

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАГРУЖЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ УПРАВЛЯЕМОГО МОСТА ПРИ ПОВОРОТЕ ТРАКТОРА БЕЗ ПОДВЕСКИ

асп. Сафронов К. И., к.т.н. Гурвич Ю. А.

*УО «Белорусский национальный технический университет», Минск*

На выходные характеристики поворота трактора влияют: во-первых, главный вектор и главный момент силового взаимодействия каждого колеса с шиной, и дорогой; во-вторых, параметры рулевого привода и рулевого механизма, установочные параметры управляемых колес, схема привода ведущих колес, параметры шин, массово-геометрические параметры трактора и другие параметры. Поэтому исследование силовых характеристик, действующих на элементы моста при повороте трактора, состоит из нескольких этапов [1-5]. На первом этапе, используя принципы механики, формируется механико-математическая модель нового трактора (или уже существующего). На втором этапе определяются характеристики силового взаимодействия колес с дорогой [2,3], которые являются исходными данными для выполнения третьего этапа. На третьем этапе методом конечных элементов (МКЭ), с использованием пакетов программ и 3D моделей деталей ведущего моста трактора, вычисляются нагрузки и напряжения в любых точках моста.

В данной статье приведены некоторые результаты работ, полученные в 2013 году по ГНТП «Машиностроение», подпрограмма «Тракторостроение» по теме: «Разработать механико-математические модели, алгоритмы расчета усилий в различных точках моста при повороте трактора без подвески мощностью 300...360 л.с. и трактора с подвеской» (определение нагрузок и напряжений в различных точках моста с помощью МКЭ выполняет РУП «МТЗ»):

- разработана методика определения величины главного вектора и главного момента силового взаимодействия колес управляемого моста с дорогой при круговом движении трактора без подвески: продольную, боковую, нормальную силы  $\vec{F}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{G}$ ; стабилизирующий момент шины  $\overline{M_s}$ ; момент сопротивления качению  $\overline{M_f}$ .
- разработана методика определения характеристик шин;
- проведен кинематический анализ рулевого привода;
- разработана методика определения параметров кругового движения трактора;
- разработана методика определения усилий в рулевом приводе при повороте колес управляемого моста на месте;
- разработана методика определения усилий в рулевом приводе при круговом движении трактора;
- приведен пример расчета давления в гидроцилиндрах при повороте колес на месте и при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего колеса.

Трактор схематизируется одностепенной пространственной моделью и жестко связанной с ней системой координат с началом, расположенным в ее центре масс. Ось  $x$  системы координат совпадает с направлением скорости движения трактора и его продольной осью, а ось  $z$  направлена вниз – перпендикулярно дороге.

На рисунке 1, в плоскости  $xOy$  подвижной системы координат, изображена проекция  $i$ -го колеса с координатами его центра  $x_i$  и  $y_i$ , повернутого на угол  $\alpha_i$ , а также показаны силы и момент, действующие на колесо в плоскости дороги и составляющие вектора скорости движения колеса  $\underline{v}_i$ .

Касательная и боковая силы  $F_{ki}$  и  $F_{\delta i}$ , действующие на колесо, связаны с его кинематическими параметрами – с коэффициентом буксования  $\delta_i$  и с углом увода  $\psi_i$  – следующими зависимостями:

$$F_{ki} = \varphi_i G_i \left\{ 1 - \frac{\delta_{0i}}{2|\delta_i|} \left[ 1 - \exp\left( -\frac{2|\delta_i|}{\delta_{0i}} \right) \right] \right\} \operatorname{sgn} \delta_i, \quad (1)$$

$$F_{\delta i} = \varphi_i G_i \operatorname{th} \frac{\psi_i}{\psi_{\delta i}}, \quad (2)$$

где  $\varphi_i$  – коэффициент сцепления;  $\delta_{\delta i}$  – характеристический коэффициент буксования;  $\psi_{\delta i}$  – характеристический угол увода.

