SUMMARY

The paper presents the basis of the operator method for solving ordinary differential equations with constant coefficients. Specific examples of solutions to some classical problems of three different types were considered.

Поступила в редакцию 05.11.2013

УДК 539.3+534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ

д. ф.-м. н. [1] **Поленов В.С.,** д. ф.-м. н. [2] **Чигарев А.В.**

[1] *Воронежский институт экономики и права, Воронеж*
[2] *УО «Белорусский национальный технический университет", Минск*

Распространению упругих волн в среде со случайными неоднородностями посвящено ряд работ. Среди них следует отметить работы [1-4], в которых предполагалось, что рассматриваемая среда является однокомпонентной, неограниченной, изотропной и стохастически неоднородной.

В данной работе изучается одномерная модель двухкомпонентной [5] стохастически неоднородной среды, одна компонента которой представляет идеально упругую среду (скелет упругой среды). а вторая – жидкость

Предполагается, что в такой среде распространяется поперечная волна.

Показано влияние неоднородности двухкомпонентной среды на коэффициент затухания и скорость распространения волны. Для волнового комплексного числа получено алгебраическое уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами.

Для заданной величины дисперсии приведены аналитические выражения, определяющие скорость и коэффициент затухания поперечной волны.

Распространение поперечной волны в неограниченной двухкомпонентной среде в перемещениях описывается системой уравнений [6]

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right);\quad \rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}+\rho_{22}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}=0,\tag{1}$$

где $\mu=\mu(x)$ – модуль сдвига, $\rho_{12}=\rho_{12}(x)$ – коэффициент динамической связи упругой компоненты и жидкости, $\rho_{11}(x)=\rho_1(x)-\rho_{12}(x)$, $\rho_{22}(x)=\rho_2(x)-\rho_{12}(x)$ – эффективные массы упругой и жидкой компонент; ρ_1,ρ_2 – плотности компонент. Параметры, описывающие данную среду являются случайными функциями координаты *x*. Индексы, стоящие в верху в круглых скобках относятся: 1 – к упругой компоненте, 2 – к жидкости.

Представим $u^{(i)}$, μ, ρ_{ij} $(i,j=1,2)$ в виде суммы математического ожидания и флуктуации

$$u^{(i)}=\langle u^{(i)}\rangle+u^{(i)\prime},\quad \mu=\langle\mu\rangle+\mu',\quad \rho_{ij}=\langle\rho_{ij}\rangle+\rho'_{ij}.\tag{2}$$

Символ < > обозначает математическое ожидание соответствующих функций, штрих – их флуктуации.

Система (1) с учетом (2) и зависимости перемещений компонент от времени при помощи множителя $\exp(i\omega t)$ будет записана в виде

$$\begin{gathered}\omega^2[\langle\rho_{11}\rangle\langle u^{(1)}\rangle+\langle\rho_{12}\rangle\langle u^{(2)}\rangle+\langle\rho_{11}\rangle u^{(1)\prime})+\rho'_{11}\langle u^{(1)}\rangle+\rho'_{11}u^{(1)\prime}+\\+\langle\rho_{12}\rangle u^{(2)\prime}+\rho'_{12}\langle u^{(2)}\rangle+\rho'_{12}u^{(2)\prime}]+\mu'_{,x}\langle u^{(1)}\rangle_{,x}+\mu'_{,x}u^{(1)\prime}_{,x}+\\+\langle\mu\rangle\langle u^{(1)}\rangle_{,xx}+\langle\mu\rangle u^{(1)\prime}_{,xx}+\mu'\langle u^{(1)}\rangle_{,xx}+\mu' u^{(1)\prime}_{,xx}=0\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{gathered}\langle\rho_{12}\rangle\langle u^{(1)}\rangle+\langle\rho_{22}\rangle\langle u^{(2)}\rangle+\langle\rho_{12}\rangle u^{(1)\prime}+\rho'_{12}\langle u^{(1)}\rangle+\rho'_{12}u^{(1)\prime}+\\+\langle\rho_{22}\rangle u^{(2)\prime}+\rho'_{22}\langle u^{(2)}\rangle+\rho'_{22}u^{(2)\prime}=0.\end{gathered}$$

