УДК 531.8

РАСЧЕТ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

д. т. н. **Локтионов А. В.**

УО « Витебский государственный технологический университет», Витебск

В работе [1] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. При этом используется координатный способ задания движения ползуна и шарика. Вертикальная ось проведена через начальное положение центра тяжести системы, который движется ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил по вертикали. Принято, что в начальный момент ползун находится в покое, угловая скорость вращения шарика $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$, угол отклонения $\varphi = \varphi_0 \neq 0$.

В работе [2] получен закон движения малых колебаний эллиптического маятника при приближении $\sin^2 \varphi = \varphi$. Однако больший диапазон угла отклонения маятника достигается при приближении $\sin^2 \varphi = \varphi^2$ при этом угол $\varphi = -40 + 40$ градусов (-0,698÷0,698 радиан).

Рассмотрим эллиптический маятник, состоящий из ползуна I, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика II, подвешенного к ползуну I нерастяжимым стержнем (рисунок 1). Масса ползуна I равна *M*, масса шарика II– *m*, длина нерастяжимого стержня – *l*.

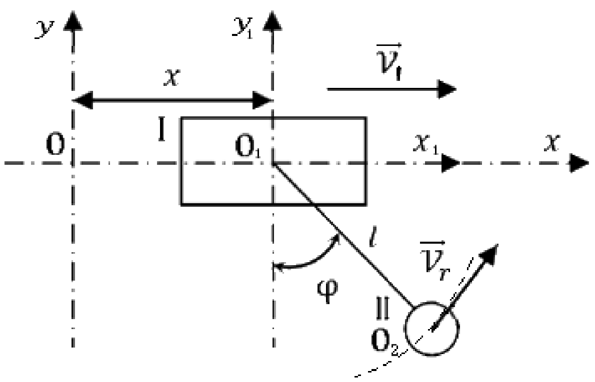

Рисунок 1. - Расчетная схема движения эллиптического маятника

По расчетной схеме рисунка 1 принимаем, что в начальный момент угол $\varphi = \varphi_0 = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$. Найдем закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$. Для решения воспользуемся уравнением Лагранжа. Принимаем, что $\sin^2 \varphi = \varphi^2$, на маятник не действуют силы тяжести и потенциальная энергия системы $\Pi = 0$.

Система обладает двумя степенями свободы, а значит двумя обобщенными координатами *x* и φ. Тогда уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии первого тела и кинетической энергия второго тела.

В работе [2] получены уравнения, выражающие закон движения ползуна в зависимости от угла отклонения стержня *l* от вертикальной оси и времени, и зависимость угловой скорости вращения маятника от угла отклонения стержня *l* от вертикальной оси:

$$x = \frac{ml(\dot{\varphi}_0 t - \sin\varphi)}{M + m}, \tag{1}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\sqrt{1 + \frac{m}{M}\sin^2\varphi}}. \qquad (2)$$

Подставляя в выражение (2) $\sin^2\varphi = \varphi^2$ и разделяя переменные, получим:

$$\sqrt{1 + \frac{m}{M}\varphi^2}\,d\varphi = \dot{\varphi}_0\,dt. \qquad (3)$$

Для решения уравнения (3) воспользуемся заменой $\sqrt{1 + \frac{m}{M}\varphi^2} = p$. Получим:

$\varphi = \sqrt{\frac{M}{m}(p^2 - 1)}$, а $d\varphi = d\sqrt{\frac{M}{m}(p^2 - 1)} = \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M}(p^2-1)}}dp.$

Уравнение (3) можно записать в виде:

$$\int p\frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M}(p^2 - 1)}}dp = \int \dot{\varphi}_0\,dt. \qquad (4)$$

Рассмотрим левый интеграл уравнения (4):

$$\int p\frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M}(p^2 - 1)}}dp = \sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{p^2}{\sqrt{p^2 - 1}}dp. \qquad (5)$$

Введем замену $\sqrt{p^2 - 1} = t$, тогда $p = \sqrt{t^2 + 1}$,а $dp = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$.

Уравнение (5) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{t^2 + 1}{t}\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}dt = \sqrt{\frac{M}{m}}\int\sqrt{t^2 + 1}\,dt. \qquad (6)$$

Введем замену $t = \operatorname{tg} x$, тогда $\sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{\cos x}$,а $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Уравнение (6) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{1}{\cos x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{1}{\cos^3 x}dx = \sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{\cos x}{(\cos^2 x)^2}dx =$$

$$= \sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{d\sin x}{(1 - \sin^2 x)^2}. \qquad (7)$$

Введем замену $\sin x = \cos y$. Уравнение (7) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{d\cos y}{(1 - \cos^2 y)^2} = -\sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{\sin y\,dy}{(\sin^2 y)^2} = -\sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{1}{\sin^3 y}dy. \qquad (8)$$

Так как для малых углов $\sin y \approx y$, то $\sin^3 y \approx y^3$.

Тогда уравнение (8) примет вид:

$$-\sqrt{\frac{M}{m}}\int\frac{1}{y^3}dy = -\sqrt{\frac{M}{m}}\int y^{-3}\,dy = \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{1}{2y^2}. \qquad (9)$$

Введем обратную замену:

$$y \approx \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \cos x.$$

Уравнение (9) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}\frac{1}{2\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{M}{m}\frac{1}{2}}(1+\mathrm{tg}^2 x). \qquad (10)$$

Учитывая, что $\mathrm{tg}\,x = t$, а $t = \sqrt{p^2 - 1}$, где $p^2 = 1 + \frac{m}{M}\varphi^2$, из (10) и (5) будем иметь:

$$\int p \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M}(p^2-1)}} dp - \sqrt{\frac{M}{m}\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m}{M}\varphi^2\right). \qquad (11)$$

Подставляя выражение (11) в (4), получим:

$$\sqrt{\frac{M}{m}\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m}{M}\varphi^2\right) = \dot{\varphi}_0 t + C_4. \qquad (12)$$

С учетом принятых начальных условий при $t = t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$ из уравнения (12) получим $C_4 = \sqrt{\frac{M}{m}\frac{1}{2}}$.