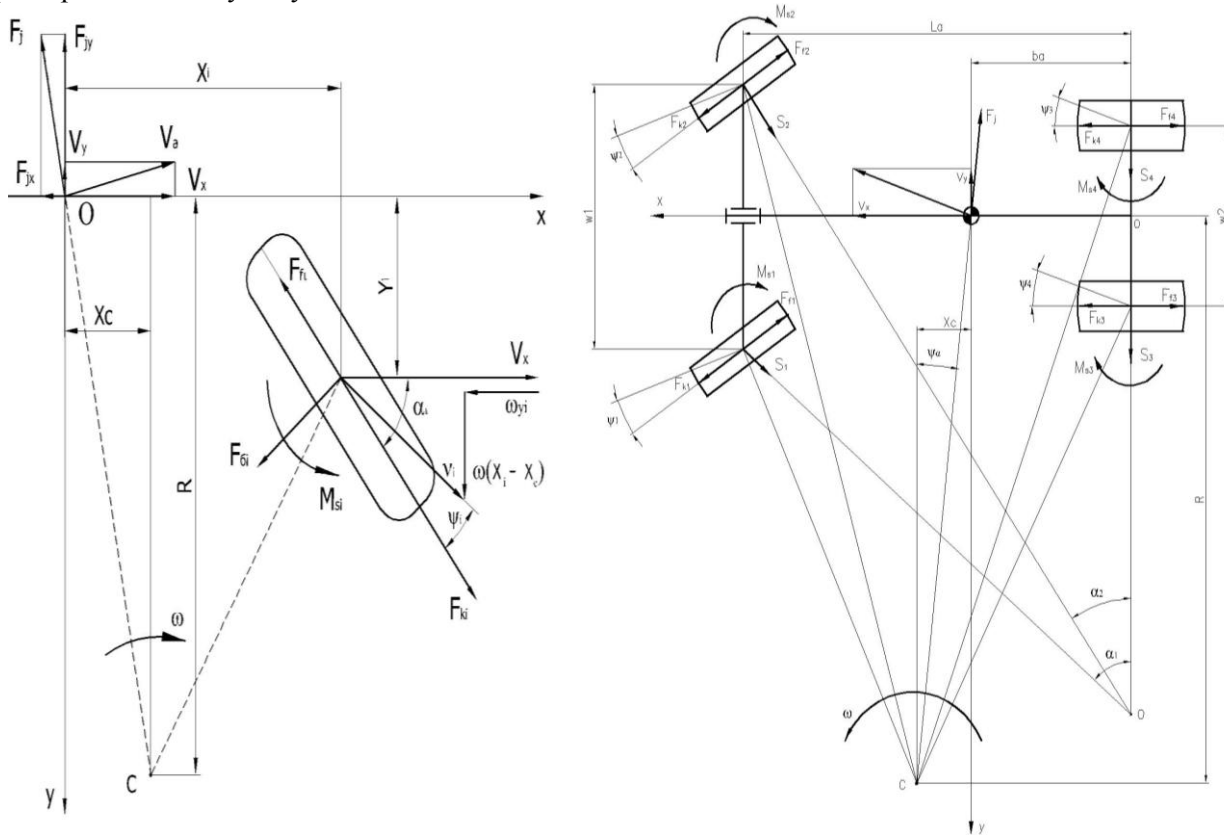


Рисунок 1 - Проекция колеса в плоскости дороги и схема сил, действующих на трактор

Наиболее точная зависимость между кинематическими параметрами отдельного двухколесного моста и полным стабилизирующим моментом шин двух колес предложена в работе [2]. Применительно к одному колесу эта зависимость представлена следующим образом:

$$M_{ci} = \frac{b_i^2(1 - \delta_i)K_{xi}}{3R\beta_i} + \frac{a_i\psi_i K_{yi}}{3}. \quad (3)$$

В соответствии с рисунком 1, уравнения равновесия машины в плоскости  $xOy$ , имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ki} - F_{fi}) \cos \alpha_i - F_{\delta i} \sin \alpha_i] - \frac{mv_x^2}{R} \operatorname{tg} \psi_a = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ki} - F_{fi}) \sin \alpha_i + F_{\delta i} \cos \alpha_i] - \frac{mv_y^2}{R} = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ki} - F_{fi})(x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i) + F_{\delta i}(x_i \cos \alpha_i + y_i \sin \alpha_i) - M_{ci}] = 0. \quad (5)$$

Для определения нормальных сил  $G_i$ , действующих на колеса машины, используются проекции уравнений равновесия трактора (4) и (5) на плоскости  $xOz$  и  $yOz$ .

