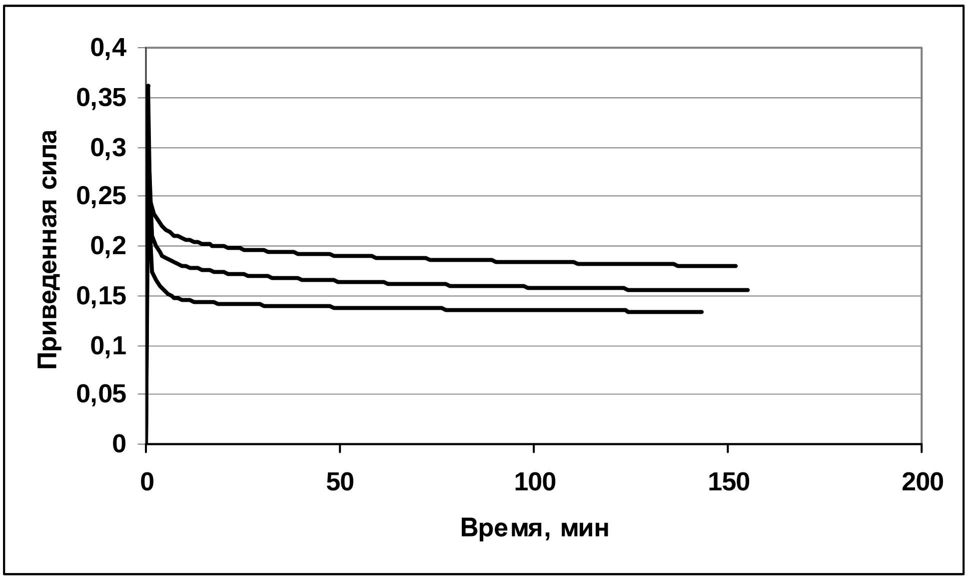

Рисунок 1. - Кривые приведенного усилия $\left(\frac{P(t)}{E\varepsilon S_0}\right)$ *для материала Фторопласт-4.*

Нижняя кривая соответствует $\varepsilon = -0{,}142$, срединная кривая – $\varepsilon = -0{,}111$, верхняя кривая – $\varepsilon = -0{,}079$. Расхождение не превышает 20 %.

Для вычисления параметров модели использовалась силовая характеристика при $\varepsilon = -0{,}111$ в виде 4-х пар значений времени и приведенной силы (таблица 1).

Таблица 1.

Значения приведенной силы для 4-х моментов времени

t_i, мин	1,36	20,36	80,36	100,36
$\frac{P}{E\varepsilon_0 S_0}$, E=600 МПа	0,210	0,172	0,160	0,158

Для квадратичного отклонения (невязки) Δ записывалось выражение:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4}\left(P^i_{прив} - 1 + \frac{2(1+\nu)}{E}\left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}}\right)\right)\right).$$

Минимизируя невязку, находим константы G_∞, G_1, λ_1 в зависимости от модуля Юнга в предположении известного коэффициента Пуассона (далее принято ν = 0,4). Результаты для $n_G = 1$ представлены в Таблице 2.

Таблица 2.

Параметры функции сдвига в модели Прони ($n_G = 1$) в зависимости от модуля Юнга

E, МПа	150	200	250	300	400	500	600
G_∞, МПа	35,1	35,2	35,1	34,9	34,8	35,2	34,6
G_1, МПа	18,5	36,3	54,2	72,2	108,1	143,4	179,7
λ_1, мин	2,2	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5

$\Delta_{îòí}$, %	2,8	3,0	2,8	3,0	3,0	3,0	3,2

Аналогично находим константы $G_\infty, G_1, G_2, \lambda_1, \lambda_2$ в зависимости от величины модуля Юнга при $n_G = 2$ (таблица 3).

Таблица 3.

Параметры функции сдвига в модели Прони ($n_G = 2$) в зависимости от модуля Юнга

E, МПа	150	200	250	300	400	500	600
G_∞, МПа	34,5	34,5	34,5	34,4	34,4	34,6	34,4
G_1, МПа	18,4	36,1	54,0	71,8	107,6	142,8	178,9
G_2, МПа	0,641	0,851	0,830	0,947	0,894	1,22	1,01
λ_1, мин	2,0	0,95	0,75	0,65	0,55	0,45	0,45
λ_2, мин	40	40	40	50	50	30	50
$\Delta_{îòí}$, %	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4

Для моделирования напряженно-деформированного состояния цилиндрического образца из ПТФЭ при сжатии были проведены испытания со скоростью движения траверсы машины 5 мм/мин, 100 мм/мин, 300 мм/мин. Экспериментальные зависимости представлены на рисунках 2,3.

Для моделирования сжатия цилиндрического образца с различными скоростями движения траверсы найдены параметры модели Прони ($n_G = 1$),($n_G = 2$) в зависимости от модуля Юнга при постоянном коэффициенте Пуассона $(\nu = 0,4)$. По найденным значениям определены аналитические зависимости усилия от времени и вычислена средняя относительная погрешность при 3 различных скоростях нагружения. Результаты представлены в таблицах 4,5.

