УДК 681.3

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ МАНИПУЛЯТОРА

к.т.н. **Анципорович П.П.,** к.т.н. **Акулич В.К.,** к.т.н. **Дубовская Е.М.**

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Для манипулятора $B \perp B // B$ с тремя степенями свободы, работающего в ангулярной системе координат, получены дифференциальные уравнения движения звеньев в форме уравнений Лагранжа второго рода. Для этого необходимо определить кинематические характеристики и составить выражения кинетической энергии манипулятора. Схема манипулятора показана на рис. 1. С каждым звеном связываем правую систему координат. Система координат $x_0 y_0 z_0$ – неподвижная, а системы $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ и $x_3 y_3 z_3$ – подвижные, жестко связанные с соответствующими звеньями манипулятора. Оси y_1, y_2, y_3 параллельны. Обобщенными координатами являются параметры относительного движения звеньев: φ_{10} – угол поворота звена 1 относительно звена 0 вокруг оси z_0; φ_{21} – угол поворота звена 2 относительно звена 1 вокруг оси y_2; φ_{32} – угол поворота звена 3 относительно звена 2 вокруг оси y_3.

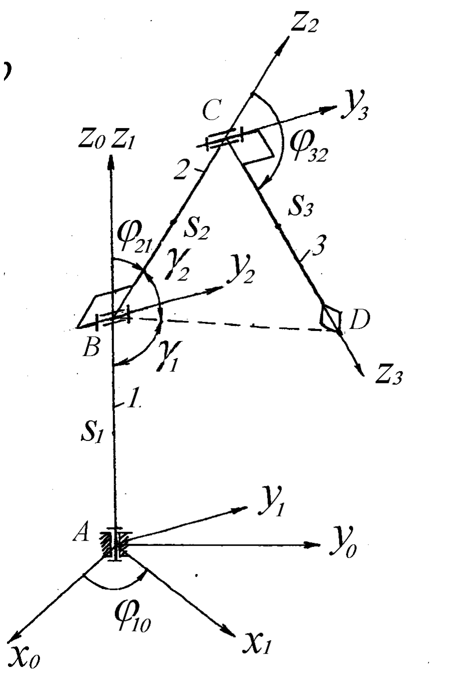

Рисунок 1. - Кинематическая схема манипулятора с 3 степенями свободы

Для определения кинематических характеристик решается прямая задача кинематики манипулятора с использованием метода преобразования координат в матричной форме [1]. Связь между координатами центра схвата (точки *D*) в подвижной и неподвижной системах координат выражается в виде матричного соотношения

$$r_D^{(0)} = A_{01} \left[A_{12} \left(A_{23}\, r_D^{(3)} + L_{23} \right) + L_{12} \right], \quad (1)$$

где A_{01}, A_{12}, A_{23} – матрицы 3×3 поворота координатных осей при преобразовании координат точки из одной системы в другую, а L_{12} и L_{23} – столбцовые матрицы 3×1 параллельного переноса осей. Указанные матрицы составляются согласно известной методике [1].

Далее по аналогии с работой авторов [2] на основании соотношения (1) получены выражения координат центра схвата (точки *D*) и центров масс звеньев S_2 и S_3, скоростей этих точек, а также угловых скоростей звеньев.

Для составления дифференциальных уравнений движения звеньев манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода следует получить выражение кинетической энергии манипулятора *T*, которая складывается из кинетических энергий отдельных звеньев и транспортируемой детали. В частности, кинетическая энергия звена 3 выражается матричной формулой [1]

$$T_3 = \frac{1}{2} \left\{ m_3 V_{S3}^2 + \left(\omega_{30}^{(3)} \right)^T \left[I_{S3} \right] \omega_{30}^{(3)} \right\},$$

где $\left[I_{S3} \right]$ – тензор инерции звена в центре масс,

$$V_{S3}^2 = 0{,}25 l_3^2 \left(\dot\varphi_{10}^2 \sin^2 \varphi_\Sigma + \dot\varphi_\Sigma^2 \right) + l_2^2 \left(\dot\varphi_{10}^2 \sin^2 \varphi_{21} + \dot\varphi_{21}^2 \right) + l_2 l_3 (\dot\varphi_{10}^2 \sin\varphi_{21} \sin\varphi_\Sigma +$$
$$+ \dot\varphi_{21} \dot\varphi_\Sigma \cos\varphi_{32}),$$

$$\varphi_\Sigma = \varphi_{21} + \varphi_{32},$$

$$\left(\omega_{30}^{(3)}\right)^T = \left[-\dot{\varphi}_{10}\sin\varphi_\Sigma \quad \dot{\varphi}_\Sigma \quad \dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_\Sigma\right].$$

Полагаем, что звенья имеют осесимметричную форму (в виде цилиндра). Тогда

$$\left[I_{S3}\right] = \begin{bmatrix} I_{X3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Y3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Z3} \end{bmatrix},$$

где I_{X3}, I_{Y3}, I_{Z3} – осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции звена (с началом координат в центре масс), параллельных осям подвижной системы координат $x_3 y_3 z_3$, жестко связанной с данным звеном.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \ , \ i = 1, 2, 3, \qquad (2)$$

где $q_1 = \varphi_{10}$, $q_2 = \varphi_{21}$, $q_3 = \varphi_{32}$, $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_{10}$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_{21}$, $\dot{q}_3 = \dot{\varphi}_{32}$.