Задаваясь законом распределения касательной силы по колесам трактора, решим первое из двух уравнений равновесия (4) относительно  $F_{ki}$ .

$$F_{ki} = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n k_i \cos \alpha_i} \sum_{i=1}^n \left( F_{fi} \cos \alpha_i + S_i \sin \alpha_i + \frac{mv_x^2}{R} \operatorname{tg} \psi_a \right), \quad (6)$$

где  $k_i$  – коэффициент распределения касательных сил по колесам  $k_i = F_{ki} / \left( \sum_{i=1}^n F_{ki} \right)$ .

Подставив в уравнения (4) и (5) выражение (6), получим:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}R + a_{12}x_C &= a_{10}, \\ a_{21}R + a_{22}x_C &= a_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $a_{11} = \sum_{i=1}^n [C_{yi} + K_{yi}(\alpha_i + \text{inv}v_i)(\cos\alpha_i + H_A \sin\alpha_i) + F_{fi}(H_A \cos\alpha_i - \sin\alpha_i)]$ ,

$$a_{12} = \sum_{i=1}^n K_{yi}(\cos\alpha_i + H_A \sin\alpha_i)/\beta_i, \quad a_{10} = \sum_{i=1}^n K_{yi}x_i(\cos\alpha_i + H_A \sin\alpha_i)/\beta_i + (1 - H_A \text{tg}\psi_a)mv_x^2,$$

$$a_{21} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ C_{yi} + K_{yi}(\alpha_i + \text{inv}v_i) \right] [x_i \cos\alpha_i + (y_i + H_B) \sin\alpha_i] - \left[ -\frac{1}{3} K_{yi} a_i (\alpha_i + \text{inv}v_i) + F_{fi} [(H_B + y_i) \cos\alpha_i - x_i \sin\alpha_i] \right] \right\},$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^n \left\{ K_{yi} [x_i \cos\alpha_i + (y_i + H_B) \sin\alpha_i] / \beta_i - \frac{1}{3} K_{yi} a_i / \beta_i \right\},$$

$$a_{20} = \sum_{i=1}^n \left\{ K_{yi} x_i [x_i \cos\alpha_i + (y_i + H_B) \sin\alpha_i] / \beta_i + \frac{1}{3\beta_i} [K_{xi} b_i^2 (1 - \delta_i) - K_{yi} x_i a_i] \right\} -$$

$$- mv_x^2 H_B \text{tg}\psi_a,$$

$$H_A = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^n k_i \cos\alpha_i}, \quad H_B = \frac{\sum_{i=1}^n k_i (x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i)}{\sum_{i=1}^n k_i \cos\alpha_i}.$$

Решая уравнения (7), получим:

$$R = \frac{a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad x_C = \frac{a_{11}a_{20} - a_{10}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (8)$$

Алгоритм расчета силовых и геометрических характеристик поворота трактора без подвески содержит три основных расчетных шага.

При первом расчетном шаге: задаемся углом поворота переднего внутреннего колеса  $\alpha_1$ ; для принятой конструкции рулевого привода, используя геометрические соотношения, определяем углы поворота остальных управляемых колес. Находим координаты центра рулевого управления  $x_D$  и  $y_D$ . Принимаем в качестве первого приближения  $x_C = x_D$ ,  $R = y_D$ ,  $\beta_i = 1 - y_i / y_D$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\psi_i = 0$ ,  $\delta_i \rightarrow 0$ ,  $F_{jx} = 0$ ,  $F_{jy} = 0$ . Вычисляем  $G_i$ , затем, определив коэффициенты  $\phi_i, \delta_{0i}, \psi_{0i}$ , находим  $K_{xi}, C_{xi}, K_{yi}, C_{yi}$  в предположении, что  $\delta_i \rightarrow 0$  и  $\psi_i \rightarrow 0$ . Рассчитываем кинематические параметры движения машины и каждого колеса, а также вычисляем силы, действующие на каждое колесо.