Осредним (3) и из (3) вычтем осредное выражение, получим систему уравнений относительно средних перемещений

$$\langle u^{(1)}\rangle_{,xx}+k_1^2(\langle\gamma_{11}\rangle\langle u^{(1)}\rangle+\langle\gamma_{12}\rangle\langle u^{(2)}\rangle)=-f_1$$
$$\langle\gamma_{12}\rangle\langle u^{(1)}\rangle+\langle\gamma_{22}\rangle\langle u^{(2)}\rangle=-f_2 \qquad (4)$$
$$f_1=(\langle M'u_{,x}^{(1)'}\rangle)_{,x}+k_1^2(\langle\gamma_{11}'u^{(1)'}\rangle+\langle\gamma_{12}'u^{(2)'}\rangle)$$
$$f_2=\langle\gamma_{12}'u^{(1)'}\rangle+\langle\gamma_{22}'u^{(2)'}\rangle$$

и относительно флуктуаций

$$u_{,xx}^{(1)'}+k_1^2(\langle\gamma_{11}\rangle u^{(1)'}+\langle\gamma_{12}\rangle u^{(2)'}=-f_3,\ \langle\gamma_{12}\rangle u^{(1)'}+\langle\gamma_{22}\rangle u^{(2)'}=-f_4 \qquad (5)$$
$$f_3=(M'\langle u^{(1)}\rangle_{,x})_{,x}+k_1^2(\gamma_{11}'\langle u^{(1)}\rangle+\gamma_{12}'\langle u^{(2)}\rangle),\ f_4=\gamma_{12}'\langle u^{(1)}\rangle+\gamma_{22}'\langle u^{(2)}\rangle$$

В формулах (4) и (5) введены следующие обозначения:

$$\langle\gamma_{11}\rangle=\frac{\langle\rho_{11}\rangle}{\langle\rho\rangle},\quad \langle\gamma_{12}\rangle=\frac{\langle\rho_{12}\rangle}{\langle\rho\rangle},\quad \langle\gamma_{22}\rangle=\frac{\langle\rho_{22}\rangle}{\langle\rho\rangle},\ \gamma_{11}'=\frac{\rho_{11}'}{\langle\rho\rangle},\quad \gamma_{12}'=\frac{\rho_{12}'}{\langle\rho\rangle},$$
$$\gamma_{22}'=\frac{\rho_{22}'}{\langle\rho\rangle},\quad M'=\frac{\mu'}{\langle\mu\rangle},\ k_1^2=\frac{\omega^2}{c^2},\quad c^2=\frac{\langle\mu\rangle}{\langle\rho\rangle},\quad \langle\rho\rangle=\langle\rho_{11}\rangle+2\langle\rho_{12}\rangle+\langle\rho_{22}\rangle. \qquad (6)$$

Систему (5) преобразуем к виду

$$u_{,xx}^{(1)'}+k_2^2u^{(1)'}=-F,\qquad u^{(2)'}=-\left(b_1u^{(1)'}+\frac{f_4}{\langle\gamma_{22}\rangle}\right) \qquad (7)$$

$$F=(M'\langle u^{(1)}\rangle_{,x})_{,x}+k_1^2(a_1'\langle u^{(1)}\rangle+a_2'\langle u^{(2)}\rangle),\qquad a_1'=\gamma_{11}'-b_1\gamma_{12}'$$
$$a_2'=\gamma_{12}'-b_1\gamma_{22}',\quad k_2^2=k_1^2\,\frac{\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{22}\rangle-\langle\gamma_{12}\rangle^2}{\langle\gamma_{22}\rangle},\quad b_1=\langle\gamma_{12}\rangle/\langle\gamma_{22}\rangle \qquad (8)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение Гельмгольца, решение которого выражается через функцию Грина G

$$u^{(1)'}=\int_{-\infty}^{\infty}G[(M'\langle u^{(1)}\rangle_{,x})_{,x}+k_1^2(a_1'\langle u^{(1)}\rangle+a_2'\langle u^{(2)}\rangle)]dx, \qquad (9)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$G_{,xx}+k_2^2G=-4\pi\delta(x-x_1), \qquad (10)$$

где $\delta(x-x_1)$ – функция Дирака.