Обобщенная сила Q_i, соответствующая обобщенной координате q_i, складывается из обобщенной движущей силы $Q_{\text{Д}i}$ (управляющего момента по координате q_i), а также из слагаемых от потенциальных сил (сил тяжести звеньев). Тогда в соответствии с [3]

$$Q_i = Q_{\text{Д}i} - G_1 \frac{\partial Z_{S1}}{\partial q_i} - G_2 \frac{\partial Z_{S2}}{\partial q_i} - G_3 \frac{\partial Z_{S3}}{\partial q_i} - G_{\text{Д}} \frac{\partial Z_D}{\partial q_i}.$$

После выполнения соответствующих математических операций уравнение (2) приводится к системе из трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{10} &= f_1(\varphi_{21}, \varphi_{32}, \dot{\varphi}_{10}, \dot{\varphi}_{21}, \dot{\varphi}_{32}) \\ \ddot{\varphi}_{21} &= f_2(\varphi_{21}, \varphi_{32}, \dot{\varphi}_{10}, \dot{\varphi}_{21}, \dot{\varphi}_{32}) \\ \ddot{\varphi}_{32} &= f_3(\varphi_{21}, \varphi_{32}, \dot{\varphi}_{10}, \dot{\varphi}_{21}, \dot{\varphi}_{32}) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Полученные уравнения (3) могут быть использованы для решения следующих задач:

1) известны обобщенные координаты и их производные (например, из заданного закона движения схвата вдоль траектории); требуется определить движущие моменты приводных двигателей;

2) известны движущие моменты, требуется определить обобщенные координаты и их производные, а также соответствующий им закон движения схвата вдоль траектории.

В первом случае решается система алгебраических уравнений, а во втором – выполняется численное интегрирование системы дифференциальных уравнений.

Для программной реализации известных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений система (3) путем понижения порядка приводится к системе из 6 дифференциальных уравнений первого порядка. Это можно представить следующим образом:

$$z_1 = \varphi_{10},\ z_2 = \dot{\varphi}_{10},\ z_3 = \varphi_{21},\ z_4 = \dot{\varphi}_{21},\ z_5 = \varphi_{32},\ z_6 = \dot{\varphi}_{32},$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_1(z_3, z_5, z_2, z_4, z_6) \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= f_2(z_3, z_5, z_2, z_4, z_6) \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= f_3(z_3, z_5, z_2, z_4, z_6) \end{aligned}\right\}$$

Решение обратной задачи кинематики манипулятора позволяет определить его обобщенные координаты по заданному закону движения схвата вдоль его траектории. Из геометрических соотношений, вытекающих из схемы манипулятора (см. рис. 1), получены следующие выражения для определения обобщенных координат:

$$\varphi_{10} = \mathrm{arctg}\frac{y_D}{x_D},$$

$$\varphi_{21} = \pi - \arccos\frac{l_1^2 + l_{BD}^2 - r_D^2}{2l_1 l_{BD}} - \arccos\frac{l_2^2 + l_{BD}^2 - l_3^2}{2l_2 l_{BD}},$$

$$\varphi_{32} = \arccos\frac{l_{BD}^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3},$$

где

$$r_D = \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2},$$

$$l_{BD} = \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + \left(z_D - l_1\right)^2}.$$

Текущие координаты траектории центра схвата x_D, y_D, z_D определяются, исходя из принятого закона движения схвата вдоль его траектории. В качестве примера можно привести 3-участковые законы движения – трапецеидальный закон изменения скорости и синусоидальных закон изменения ускорения [4]. Время перемещения схвата из начального положения в конечное состоит из трех интервалов – разгон, равномерное движение, торможение.

РЕЗЮМЕ

В статье для манипулятора с тремя степенями свободы, работающего в ангулярной системе координат, получены дифференциальные уравнения движения звеньев в форме уравнений Лагранжа второго рода. Для этого определены кинематические характеристики и составлены выражения кинетической энергии звеньев манипулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коловский, М.З. Основы динамики промышленных роботов / М.З.Коловский, А.В. Слоущ. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. – 240 с.
2. Анципорович, П.П. Кинематический анализ манипулятора с 4 степенями свободы / П.П. Анципорович, В.К. Акулич, Е.М. Дубовская // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2012. – Вып. 27. – С. 358 – 361.
3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в двух томах / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 1998. – 736 с.
4. Филонов, И.П. Определение кинематических характеристик звеньев манипулятора с использованием ЭВМ / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1990. – 39 с.
5. Филонов, И.П. Исследование динамики манипуляторов с использованием ЭВМ / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1990. – 35 с.

SUMMARY

In the article for the manipulator, working in angular system of coordinates, with three degrees of freedom the differential equations of movement of links in the form of Lagrange equations of the second kind are received. For this purpose kinematic characteristics are defined and expressions of kinetic energy of links of the manipulator are made.

Поступила в редакцию 09.10.2013