При втором расчетном шаге вычисляется тангенс угла  $\psi_a$  дрейфа машины по формуле (2). Уточняются значения различных параметров и характеристик:  $\beta_i$  и  $\text{inv}v_i$ , составляющих сил инерции  $F_{jx}$  и  $F_{jy}$ , нормальной нагрузки на каждое колесо  $G_i$ , коэффициентов  $\phi_i, \delta_{0i}, \psi_{0i}$  и вычисляются параметры  $K_{xi}, C_{xi}, K_{yi}, C_{yi}$  при значениях  $\delta_i$  и  $\psi_i$ , найденных на предыдущем расчетном шаге. Далее расчет выполняется в той же последовательности, которая описана выше.

Третий расчетный шаг повторяет второй до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность вычислений.

Предложенный расчетный метод определения параметров движения колесных машин при больших углах поворота управляемых колес позволяет определить с достаточной точностью силы и стабилизирующие моменты, действующие на каждое колесо машины, и рассчитать величины конструктивных параметров рулевого привода.

Возможность достаточно точного определения сил и моментов, действующих на управляемые колеса машины при ее повороте, повышает эффективность стадии проектирования новых тракторов и позволяет улучшить характеристики выпускаемых тракторов.

После определения сил и моментов, приложенных к колесу, и проекций на оси координат: единичного вектора  $\vec{a}^0$  направления оси шкворня и радиус-вектора  $\vec{e}$ , проведенного из точки пересечения шкворня с цапфой колеса в центр пятна контакта колеса с дорогой, запишем выражения для составляющих стабилизирующего момента, действующего на цапфу внутреннего колеса со знаком «+», а на цапфу внешнего колеса – «-»:

$$\begin{aligned} T_G &= \pm G(b \cos \sigma - r_c \sin \sigma) \sin \zeta \sin \alpha_e; & T_S &= S(b \sin \sigma + r_c \cos \sigma) \sin \zeta \sin \alpha_e; \\ T_F &= \pm F((b \cos \sigma - r_c \sin \sigma) \cos \zeta - (b \sin \sigma + r_c \cos \sigma) \sin \zeta \cos \alpha_e); \\ T_{MC} &= M_S \cos \zeta; & T_{Mf} &= \mp M_f \sin \zeta \cos \alpha_e, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\zeta$  – угол комбинированного наклона шкворня;  $\sigma$  – угол развала колес;  $\alpha_e$  – эффективный угол поворота колеса [2];  $b$  – длина цапфы;  $r_c$  – радиус колеса.

Результирующий момент, приложенный к поворотной цапфе, равен сумме указанных составляющих:

$$T_\Sigma = T_G + T_S + T_f + T_{MS} + T_{Mf}.$$

Механизм поворота управляемых колес включает два равных симметрично расположенных гидроцилиндра (рисунок 2). Каждый гидроцилиндр воздействует на рычаг поворотных цапф и создает поворачивающий момент. Суммарный поворачивающий момент равен сумме моментов сопротивления повороту колес

$$F_{c1}S_1 + F_{c2}S_2 = T_{s1} + T_{s2}, \quad (10)$$

где  $F_{c1}$  и  $F_{c2}$  – усилие на штоке гидроцилиндра внутреннего и внешнего колеса;  $S_1$  и  $S_2$  – плечо силы  $F_{c1}$  и  $F_{c2}$  относительно оси поворота шкворня внутреннего и внешнего колеса;  $T_{s1}$  и  $T_{s2}$  – моменты сопротивления колес относительно оси шкворня.

Определим усилия в рулевом приводе при повороте колес управляемого моста на месте. Моменты сил  $F_f$  и  $G_k$  относительно оси шкворня определяются смешанными произведениями векторов:  $T_F = \vec{a}^0(\vec{e} \times \vec{F}_f)$ ,  $T_G = \vec{a}^0(\vec{e} \times \vec{G}_k)$ , а момент сопротивления повороту на месте  $M_{\varphi \max}$  на жесткой поверхности рассчитывается как момент трения прямоугольной площадки контакта.