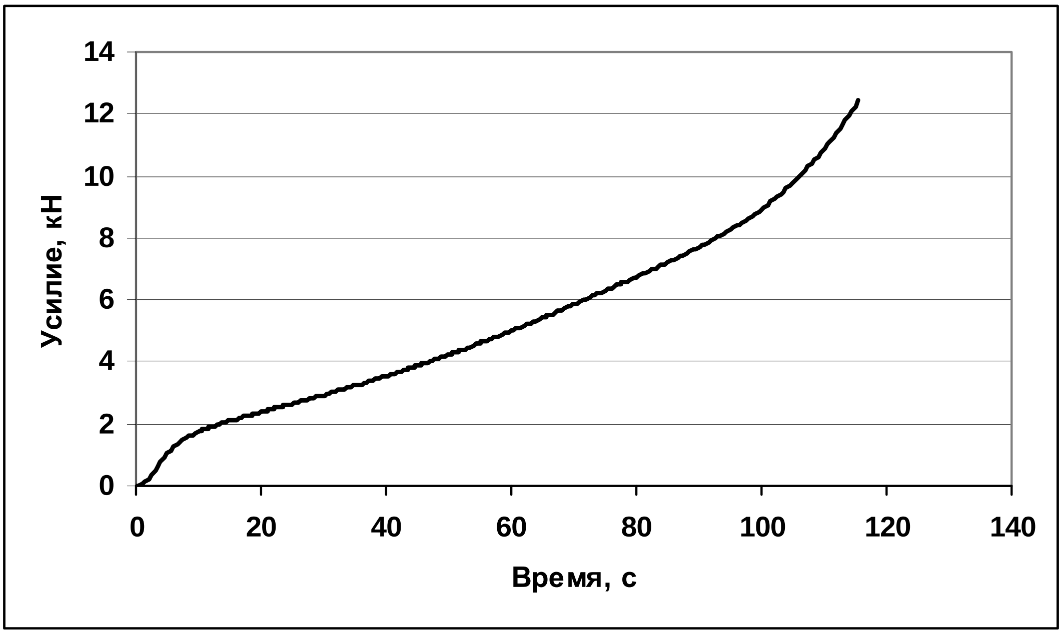

Рисунок 2. - Зависимости «Усилие (Н) – Время (мин)», полученные из испытаний на сжатие цилиндрического образца со скоростью 5 мм/мин.

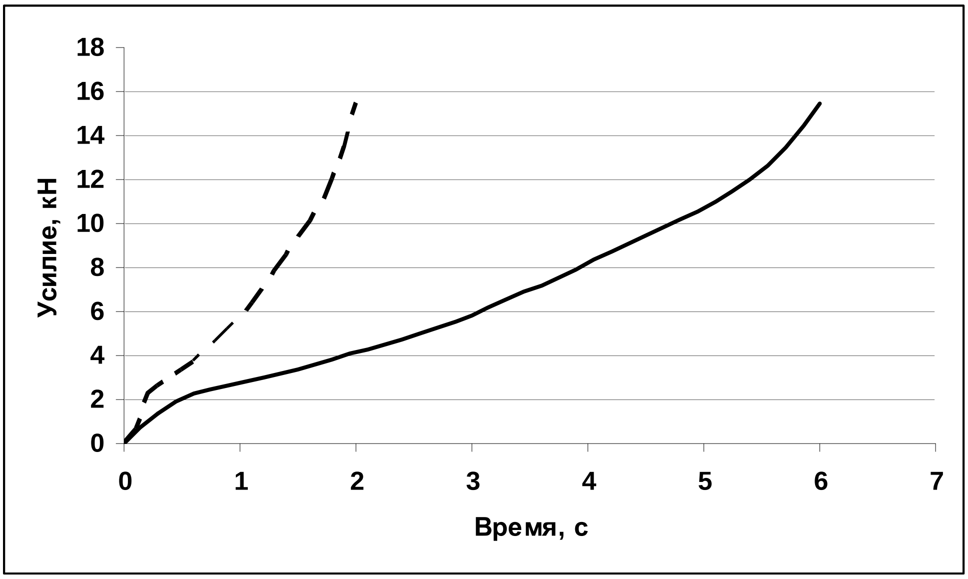

Рисунок 3. - Зависимость усилия от времени при сжатии со скоростью 100 мм/мин (сплошная линия) и 300 мм/мин (пунктирная линия).

Таблица 4.

Значения средней относительной погрешности определения усилия ($n_G = 1$) в зависимости от величины модуля Юнга.

E, МПа	150	200	250	300	400	500	600
$\Delta_{\text{îòí}}$, %	25	47	74	101	158	213	272

Таблица 5.

Значения средней относительной погрешности определения усилия ($n_G = 2$) в зависимости от модуля Юнга.

