

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА ПРИ ТИМПАНОПЛАСТИКЕ И СТАПЕДОТОМИИ

Славашевич И. Л., к. ф.-м. н. Юркевич К. С.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение.

Перфорация барабанной перепонки может возникнуть в результате хронической инфекции или, реже, из-за травмы. Ограниченная подвижность звукопроводящей цепи слуховых косточек или отосклеротический анкилоз, может привести к частичной или полной фиксации одной из косточек и, в частности, стремени. Для лечения таких патологических заболеваний в клинической практике прибегают к хирургической реконструкции среднего уха. Данная процедура подразделяется на тимпаноластику, оссикулопластику и стапедотомию. Тимпаноластика - это хирургическая операция, выполненная для восстановления барабанной перепонки (ТМ) после перфорации или разрыва. Стапедотомия подразумевает перфорацию подножной пластины стремени, если оно абсолютно зафиксировано. Чтобы устранить разрыв в полностью разрушенной цепи косточек используется протез типа TORP (рисунок 1а). В этом случае основание протеза TORP размещается на реконструированной ТМ, а конец ствола вводится через отверстие в основании стремени в улитку внутреннего уха [1, 2]. Особенностью этого метода реконструкции является то, что функциональный результат сильно зависит от выбора места перфорации подножной пластины стремени [3]. Кроме того, одним из негативных последствий стапедотомии является снижение общей жесткости всей системы, а также искажение спектра собственных частот колебательной системы реконструированного среднего уха (РСУ) [4].

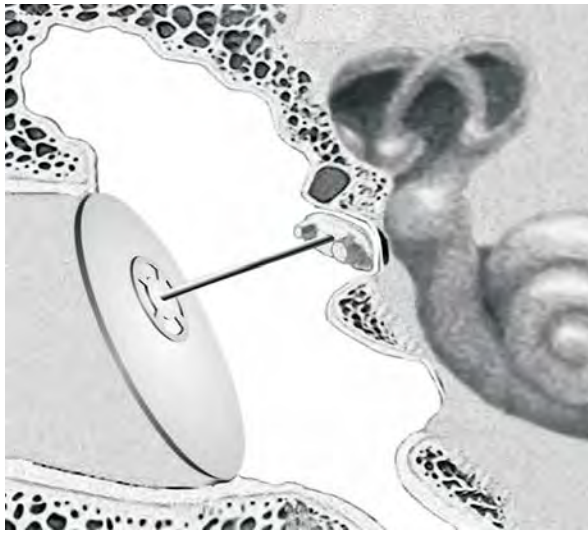
Основной целью настоящей работы является исследование влияния нормальных и тангенциальных перемещений барабанной перепонки на напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха, разработка конечно-элементной модели реконструированной тимпанальной мембраны, анатомическая форма которой близка к эллипсу, а также сравнительный анализ результатов полученных аналитическим методом и методом конечных элементов.

Постановка задачи. Разрешающие уравнения.

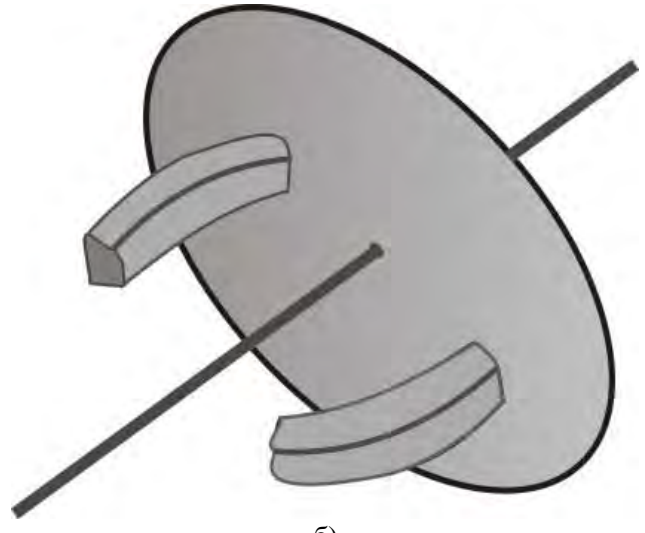
ТМ будем моделировать как круглую упругую изотропную пластинку радиуса a , изготовленную из хрящевого трансплантата [5]. Протез типа TORP состоит из круглой недеформируемой пластинки (основания) радиуса b и жестко сопряженного с ней под некоторым углом γ стержня длиной l . Обозначим через l_0 расстояние от центра основания протеза (точки O) до подножной пластинки стремени. Пусть $\Delta l = l - l_0$ - положительное приращение длины стержня, наличие которого необходимо для устойчивого положения протеза. Также на стволе протеза TORP установим усиливающий элемент в виде пружинки, изготовленной из титана. Длина пружинки выбирается чуть большей расстояния от точки ее фиксации на стволе протеза до головки ствола. При этом шаг винта, толщина и длина пружины берутся такими, чтобы коэффициент жесткости пружины равнялся жесткости связки овального окна $k_{st} = 27.8c_{ref}$, где коэффициент $0.035 \leq c_{ref} \leq 0.05 \text{ Н мм}^{-1}$ определяет общую жесткость связки овального окна [6]. Пусть центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают.