Рассматривая вращение площадки контакта вокруг неподвижной оси, проходящей через центр симметрии  $O$ , получим:

$$M_{\varphi \max} = \frac{1}{3} \varphi G \left( \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{2b} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda_1}{2} \right) \right| + \frac{b^2}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda_2}{2} \right) \right| \right).$$

В связи с упругой деформацией шины момент сопротивления  $M_\varphi$  повороту колеса на месте увеличивается с увеличением угла  $\alpha$  поворота колеса асимптотически приближаясь к  $M_{\varphi \max}$ :

$$M_\varphi = M_{\varphi \max} \left( 1 - \exp \left( -\frac{\alpha}{\alpha_x} \right) \right), \text{ где } \alpha_x \text{ – характеристический угол, } \alpha_x = 4^\circ.$$

В таблице 1 приводится перечень исходных данных для расчета силовых и геометрических параметров трактора МТЗ 3522, мощностью 350 л.с. при повороте. Значения угла поворота внутреннего колеса  $\alpha_1$  задаются в пределах  $\alpha_{1\min} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1\max}$  с шагом  $\Delta\alpha_1$ .

На рисунке 3 приведены графики изменения давления в гидроцилиндрах при повороте колес на месте и при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего колеса для двух случаев: поворот трактора влево и поворот – вправо.

Анализ современных моделей автотракторных транспортных средств показывает, что наличие подвески ведущего моста предполагает увеличение скоростей движения, что в свою очередь ужесточает требования к характеристикам прямолинейного движения и поворота машин: круговое движение, «вход в поворот» и «выход из поворота».

Таблица 1 - Исходные данные

Параметры трактора	Единицы измерения	Обозначения		Значение параметра
		в тексте	в программе	
Расстояние между осями шкворней в плоскости рулевой трапеции	м	$a_c$	$AC$	1,575
Длина рычага рулевой трапеции	м	$h$	$H$	0,234
Угол установки рычага рулевой трапеции	градус	$\Theta$	$TET$	14
Угол продольного наклона шкворня	градус	$\gamma$	$GAM$	0
Угол поперечного наклона шкворня	градус	$\beta$	$BET$	7
Угол развала управляемых колес	градус	$\sigma_0$	$SG0$	0
Длина поворотной цапфы	м	$b_c$	$BC$	0,170
Длина рычагов рулевого привода	м	$h_a; l_c; l_e$	$h_a; l_c; l_e;$	0,196; 0,58; 0,174
Угол установки рычага рулевого привода	градус	$\tau$	$tau$	8
Диаметр штока	м	$ds$	$ds$	0,03
Диаметр цилиндра	м	$dp$	$dp$	0,063
КПД гидроцилиндра		$ec$	$ec$	0,97
Диаметр шины	м	$D$	$DR1$	1,644
Ширина профиля шины	м	$B$	$BR1$	0,590
Ширина беговой дорожки (площадки контакта)	м	$b_n$	$BP1^*)$	0,470
Коэффициент удельной контактной нагрузки	кН/м	$q$	$SR1$	234
Показатель нагрузочной характеристики	–	$c$	$CR1$	0,85
Фактор прогиба шины	–	$e_r$	$ER1$	0,5
Фактор тангенциальной жесткости шины	–	$e_x$	$EX1$	2,4
Фактор сопротивления боковому уводу	–	$e_y$	$EY1$	1,25
Диаметр шины	м	$D$	$DR2$	2,061
Ширина профиля шины	м	$B$	$BR2$	0,716
Ширина беговой дорожки шины	м	$b$	$BP2$	0,575
Коэффициент удельной контактной нагрузки	кН/м	$q$	$SR2$	408
Показатель нагрузочной характеристики шины	–	$c$	$CR2$	0,85
Фактор прогиба шины	–	$e_r$	$ER2$	0,4
Фактор тангенциальной жесткости шины	–	$e_x$	$EX2$	2,4
Фактор сопротивления	–	$e_y$	$EY2$	1,25
База трактора	м	$L$	$L$	2,96
Расстояние от оси заднего моста до центра тяжести	м	$b$	$B$	1,184
Расстояние от центра тяжести до поверхности дороги	м	$z_0$	$Z0$	1,27
Ширина колеи передних колес	м	$w_1$	$W1$	2,150
Ширина колеи задних колес	м	$w_2$	$W2$	2,050
Масса трактора	т	$m$	$M$	11