Тогда (8) с учетом (9) запишем в виде

$$u^{(2)'}=-b_1\int_{-\infty}^{\infty}[G_{,x}(M'\langle u^{(1)}\rangle_{,x})+k_1^2G(a_1'\langle u^{(1)}\rangle+a_2'\langle u^{(2)}\rangle)]dx-$$
$$-(b_1'\langle u^{(1)}\rangle+b_2'\langle u^{(2)}\rangle),\quad b_1'=\frac{\gamma_{12}'}{\langle\gamma_{22}\rangle},\quad b_2'=\frac{\gamma_{22}'}{\langle\gamma_{22}\rangle}. \qquad (11)$$

Подставим (9) и (11) в правые части (4) и учитывая (10), получим систему дифференциальных уравнений относительно средних перемещений фаз

$$(1-4\pi\langle M'\bar{M}'\rangle)\langle u^{(1)}\rangle_{,xx}+k_1^2\left(\langle\gamma_{11}\rangle-\frac{1}{\langle\gamma_{22}\rangle}\langle\gamma_{12}'\bar{\gamma}_{12}'\rangle\right)\langle u^{(1)}\rangle-$$
$$-k_2^2\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}G\langle M'\bar{M}'\rangle\langle u^{(1)}\rangle_{,x_1}dx_1+k_1^4\int_{-\infty}^{\infty}G\langle\gamma_{11}'\bar{\gamma}_{11}'\rangle\langle u^{(1)}\rangle dx_1+ \qquad (12)$$
$$+k_1^4b_1^2\int_{-\infty}^{\infty}G\langle\gamma_{12}'\bar{\gamma}_{12}'\rangle\langle u^{(1)}\rangle dx_1-k_1^4b_1\int_{-\infty}^{\infty}G\langle\gamma_{12}'\bar{\gamma}_{12}'\rangle\langle u^{(2)}\rangle dx_1+k_1^2\langle\gamma_{12}\rangle\langle u^{(2)}\rangle=0$$

$$\langle\gamma_{12}\rangle\langle u^{(1)}\rangle-k_1^2b_1\int_{-\infty}^{\infty}G\langle\gamma_{12}'\bar{\gamma}_{12}'\rangle\langle u^{(1)}\rangle dx_1+k_1^2\int_{-\infty}^{\infty}G\langle\gamma_{12}'\bar{\gamma}_{12}'\rangle\langle u^{(2)}\rangle dx_1+ \qquad (13)$$
$$+k_1^2b_1^2\int_{-\infty}^{\infty}G\langle\gamma_{22}'\bar{\gamma}_{22}'\rangle\langle u^{(2)}\rangle dx_1+(\langle\gamma_{22}\rangle-\frac{1}{\langle\gamma_{22}\rangle}\langle\gamma_{22}'\bar{\gamma}_{22}'\rangle)\langle u^{(2)}\rangle=0.$$

Черта сверху над буквой обозначает комплексно – сопряженную величину.

Решение (12) и (13) будем искать в виде

$$\langle u^{(a)}\rangle=A_a\exp(iqx)\qquad (a=1,2). \qquad (14)$$

Здесь A_a – амплитуды компонент, q – волновое комплексное число, $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Если подставить (14), решение функции Грина $G(t)=\frac{2\pi i}{k_2}\exp(ik_2|t|)$ и значения корреляционных функций: $\langle M'\overline{M}'\rangle = D_1\exp(-\frac{|r|}{a})$, $\langle\gamma'_{11}\overline{\gamma}'_{11}\rangle = D_2\exp(-\frac{|r|}{a})$, $\langle\gamma'_{12}\overline{\gamma}'_{12}\rangle = D_3\exp(-\frac{|r|}{a})$, $\langle\gamma'_{22}\overline{\gamma}'_{22}\rangle = D_4\exp(-\frac{|r|}{a})$, где $D_i\,(i=\overline{1,4})$ – дисперсии, a – радиус корреляции функции $f'(x)$, $r=x-x_1$ и в соотношениях (12), (13) сделать замену $x-x_1=t$, то получим однородную систему двух алгебраических уравнений относительно амплитуд A_1 и A_2.

$$\left[iB_1k_2q^3+\left(\frac{1}{a}B_1k_2-ik_2^2C_1\right)q^2+iB_3k_1^2k_2q+\frac{1}{a}B_3k_1^2k_2-ik_1^2(B_3k_2^2+B_4k_1^2)\right]A_1+$$
$$+\left[i\langle\gamma_{12}\rangle k_1^2k_2q+\frac{1}{a}\langle\gamma_{12}\rangle k_1^2k_2-ik_1^2(\langle\gamma_{12}\rangle k_2^2-B_5k_1^2)\right]A_2=0$$
$$\left[i\langle\gamma_{12}\rangle k_2q+\frac{1}{a}\langle\gamma_{12}\rangle k_2-i(\langle\gamma_{12}\rangle k_2^2-B_5k_1^2)\right]A_1+ \tag{15}$$
$$+\left[iB_6k_2q+\frac{1}{a}B_6k_2-i(B_6k_2^2+B_7k_1^2)\right]A_2=0,$$