Выводы, сделанные в работе [3], показали, что наиболее предпочтительной технологией установки протеза, обеспечивающей минимальный уровень потенциальной энергии преднапряженной системы, является технология, когда основание протеза размещается к центру ТМ настолько близко, насколько это позволяет индивидуальная архитектура среднего уха. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко склеены, тогда ТМ можно рассматривать как кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами b и a соответственно (рисунок 2а).

В данной работе рассмотрим вариант техники стапедотомии, когда перфорация выполнена в месте, где толщина подножной пластины максимальна, тогда протез имеет одну степень свободы (рисунок 1б).



а)



б)

Рисунок 1. – а) Колебательная система среднего уха, подвергнутого тотальной реконструкции;
б) Ствол протеза с одной степенью свободы, введенный в отверстие перфорации.

Малые нормальные деформации упругой изотропной кольцевой пластины, моделирующей реконструированную ТМ, описываются системой дифференциальных уравнений в отношении нормальных и касательных перемещений [7].

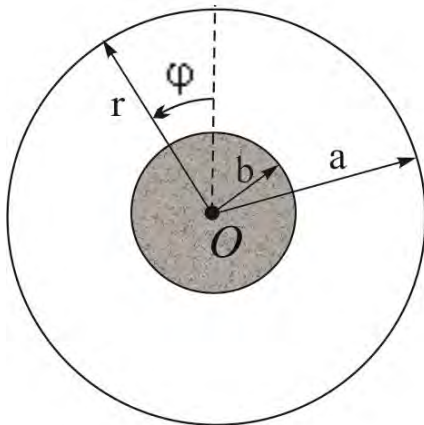
$$D\Delta^2 w + P_s = 0, r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

где

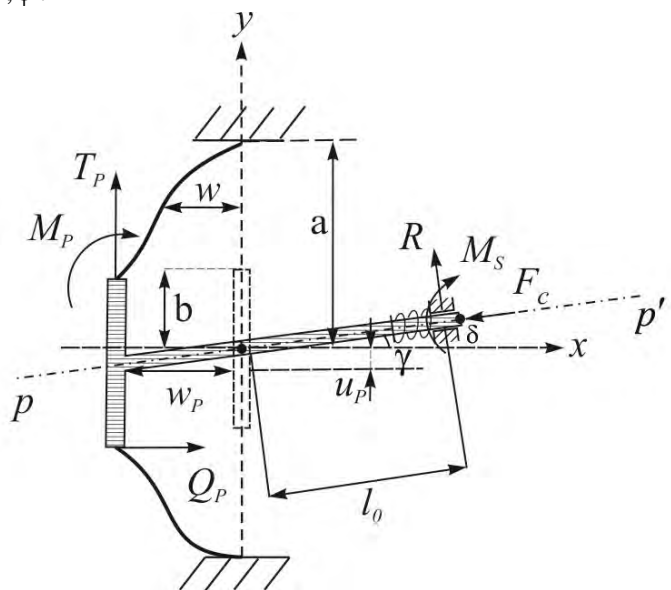
$$T_1 = K \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad T_2 = K \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right),$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right).$$

Здесь D , K – жесткости пластины, E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона пластинки (хряща) соответственно, h – толщина пластины, w, u, v – нормальное, радиальное и касательное перемещения точек пластины, T_1, T_2, S мембранные усилия в ТМ, вызванные установкой протеза, P_s – разность статического атмосферного давления и давления в полости среднего уха, Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат r, φ .



а)



б)

Рисунок 2. – а) Полярная система координат r, φ на поверхности пластины, моделирующей ТМ;
б) Деформации пластины в плоскости Oxy движения протеза, силы действующие на протез.

При установке протез совершит некоторое поступательное перемещение, определяемое направляющей pp' перфорации (рисунок 2б), что приведет к деформации пружины, упирающейся своим концом в подножную пластинку стремени, и, в конечном счете, к увеличению жесткости всей колебательной системы. Место фиксации верхнего конца пружины на стволе протеза может изменяться с целью коррекции жесткости системы.

Принимая во внимание жесткое склеивание основания протеза с ТМ, граничные условия на внутреннем контуре в случае жесткой заделки примут вид:

$$w|_{r=b} = w_p, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{r=b} = -u_p \cos \varphi, \quad v|_{r=b} = u_p \sin \varphi.$$

где w_p , $u_p = w_p \tan \gamma$ – перемещение основания протеза (то есть внутреннего контура ТМ) вдоль осей Ox , Oy соответственно.