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m}{M}\varphi^2\right) = \dot{\varphi}_0 t + \sqrt{\frac{M}{m}\frac{1}{2}}. \qquad (13)$$

Из равенства (13) получим:

$$\varphi = \sqrt{\sqrt{\frac{4M}{m}}\dot{\varphi}_0 t}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) выражает закон движения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника с учетом принятых начальных условий и равенства, что $\sin^2\varphi = \varphi^2$.

Подставляя уравнение (14) в (1), получим закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника.

Для построения траектории движения тел системы, с учетом равенств (1) и (14) и известных расчетных формул по определению координат центра масс системы, приняты следующие условные расчетные данные: m=1; M=5; $\dot{\varphi}_0 = 0{,}1$; l=1.

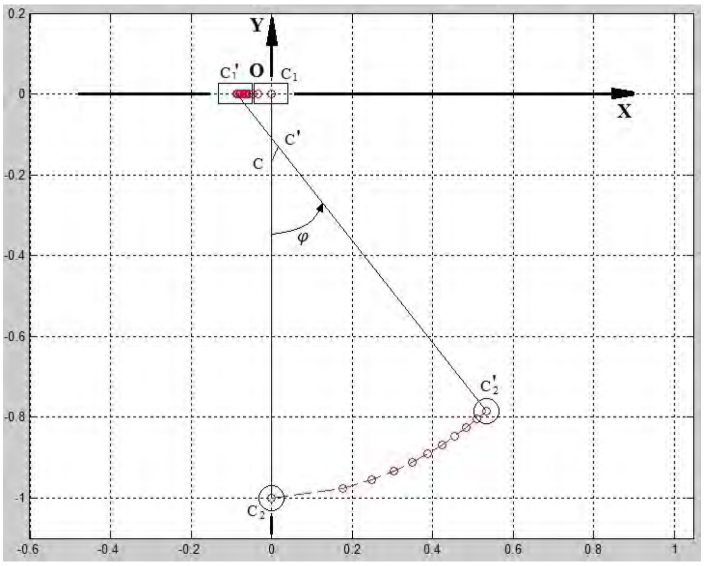

Рисунок 2. - Рассчетная схема перемещения центров масс ползуна, шарика и эллиптического маятника

На рисунке 2 представлены траектории перемещения центров масс ползуна C_1C_1', шарика C_2C_2' и эллиптического маятника CC'.

Из рисунка 2 следует, что ползун перемещается вдоль оси OX. Причем, чем дальше шарик отклонен от вертикальной оси OY, тем меньше скорость перемещения ползуна. Скорость перемещения ползуна максимальна, когда координата X шарика равна 0.

Траектория движения шарика C_2C_2' представляет собой сегмент эллипса, т.е. шарик перемещается по эллиптической траектории.

Полученная расчетная формула (14) по определению закона движения малых колебаний маятника значительно упрощается по сравнению с формулой в работе [2], которая имеет вид:

$$\varphi = \frac{M}{m}\left[\sqrt[2]{\left(\frac{3m}{2M}\dot{\varphi}_0 t + 1\right)^2} - 1\right] \tag{15}$$

и применима при исследовании малых колебаний маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения при диапазоне изменения угла φ от -40º до +40º.

При расчете уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения с учетом заданных исходных параметров, момента инерции шарика относительно точки подвеса O_1 - $\mathcal{J}$ и условии, что $\sin^2\varphi = \varphi^2$, уравнение движения маятника имеет вид [3]:

$$\varphi = \sqrt{\sqrt{\frac{4[(ml)^2 - \mathcal{J}(M+m)]}{(ml)^2\varphi}}\dot{\varphi}_0 t} \;. \tag{16}$$

Из уравнений (14)-(16) следует, что при исследовании закона движения малых колебаний эллиптического маятника целесообразно рассматривать сложное движение маятника и использовать равенство (14).

РЕЗЮМЕ

Изложен расчет уравнения малых колебаний эллиптического маятника. С учетом принятых начальных условий получены уравнения движения ползуна и малых колебаний маятника. Представлена схема перемещений центров масс ползуна, шарика и эллиптического маятника. Установлено, что при исследовании следует рассматривать сложное движение эллиптического маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. В 2 т. Т.2 / А. А. Яблонский. – Москва : Высшая школа, 1971. – 488 с.
2. Локтионов, А. В. К вопросу составления дифференциального уравнения при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки : междунар. сб. науч. тр. / Вып. 4 / М-во образования Республики Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под ред. А. О. Шимановского. – Гомель : БелГУТ, 2010. – С. 162-166.
3. Локтионов, А. В. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.- техн. журнал. – Минск, 2011. – № 26. – С. 138-143.

SUMMARY

Calculation of the equation of small fluctuations of an elliptic pendulum is stated. Taking into account the accepted entry conditions the movement equations slide and small fluctuations of a pendulum are received. The scheme of movings of the centres of weights slide, a ball and an elliptic pendulum is presented. It is established, that at research it is necessary to consider difficult movement of an elliptic pendulum.

Поступила в редакцию 08.10.2012