где введены обозначения

$$B_1=4\pi D_1-1,\quad B_2=2\pi D_1,\quad B_3=\langle\gamma_{11}\rangle-\frac{D_3}{\langle\gamma_{22}\rangle},\quad B_4=2\pi(D_2+b_1^2D_3),$$
$$B_5=2\pi b_1D_3,\quad B_6=\langle\gamma_{22}\rangle-\frac{D_4}{\langle\gamma_{22}\rangle},\quad B_7=2\pi(D_3+b_1^2D_4),\quad C_1=B_1+B_2. \tag{16}$$

Однородная система (15) имеет нетривиальное решение при условии, когда определитель системы равен нулю. Раскрывая определитель второго порядка, составленный из коэффициентов при A_1 и A_2, получим алгебраическое уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами относительно волнового комплексного числа q

$$\Gamma_0q^4+\Gamma_1q^3+\Gamma_2q^2+\Gamma_3q+\Gamma_4=0, \tag{17}$$

$$\Gamma_0=-B_1B_6k_2^2,\quad \Gamma_1=(B_1B_6k_2^3+B_1B_7k_1^2k_2+C_1B_6k_2^3)+i\frac{1}{a}2B_1B_6k_2^2,$$
$$\Gamma_2=\left[\frac{1}{a^2}B_1B_6k_2^2-C_1B_6k_2^4-(C_1B_7+B_3B_6-\langle\gamma_{12}\rangle^2)k_1^2k_2^2\right]-\frac{i}{a}\left[B_1B_7k_1^2k_2+(B_1+C_1)B_6k_2^3\right],$$
$$\Gamma_3=\left[2(B_3B_6-\langle\gamma_{12}\rangle^2)k_1^2k_2^3+(B_3B_7+B_4B_6-2\langle\gamma_{12}\rangle B_5)k_1^4k_2\right]+\frac{i}{a}2(B_3B_6-\langle\gamma_{12}\rangle^2)k_1^2k_2^2,$$
$$\Gamma_4=\left[\frac{1}{a^2}(B_3B_6-\langle\gamma_{12}\rangle^2)k_1^2k_2^2+(-B_3B_6+\langle\gamma_{12}\rangle^2)k_1^2k_2^4+\right.$$
$$\left.+(-B_3B_7-\langle\gamma_{12}\rangle B_5-B_4B_6)k_1^4k_2^2+(B_5B_5-B_4B_7)k_1^6\right]+$$
$$+\frac{i}{a}\left[2(B_3B_6+\langle\gamma_{12}\rangle^2)k_1^2k_2^3-(B_3B_7+B_4B_6-2\langle\gamma_{12}\rangle B_5)k_1^4k_2\right].$$

Из уравнения (17) определим коэффициент затухания γ и скорость c волны по формулам [7]

$$\gamma=|jmq|,\qquad c=\omega(\operatorname{Re}q)^{-1}. \tag{18}$$

Рассмотрим случай упругой двухкомпонентной среды с заданной величиной дисперсии: $D_1=\frac{1}{4\pi}$, $D_2=\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{12}\rangle^2$, $D_3=\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{22}\rangle$, $D_4=\langle\gamma_{22}\rangle^2$. В этом случае соотношения (16) принимают вид

$$B_1=0,\quad B_2=\frac{1}{2},\quad B_3=0,\quad B_4=4\pi\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{12}\rangle^2,\quad B_5=2\pi\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{12}\rangle,$$
$$B_6=0,\qquad B_7=2\pi(\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{22}\rangle+\langle\gamma_{12}\rangle^2).$$