E, МПа	150	200	250	300	400	500	600
$\Delta_{\text{îòí}}$, %	26	48	73	100	164	210	268

Максимальное значение модуля Юнга при определении параметров вязкоупругой модели, взято априори достоверным (600 МПа), что было подтверждено значением средней относительной погрешности определения усилия, а его минимальное значение выбиралось из условия физической достоверности.

Результаты идентификации. При идентификации модели Прони ($n_G = 1$) для материала Фторопласт-4 при $E = 150$ МПа, $\nu = 0{,}4$ были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно:

$$K(\xi) = 163{,}7 + 86{,}3 \times e^{-\frac{\xi}{2{,}2}},$$

$$G(\xi) = 35{,}1 + 18{,}5 \times e^{-\frac{\xi}{2{,}2}}.$$

Здесь $K_\infty = 163{,}7$ МПа, $\hat{E}_1 = 86{,}3$ МПа, $\tau_1^K = 2{,}2$ мин, $G_\infty = 35{,}1$ МПа, $G_1 = 18{,}5$ МПа, $\tau_1^G = 2{,}2$ мин. Согласно описанию программы ANSYS [5], вводятся дополнительные параметры: $G_0 = G_\infty + G_1$, $K_0 = K_\infty + K_1$, $\alpha_1^G = \dfrac{G_1}{G_0}$, $\alpha_1^K = \dfrac{K_1}{K_0}$, которые для полученных данных равны соответственно: $G_0 = 53{,}6$ МПа, $K_0 = 250$ МПа, $\alpha_1^G = 0{,}345$, $\alpha_1^K = 0{,}345$. К ним следует добавить упругие параметры: $E = 150$ МПа, $\nu = 0{,}4$.

При идентификации модели Прони ($n_G = 2$) для материала Фторопласт-4 были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации ($E = 150$ МПа, $\nu = 0{,}4$):

$$K(\xi) = 161{,}3 + 85{,}7 \times e^{-\frac{\xi}{2{,}0}} + 2{,}98 \times e^{-\frac{\xi}{40{,}0}},$$

$$G(\xi) = 34{,}5 + 18{,}4 \times e^{-\frac{\xi}{2{,}0}} + 0{,}641 \times e^{-\frac{\xi}{40{,}0}}.$$

Здесь $K_\infty = 161{,}3$ МПа, $\hat{E}_1 = 85{,}7$ МПа, $\hat{E}_2 = 2{,}98$ МПа, $\tau_1^K = 2{,}0$ мин, $\tau_2^K = 40{,}0$ мин, $G_\infty = 34{,}5$ МПа, $G_1 = 18{,}4$ МПа, $G_2 = 0{,}641$ МПа, $\tau_1^G = 2{,}0$ мин, $\tau_2^G = 40{,}0$ мин. Согласно описанию программного продукта ANSYS, вводятся дополнительные параметры: $G_0 = G_\infty + G_1 + G_2$, $K_0 = K_\infty + K_1 + K_2$, $\alpha_1^G = \dfrac{G_1}{G_0}$, $\alpha_2^G = \dfrac{G_2}{G_0}$, $\alpha_1^K = \dfrac{K_1}{K_0}$, $\alpha_2^K = \dfrac{K_2}{K_0}$, которые для полученных исходных данных принимают следующие значения: $G_0 = 53{,}6$ МПа, $K_0 = 250$ МПа, $\alpha_1^G = 0{,}343$, $\alpha_2^G = 0{,}012$, $\alpha_1^K = 0{,}343$, $\alpha_2^K = 0{,}012$.

Заключение. Представленная методика идентификации может быть использована в инженерных расчетах для определения области применимости и значений параметров вязкоупругой модели Прони. Для полимерного материала Фторопласт-4 выполнено моделирование одноосного сжатия и определена область применимости модели Прони с погрешностью, не превышающей 25 %. Параметры упругой модели, полученные при идентификации модели Прони, соответствуют параметрам, полученным из одноосных испытаний и рассчитанным по известным методикам определения модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

РЕЗЮМЕ

Представлена методика идентификации вязкоупругой модели Прони в предположении постоянства коэффициента Пуассона. По результатам испытаний полимерного материала Фторопласт-4 на релаксацию при сжатии получена оценка точности линейной модели. Установлено, что методика является устойчивой к вариации экспериментальных данных без использования процедуры регуляризации. Проведена верификация предложенной вязкоупругой модели на основании соотношений Прони с оценкой погрешности входных данных

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С. Механика полимерных и композиционных материалов: учебное пособие / А.С. Кравчук, В.П. Майборода, Ю.С. Уржумцев – М.: Наука, 1985. – 303 с.
2. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учебное пособие / Э.И. Старовойтов – Гомель: Белгут, 2001. – 344 с.
3. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация: учебное пособие / М.А. Колтунов – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости: учебное пособие / Р. Кристенсен – М.: Мир, 1974. – 340 с.
5. ANSYS Revision 10-12.

SUMMARY

This papers considers the problem of identification technique of Prony’s viscoelastic model for constant Poisson’s on relaxation under compression for polymer material Ftoroplast-4.

Поступила в редакцию 24.10.2013