На внешнем контуре (тимпанальном кольце) восстановленной ТМ рассмотрим условия упругой заделки [8]:

$$(k_l w + Q)|_{r=a} = 0, \quad \left(k_t \frac{\partial w}{\partial r} + M_1 \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad v|_{r=a} = 0,$$

где k_l, k_t – коэффициенты линейной и торсионной жесткости тимпанального кольца [8]. Здесь, согласно [7], введены следующие обозначения:

$$Q = Q_1, \quad (4)$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_1 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

где Q_1, M_1 – перерезывающая сила, изгибающий момент, действующие в срединной поверхности пластинки.

Уравнения равновесия присоединенного стержня, моделирующего протез, запишутся в виде:

$$Q_p \cos \gamma - F_c - T_p \sin \gamma = 0. \quad (5)$$

Здесь Q_p, T_p – равнодействующие перерезывающих и мембранных сил, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ, $F_c = (k\delta + k_{st}\delta)$ – сила, являющаяся мерой взаимодействия с внутренним ухом и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна, $\delta = \Delta l - w_p / \cos \gamma$ – длина части ствола протеза, вошедшей в кохлеарную жидкость, $k = 8\pi T_0 (S / S_0)^2$ – коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость - мембрана круглого окна» [9], $S_0 = \pi R_0^2$ – площадь круглого окна, T_0 – ее сила натяжения, k_{st} – жесткость усиливающей пружины.

Определим равнодействующие сил, действующих на протез со стороны ТМ. Данные величины находятся путем интегрирования обобщенных перерезывающих сил и соответствующих моментов по всему внутреннему контуру ТМ:

$$Q_p = \int_0^{2\pi} [Q_1 b]_{r=b} d\varphi, \quad T_p = b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos \varphi + S \sin \varphi]_{r=b} d\varphi. \quad (6)$$

Решение краевой задачи.

Решение краевой задачи (1), (2) и (3) будем искать в виде:

$$w = w_0(r),$$

$$u = u_0(r) + u_0^c(r) \cos \varphi + u_0^s(r) \sin \varphi, \quad (7)$$

$$v = v_0(r) + v_0^c(r) \cos \varphi + v_0^s(r) \sin \varphi.$$

Подставляя (7) в уравнение (1), находим:

$$w_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r - \frac{P_s}{64D} r^4,$$

$$\begin{aligned}
u_0(r) &= C_{0,1}r + C_{0,2}\frac{1}{r}, & v_0(r) &= C_{0,3}r + C_{0,4}\frac{1}{r}, \\
u_0^c(r) &= (1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4}, \\
v_0^c(r) &= (5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4}, \\
u_0^s(r) &= (1-3\nu)C_{1,5}r^2 + C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,7}(1-\nu^2) - C_{1,8}, \\
v_0^s(r) &= -(5+\nu)C_{1,5}r^2 - C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1+\nu) - C_{1,8}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя соотношения (8) в граничные условия (2), (3), получим значения неизвестных постоянных, которые в силу громоздкости здесь не приводятся; отметим лишь, что $C_{0,1} = C_{0,2} = C_{0,3} = C_{0,4} = 0$.

Подстановка соотношений (6) в уравнения (5) с учетом (7), (8) приводит к уравнению относительно параметра w_p , характеризующего ориентацию протеза в полости среднего уха и напряженно-деформированное состояние реконструированной ТМ. Вычислив перемещения w_p , u_p , можно найти и напряжения в восстановленной барабанной перепонке.

Конечно-элементная модель.

Для верификации построенной математической модели реконструированного среднего уха, разработана конечно-элементная модель.

Расчеты были выполнены для модели с параметрами $a = 5$ мм, $b = 1$ мм, $E = 3.4$ Н мм⁻², $\gamma = 5\pi/18$, $\nu = 0.4$, $k_l = 0.15$ Н мм⁻², $k_t = 10^{-4}$ Н, $R_0 = 1$ мм, $k_{st} = 1.719$.

На рисунке 3 представлены графики для нормальных перемещений. Результаты, полученные аналитически, обозначены сплошной линией, а результаты, полученные методом конечных элементов - точками.

Из рисунка 3 видно, что имеет место достаточно хорошее совпадение результатов расчета, перемещений реконструированной тимпанальной мембраны, имеющей круговую форму. Различие в результатах составляет менее 1%.