Коэффициент трения шины об асфальт	–	$\mu$	FIR	0,74
Связность	кПа	$c_0$	C0	7
Характеристический угол	градус	$\alpha_x$	AR	4
Начальный угол поворота внутреннего колеса	градус	$\alpha_1$	A1	1
Максимальный угол поворота внутреннего колеса	градус	$\alpha_{1m}$	A1M	40
Скорость движения	м/с	$V_x$	V	2,8

Одной из основных характеристик, описывающих динамику движения, является устойчивость, а одним из узлов трактора, наиболее сильно влияющим на критерий устойчивости, – управляемый мост, колеса которого могут совершать различного рода колебания, в том числе, и автоколебания (или шимми) [3]. Для описания «вход в поворот» и «выход из поворота» трактора необходимо использовать уравнение Лагранжа второго рода, т.е. реализовать описание нестационарного движения трактора.

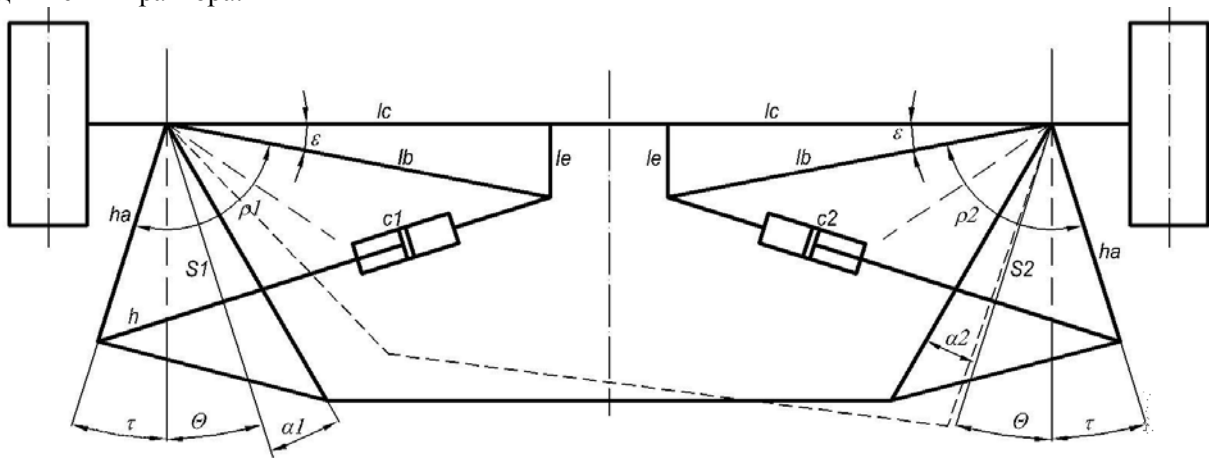


Рисунок 2 - Кинематическая схема рулевого привода

Поэтому к тракторам с подвеской необходимо применять методы исследования динамики движения машины, используя критерии устойчивости, стабилизации, плавности хода, безопасности движения с учетом среднего времени реакции водителя, во всем диапазоне рабочих и транспортных скоростей движения [3]. Если критерий устойчивости движения трактора будет «плохим», то одновременно ухудшатся показатели управляемости и безопасности движения, стабилизация управляемых колес будет недостаточной. Повышается утомляемость водителя, который все время будет пытаться исправлять траекторию движения трактора, что увеличит вероятность аварии.