Тогда уравнение (17) для определения коэффициента затухания и скорости распространения поперечной волны в упругой, насыщенной жидкостью, пористой среде запишем в таком виде

$$a^2\chi_1 q^2 + (a^2\chi_2 + ia\chi_3)q + (\chi_4 + a^2\chi_5) + ia\chi_6 = 0 \tag{19}$$

$$\chi_1 = \left[\langle\gamma_{12}\rangle^2 - \pi(\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{22}\rangle + \langle\gamma_{12}\rangle^2)\right]k_1^2 k_2^2,\ \chi_2 = -2\left[\langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^2 k_2^3 + 2\pi\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^4 k_2\right]$$

$$\chi_3 = -2\langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^2 k_2^2,\ \ \chi_4 = -\langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^2 k_2^2,$$

$$\chi_5 = \langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^2 k_2^4 - 4\pi\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^4 k_2^2 + 4\pi^2\left[\langle\gamma_{11}\rangle^2\langle\gamma_{12}\rangle^2 - \right.$$

$$\left. - 2\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{12}\rangle^2(\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{22}\rangle + \langle\gamma_{12}\rangle^2)\right]k_1^6,\ \ \chi_6 = 2\left[\langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^2 k_2^3 + 2\pi\langle\gamma_{11}\rangle\langle\gamma_{12}\rangle^2 k_1^4 k_2\right].$$

Из уравнения находим

$$q = \frac{1}{2a\chi_1}\left[(a\chi_2 \pm \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}) + i(\chi_3 \pm \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2})\right]. \tag{20}$$

По (18) определим коэффициент затухания и скорость распространения поперечной волны

$$\gamma = \frac{1}{2a\chi_1}(\chi_3 \pm \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}), \qquad c = \omega\left[\frac{1}{2a\chi_1}(a\chi_2 \pm \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2})\right]^{-1}$$

$$r = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \qquad \varphi = arctg\frac{\beta_2}{\beta_1} \tag{21}$$

$$\beta_1 = a^2(\chi_2^2 - 4\chi_1\chi_5) - (\chi_3^2 + 4\chi_1\chi_4), \qquad \beta_2 = 2a(\chi_2\chi_3 - 2\chi_1\chi_6).$$

При заданных значениях математических ожиданий $\langle\gamma_{11}\rangle$, $\langle\gamma_{12}\rangle$, $\langle\gamma_{22}\rangle$ можно получить зависимости коэффициента затухания и скорости распространения поперечной волы от частоты при различных значениях радиуса корреляции в упругой, насыщенной жидкостью, пористой среде.

РЕЗЮМЕ

Изучается одномерная модель двухкомпонентной стохастически неоднородной среды, одна компонента которой представляет идеально упругую среду (скелет упругой среды). а вторая – жидкость. Показано влияние неоднородности двухкомпонентной среды на коэффициент затухания и скорость распространения волны. Для волнового комплексного числа получено алгебраическое уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами. Для заданной величины дисперсии приведены аналитические выражения, определяющие скорость и коэффициент затухания поперечной волны

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев – Минск, Технопринт, 2000. - 425 с.
2. Шуман Б.М. Распространение упругих волн в среде со случайными неоднородностями /Б.М. Шуман – Прикл. мех, 1968, №4, Вып.10 – С. 6 – 13.
3. Чигарев А.В. Распространение волн в стохастически неоднородной упругой среде / А.В. Чигарев - Изв АН СССР, МТТ,1970, № 4 - С. 87 – 92.
4. Чигарев А.В. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде / А.В. чигарев – Прикл.мех. 1972, Т.8, Вып. 5 – С. 69 – 74.
5. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range / M.A. Biot - J. Acoust. Soc. America, 1956. v. 28, № 2. -P. 168-178.

Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах /Л.Я. Косачевский - ПММ. 1959, Т. 23, Вып. 6 - С. 1115 - 1123.

7. Лифшиц И.М. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах / Л.Я. Лифшиц, Г.Д. Пархомовский – ЖТФ, 1950, Т. 20, Вып. 2 – С. 175 – 182.
8. Поленов В.С. Распространение волн в вязкоупругой среде со случайными неоднородностями / В.С. Поленов, А.В. Чигарев – Сб. Тр. НИИ мат. ВГУ, Воронеж -1972. Вып. 6 – С. 25 -27.

SUMMARY

We study a two-dimensional model of a stochastically inhomogeneous medium, one component of which is perfectly elastic medium (the skeleton of an elastic medium) and the second - a liquid. Shows the effect of heterogeneity of the two-component medium on the attenuation coefficient and the speed of propagation of the wave. For the wave of the complex number obtained by an algebraic equation of the fourth degree with complex coefficients. For a given value of the dispersion of the analytical expressions for the velocity and attenuation cross bullocks.

Поступила в редакцию 19.10.2013