Также разработана конечно-элементная модель реконструированной тимпанальной мембраны в форме близкой к эллипсу с полуосями 5 и 4.8 мм [6]. Анатомически тимпанальная мембрана делится на две части: верхняя часть, называемая мембраной Шрапнеля, является ненатянутой; нижняя натянута, за счет чего мембрана немного вогнута внутрь среднего уха. Тогда на внешнем контуре ($r = a$) рассмотрим условия упругой заделки восстановленной ТМ, согласно которой тимпанальное кольцо заменяется системой распределенных линейных и торсионных пружин с переменными коэффициентами жесткости k_l, k_t для верхней и нижней частей соответственно [8]. Данная задача не может быть решена аналитически, поэтому соответствующие расчеты проведены с помощью метода конечных элементов.

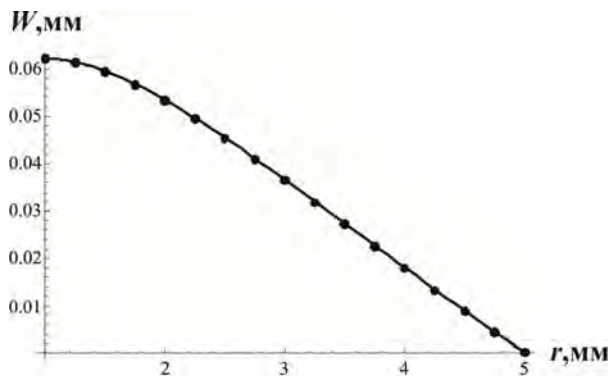


Рисунок 3. – Перемещения пластины w .

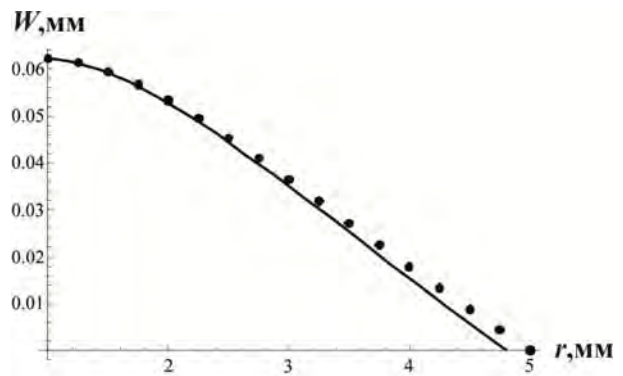


Рисунок 4. – Перемещения пластины w .

Расчеты были выполнены для модели с параметрами $a_1 = 5$ мм, $a_2 = 4.8$ мм, $b = 1$ мм, $E = 3.4$ Н мм⁻², $\gamma = 5\pi/18$, $\nu = 0.4$, $R_0 = 1$ мм, $k_{st} = 1.719$; $k_l = 310^{-3}$ Н мм⁻², $k_t = 310^{-5}$ Н для верхней части тимпанального кольца; $k_l = 0.15$ Н мм⁻², $k_t = 10^{-4}$ Н для нижней части тимпанального кольца соответственно.

На рисунке 4 представлены графики для нормальных перемещений полученных методом конечных элементов для тимпанальной мембраны, имеющей круговую и овальную форму. Результаты, полученные для эллипса, обозначены сплошной линией, а для круговой пластины – точками. Из графика видно, что расхождение результатов наблюдается ближе к внешнему контуру тимпанального кольца, в силу изменения граничных условий на нем.

РЕЗЮМЕ

Предложена биомеханическая модель реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии. Основной целью данного исследования является изучение влияния нормальных и тангенциальных перемещений барабанной перепонки на напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха. Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как изотропная упругая кольцевая пластина, а также как пластина, имеющая форму эллипса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / K.-B. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Wullstein, H. Operationen zur Verbesserung des Gehöres. Stuttgart: Georg Thieme – 1968.
3. Mikhasev, G. On the strain–stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus–incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Mathematical Medicine and Biology. – 2010. –Vol. 27(4). – P. 289-312.
4. Михасев, Г.И. Собственные частоты колебательной системы среднего уха при тотальной реконструкции / Г.И. Михасев, И.Л. Славашевич // Вестник СПбГУ. Сер 1. 2012. Вып. 3. – С. 107–116
5. Zahnert, Th. Experimental investigations of the use of cartilage in tympanic membrane reconstruction / K.-B. Hüttenbrink, D. Murbe, M. Bornitz // The American Journal of Otology. 2000. Vol. 21. p. 322-328.
6. Beer, H.-J. Modeling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behavior / H.-J. Beer [et al.] // Audiology & Neuro-Otology. – 1999. – Vol. 4. – P. 156-162.
7. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 290 с.
8. Wada, H. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
9. Чигарев, А.В. Биомеханика: Учебное пособие/ А.В. Чигарев, Г.И. Михасев. – Мн.: УП «Технопринт», 2004. – 306с.

SUMMARY

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanoplasty and stapedotomy is proposed. The basic goal of this paper is to clear up the influence of the normal and tangential displacements in the eardrum at the strain-stress state of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate, and the plate having an elliptical shape.

Поступила в редакцию 25.10.2013