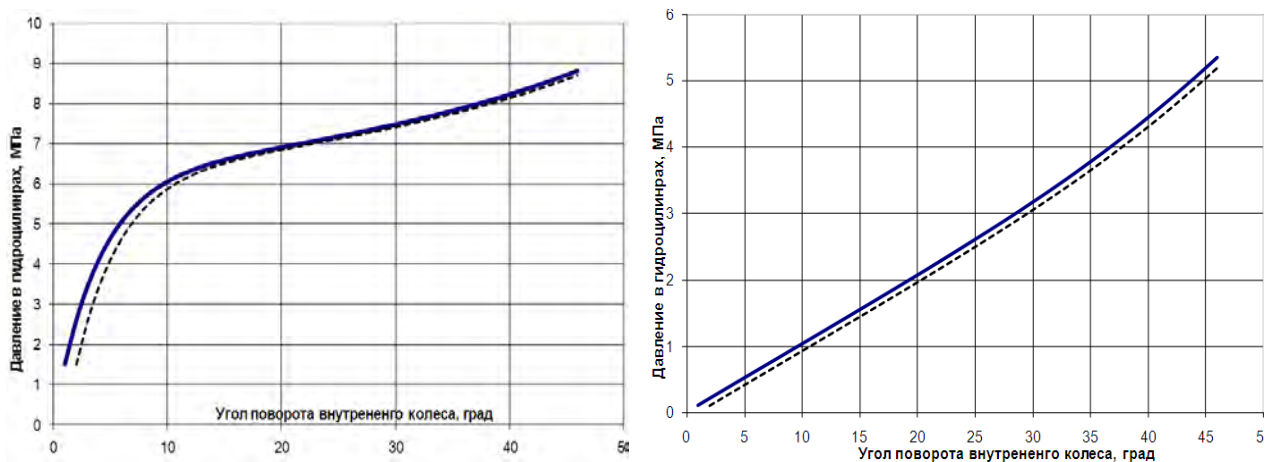


Рисунок 3 – Давление в гидроцилиндрах при повороте колес на месте и при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего колеса

Выполненные исследования силовых и геометрических параметров поворота трактора позволяют сделать следующий вывод. Разработан расчетный метод для определения сил и моментов, действующих на колеса со стороны дороги, при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего (или внешнего) колеса и других характеристик: координат центра поворота и радиуса поворота трактора; вертикальной нагрузки на каждом колесе трактора; различных характеристик силового взаимодействия каждого колеса с шиной и дорогой в зависимости от нагрузки на колесо; касательной силы тяги, боковой силы и коэффициентов буксования каждого колеса; усилий в гидроцилиндрах при повороте управляемых колес на месте и при круговом движении трактора.

#### РЕЗЮМЕ

Приведено описание нового метода определения параметров управляемой оси и трактора в целом. В результате рассчитываются силы, действующие на колесо в зависимости от угла поворота внутреннего управляемого колеса: вертикальные силы, боковые силы, касательные силы тяги, коэффициент буксования на каждом колесе, а также другие силовые и геометрические характеристики поворота.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чудаков, Е.А. Теория автомобиля / Е.А.Чудаков, - М.: Машиностроение 1978 – 216с.
2. Андреев, А.Ф. О взаимодействии колеса с опорной поверхностью / А.Ф. Андреев, Автомобиле- и тракторостроение: Динамика и долговечность тягово-транспортных машин: Мн: Вышэйшая школа, 1994, вып. 5, 51-58с.
3. Гурвич, Ю.А. Прикладные критерии устойчивости движения управляемых колес транспортных средств / Ю.А.Гурвич, Ю.Д.Сырокваш // Автомобильная промышленность. М.: 2005, – с.23-27.
4. СТБ ГОСТ Р 52302–2006 «Автотранспортные средства. Управляемость и устойчивость. Технические требования. Методы испытания».
5. ГОСТ 27257–1987 «Методы определения параметров поворота колесных машин».

#### SUMMARY

*This article contains a description of a new method of steerable axle and tractor parameters definition. In result next forces at the wheel in dependence of turning of internal wheel angle are calculated: vertical load, and traction force, slippage coefficient, horizontal force at each wheel, and other load and kinematical characteristics.*

Поступила в редакцию 05.11.2013

УДК 517.52+517.983

### ОБ ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

к. ф.-м. н. **Акимов В.А.**

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введем следующее обозначение:  $d_x$  - оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$ ;  $P_n(d_x)$  - оператор вида

$$P_n(d_x) = \sum_{i=0}^n a_i d_x^i, \quad d_x^i = \frac{d^i}{dx^i}, \quad a_0 dx^0 = a_0, \quad a_i = \overline{1, n} - \text{вещественные или комплексные числа.}$$

Из основной теоремы алгебры следует, что любой полином  $P_n(d_x)$  может быть представлен в виде

$$P_n(d_x) = a_n \prod_{i=1}^m (d_x - a_i)^{k_i} \quad (1)$$

$\sum_{i=1}^m k_i = n$ , где  $a_i$  - вещественные или комплексные числа.

Докажем, что имеет место формула сдвига